

Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic

Solving Systems of Linear Differential Equations

Martina Žabčíková



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2015/2016

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Martina Žabčíková**
Osobní číslo: **A12619**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic**
Téma anglicky: **Solving Systems of Linear Differential Equations**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic a soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.
2. Nastudujte a uveďte metody řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu.
3. Na vhodně zvolených příkladech demonstруйте použití jednotlivých metod řešení.
4. Vybrané příklady zpracujte v prostředí Mathematica.
5. Jednotlivé metody řešení doplňte neřešenými příklady, na kterých by si studenti mohli ověřit pochopení dané problematiky.
6. Ukažte využití soustav lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu v praxi.

Rozsah bakalářské práce: -
Rozsah příloh: -
Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. BRONSON, Richard, Gabriel B COSTA a Richard BRONSON. Schaum's outlines of differential equations. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006, xiv, 385 p. ISBN 0071456872.
2. KALAS, Josef a Miloš RÁB. Obvyčejné diferenciální rovnice. Vyd. 1. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995, 207 s. ISBN 80-210-1130-0.
3. REKTORYS, Karel. Přehled užití matematiky. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxiii, 720 s. ISBN 80-7196-179-5.
4. NAGY, Jozef. Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic: Vysokošk. příručka pro vys. školy techn. směru. 2. vyd. Praha: SNTL, 1983, 109 s. Matematika pro vysoké školy technické.
5. RÁB, Miloš. Elementární řešení diferenciálních rovnic: určeno pro posl. fak. přírodověd. 1. vyd., dotisk. Brno: Universita J.E. Purkyně, 1977, 98 s.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.
Ústav matematiky
Datum zadání bakalářské práce: 19. února 2016
Termín odevzdání bakalářské práce: 27. května 2016

Ve Zlíně dne 19. února 2016



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Jméno, příjmení: Martina Žabčíková

Název bakalářské/diplomové práce: Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic


Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 27. dubna 2016


.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce je vytvoření studijního materiálu ke studiu soustav lineárních diferenciálních rovnic. Práce obsahuje teoretickou část, kde jsou vysvětleny základní pojmy soustav lineárních diferenciálních rovnic a jejich metody řešení. V praktické části jsou ukázky řešených i neřešených příkladů pro tyto metody. Pro zjednodušení řešení těchto soustav je využit software Wolfram Mathematica. Je také uvedeno využití těchto soustav v praxi. Přínosem této práce je seznámení studentů bakalářských studií s problematikou a řešením systémů lineárních diferenciálních rovnic.

Klíčová slova: soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty, homogenní soustava rovnic, nehomogenní soustava rovnic, Eliminační metoda, Eulerova metoda, software Wolfram Mathematica 10.3.

ABSTRACT

The aim of this Bachelor thesis is to create educational material for systems of linear differential equations. Thesis contains a theoretical part, which explains the basic terms of systems of linear differential equations and their methods of solution. In the practical part there are demonstrations of solved and unsolved examples of these methods. To simplify the solution of these systems software Wolfram Mathematica is used. We also use these systems in practice. The contribution of this work is to acquaint students of bachelor studies, with problems and solutions of systems of linear differential equations.

Keywords: system of linear first order differential equations with constant coefficients, homogeneous system of equations, nonhomogeneous system of equations, Elimination method, Euler method, software Wolfram Mathematica 10.3.

Tímto bych ráda poděkovala paní Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za odbornou pomoc, za cenné rady při konzultacích a za veškerý čas, který mi věnovala při vedení této práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu a psaní této práce.

Motto

„Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater.“

Albert Einstein

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST.....	10
1 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY.....	11
1.1 ELIMINAČNÍ METODA	12
1.1.1 Soustava LODR 1. řádu s konstantními koeficienty	13
1.1.1.1 Jednonásobné reálné kořeny	13
1.1.1.2 Dvojnásobný reálný kořen	14
1.1.1.3 Jednonásobné komplexní kořeny	14
1.1.1.4 Dvojnásobné komplexní kořeny	14
1.2 EULEROVA METODA	16
1.2.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty	16
1.2.1.1 Jednonásobná reálná vlastní čísla	18
1.2.1.2 Vícenásobná reálná vlastní čísla	19
1.2.1.3 Jednonásobná komplexní vlastní čísla	20
1.2.1.4 Vícenásobná komplexní vlastní čísla.....	21
II PRAKTICKÁ ČÁST	23
2 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY.....	24
2.1 ELIMINAČNÍ METODA	24
2.1.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty	24
2.1.2 Soustava nehomogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty	25
2.2 EULEROVA METODA	28
2.2.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty	28
2.2.1.1 Jednonásobná reálná vlastní čísla	28
2.2.1.2 Vícenásobná reálná vlastní čísla	29
2.2.1.3 Jednonásobná komplexní vlastní čísla	32
2.2.1.4 Vícenásobná komplexní vlastní čísla.....	36
3 ZPRACOVÁNÍ PŘÍKLADŮ V PROSTŘEDÍ WOLFRAM MATHEMATICA	40
3.1 ŘEŠENÍ HOMOGENNÍCH SOUSTAV	40
3.2 ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍCH SOUSTAV	41
3.3 ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI	43
4 SBÍRKA NEŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ.....	46
4.1 ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ SOUSTAVY	46
4.2 ŘEŠENÍ NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY	48
4.3 ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC S POČÁTEČNÍMI PODMÍNKAMI.....	49
5 VYUŽITÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU V PRAXI	50
5.1 MODEL PARALELNÍHO OBVODU.....	50
5.2 SOUSTAVA S DVĚMA STUPNI VOLNOSTI	55
ZÁVĚR	59
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	60

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	62
SEZNAM OBRÁZKŮ	63
SEZNAM PŘÍLOH.....	64

ÚVOD

Matematickou formulaci pomocí soustav diferenciálních rovnic můžeme využít k řešení problémů technických i přírodních věd. U studia fyzikálních systémů volíme soubor fyzikálních veličin, díky kterým můžeme studovaný systém popsat. Naší úlohou je poté zjistit, jak se tyto veličiny (stavové proměnné) mění s časem.

Cílem této bakalářské práce je vytvoření podpůrného materiálu ke studiu soustav lineárních diferenciálních rovnic v předmětu Diferenciální rovnice na FAI UTB ve Zlíně.

Práce je rozdělena do dvou částí. V první teoretické části jsou vysvětleny základní vlastnosti soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Dále jsou zde popsány dvě metody řešení těchto rovnic, kterými jsou Eliminační a Eulerova metoda.

V praktické části jsou uvedeny ukázky příkladů pro obě metody. Eliminační metodu využíváme pro soustavy s malým počtem neznámých. Eulerovu metodu můžeme použít i pro soustavy vyšších řádů. V další části jsou zahrnuty příklady řešené v softwaru Wolfram Mathematica. Součástí práce je sbírka neřešených příkladů pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic. Na konci praktické části jsou vytvořeny aplikace na užití soustav lineárních diferenciálních rovnic v praxi.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x), \end{aligned} \quad (1)$$

kde $b_i(x)$ jsou **spojité funkce** a $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, jsou **koeficienty soustavy**.

- Pro $b_i(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ a $i = 1, \dots, n$, je soustava **homogenní**.
- Pro $b_i(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$ a $i = 1, \dots, n$, je soustava **nehomogenní**.

Soustavu (1) lze zapsat ve vektorovém tvaru jako $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, kde \mathbf{A} je matice soustavy a má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

spojitá vektorová funkce

$$\mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

neznámá vektorová funkce

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

a derivace neznámé vektorové funkce

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Počáteční podmínky pro Cauchyho úlohu jsou

$$y_1(x_0) = y_{0,1}, y_2(x_0) = y_{0,2}, \dots, y_n(x_0) = y_{0,n},$$

kde $x_0 \in I$ a $y_{0,1}, \dots, y_{0,n} \in \mathbb{R}$.

Věta o existenci a jednoznačnosti pro soustavy

Nechť A je reálná čtvercová matice řádu n . Je-li $b(x)$ spojitá n -vektorová funkce na otevřeném intervalu I , pak pro každé $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$ existuje řešení Cauchyho úlohy (s počáteční podmínkou)

$$y' = Ay + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

na I a má právě jedno řešení. [4] [10]

Lineární závislost a nezávislost řešení

Nechť jsou vektorové funkce y_1, \dots, y_k na intervalu $I = (a, b), a < b$, řešením nějaké homogenní soustavy n diferenciálních rovnic, tj. $y' = Ay$, kde A je čtvercová reálná matice řádu n . Tato řešení jsou na intervalu I lineárně závislá, pokud existují konstanty C_1, C_2, \dots, C_k , kde alespoň jedna z nich je nenulová, takové, že

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x) = 0,$$

pro každé $x \in I$. Pokud nejsou funkce na I lineárně závislé, tak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. [6]

Platí:

Každou soustavu n LODR1 lze eliminací převést ekvivalentně na jednu LODR n .

Každou soustavu n LODR n_i lze eliminací převést ekvivalentně na jednu LODR řádu $\sum_{i=1}^k n_i$.

Každou LODR n (a každou soustavu LODR se součtem řádů n) lze ekvivalentně převést na soustavu n LODR1. [4]

1.1 Eliminační metoda

Princip této metody spočívá v převodu soustavy n LODR1 na jednu LODR n . To znamená pomocí vhodných algebraických úprav a derivování vybraných rovnic soustavy postupně vyloučíme $n - 1$ neznámých funkcí i s jejich derivacemi. Eliminační metodu je vhodné použít pro soustavy LODR1 s konstantními koeficienty. [3]

1.1.1 Soustava LODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o soustavu tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x),$$

kde \mathbf{A} je konstantní čtvercová matice řádu n a vektorová funkce $\mathbf{b}(x)$ je na I spojitá a nenulová.

Soustava tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice řádu n , se nazývá homogenní. [3]

Postup řešení (pro soustavy dvou LODR1 o dvou neznámých funkcích)

Jako první vyjádříme z jedné rovnice jednu z funkcí a zderivujeme ji. Tyto dva vztahy dosadíme do druhé rovnice soustavy a upravíme. Získáváme nehomogenní LODR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad a_2 \neq 0,$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou konstantní koeficienty. [7]

Věta o struktuře obecného řešení (pro LODR2)

Obecné řešení LODR2 lze psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p,$$

kde \mathbf{y}_h je obecné řešení homogenní LODR2 a \mathbf{y}_p je partikulární řešení nehomogenní LODR2. [3]

Rovnici LODR2 zhomogenizujeme a najdeme její obecné řešení pomocí charakteristické rovnice $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ a podle jejích kořenů určíme řešení DR. Mohou nastat tyto případy:

1.1.1.1 Jednonásobné reálné kořeny

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Fundamentální systém

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

a obecné řešení

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[7]

1.1.1.2 Dvojnásobný reálný kořen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pro jeden dvojnásobný reálný kořen λ dostaneme dvě lineárně nezávislá partikulární řešení rovnice.

Fundamentální systém

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda x}, \\ y_2 &= x e^{\lambda x} \end{aligned}$$

a obecné řešení

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[7]

1.1.1.3 Jednonásobné komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}.$$

Fundamentální systém

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\sigma x} \cos \omega x, \\ y_2 &= e^{\sigma x} \sin \omega x \end{aligned}$$

a obecné řešení

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\sigma x} \cos \omega x + C_2 e^{\sigma x} \sin \omega x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[7]

1.1.1.4 Dvojnásobné komplexní kořeny

Tento případ může nastat, pokud je diferenciální rovnice alespoň 4. řádu.

$$\lambda_{1,2} = (\sigma \pm i\omega)^2, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}.$$

Pro k -násobný komplexní kořen $\lambda = \sigma \pm i\omega$ dostaneme $2k$ lineárně nezávislých partikulární řešení rovnice, tedy pro $k = 2$ máme 4 řešení.

Fundamentální systém

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{\sigma x} \cos \omega x, \\y_2 &= x e^{\sigma x} \cos \omega x, \\y_3 &= e^{\sigma x} \sin \omega x, \\y_4 &= x e^{\sigma x} \sin \omega x\end{aligned}$$

a obecné řešení

$$\begin{aligned}y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 = \\&= C_1 e^{\sigma x} \cos \omega x + C_2 x e^{\sigma x} \cos \omega x + C_3 e^{\sigma x} \sin \omega x + C_4 x e^{\sigma x} \sin \omega x, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Když má pravá strana rovnice tzv. speciální tvar (funkce exponenciální, goniometrické nebo polynomy), použijeme k výpočtu partikulárního řešení metodu neurčitých koeficientů. [3] [7]

I. Pravá strana $f(x)$ je polynom m -tého stupně proměnné x a má tvar

$$f(x) = P_m(x).$$

Partikulární řešení poté hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k Q_m(x),$$

kde k je násobnost čísla nula jako kořene charakteristické rovnice a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.

- Polynom 0. stupně: $Q_0(x) = A; A \in \mathbb{R}$.
- Polynom 1. stupně: $Q_1(x) = Ax + B; A, B \in \mathbb{R}$.
- Polynom 2. stupně: $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C; A, B, C \in \mathbb{R}$.
- Polynom 3. stupně: $Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

[7]

II. Pravá strana $f(x)$ má tvar

$$f(x) = P_m(x) e^{\sigma x}.$$

Partikulární řešení poté hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k Q_m(x) e^{\sigma x},$$

kde k je násobnost čísla σ jako kořene charakteristické rovnice a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$. [7]

III. Pravá strana $f(x)$ má tvar

$$f(x) = e^{\sigma x} [P_m(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x].$$

Partikulární řešení poté hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k e^{\sigma x} [R_r(x) \cos \omega x + S_r(x) \sin \omega x],$$

kde k je násobnost čísla $\sigma \pm i\omega$ jako kořene charakteristické rovnice a $R_r(x), S_r(x)$ jsou polynomy s neurčitými koeficienty téhož stupně $r = \max \{m, n\}$. [7]

Výše uvedeným postupem (pomocí y_h a y_p) jsme našli jedno řešení soustavy. Druhé získáme dosazením vypočtené funkce a její derivace do rovnice, kterou jsme na začátku vyjádřili. Tím určíme obecné řešení soustavy.

Pokud máme zadány počáteční podmínky, tak je dosadíme do obecného řešení soustavy. Dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých konstantách C_1, C_2 . Vypočtené konstanty C_1, C_2 dosadíme do obecného řešení soustavy a tím získáme hledané řešení počáteční úlohy pro danou soustavu. [7]

1.2 Eulerova metoda

1.2.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o soustavu ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (2)$$

kde \mathbf{A} je reálná čtvercová matice s konstantními prvky.

Fundamentální matice řešení na I je

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}.$$

Vektorové funkce $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ tvoří **fundamentální systém** (bázi) řešení soustavy právě tehdy, když je následující determinant roven nule:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice (tj. čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky a mimo hlavní diagonálu nuly), tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Tato rovnice se nazývá **charakteristická rovnice** stupně n pro neznámou λ , která má n kořenů včetně násobností. **Charakteristický polynom** matice A je pro $\det(A - \lambda E)$ matice $A - \lambda E$ polynom n -tého stupně v λ a má tvar

$$\det(A - \lambda E) = p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \lambda + b_n,$$

kde kořeny $p(\lambda)$ jsou **vlastní čísla (vlastní hodnoty)** matice A a koeficienty $b_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou vesměs reálné a jsou jednoznačně určeny maticí. Je-li λ vlastní číslo matice A , tak **vlastním vektorem A přidruženým k λ** rozumíme konstantní nenulový (tj. alespoň jedna složka vektoru v je různá od nuly) vektor $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ splňující

$$(A - \lambda E)v = o.$$

Pokud je v vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu λ matice A , pak

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = v e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$

je řešením dané soustavy na \mathbb{R} . Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla matice A , pak odpovídající řešení tvoří lineárně nezávislou množinu.

Matice $A - \lambda E$ je singulární (tj. determinant je roven nule) právě tehdy, když λ je vlastní číslo matice A . Pro její hodnost h (maximální počet lineárně nezávislých řádků nebo sloupců matice $A - \lambda E$) platí $h < n$. Číslo $d = n - h$ je **defekt matice** a udává maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy $(A - \lambda E)v = o$. Defekt je počet nulových řádků v matici upravené na Gaussův schodovitý tvar. Pokud je d (defekt matice) menší než k (násobnost vlastního čísla λ), je situace komplikovanější a musíme použít zobecněné vlastní vektory.

Pro určení obecného řešení soustavy (2) musíme nalézt k lineárně nezávislých řešení, k tomu použijeme Eulerovu metodu. [1] [3] [4] [6] [11]

Obecné řešení soustavy

Je-li $Y(x)$ fundamentální matice řešení soustavy $y' = Ay$ na I , pak obecné řešení y_h této soustavy na I je $y_h(x) = Y(x)c$ pro $c \in \mathbb{R}^n$, kde c je sloupcový konstantní vektor. Každé řešení y této soustavy můžeme jednoznačně psát ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

kde C_1, C_2, \dots, C_n jsou vhodné konstanty. [3] [4]

Použijeme následující značení:

- $\lambda = \sigma + i\omega$ - vlastní číslo matice A .
- $v = g + ih$ - vlastní vektor matice A .

Postup

- 1) Nalezení všech vlastních čísel λ matice A .
- 2) Nalezení vlastního vektoru v ke každému vlastnímu číslu λ .
- 3) Dále postupujeme podle toho, jaký typ kořene nám vyjde.

1.2.1.1 Jednonásobná reálná vlastní čísla

Vektorová funkce y definovaná předpisem

$$y = ve^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad v \neq 0,$$

je obecným řešením soustavy $y' = Ay$ právě tehdy, když je číslo λ reálným vlastním číslem matice A a vektor v je reálným vlastním vektorem matice A , který přísluší vlastnímu číslu λ .

Např. pro soustavu 2 rovnic:

Fundamentální systém

$$Y_1 = v_1 e^{\lambda_1 x},$$

$$Y_2 = v_2 e^{\lambda_2 x}$$

a obecné řešení

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1.2.1.2 Vícenásobná reálná vlastní čísla

Pomocí určení defektu matice, kdy $d \leq k$, rozlišujeme dva případy:

a) Pro $d = k$

Nechť je λ reálným k -násobným vlastním číslem matice A , které přísluší k -lineárně nezávislým vlastním vektorům v_1, v_2, \dots, v_k . Pak je množina všech řešení soustavy $y' = Ay$ ve tvaru

$$y = ve^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad v \neq 0$$

a tvoří tak k -rozměrný podprostor vektorového prostoru všech řešení soustavy $y' = Ay$.

Bází tohoto podprostoru jsou vektorové funkce

$$\begin{aligned} Y_1 &= v_1 e^{\lambda x}, \\ Y_2 &= v_2 e^{\lambda x}, \\ &\vdots \\ Y_k &= v_k e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Pro $d < k$

Nechť je A reálná čtvercová matice řádu n a λ vlastní číslo matice A , pak vektory v_1, v_2, \dots, v_m (ve stejném pořadí jak je máme napsány), jsou **řetězcem zobecněných vlastních vektorů** matice A , které **přísluší vlastnímu číslu λ** právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)v_1 &= 0, \quad v_1 \neq 0, \\ (A - \lambda E)v_2 &= v_1, \\ &\vdots \\ (A - \lambda E)v_m &= v_{m-1}, \end{aligned}$$

kde číslo m je **délka řetězce**.

Je-li v_1 vlastním vektorem matice A a je-li vlastní číslo λ reálné, jsou i všechny zobecněné vlastní vektory příslušející tomuto vlastnímu číslu reálné.

Nechť v_1, v_2, \dots, v_m je řetězec zobecněných reálných vlastních vektorů matice A příslušejících vlastnímu číslu λ , kde v_k , pro $k = 1, 2, \dots, m$ jsou reálné vektory. Pak tyto vektorové funkce jsou řešením soustavy $y' = Ay$ a tvoří m lineárně nezávislých řešení

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda x}, \\
Y_2 &= (\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2) e^{\lambda x}, \\
&\vdots \\
Y_k &= \left(\frac{1}{(k-1)!} \mathbf{v}_1 x^{k-1} + \frac{1}{(k-2)!} \mathbf{v}_2 x^{k-2} + \dots + \mathbf{v}_{k-1} x + \mathbf{v}_k \right) e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&\vdots \\
Y_m &= \left(\frac{1}{(m-1)!} \mathbf{v}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \mathbf{v}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{v}_{m-1} x + \mathbf{v}_m \right) e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Např. pro soustavu rovnic, kde je λ dvojnásobné reálné vlastní číslo (tedy $m = 2$) matice \mathbf{A} takové, že hodnota matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ je rovna jedné (tj. když jsou řádky této matice závislé a alespoň jeden z nich je nenulový), tak partikulární řešení \mathbf{Y}_1 lze předpokládat v obvyklém tvaru $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda x}$ a řešení \mathbf{Y}_2 ve tvaru $\mathbf{Y}_2 = (\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2) e^{\lambda x}$, kde vektor \mathbf{v}_1 vyhovuje podmínce

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1.$$

[1] [3] [4]

1.2.1.3 Jednonásobná komplexní vlastní čísla

Vektorové funkce \mathbf{u}, \mathbf{v} definované předpisy

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (\mathbf{g} \cos \omega x - \mathbf{h} \sin \omega x) e^{\sigma x}, \\
\mathbf{v} &= (\mathbf{g} \sin \omega x + \mathbf{h} \cos \omega x) e^{\sigma x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

jsou řešeními soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ právě tehdy, když je číslo $\lambda = \sigma + i\omega$ vlastním číslem matice \mathbf{A} (tedy $\text{Im}(\lambda) \neq 0$) a když vektor $\mathbf{v} = \mathbf{g} + i\mathbf{h}$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} , který přísluší vlastnímu číslu λ .

K úpravě vektorové funkce použijeme Eulerův vzorec

$$e^{(\sigma+i\omega)x} = e^{\sigma x} (\cos \omega x + i \sin \omega x).$$

Funkce

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{v} e^{\lambda x} = (\mathbf{g} + i\mathbf{h}) e^{(\sigma+i\omega)x} = (\mathbf{g} + i\mathbf{h}) (\cos \omega x + i \sin \omega x) e^{\sigma x} = \\
&= (\mathbf{g} \cos \omega x - \mathbf{h} \sin \omega x) e^{\sigma x} + i(\mathbf{g} \sin \omega x + \mathbf{h} \cos \omega x) e^{\sigma x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}
\end{aligned}$$

vyhovuje soustavě $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ právě tehdy, když je číslo $\lambda = \sigma + i\omega$ vlastním číslem matice \mathbf{A} a když vektor $\mathbf{v} = \mathbf{g} + i\mathbf{h}$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} příslušející vlastnímu číslu λ .

Fundamentální systém soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ je tedy soustava dvou lineárně nezávislých a reálných řešení

$$\mathbf{Y}_1 = \operatorname{Re} [\mathbf{u}],$$

$$\mathbf{Y}_2 = \operatorname{Im} [\mathbf{v}].$$

Obecné řešení je pak ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

které také můžeme rozepsat do složek. [1] [3] [6]

1.2.1.4 Vícenásobná komplexní vlastní čísla

Pomocí určení defektu matice, kdy $d \leq k$, rozlišujeme dva případy:

a) Pro $d = k$

Nechť je $\lambda = \sigma + i\omega$ komplexním k -násobným vlastním číslem matice \mathbf{A} , které přísluší k lineárně nezávislým vlastním vektorům

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}_1 + i\mathbf{h}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{g}_2 + i\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{v}_k = \mathbf{g}_k + i\mathbf{h}_k.$$

Pak je množina všech řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ ve tvaru

$$\mathbf{u} = (\mathbf{g} \cos \omega x + \mathbf{h} \sin \omega x) e^{\sigma x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$$

a tvoří tak $2k$ -rozměrný podprostor vektorového prostoru všech řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Bází tohoto podprostoru jsou vektorové funkce

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= (\mathbf{g}_1 \cos \omega x - \mathbf{h}_1 \sin \omega x) e^{\sigma x}, \\ \mathbf{U}_2 &= (\mathbf{g}_2 \cos \omega x - \mathbf{h}_2 \sin \omega x) e^{\sigma x}, \\ &\vdots \\ \mathbf{U}_k &= (\mathbf{g}_k \cos \omega x - \mathbf{h}_k \sin \omega x) e^{\sigma x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{V}_1 &= (\mathbf{h}_1 \cos \omega x + \mathbf{g}_1 \sin \omega x) e^{\sigma x}, \\ \mathbf{V}_2 &= (\mathbf{h}_2 \cos \omega x + \mathbf{g}_2 \sin \omega x) e^{\sigma x}, \\ &\vdots \\ \mathbf{V}_k &= (\mathbf{h}_k \cos \omega x + \mathbf{g}_k \sin \omega x) e^{\sigma x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Pro $d < k$

Je-li \mathbf{v}_1 vlastním vektorem matice \mathbf{A} a je-li vlastní číslo λ komplexní, jsou i všechny zobecněné vlastní vektory příslušející tomuto vlastnímu číslu komplexní.

Nechť $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}_1 + i\mathbf{h}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{g}_2 + i\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{v}_m = \mathbf{g}_m + i\mathbf{h}_m$ je řetězec zobecněných komplexních vlastních vektorů matice \mathbf{A} příslušejících komplexnímu vlastnímu číslu $\lambda = \sigma + i\omega$, kde σ, ω jsou reálná čísla a $\mathbf{g}_k, \mathbf{h}_k$ pro $k = 1, 2, \dots, m$ jsou reálné vektory.

Pak tyto vektorové funkce jsou řešením soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ a tvoří $2m$ lineárně nezávislých řešení

$$\mathbf{U}_1 = (\mathbf{g}_1 \cos \omega x - \mathbf{h}_1 \sin \omega x) e^{\sigma x},$$

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{g}_1 \sin \omega x + \mathbf{h}_1 \cos \omega x) e^{\sigma x},$$

$$\mathbf{U}_2 = ((\mathbf{g}_1 x + \mathbf{g}_2) \cos \omega x - (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) \sin \omega x) e^{\sigma x},$$

$$\mathbf{V}_2 = ((\mathbf{g}_1 x + \mathbf{g}_2) \sin \omega x + (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) \cos \omega x) e^{\sigma x},$$

⋮

$$\mathbf{U}_m = \left[\left(\frac{1}{(m-1)!} \mathbf{g}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \mathbf{g}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{g}_{m-1} x + \mathbf{g}_m \right) \cos \omega x - \left(\frac{1}{(m-1)!} \mathbf{h}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \mathbf{h}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{h}_{m-1} x + \mathbf{h}_m \right) \sin \omega x \right] e^{\sigma x},$$

$$\mathbf{V}_m = \left[\left(\frac{1}{(m-1)!} \mathbf{g}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \mathbf{g}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{g}_{m-1} x + \mathbf{g}_m \right) \sin \omega x + \left(\frac{1}{(m-1)!} \mathbf{h}_1 x^{m-1} + \frac{1}{(m-2)!} \mathbf{h}_2 x^{m-2} + \dots + \mathbf{h}_{m-1} x + \mathbf{h}_m \right) \cos \omega x \right] e^{\sigma x},$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Např.: Fundamentální systém násobnosti k (např. 2) má $2m$ lineárně nezávislých řešení (tedy 4)

$$\mathbf{Y}_1 = \operatorname{Re} [\mathbf{U}_1],$$

$$\mathbf{Y}_2 = \operatorname{Im} [\mathbf{U}_2],$$

$$\mathbf{Y}_3 = \operatorname{Re} [\mathbf{V}_1],$$

$$\mathbf{Y}_4 = \operatorname{Im} [\mathbf{V}_2].$$

Obecné řešení je pak ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 + C_4 \mathbf{Y}_4, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

které také můžeme rozepsat do složek. [1]

II. PRAKTICKÁ ČÁST

2 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

2.1 Eliminační metoda

Tato metoda je vhodná pro soustavy s malým počtem neznámých. Pro soustavy s více než dvěma neznámými funkcemi budeme používat Eulerovu metodu.

2.1.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Soustava lineárních diferenciálních rovnic se nazývá homogenní jen tehdy, když $\mathbf{b}(x) = \mathbf{0}$ pro každé $x \in I$. Pokud $\mathbf{b}(x)$ není nulová, dostáváme nehomogenní soustavu (viz níže 2.1.2).

Příklad 1: Najděte obecné řešení soustavy:

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ \underline{y_2' &= -y_1 + 4y_2}.\end{aligned}$$

Nejprve si vyjádříme např. y_2 z první rovnice:

$$y_2 = y_1' - 2y_1, \quad (1)$$

zderivujeme a dostaneme

$$y_2' = y_1'' - 2y_1'.$$

Funkce y_2 a y_2' nyní dosadíme do druhé rovnice. Vyjde nám

$$y_1'' - 2y_1' = -y_1 + 4(y_1' - 2y_1),$$

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0.$$

Po úpravě jsme dostali homogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty.

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Vypočítáme kořeny charakteristické rovnice a získáme

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 36}}{2} = 3,$$

$$\lambda_{1,2} = 3 = \lambda.$$

Dostali jsme jeden dvojnásobný reálný kořen, který dosadíme do obecného řešení rovnice:

$$y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},$$

zderivujeme a dostaneme

$$y_1' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}.$$

Dosadíme do vyjádření (1):

$$y_2 = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} - 2C_1 e^{3x} - 2C_2 x e^{3x} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Obecné řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic je

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},}} \\ \underline{\underline{y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}} \end{aligned}$$

2.1.2 Soustava nehomogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Nyní budeme řešit nehomogenní soustavu, kde $\mathbf{b}(x) \neq \mathbf{0}$ pro nějaké $x \in I$. Dále máme zadanou počáteční podmínku (Cauchyho úloha).

Příklad 2: Najděte řešení Cauchyho úlohy:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \cos x, & y_1(0) &= 1, \\ \underline{\underline{y_2' &= -y_1 + 2,}} & \underline{\underline{y_2(0) &= 2.}} \end{aligned}$$

Nejprve si vyjádříme např. y_2 z první rovnice a vyjde nám

$$y_2 = y_1' - \cos x, \tag{2}$$

zderivujeme a dostaneme

$$y_2' = y_1'' + \sin x.$$

Funkci y_2' dosadíme do druhé rovnice a upravíme

$$y_1'' + y_1 = 2 - \sin x. \tag{3}$$

Po úpravě dostáváme nehomogenní LODR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Pravou stranu položíme rovnu nule a vyřešíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Dostali jsme dva komplexně sdružené kořeny, které dosadíme do obecného řešení rovnice dle vzorce z kapitoly 1.1.1.3:

$$y_h = C_1 e^{\sigma x} \cos \omega x + C_2 e^{\sigma x} \sin \omega x = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (3). První část pravé strany rovnice $f_1(x) = 2 = P_0(x)$ je polynom nultého stupně, proto

$$y_{1p} = A,$$

zderivujeme a získáme

$$y'_{1p} = 0 = y''_{1p},$$

což dosadíme do rovnice $y''_{1p} + y_{1p} = 2$:

$$0 + A = 2,$$

$$A = 2,$$

$$y_{1p} = 2.$$

Druhá část pravé strany rovnice $f_2(x) = -\sin x$ a podle vzorce z kapitoly 1.1.1 - III máme

$$P_0(x) = 0, \quad m = 0,$$

$$Q_0(x) = -1, \quad n = 0,$$

tedy $r = \max \{m, n\} = 0$ tj.

$$R_0(x) = A,$$

$$S_0(x) = B.$$

Pro $\sigma = 0$ a $\omega = 1$ dostáváme

$$0 \pm i = \pm i,$$

což je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Dosadíme do vzorce $y_p = x^k e^{\sigma x} [R_r(x) \cos \omega x + S_r(x) \sin \omega x]$.

$$y_{2p} = x[A \cos x + B \sin x],$$

$$y'_{2p} = A \cos x + B \sin x + x[-A \sin x + B \cos x],$$

$$y_{2p}'' = -A \sin x + B \cos x + (-A \sin x + B \cos x) + x[-A \cos x - B \sin x] = \\ = -2A \sin x + 2B \cos x - xA \cos x - xB \sin x.$$

Dosadíme do rovnice $y_{2p}'' + y_{2p} = -\sin x$:

$$-2A \sin x + 2B \cos x - xA \cos x - xB \sin x + x[A \cos x + B \sin x] = -\sin x.$$

Nyní porovnáme koeficienty u $\sin x$ a $\cos x$ na pravé a levé straně rovnice.

$$\sin x: \quad -2A - Bx + Bx = -1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2},$$

$$\cos x: \quad 2B - Ax + Ax = 0 \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow B = 0,$$

potom

$$y_{2p} = x[A \cos x + B \sin x] = x \frac{1}{2} \cos x.$$

Partikulární řešení y_p dostaneme jako součet řešení y_{1p} a y_{2p} :

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} = 2 + x \frac{1}{2} \cos x,$$

$$y_p = 2 + x \frac{1}{2} \cos x.$$

Obecné řešení rovnice (3) je

$$y_1 = y_h + y_p,$$

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 + x \frac{1}{2} \cos x.$$

Pro výpočet y_2 budeme potřebovat derivaci y_1 :

$$y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} \cos x - x \frac{1}{2} \sin x,$$

dosadíme do (2):

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} \cos x - x \frac{1}{2} \sin x - \cos x,$$

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} \cos x - x \frac{1}{2} \sin x.$$

Obecné řešení soustavy je tedy

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 + x \frac{1}{2} \cos x,$$

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} \cos x - x \frac{1}{2} \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení zjistíme dosazením počátečních podmínek do obecného řešení soustavy.

$$y_{0,1} = 1: \quad 1 = C_1 + 2 \Rightarrow C_1 = -1,$$

$$y_{0,2} = 2: \quad 2 = C_2 - \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{5}{2}.$$

Partikulární řešení zadané soustavy je

$$\underline{\underline{y_1 = -\cos x + \frac{5}{2} \sin x + 2 + x \frac{1}{2} \cos x,}}$$

$$\underline{\underline{y_2 = \sin x + 2 \cos x - x \frac{1}{2} \sin x.}}$$

2.2 Eulerova metoda

Další metodou pro řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic je Eulerova metoda. Řeší se pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů. Postup, kterým budeme řešit tyto rovnice, závisí na tvaru vlastních čísel matice A .

2.2.1 Soustava homogenních LODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Homogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic má tvar $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky.

2.2.1.1 Jednonásobná reálná vlastní čísla

Příklad 3

$$y_1' = y_2,$$

$$\underline{y_2' = 12y_1 - y_2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jako první vypočítáme charakteristickou rovnici matice

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0,$$

kde nám vychází dva různé reálné kořeny (vlastní čísla) $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$.

Obecný tvar vlastních vektorů je $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Tyto vektory vypočítáme pomocí rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$\underline{12\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0},$$

$$\alpha_2 = 3\alpha_1,$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 3\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

$$4\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$\underline{12\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0},$$

$$\alpha_2 = -4\alpha_1,$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -4\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme $\alpha_1 = 1$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme fundamentální systém soustavy

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3x},$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Obecné řešení je tedy

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-4x}$$

a po rozepsání do složek máme

$$\underline{\underline{y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}}},$$

$$\underline{\underline{y_2 = 3C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-4x}}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.2.1.2 Vícenásobná reálná vlastní čísla

Příklad 4

$$y_1' = y_2 + y_3,$$

$$y_2' = y_1 + y_3,$$

$$\underline{y_3' = y_1 + y_2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jako první vypočítáme charakteristickou rovnici matice

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

zde máme jednonásobný kořen $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobný kořen $\lambda_{2,3} = -1 = \lambda$.

Nyní vypočítáme vlastní vektor \mathbf{v} pro $\lambda_1 = 2$ a vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 pro $\lambda = -1$.

$$\lambda_1 = 2,$$

$$(A - 2E)\mathbf{v} = \mathbf{o},$$

$$-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3,$$

$$\underline{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 + 2\alpha_3},$$

$$2\alpha_2 - \alpha_3 = -\alpha_2 + 2\alpha_3,$$

$$3\alpha_2 = 3\alpha_3,$$

$$\alpha_2 = \alpha_3,$$

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_2 = \alpha_2,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha_1 = 1$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = -1,$$

$$(A + E)\mathbf{v} = \mathbf{o},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\underline{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

U vícenásobných (v tomto případě dvojnásobných ($k = 2$)) vlastních čísel λ musíme určit defekt matice (viz kapitola 1.2.1).

$d = n - h = 3 - 1 = 2$, kde h je hodnost matice A a n je stupeň polynomu.

Tento defekt matice porovnáme s vícenásobným kořenem. Dostaneme

$$2 = 2,$$

$$d = k.$$

Soustavu tedy budeme řešit pro $d = k$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = 0$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = 1$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Příslušné řešení fundamentálního systému je tedy

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{v}e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x},$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x},$$

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{v}_2 e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Obecné řešení soustavy je

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

a po rozepsání do složek je řešení soustavy

$$\begin{aligned}\underline{\underline{y_1}} &= \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}}}, \\ \underline{\underline{y_2}} &= \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x}}}, \\ \underline{\underline{y_3}} &= \underline{\underline{C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - C_3 e^{-x}}}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.2.1.3 Jednonásobná komplexní vlastní čísla

Příklad 5

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\ \underline{\underline{y_2'}} &= \underline{\underline{-2y_1 + 2y_2}}. \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vypočítáme charakteristickou rovnici matice

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

kde dostáváme komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 1 + i$ a $\lambda_2 = 1 - i$.

Pro výpočet vlastního vektoru si zvolíme např. λ_1 .

$$(\mathbf{A} - (1 + i)\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

roznásobíme a získáváme

$$\begin{aligned}(-1 - i)\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \underline{\underline{-2\alpha_1 + (1 - i)\alpha_2}} &= \underline{\underline{0}}.\end{aligned}$$

Za parametr zvolíme α_1 a z první rovnice dostáváme vlastní vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ (1 + i)\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha_1 = 1$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \mathbf{g} + i\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Částečné řešení v komplexním tvaru máme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{v}e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} e^{(1+i)x}$$

a použijeme Eulerův vzorec:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^x (\cos x + i \sin x) = e^x \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x + i \sin x + i \cos x - \sin x \end{pmatrix},$$

částečně roznásobíme a dostaneme

$$Y = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} e^x + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix} e^x,$$

tím jsme dostali dvě složky fundamentálního systému řešení

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} e^x,$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix} e^x.$$

Obecné řešení je tedy

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix} e^x$$

a po rozepsání do složek máme

$$\underline{\underline{y_1 = C_1 \cos x e^x + C_2 \sin x e^x}},$$

$$\underline{\underline{y_2 = C_1 (\cos x - \sin x) e^x + C_2 (\sin x + \cos x) e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 6

$$y_1' = y_1 - y_2 - y_3,$$

$$y_2' = y_1 + y_2,$$

$$\underline{\underline{y_3' = 3y_1 + y_3.}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve vypočítáme charakteristickou rovnici matice

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4] = 0,$$

zde máme jednonásobný kořen $\lambda_1 = 1$ a komplexně sdružené kořeny $\lambda_2 = 1 + 2i$ a $\lambda_3 = 1 - 2i$, což jsou vlastní čísla matice.

Nyní vypočítáme vlastní vektor v_1 pro $\lambda_1 = 1$ a vektor v_2 například pro $\lambda_2 = 1 + 2i$.

$$(A - \lambda E)v = o,$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

roznásobíme a dostaneme

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 &= 0, \\ \underline{3\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_3} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

a) Pro $\lambda_1 = 1$

Do soustavy (4) dosadíme $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3, \\ \alpha_1 &= 0, \\ \underline{3\alpha_1} &= 0. \end{aligned}$$

Pro volbu $\alpha_3 = 1$ nám vyjde $\alpha_2 = -1$.

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je tedy

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a řešení příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ bude

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

b) Pro $\lambda_2 = 1 + 2i$

Dosadíme do soustavy (4)

$$\begin{pmatrix} (1-1-2i)\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & (1-1-2i)\alpha_2 & 0 \\ 3\alpha_1 & 0 & (1-1-2i)\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -2i\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 - 2i\alpha_2 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2i\alpha_2, \\ \underline{3\alpha_1 - 2i\alpha_3} &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2i\alpha_3}{3}, \end{aligned}$$

$$2i\alpha_2 = \frac{2i\alpha_3}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{2i\alpha_3}{6i} = \frac{\alpha_3}{3}.$$

Pro volbu $\alpha_3 = 3$, dostáváme $\alpha_1 = 2i$ a $\alpha_2 = 1$.

Vlastní vektor matice \mathbf{A} je

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Částečné řešení v komplexním tvaru je

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)x},$$

použijeme Eulerův vzorec a částečně roznásobíme, dostaneme

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x (\cos 2x + i \sin 2x) = e^x \begin{pmatrix} 2i \cos 2x - 2 \sin 2x \\ \cos 2x + i \sin 2x \\ 3 \cos 2x + 3i \sin 2x \end{pmatrix},$$

rozepíšeme je na reálnou a imaginární část, potom

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} e^x + i \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix} e^x.$$

Řešení \mathbf{V} a \mathbf{W} příslušné vlastním číslům $\lambda_2 = 1 + 2i$ a $\lambda_3 = 1 - 2i$ dostaneme postupně jako reálnou a imaginární část řešení \mathbf{Y} . Vyjde nám

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} e^x,$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix} e^x.$$

Obecné řešení získáme jako lineární kombinaci řešení \mathbf{U} , \mathbf{V} a \mathbf{W} . Potom

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix} e^x$$

a po rozepsání do složek máme

$$\begin{aligned} \underline{\underline{y_1}} &= \underline{\underline{(-2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)e^x}}, \\ \underline{\underline{y_2}} &= \underline{\underline{(-C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)e^x}}, \\ \underline{\underline{y_3}} &= \underline{\underline{(C_1 + 3C_2 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x)e^x}}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.2.1.4 Vícenásobná komplexní vlastní čísla

Příklad 7

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 - 2y_4, \\ y_2' &= 3y_2 - 2y_3, \\ y_3' &= 2y_2 + 3y_3, \\ \underline{\underline{y_4'}} &= \underline{\underline{2y_1 - 2y_3 + 3y_4}}. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí charakteristické rovnice určíme vlastní čísla dané soustavy

$$\det(A - \lambda E) = [(3 - \lambda)^2 + 4]^2 = 0,$$

tato soustava má dva dvojnásobné komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$.

Pro výpočet si zvolíme např. λ_1 a zjistíme vlastní vektor \mathbf{v} .

$$(A - (3 + 2i)E)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$$-2i\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0,$$

$$-2i\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0,$$

$$2\alpha_2 - 2i\alpha_3 = 0,$$

$$\underline{\underline{2\alpha_1 - 2\alpha_3 - 2i\alpha_4 = 0.}}$$

Z toho můžeme odvodit hodnotu této matice $h = 2$, stačí nám tedy najít dvouparametrický systém řešení dvou rovnic pro čtyři neznámé

$$-2i\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0,$$

$$\underline{\underline{-2i\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0.}}$$

U vícenásobných (v tomto případě dvojnásobných ($k = 2$)) vlastních čísel λ musíme určit defekt matice

$$d = n - h = 4 - 2 = 2,$$

kde h je hodnost matice A a n je stupeň polynomu.

Tento defekt matice porovnáme s vícenásobným kořenem. Dostaneme

$$2 = 2,$$

$$d = k.$$

Soustavu tedy budeme řešit pro $d = k$.

Za parametry jsme zvolili α_1 a α_2 , z nichž dopočítáme $\alpha_3 = -i\alpha_2$ a $\alpha_4 = -i\alpha_1 + \alpha_2$, vyjde nám vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -i\alpha_2 \\ -i\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Pro $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = 0$ získáme vlastní vektor \mathbf{v}_1 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3 + 2i$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Část řešení v komplexním tvaru nám vyjde

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{(3+2i)x}.$$

Použijeme Eulerův vzorec, potom

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{3x} (\cos 2x + i \sin 2x),$$

částečně roznásobíme a dostaneme

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} (\cos 2x + i \sin 2x) \\ 0 \\ 0 \\ -i(\cos 2x + i \sin 2x) \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} \cos 2x + i \sin 2x \\ 0 \\ 0 \\ -i \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Výsledek rozdělíme na reálnou a imaginární část, potom

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ 0 \\ 0 \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x} + i \begin{pmatrix} \sin 2x \\ 0 \\ 0 \\ -\cos 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Jelikož jsou tato řešení lineárně nezávislá, tvoří dvě složky fundamentálního systému řešení

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ 0 \\ 0 \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ 0 \\ 0 \\ -\cos 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Jelikož má tato soustava 4 rovnice o 4 neznámých, řešení bude mít také 4 složky obecného řešení.

Zde budeme postupovat podobně jako u první volby parametrů.

Pro další volbu parametrů $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = 1$ získáme vlastní vektor v_2 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3 + 2i$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Částečné řešení v komplexním tvaru je

$$Y_2 = v_2 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+2i)x},$$

použijeme Eulerův vzorec a dostaneme

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} (\cos 2x + i \sin 2x),$$

částečně roznásobíme a máme

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ (\cos 2x + i \sin 2x) \\ -i(\cos 2x + i \sin 2x) \\ (\cos 2x + i \sin 2x) \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x + i \sin 2x \\ -i \cos 2x + \sin 2x \\ \cos 2x + i \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Výsledek rozdělíme na reálnou a imaginární část, potom

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} e^{3x} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Jelikož jsou tato řešení lineárně nezávislá, tvoří další dvě složky fundamentálního systému řešení

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} e^{3x},$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Obecné řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ 0 \\ 0 \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2x \\ 0 \\ 0 \\ -\cos 2x \end{pmatrix} e^{3x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} e^{3x} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^{3x}$$

a po rozepsání do složek nám vyjde

$$\underline{\underline{y_1 = C_1 \cos 2x e^{3x} + C_2 \sin 2x e^{3x},}}$$

$$\underline{\underline{y_2 = C_3 \cos 2x e^{3x} + C_4 \sin 2x e^{3x},}}$$

$$\underline{\underline{y_3 = C_3 \sin 2x e^{3x} - C_4 \cos 2x e^{3x},}}$$

$$\underline{\underline{y_4 = C_1 \sin 2x e^{3x} - C_2 \cos 2x e^{3x} + C_3 \cos 2x e^{3x} + C_4 \sin 2x e^{3x}, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklady byly čerpány ze zdrojů [1] [2] [9].

3 ZPRACOVÁNÍ PŘÍKLADŮ V PROSTŘEDÍ WOLFRAM MATHEMATICA

Pro zjednodušení výpočtu soustav lineárních diferenciálních rovnic, nebo pro ověření správného výsledku, můžeme použít např. software Mathematica.

Příkazy:

Clear[] - uvolnění proměnných a zrušení všech předešlých nastavení.

DSolve[] - řeší soustavy diferenciálních rovnic.

Expand[] - roznásobí mnohočleny a vrátí součet jednotlivých členů.

3.1 Řešení homogenních soustav

Příklad 1

$$y_1' = -y_1 - 4y_2,$$

$$y_2' = y_1 - y_2.$$

Výsledek

$$y_1 = -2C_1 e^{-x} \sin 2x + 2C_2 e^{-x} \cos 2x,$$

$$y_2 = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == -y1[x] - 4 y2[x];
rovnice2 = y2'[x] == y1[x] - y2[x];
reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2}, {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]
{ {y1[x] -> e^-x C[1] Cos[2 x] - 2 e^-x C[2] Sin[2 x],
  y2[x] -> e^-x C[2] Cos[2 x] + 1/2 e^-x C[1] Sin[2 x]} }
```

Obr. 1. Výpočet soustavy HLODR v softwaru Mathematica

Po dosazení

$$C_1 = C[2],$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C[1],$$

jsou výsledky shodné.

Příklad 2

$$y_1' = y_1 - 3y_2,$$

$$y_2' = 3y_1 + y_2.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1 e^x \cos 3x + C_2 e^x \sin 3x,$$

$$y_2 = C_1 e^x \sin 3x - C_2 e^x \cos 3x.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == y1[x] - 3 y2[x];
rovnice2 = y2'[x] == 3 y1[x] + y2[x];
reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2}, {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]
{{y1[x] -> e^x C[1] Cos[3 x] - e^x C[2] Sin[3 x],
 y2[x] -> e^x C[2] Cos[3 x] + e^x C[1] Sin[3 x]}}
```

Obr. 2. Výpočet soustavy HLODR v softwaru Mathematica

Po dosazení

$$C_1 = C[1],$$

$$C_2 = -C[2],$$

jsou výsledky shodné.

3.2 Řešení nehomogenních soustav

Příklad 3

$$y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 5x,$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 8e^x.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} + 2x - \frac{13}{5} - 3e^x,$$

$$y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} - 3x + \frac{12}{5} + e^x.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == 2 y1[x] + 3 y2[x] + 5 x;
rovnice2 = y2'[x] == 3 y1[x] + 2 y2[x] + 8 E^x;
reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2}, {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} y1[x] &\rightarrow -\frac{13}{5} - 3 e^x + 2 x + \frac{1}{2} e^{-x} C[1] + \frac{1}{2} e^{5x} C[1] - \frac{1}{2} e^{-x} C[2] + \frac{1}{2} e^{5x} C[2], \\ y2[x] &\rightarrow \frac{12}{5} + e^x - 3 x - \frac{1}{2} e^{-x} C[1] + \frac{1}{2} e^{5x} C[1] + \frac{1}{2} e^{-x} C[2] + \frac{1}{2} e^{5x} C[2] \end{aligned} \right\} \right\}$$

Obr. 3. Výpočet nehomogenní soustavy LODR v softwaru Mathematica

Po dosazení

$$C_1 = \frac{1}{2}C[1] - \frac{1}{2}C[2],$$

$$C_2 = \frac{1}{2}C[1] + \frac{1}{2}C[2],$$

jsou výsledky shodné.

Příklad 4

$$y_1' = 3y_1 + y_2 + e^x,$$

$$y_2' = 3y_1 + 5y_2 - e^x.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x} - e^x,$$

$$y_2 = -C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{6x} + e^x.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == 3 y1[x] + y2[x] + E^x;
rovnice2 = y2'[x] == 3 y1[x] + 5 y2[x] - E^x;
reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2}, {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]
```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} y1[x] &\rightarrow -e^x + \frac{3}{4} e^{2x} C[1] + \frac{1}{4} e^{6x} C[1] - \frac{1}{4} e^{2x} C[2] + \frac{1}{4} e^{6x} C[2], \\ y2[x] &\rightarrow e^x - \frac{3}{4} e^{2x} C[1] + \frac{3}{4} e^{6x} C[1] + \frac{1}{4} e^{2x} C[2] + \frac{3}{4} e^{6x} C[2] \end{aligned} \right\} \right\}$$

Obr. 4. Výpočet nehomogenní soustavy LODR v softwaru Mathematica

Po dosazení

$$C_1 = \frac{3}{2}C[1] - \frac{1}{2}C[2],$$

$$C_2 = \frac{1}{2}C[1] + \frac{1}{2}C[2],$$

jsou výsledky shodné.

3.3 Řešení soustav rovnic s počátečními podmínkami

Příklad 5

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_2, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= 5y_1 + y_2, & y_2(0) &= -1. \end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos 2x, \\ y_2 &= 2 \sin 2x - \cos 2x. \end{aligned}$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == -y1[x] - y2[x];
rovnice2 = y2'[x] == 5 y1[x] + y2[x];
podminka1 = y1[0] == 1;
podminka2 = y2[0] == -1;
reseni =
  DSolve[{rovnice1, rovnice2, podminka1,
    podminka2}, {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]

{{y1[x] -> Cos[2 x],
  y2[x] -> -Cos[2 x] + 2 Sin[2 x]}}
```

Obr. 5. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica

Zde vidíme, že výsledky jsou totožné.

Příklad 6

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 6y_2, & y_1(0) &= 2, \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2, & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Výsledek

$$y_1 = -10 + 12e^x,$$

$$y_2 = 5 - 4e^x.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2];
rovnice1 = y1'[x] == 3 y1[x] + 6 y2[x];
rovnice2 = y2'[x] == -y1[x] - 2 y2[x];
podminka1 = y1[0] == 2;
podminka2 = y2[0] == 1;

reseni = DSolve[{rovnice1, rovnice2, podminka1, podminka2},
  {y1[x], y2[x]}, x];
Expand[%]

{{y1[x] -> -10 + 12 e^x, y2[x] -> 5 - 4 e^x}}
```

Obr. 6. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica

Zde vidíme, že výsledky jsou totožné.

Příklad 7

$$y_1' = -y_1 + y_2, \quad y_1(0) = 6,$$

$$y_2' = -y_2 + 4y_3, \quad y_2(0) = -1,$$

$$y_3' = y_1 - 4y_3, \quad y_3(0) = 4.$$

Výsledek

$$y_1 = 4 + (2 - x)e^{-3x},$$

$$y_2 = 4 + (2x - 5)e^{-3x},$$

$$y_3 = 1 + (3 - x)e^{-3x}.$$

Mathematica

```
Clear[x, y1, y2, y3];
rovnice1 = y1'[x] == -y1[x] + y2[x];
rovnice2 = y2'[x] == -y2[x] + 4 y3[x];
rovnice3 = y3'[x] == y1[x] - 4 y3[x];
podminka1 = y1[0] == 6;
podminka2 = y2[0] == -1;
podminka3 = y3[0] == 4;

reseni =
  DSolve[{rovnice1, rovnice2, rovnice3,
    podminka1, podminka2, podminka3},
    {y1[x], y2[x], y3[x]}, x];
Expand[%]
{ {y1[x] → 4 + 2 e-3x - e-3x x,
  y2[x] → 4 - 5 e-3x + 2 e-3x x,
  y3[x] → 1 + 3 e-3x - e-3x x} }
```

Obr. 7. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica

Zde vidíme, že výsledky jsou totožné.

Na výše uvedených příkladech jsme si ověřili, že složitý výpočet lze jednoduše zapsat do softwaru Mathematica a získat tak správný výpočet. Viděli jsme také, že při neurčení počátečních podmínek jsme museli udělat malé úpravy k tomu, aby nám výsledek vyšel stejný. Při počáteční úloze nám výsledek vyšel totožný.

Příklady byly čerpány ze zdrojů [3] [9] [12] [14].

4 SBÍRKA NEŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

4.1 Řešení homogenní soustavy

Příklad 1

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = 2y_1 - 4y_2,$$

$$y_2' = y_1 - 3y_2.$$

Výsledek

$$y_1 = 4C_1 e^x + C_2 e^{-2x},$$

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Příklad 2

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -y_1.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Příklad 3

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = y_1 - 4y_2,$$

$$y_2' = 2y_1 - 3y_2.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1(\cos 2x - \sin 2x)e^{-x} + C_2(\sin 2x + \cos 2x)e^{-x},$$

$$y_2 = C_1 \cos 2x e^{-x} + C_2 \sin 2x e^{-x}.$$

Příklad 4

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2,$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2.$$

Výsledek

$$y_1 = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Příklad 5

Najděte tři lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3,$$

$$y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3,$$

$$y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3.$$

Výsledek

$$y_1 = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} - C_3 e^{-2x},$$

$$y_2 = 4C_1 e^x + 2C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x},$$

$$y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x}.$$

Příklad 6

Najděte tři lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = y_1,$$

$$y_2' = 3y_1 + y_2 - 2y_3,$$

$$y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3.$$

Výsledek

$$y_1 = 2C_1 e^x,$$

$$y_2 = -2C_1 e^x + C_2 \cos 2x e^x + C_3 \sin 2x e^x,$$

$$y_3 = 3C_1 e^x + C_2 \sin 2x e^x - C_3 \cos 2x e^x.$$

Příklad 7

Najděte čtyři lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

$$y_1' = -y_2 + y_3,$$

$$y_2' = -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4,$$

$$y_3' = 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4,$$

$$y_4' = 2y_2 - y_3.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1(1 + 2x^2) + 2C_2x + C_3 + C_4,$$

$$y_2 = -2C_1x - C_2 + C_4,$$

$$y_3 = 2C_1x + C_2 + C_4,$$

$$y_4 = -4C_1x^2 - 4C_2x - 2C_3.$$

4.2 Řešení nehomogenní soustavy

Příklad 8

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$.

$$y_1' = 2y_1 - 4y_2,$$

$$y_2' = y_1 - 3y_2 + x.$$

Výsledek

$$y_1 = 4C_1e^x + C_2e^{-2x} + (2x + 1),$$

$$y_2 = C_1e^x + C_2e^{-2x} + x.$$

Příklad 9

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$.

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = y_1 + 2y_2 - 3e^{4x}.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{3x} - e^{4x},$$

$$y_2 = -C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{4x}.$$

Příklad 10

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$.

$$y_1' = 2y_1 - y_2 + 2,$$

$$y_2' = 4y_1 - 2y_2 + 2.$$

Výsledek

$$y_1 = C_1x + C_2 + x^2 + 2x,$$

$$y_2 = 2C_1x + 2C_2 - C_1 + 2x^2 + 2x.$$

4.3 Řešení soustavy rovnic s počátečními podmínkami

Příklad 11

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení Cauchyho úlohy.

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - 4y_2, & y_1(0) &= 0, \\y_2' &= y_1 - 2y_2, & y_2(0) &= -1.\end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned}y_1 &= 4x, \\y_2 &= 2x - 1.\end{aligned}$$

Příklad 12

Najděte dvě lineárně nezávislá řešení Cauchyho úlohy.

$$\begin{aligned}y_1' &= -7y_1 + 9y_2, & y_1(0) &= 2, \\y_2' &= -y_1 - y_2, & y_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned}y_1 &= (3x + 2)e^{-4x}, \\y_2 &= (x + 1)e^{-4x}.\end{aligned}$$

Příklad 13

Najděte tři lineárně nezávislá řešení Cauchyho úlohy.

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2, & y_1(0) &= 6, \\y_2' &= -y_2 + 4y_3, & y_2(0) &= -1, \\y_3' &= y_1 - 4y_3, & y_3(0) &= 4.\end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned}y_1 &= 4 + (2 - x)e^{-3x}, \\y_2 &= 4 + (2x - 5)e^{-3x}, \\y_3 &= 1 + (3 - x)e^{-3x}.\end{aligned}$$

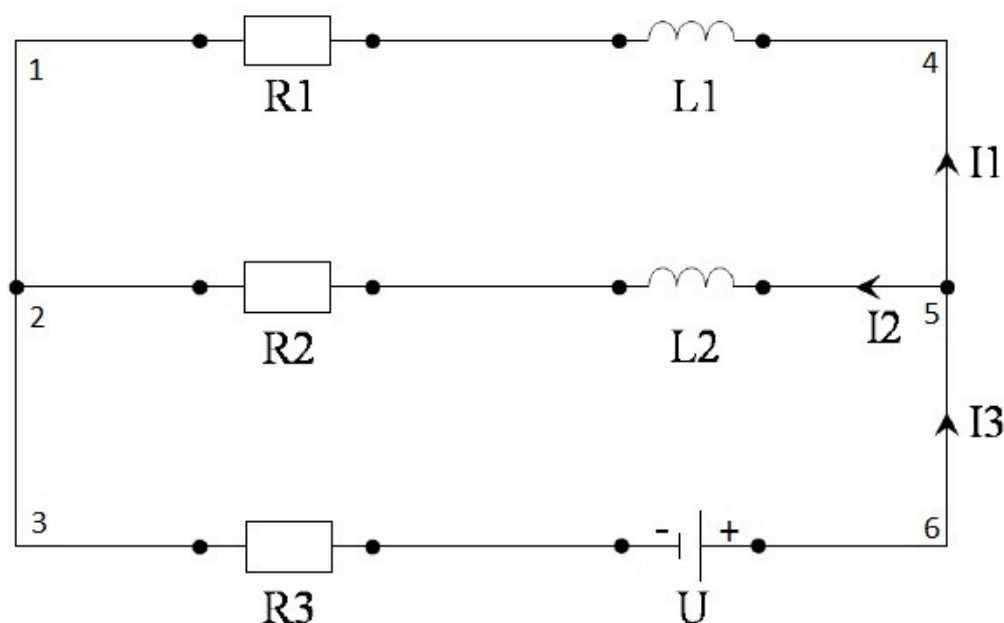
Příklady byly čerpány ze zdrojů [3] [9] [13].

5 VYUŽITÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU V PRAXI

Se soustavami lineárních diferenciálních rovnic se v praxi můžeme setkat např. v elektrotechnice a mechanice.

5.1 Model paralelního obvodu

Je dán elektrický obvod. Najděte časové závislosti proudu v jednotlivých větvích obvodu, kde je v čase $t = 0$ s, $i_1(0) = i_2(0) = 0$ A. Dále máme zadáno $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $L_1 = 4$ H, $L_2 = 2$ H a $U = 120$ V.



Obr. 8. Schéma paralelního elektrického obvodu RL

Ohmův zákon

Napětí na odporu (rezistoru): $U = RI$.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Napětí na cínce (induktoru): $U = L \frac{di(t)}{dt}$.

Kirchhoffovy zákony

I. Kirchhoffův zákon (proudový) - Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících (algebraický součet proudů v uzlu je roven nule).

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Pro uzel 5 nám vychází

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t). \quad (5)$$

II. Kirchhoffův zákon (napětový) - Součet úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené části obvodu (smyčky) rovná součtu elektromotorických napětí zdrojů v této části obvodu (algebraický součet napětí ve smyčce je roven nule).

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0.$$

Řešení:

Podle výše uvedených zákonů vytvoříme 2 uzly:

a) Pro uzel 6, 5, 2, 3, 6:

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 i_2(t) + R_3 [i_1(t) + i_2(t)] - U = 0.$$

b) Pro uzel 5, 4, 1, 2, 5:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) - R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0.$$

Po dosazení a úpravě získáme dvě nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty, což jsou

$$i_1'(t) = -10i_1(t) - 5i_2(t) + 30, \text{ kde } i_1' = \frac{di_1}{dt},$$

$$i_2'(t) = -10i_1(t) - 15i_2(t) + 60, \text{ kde } i_2' = \frac{di_2}{dt}.$$

Tuto soustavu rovnic nyní vyřešíme pomocí Eliminační metody.

Z první rovnice vyjádříme

$$i_2(t) = -\frac{1}{5}i_1'(t) - 2i_1(t) + 6, \quad (6)$$

zderivujeme

$$i_2'(t) = -\frac{1}{5}i_1''(t) - 2i_1'(t)$$

a obojí dosadíme do druhé rovnice. Potom

$$i_1''(t) + 25i_1'(t) + 100i_1(t) = 150. \quad (7)$$

Po úpravě získáváme nehomogenní LODR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Pravou stranu položíme rovnu nule a vyřešíme její charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 25\lambda + 100 = 0,$$

její kořeny jsou

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -20.$$

Dostali jsme dva různé reálné kořeny jednonásobné, které dosadíme do obecného řešení rovnice. Vyjde nám

$$i_h(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-20t}.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (7). Pravá strana rovnice $f(x) = 150 = P_0(x)$ je polynom nultého stupně

$$i_{1p} = A,$$

zderivujeme

$$i'_{1p} = 0 = i''_{1p}$$

a dosadíme do rovnice (7). Potom

$$0 + 0 + 100A = 150,$$

$$A = \frac{3}{2}.$$

Partikulární řešení i_p máme

$$i_p = \frac{3}{2}.$$

Obecné řešení rovnice (7) je

$$i_1(t) = i_h(t) + i_p(t),$$

$$i_1(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-20t} + \frac{3}{2}.$$

Pro výpočet i_2 budeme potřebovat derivaci i_1

$$i'_1(t) = -5C_1 e^{-5t} - 20C_2 e^{-20t}$$

a dosadíme do (6):

$$i_2(t) = -\frac{1}{5}(-5C_1e^{-5t} - 20C_2e^{-20t}) - 2\left(C_1e^{-5t} + C_2e^{-20t} + \frac{3}{2}\right) + 6,$$

$$i_2(t) = -C_1e^{-5t} + 2C_2e^{-20t} + 3.$$

Dostáváme obecné řešení soustavy

$$i_1(t) = C_1e^{-5t} + C_2e^{-20t} + \frac{3}{2},$$

$$i_2(t) = -C_1e^{-5t} + 2C_2e^{-20t} + 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení zjistíme dosazením počátečních podmínek do obecného řešení soustavy.

$$i_{0,1} = 0: \quad 0 = C_1 + C_2 + \frac{3}{2},$$

$$i_{0,2} = 0: \quad 0 = -C_1 + 2C_2 + 3,$$

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = -\frac{3}{2}.$$

Partikulární řešení zadané soustavy je

$$i_1(t) = -\frac{3}{2}e^{-20t} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(1 - e^{-20t}),$$

$$i_2(t) = -3e^{-20t} + 3 = 3(1 - e^{-20t}).$$

Pomocí rovnice (5) vypočítáme $i_3(t)$. Dostaneme

$$i_3(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-20t}) + 3(1 - e^{-20t}),$$

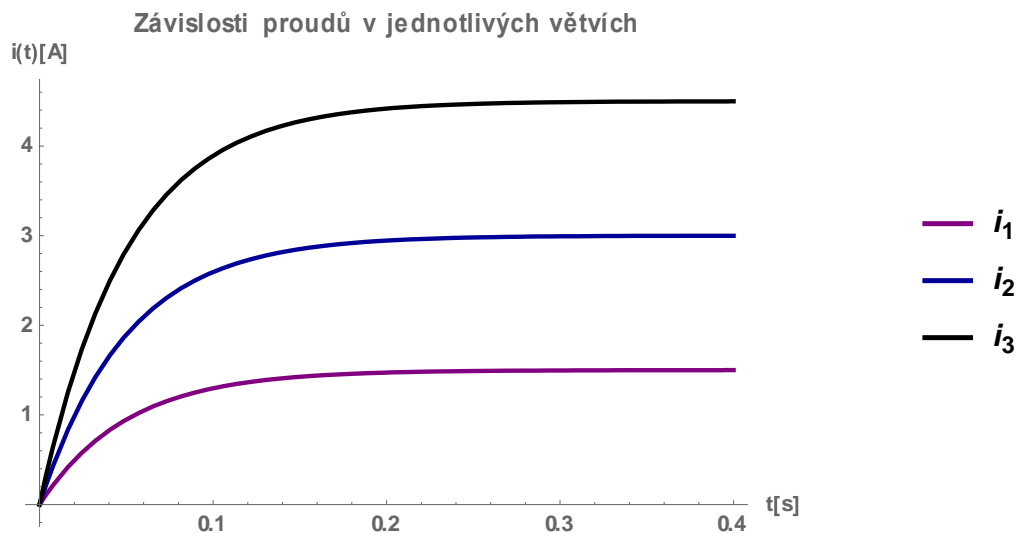
$$i_3(t) = \frac{9}{2}(1 - e^{-20t}).$$

Tím jsme získali časové závislosti proudů v jednotlivých větvích

$$\underline{\underline{i_1(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-20t}) \text{ A},}}$$

$$\underline{\underline{i_2(t) = 3(1 - e^{-20t}) \text{ A},}}$$

$$\underline{\underline{i_3(t) = \frac{9}{2}(1 - e^{-20t}) \text{ A}.}}$$

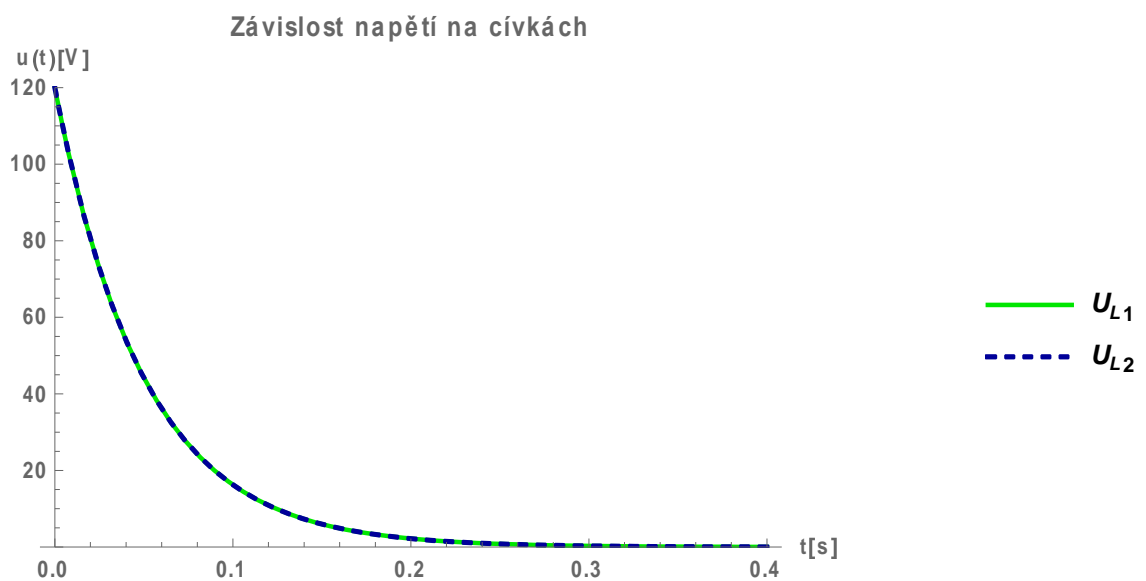


Obr. 9. Graf průběhu proudů pro uzel 5

Vyšel nám nekonstantní proud, napětí se tedy bude na cívce indukovat pomocí Faradayova zákona.

$$U_{L_1} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = 4 \left[-10 \left(\frac{3}{2} (1 - e^{-20t}) \right) - 5(3(1 - e^{-20t})) + 30 \right] = 120e^{-20t} \text{ V},$$

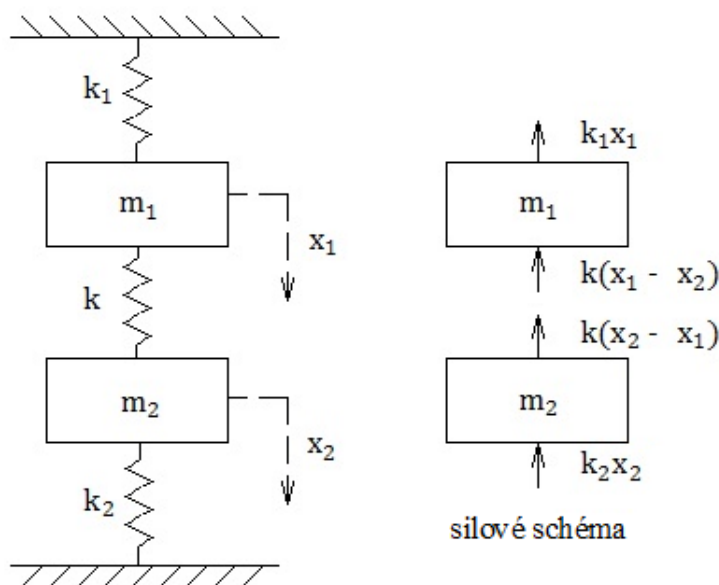
$$U_{L_2} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 2 \left[-10 \left(\frac{3}{2} (1 - e^{-20t}) \right) - 15(3(1 - e^{-20t})) + 60 \right] = 120e^{-20t} \text{ V}.$$



Obr. 10. Graf průběhu napětí na cívkách

5.2 Soustava s dvěma stupni volnosti

Máme dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , která jsou včetně pevných bodů vzájemně spojena třemi pružinami o tuhostech k_1, k_2 a k . Posunutí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ budeme uvažovat vzhledem k základní rovnovážné poloze těles. Pokud se těleso pohybuje v rovině, má soustava dva stupně volnosti a dvě vlastní frekvence. Když obě tělesa soustavy vykonávají kmitavý pohyb na jedné z vlastních frekvencí, pak se takovému kmitání říká *hlavní forma kmitání*.



Obr. 11. Soustava s dvěma stupni volnosti

Periodický pohyb se opakuje po určitém časovém intervalu.

Harmonický pohyb

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kde x je výchylka, A je amplituda výchylky, ω je úhlová rychlost, φ je fázový úhel a $(\omega t + \varphi)$ je fáze.

Zrychlení

$$x'' = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi),$$

kde $-\omega^2 A$ je amplituda zrychlení.

Řešení:

Rovnici pohybu můžeme získat pomocí Newtonova pohybového zákona. Rovnováha všech dynamických sil v silovém schématu je vyjádřena soustavou dvou diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned}m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2), \\m_2 x_2'' &= -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Tuto soustavu upravíme do tvaru

$$\begin{aligned}m_1 x_1'' + (k_1 + k)x_1 - kx_2 &= 0, \\m_2 x_2'' + (k_2 + k)x_2 - kx_1 &= 0,\end{aligned}\tag{8}$$

zde vidíme soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Po označení

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1', y_3 = x_2, y_4 = x_2'$$

dostaneme soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Pro neznámé y_1, y_2, y_3, y_4 máme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\y_2' &= -\frac{k_1 + k}{m_1} y_1 + \frac{k}{m_1} y_3, \\y_3' &= y_4, \\y_4' &= \frac{k}{m_2} y_1 - \frac{k_2 + k}{m_2} y_3.\end{aligned}\tag{9}$$

Kmitavý pohyb mechanické soustavy na obr. 11, který je pravidelný, odpovídá periodickému řešení soustavy (8) i soustavy (9). Stabilitu systému určujeme pomocí znaménka reálné hodnoty determinantu matice. Systém je stabilní za předpokladu, že hodnota determinantu je kladná a existuje periodické řešení. Z Eulerovy metody řešení vyplývá, že soustava (9) má periodické řešení, právě když matice soustavy má ryze imaginární vlastní číslo (reálná část je nulová). Můžeme předpokládat, že $i\omega$ je takové ryze imaginární vlastní číslo. Musí tedy platit

$$\begin{aligned}det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= 0, \\det \begin{pmatrix} -i\omega & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k}{m_1} & -i\omega & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k_2 + k}{m_2} & -i\omega \end{pmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

upravíme a dostaneme

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2 + k_1 k + k_2 k}{m_1 m_2} = 0, \quad (10)$$

tím jsme získali kvadratickou rovnici o neznámé ω^2 . Kořeny této rovnice jsou

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2 + k_1 k + k_2 k}{m_1 m_2} \right]} \right\},$$

po úpravě získáme

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} - \frac{k_2 + k}{m_2} \right)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2} \right]} \right\}. \quad (11)$$

Vidíme, že ω^2 je kladné číslo, jelikož součet prvních dvou členů je větší než hodnota druhé odmocniny. Získali jsme dva různé reálné kladné kořeny ω_1^2 a ω_2^2 . Z toho odvodíme, že rovnice (10) má čtyři reálné kořeny $\omega_1, -\omega_1$ a $\omega_2, -\omega_2$. Pro dvojici $\omega_1, -\omega_1$ máme periodické řešení obsahující funkce $\cos \omega_1 t$ a $\sin \omega_1 t$. Druhá dvojice $\omega_2, -\omega_2$ má periodické řešení $\cos \omega_2 t$ a $\sin \omega_2 t$. Pro první dvojici máme periodu $\frac{2\pi}{\omega_1}$ a pro druhou $\frac{2\pi}{\omega_2}$.

Hodnoty ω_1 a ω_2 můžeme nazvat *vlastními frekvencemi*.

Zjistili jsme tedy, že soustava se dvěma stupni volnosti má dvě vlastní frekvence. Obecné (periodické) řešení soustavy (8) je tedy

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (12)$$

kde $A_{ij}, (i, j = 1, 2)$ a $\varphi_i, (i = 1, 2)$ jsou libovolné konstanty. Mohli jsme si všimnout, že kmitavý pohyb těles obvykle není prostým harmonickým pohybem, ale je složen ze dvou harmonických pohybů, které mají frekvence ω_1 a ω_2 . Menší frekvenci nazýváme *první (základní) harmonickou* a větší frekvenci *druhou harmonickou*.

Počáteční podmínky máme určeny pro amplitudy a fázové posuny $x_1(t)$ a $x_2(t)$ harmonických pohybů těles o hmotnostech m_1 a m_2 . Pokud dosadíme ω_1 a ω_2 z rovnice (11) do rovnice (8), vyjde nám

$$\begin{aligned}\frac{A_{11}}{A_{21}} &= \frac{k}{k_1 + k - m_1 \omega_1^2} = \frac{k_2 + k - m_2 \omega_1^2}{k} = \frac{1}{\mu_1}, \\ \frac{A_{12}}{A_{22}} &= \frac{k}{k_1 + k - m_1 \omega_2^2} = \frac{k_2 + k - m_2 \omega_2^2}{k} = \frac{1}{\mu_2}.\end{aligned}\quad (13)$$

U proměnných μ_1 a μ_2 můžeme určit znaménka hodnot tím, že z rovnice (11) za ω_1 a ω_2 dosadíme do rovnice (13), dostaneme

$$k\mu_{1,2} = k_1 + k - m_1 \omega_{1,2}^2 = \frac{m_1}{2} \left\{ \frac{k_1 + k}{m_1} - \frac{k_2 + k}{m_2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} - \frac{k_2 + k}{m_2} \right)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2} \right]} \right\}.$$

Bude-li

$$\sqrt{\left[\left(\frac{k_1 + k}{m_1} - \frac{k_2 + k}{m_2} \right)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2} \right]} > \frac{k_1 + k}{m_1} - \frac{k_2 + k}{m_2},$$

vyjde nám kladné μ_1 a záporné μ_2 .

Obecné řešení získáme dosazením μ_1 a μ_2 do rovnice (12). Potom

$$\begin{aligned}x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (14)$$

kde máme čtyři konstanty $A_{11}, A_{12}, \varphi_1$ a φ_2 , které určíme dosazením počátečních podmínek $x_1(0), x_1'(0), x_2(0)$ a $x_2'(0)$.

Máme-li počáteční podmínky takové, že libovolná konstanta A_{12} v rovnici (14) se rovná nule, pak pohyb těles odpovídá první formě kmitání:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{x_1}} &= \underline{\underline{A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)}}, \\ \underline{\underline{x_2}} &= \underline{\underline{\mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)}}.\end{aligned}$$

Obdobně, je-li libovolná konstanta A_{11} v rovnici (14) rovna nule, pak pohyb těles odpovídá druhé formě kmitání:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{x_1}} &= \underline{\underline{A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}}, \\ \underline{\underline{x_2}} &= \underline{\underline{\mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}}.\end{aligned}$$

Pokud má kmitání menší frekvenci, nazýváme jej *první formou kmitání*, naopak má-li kmitání větší frekvenci, nazýváme jej *druhou formou kmitání*.

Příklady byly čerpány ze zdrojů [5] [8].

ZÁVĚR

Hlavním cílem bakalářské práce bylo vytvořit podpůrný výukový materiál pro studenty bakalářského studia na FAI UTB ve Zlíně. V teoretické části jsou uvedeny základní vlastnosti soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a jejich metody řešení. Ty zde počítáme pomocí Eliminační metody a Eulerovy metody. Máme zde čtyři druhy výpočtu pomocí určení kořenů, a to pro jednonásobné reálné kořeny, dvojnásobné reálné kořeny, jednonásobné komplexní kořeny a dvojnásobné komplexní kořeny.

V praktické části jsou ukázky řešených příkladů, které jsou vypočteny pomocí Eliminační metody a Eulerovy metody. Pro Eliminační metodu zde máme příklad na homogenní a nehomogenní soustavu. Nehomogenní soustavu je výhodnější řešit pomocí Eliminační metody, proto jsou příklady pro Eulerovu metodu řešeny jen pro homogenní rovnice. Jsou zde také uvedeny ukázky řešení soustav v softwaru Mathematica, které nám pomáhají vyřešit danou problematiku, nebo mohou sloužit jako kontrola výsledků. Dále je zde zahrnuta sbírka neřešených příkladů s výsledky pro homogenní soustavy, nehomogenní soustavy a pro soustavy rovnic s počátečními podmínkami. S těmito soustavami se v praxi můžeme setkat např. v elektrotechnice či mechanice. Aplikace jsou tedy vytvořeny pro model paralelního obvodu a pro mechanickou soustavu se dvěma stupni volnosti. Tato bakalářská práce by měla sloužit jako pomocný výukový text při studiu soustav lineárních diferenciálních rovnic.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] NAGY, Jozef. *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1980, 109 s. Matematika pro vysoké školy technické.
- [2] BRONSON, Richard, Gabriel B COSTA a Richard BRONSON. *Schaum's outlines of differential equations*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006, xiv, 385 p. ISBN 0071456872.
- [3] *MATEMATIKA online: SOUSTAVY ODR I. ŘÁDU* [online]. [cit. 2015-12-30]. Dostupné z: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Soustavy-ODR1/sc-55-sr-1-a-81/default.aspx>
- [4] HABALA, Petr. *DEN (Diferenciální rovnice a numerická matematika): ODR teoreticky* [online]. [cit. 2015-12-30]. Dostupné z: <https://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/den/denp04.pdf>
- [5] JIRÁSEK, František. *Sbírka řešených příkladů z matematiky III*. Vyd. 1. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1989, 398 s. ISBN 80-03-00106-4.
- [6] DIBLÍK, Josef, Jaromír BAŠTINEC, Irena HLAVIČKOVÁ a Zdeněk ŠMARD. *Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice* [online]. [cit. 2016-01-02]. Dostupné z: http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/MDRE/CZ/MDRE_plna_verze_CZ.pdf
- [7] ŘEZNIČKOVÁ, Jana. *Diferenciální rovnice* [online]. [cit. 2015-12-30]. Dostupné z: <http://vyuka.fai.utb.cz>
- [8] PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. *Laplaceova transformace: Základy teorie a užití v elektrotechnice*. Praha: SNTL, 1972.
- [9] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 1. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995, 207 s. ISBN 80-210-1130-0.
- [10] KALOUSOVÁ, Anna. *Lineární algebra a aplikace: Soustavy lineárních diferenciálních rovnic* [online]. [cit. 2015-12-30]. Dostupné z: <https://math.feld.cvut.cz/ftp/kalous/laa/prednasky/difsoust.pdf>
- [11] DOLEŽALOVÁ, Jarmila. *Soustavy lineárních diferenciálních rovnic I. řádu s konstantními koeficienty* [online]. [cit. 2015-12-30]. Dostupné z: <http://homen.vsb.cz/~dol30/SLDR.pdf>

- [12] *Sbírka úloh z matematiky: Obyčejné diferenciální rovnice* [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/pdf/8.pdf
- [13] BRZEZINA, Miroslav a Jiří VESELÝ. *Obyčejné (lineární) diferenciální rovnice a jejich systémy* [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/Brz_ves/difrov.pdf
- [14] *Sbírka příkladů Matematika II pro strukturované studium: Kapitola 4: Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu* [online]. [cit. 2016-05-12]. Dostupné z: http://old.vscht.cz/mat/El_pom/sbirka/KapitolaII4.pdf

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

i	Imaginární jednotka, která je kořenem $x^2 = -1$.
\mathbb{C}	Množina všech komplexních čísel $\{\sigma \pm \omega i: \sigma, \omega \in \mathbb{R}\}$.
\mathbb{R}	Množina všech reálných čísel.
\mathbb{R}^n	n -rozměrný vektorový prostor reálných čísel.
I	Otevřený interval.
A	Reálná čtvercová matice.
C_1, \dots, C_n	Konstanty.
$\alpha_1, \dots, \alpha_n$	Koeficienty.
Re	Reálná část.
Im	Imaginární část.
DR	Diferenciální rovnice.
LODR	Lineární obyčejná diferenciální rovnice.
LODR1	Lineární obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu.
LODR2	Lineární obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu.
LODR n	Lineární obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu.
HLODR	Homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice.
tj.	To jest.
např.	Například.

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obr. 1. Výpočet soustavy HLODR v softwaru Mathematica</i>	<i>40</i>
<i>Obr. 2. Výpočet soustavy HLODR v softwaru Mathematica</i>	<i>41</i>
<i>Obr. 3. Výpočet nehomogenní soustavy LODR v softwaru Mathematica</i>	<i>42</i>
<i>Obr. 4. Výpočet nehomogenní soustavy LODR v softwaru Mathematica</i>	<i>42</i>
<i>Obr. 5. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica</i>	<i>43</i>
<i>Obr. 6. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica</i>	<i>44</i>
<i>Obr. 7. Výpočet soustavy LODR s počátečními podmínkami v softwaru Mathematica</i>	<i>45</i>
<i>Obr. 8. Schéma paralelního elektrického obvodu RL</i>	<i>50</i>
<i>Obr. 9. Graf průběhu proudů pro uzel 5</i>	<i>54</i>
<i>Obr. 10. Graf průběhu napětí na cívkách</i>	<i>54</i>
<i>Obr. 11. Soustava s dvěma stupni volnosti</i>	<i>55</i>

SEZNAM PŘÍLOH

P I Wolfram Mathematica zdrojový soubor, grafy a obrázky.

PŘÍLOHA P I: WOLFRAM MATHEMATICA ZDROJOVÝ SOUBOR, GRAFY A OBRÁZKY.

Příloha obsahuje obrázky, zdrojové soubory a grafy z prostředí Wolfram Mathematica, které jsou umístěny na přiloženém CD.