

Simulační modely vybraných řízených systémů

Simulation Models of Chosen Controlled Systems

Ondřej Špaček

Bakalářská práce
2015



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Ondřej Špaček**
Osobní číslo: **A12064**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Simulační modely vybraných řízených systémů**
Téma anglicky: **Simulation Models of Chosen Controlled Systems**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte literární rešerši týkající se možností sestavení matematických modelů. Dále se poté zaměřte na program Matlab/Simulink, zejména na nástroje, jež umožňují vytváření matematických modelů a ověření jejich chování.
2. Pro vybrané typy systémů sestavte, příp. převezměte již existující matematické modely.
3. V programu Matlab/Simulink realizujte matematické modely vybraných systémů. Realizujte odpovídající matematické modely také s využitím nástroje SimScape, jež je součástí programu Matlab/Simulink. Vyhodnoťte získané výsledky.
4. Navrhněte a zpracujte tutoriál k nástroji SimScape. Součástí tutoriálu budou, mimo jeho popisu, zejména ukázkové příklady vysvětlující možnosti daného nástroje a způsob jeho propojení s dalšími částmi programu Matlab/Simulink.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. NOSKIEVIČ, Petr. Modelování a identifikace systémů. Ostrava: MONTANEX, 1999. ISBN 80-7225-030-2.
2. WOODS, Robert L. a Kent L. LAWRENCE. Modeling and simulation of dynamic systems. 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice-Hall, 1997, ix, 768 s. ISBN 01-333-7379-7.
3. MATUŠŮ, Radek a Petr DOSTÁL. Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2010. ISBN 978-80-7318-991-4. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18580>
4. OGATA, Katsuhiko. System Dynamics. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004, ix, 768 s. ISBN 01-314-2462-9.
5. JURA Pavel. Signály a systémy. Elektronické skriptum, část II, Druhé opravené vyd., 2010.
6. ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. Teorie dynamických systémů. Druhé vyd. Praha: Ediční středisko ČVUT, 2002. ISBN 80-01-01971-3.
7. THE MATHWORKS, Inc. Simulink: Simulation and Model-Based Design [online]. [cit. 2015-01-16]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/products/simulink/>
8. SKALICKÝ, Jiří. Teorie řízení I. První vyd. Brno: VUT FEKT, 2002. ISBN 80-214-2112-6.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Pavel Navrátil, Ph.D.

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání bakalářské práce:

6. března 2015

Termín odevzdání bakalářské práce:

22. května 2015

Ve Zlíně dne 6. března 2015



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



L.S.



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Předmětem této práce je vytvořit knihovnu příkladů mechanických, elektrických a hydraulických systémů, u kterých jsou ukázány možnosti simulací s různými matematickými modely, při využití simulačních nástrojů MATLAB/Simulink s knihovnou Simscape. Teoretická část práce je věnována různým fyzikálním systémům, jejich analogii a teorii simulací. Následně je zde uvedena základní teorie vhodná pro popis systémů. Praktická část je věnována konkrétním příkladům odvozování jejich matematických modelů v podobě diferenciálních rovnic, přenosu a stavového popisu, kde u každého z těchto matematických modelů je vytvořena simulace, která je dostupná na přiloženém CD. V závěru každého příkladu jsou potom porovnány výsledky získané pomocí simulací s různými matematickými modely. Součástí této práce je také návod s tutoriály na použití knihovny Simscape.

Klíčová slova: Simulace, Systémy, Matematický model, Analogie fyzikálních systémů, Laplaceova transformace, Linearizace, Simscape, MATLAB/Simulink, Stavový popis, Přenos, Diferenciální rovnice.

ABSTRACT

Main subject of this bachelor thesis is to create a library of mechanical systems, electrical systems and hydraulic systems examples, which shows possibilities of simulations with different mathematical models, using simulation instruments of MATLAB/Simulink with library Simscape. Theoretical part of this thesis is devoted to different physical systems their analogies and simulation theory. Furthermore, basic theory appropriate for description of systems is listed. Practical part is devoted to particular examples deducing their mathematical models in form of differential equations, transfer functions and state space models. For each, of these models is created simulation, which is available from enclosed CD. In conclusion of each example is comparison of results from simulations with different mathematical models.

Keywords: Simulations, Systems, Mathematical model, Analogy between physical systems, Laplace transform, Linearization, Simscape, MATLAB/Simulink, State space model, Transfer function, Differential equations.

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Pavlu Navrátilovi Ph.D. za odborné vedení, cenné připomínky, rady a čas, který mi věnoval při zpracování této práce.

Děkuji také mé rodině za podporu po celou dobu bakalářského studia.

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST.....	10
1 SYSTÉMY.....	11
1.1 ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ DĚLENÍ SYSTÉMŮ.....	12
1.2 ANALOGIE FYZIKÁLNÍCH VELIČIN A PRVKŮ SYSTÉMŮ	13
1.2.1 Prvky ukládající tok	13
1.2.2 Prvky ukládající úsilí.....	16
1.2.3 Disipativní prvky.....	19
1.3 ŘÍZENÍ SYSTÉMU	21
2 SIMULACE	22
2.1 MATEMATICKÝ MODEL	22
2.2 LINEÁRNÍ A NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE.....	22
2.3 TVORBA MATEMATICKÉHO MODELU	24
2.3.1 Matematicko-fyzikální metoda	24
2.3.2 Experimentální metoda	24
2.4 LAGRANGEOVY ROVNICE DRUHÉHO DRUHU	25
2.5 LINEARIZACE	26
2.5.1 Linearizace tečnou v pracovním bodě.....	26
3 POPISY SYSTÉMŮ	28
3.1 PŘENOS	28
3.1.1 Laplaceova transformace	30
3.1.2 Zpětná Laplaceova transformace	33
3.2 STAVOVÝ POPIS LSS	35
3.2.1 Převod stavového popisu na přenos	36
3.2.2 Převod přenosu na stavový popis	36
4 MNOHOROZMĚROVÉ SYSTÉMY	37
4.1 PŘENOSOVÁ MATICE	37
5 MATLAB	38
5.1 MATLAB/SIMULINK	38
5.2 SIMSCAPE	38
5.2.1 Programovací jazyk Simscape	39
II PRAKTICKÁ ČÁST	40
6 UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY ELEKTRICKÝCH SYSTÉMŮ	41
6.1 INTEGRAČNÍ ČLÁNEK RC	41
6.1.1 Diferenciální rovnice.....	42
6.1.2 Přenos systému.....	43
6.1.3 Stavový popis	43
6.1.4 Porovnání simulací.....	44
6.2 OBVOD S DVĚMA ZDROJI A DVĚMA DYNAMICKÝMI PRVKY	46
6.2.1 Diferenciální rovnice.....	47
6.2.2 Stavový popis	49

6.2.3	Přenosová matice	50
6.2.4	Porovnání simulací	52
7	UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY MECHANICKÝCH SYSTÉMŮ	54
7.1	HMOTY PROPOJENÉ PRUŽINOU	54
7.1.1	Diferenciální rovnice	55
7.1.2	Stavový popis	57
7.1.3	Přenosová matice	58
7.1.4	Porovnání simulací	60
7.2	ROTAČNÍ SYSTÉM S PRUŽINOU A TLUMIČEM	62
7.2.1	Diferenciální rovnice	63
7.2.2	Stavový popis	65
7.2.3	Přenosová matice	67
7.2.4	Porovnání simulací	68
8	UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY HYDRAULICKÝCH SYSTÉMŮ	70
8.1	NÁDRŽ	70
8.1.1	Diferenciální rovnice	71
8.1.2	Simscape model	72
8.1.3	Určení pracovního bodu	73
8.1.4	Linearizace modelu	73
8.1.5	Přenos	75
8.1.6	Stavový popis	75
8.1.7	Porovnání simulací	77
8.2	ČTYŘ VÁLCOVÁ VODÁRNA	79
8.2.1	Pracovní body	82
8.2.2	Linearizovaný model	83
8.2.3	Stavový popis	87
8.2.4	Přenosová matice	89
8.2.5	Simscape model	92
8.2.6	Porovnání simulací	92
	ZÁVĚR	95
	ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ	96
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	97
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	99
	SEZNAM OBRÁZKŮ	102
	SEZNAM PŘÍLOH	104

ÚVOD

Systém je možné popsat jako množinu elementů, které jsou vázány vzájemnými vztahy. Systémy se zabývá disciplína Teorie Systémů, za jejíhož zakladatele je považován Ludwig von Bertalanffy, který ukázal důležitou vlastnost a to že vnitřní interakce systému nemusí nutně vyplívat z vlastností jeho jednotlivých částí. Největší rozvoj této disciplíny nastal ve 40. letech dvacátého století, kdy se tato disciplína začala dělit na dva hlavní proudy, první zabývající se biologií, ekonomii a druhý převážně analýzou systémů a syntézou regulátorů. Důležitou částí při analýze systémů a syntéze regulátoru je v dnešní době simulace. Simulace slouží pro získání výsledků, které by se daly získat měřením reálného systému. Zásadní výhodou tohoto přístupu je, že nemůžeme poškodit reálný systém a zároveň můžeme otestovat mnoho možností systému. V případě simulace je systém zastoupen matematickým modelem, jehož účelem je popsat důležité vlastnosti systému vhodným matematickým aparátem, nejčastěji diferenciálními rovnicemi.

Hlavním účelem této práce je ověření funkčnosti knihovny Simscape a porovnáním s matematickými modely simulovanými v MATLAB/Simulink. Tato práce je zaměřena na vytváření matematických modelů reálných systémů, jejich následnou simulaci s využitím MATLAB/Simulink a knihovny Simscape.

V teoretické části je uvedena základní teorie seznamující se systémy, analogií systémů v různých fyzikálních oborech, konkrétně mechanických, hydraulických, tepelných a elektrických. Další část je zaměřena na postup při tvorbě simulace a matematického modelu. V této práci jsou používány matematické modely v podobě diferenciálních rovnic, přenosu a stavového popisu. Velká část teoretické části je také zaměřena na Laplaceovou transformaci, která úzce souvisí s přenosem a stavovým popisem. Dále je zde věnována kapitola linearizaci matematického modelu, Lagrangeovým rovnicím druhého druhu a seznámení s MATLAB/Simulink.

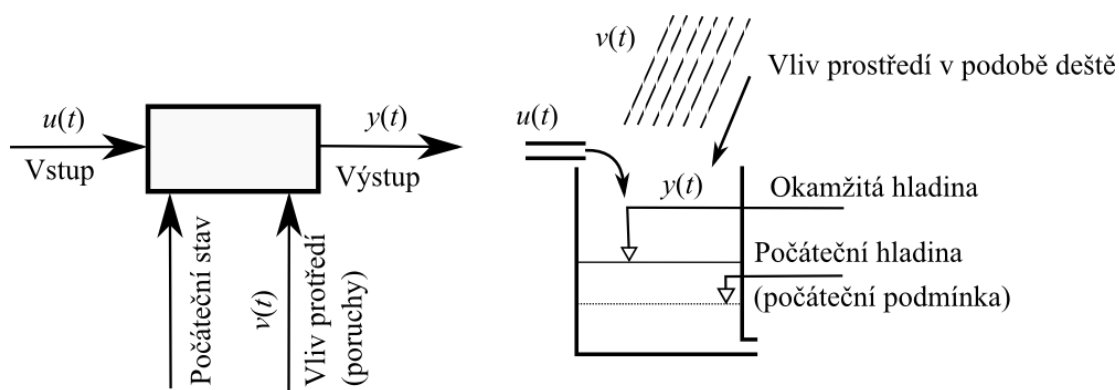
Praktická část je zaměřena na příklady z mechanických, hydraulických a elektrických systémů. U těchto příkladů jsou uvedeny odvození matematických modelů a provedení jejich simulace. V závěru každého příkladu jsou porovnány výsledky simulací. Všechny vytvořené modely jsou dostupné na přiloženém CD.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 SYSTÉMY

Systém může být považován za spojení několika částí společně pracujících a to za dosažením určitého cíle. Jednotlivé části systému se vzájemně ovlivňují, což má vliv na chování celého systému. Může také být ovlivňován okolím a zároveň může sám ovlivňovat své okolí. Chování systému je reprezentováno odezvou na vstupy, dle [1].

Na obrázku (Obr. 1) je schematické znázornění systému a ukázka tohoto popisu na reálném systému rezervoáru vody bez zastřešení s přítokem, jako vstupem do systému a hladinou jako výstupem ze systému. Počáteční podmínkou v počáteční výšce hladiny a vlivem prostředí (poruchou) v podobě deště.

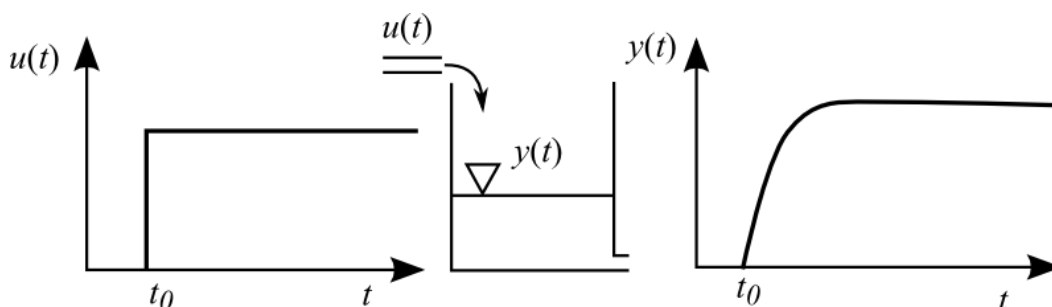


Obr. 1. Obecné schéma systému a ukázkou na příkladu nádrže

Statické systémy jsou popsány algebraickými rovnicemi. Proto výstup bude vždy okamžitě reagovat na vstup a za předpokladu ustáleného vstupu bude výstup vždy ustálen. Dynamické systémy jsou popsány diferenciálními rovnicemi závislými na čase, systém na vstup reaguje postupně za určitý čas. U reálných systémů nejčastěji existují obě složky dynamická a statická jako neoddělitelné vlastnosti systému, dle [2].

Odezva dynamického systému na vstup se nemusí nutně ustálit, po ustálení vstupní veličiny, může např. oscilovat. Odezva dynamických systémů závisí i na počátečních podmínkách a současném stavu systému. Je to důležitá vlastnost pro pochopení chování systému jeho popsání a práci se systémem.

Například odezva u nádrže s přítokem jako vstupem systému a hladinou jako výstupem systému by mohla vypadat následovně (Obr. 2).



Obr. 2. Příklad odezvy nádrže

Je patrné, že přítok je aktivován v čase t_0 a že na něj výstup začne reagovat postupně, současně dojde k ustálení hladiny. Z toho lze usoudit, že z důvodu dynamické složky systému dojde k průběžné změně hladiny a z důvodu statické složky systému dojde k ustálení hladiny na určité hodnotě.

1.1 Základní fyzikální dělení systémů

Různé příklady dynamických systémů, můžeme pozorovat v každodenním životě, vyskytují se téměř ve všech technických oborech např. mechanické, elektrické, hydraulické, tepelné systémy.

Mechanické systémy jsou obecně tvořeny hmotou, setrvačností a pružností, kde na komponentech poháněných silami, kroutící momenty anebo pozicí v gravitačním poli, dochází ke změně pohánějící energie na energii jinou.

Elektrické systémy jsou obecně tvořeny vodiči, prvky s rezistivitou, kapacitou nebo indukčními prvky buzenými proudem. Dále mohou obsahovat prvky jako tranzistory a zesilovače.

Hydraulické nebo kapalinové systémy jsou obecně tvořeny rozvaděči, tryskami, ventily, nádržemi, trubkami a hydromotory hnanými tlakem nebo průtokem kapaliny.

Tepelné systémy se obecně skládají z komponent, které mají tepelný odpor a tepelnou kapacitu při přivedení tepelného toku nebo změně teploty, dle [2].

Kombinované systémy jsou tvořeny kombinací předcházejících systémů. V elektro-mechanických systémech dochází k převedení elektrického proudu na sílu, příkladem mohou být reproduktory, elektrické motory. Příkladem hydraulicko-mechanických

systémů mohou být hydraulické motory. Příkladem tepelně-mechanických systémů může být spalovací motor. Příkladem elektricko-tepelných mohou být různé elektrické topení s kolující tekutinou, dle [3].

1.2 Analogie fyzikálních veličin a prvků systémů

Chování tepelných systémů, hydraulických systémů, elektrických systémů atd. je velice podobné. Všeobecně ve všech systémech probíhají stejné jevy a to šíření energie, ukládání energie a přeměny jednoho typu energie na jiný typ (dále označovány jedním slovem jako disipativní). Proto pro teorii systémů byly zavedeny termíny „úsilí“ a „tok“ kde součin těchto veličin představuje výkon (neplatí u tepelného toku). Úsilí představuje schopnost konat práci a potenciál pro vykonání práce. Úsilím je tedy například elektrické napětí [V], síla [N], kroutící moment [Nm], teplota [K], tlak [Pa]. Tok reprezentuje rychlost změny energie, tokem k předcházejícím úsilím bude elektrický proud [C/s tj. A], rychlost [m/s], úhlová rychlost [rad/s], tepelný tok [J/s tj. W] a objemový průtok [m³/s]. Tato analogie nám umožňuje lépe pochopit složité systémy například převedením mechanického problému na elektrický, dle [5] a [6].

Dále následují rozdělení na již zmíněné části systémů a to prvky ukládající úsilí, prvky ukládající tok a prvky disipativní, kde u všech těchto částí jsou uvedeny příklady pro jednotlivé typy systémů.

1.2.1 Prvky ukládající tok

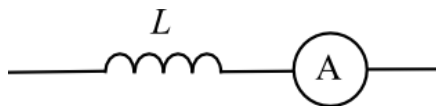
Prvky ukládající tok mají schopnost indukovat energii, množství energie, kterou může systém indukovat, značíme I . V systémech lze zavést veličinovou analogii pro prvky ukládající tok jako

$$usilí(t) = I \frac{d(tok(t))}{dt} \quad (1)$$

Z toho lze vyjádřit, dle [5], že pro tok platí

$$tok(t) = \frac{1}{I} \int usilí(t) dt \quad (2)$$

Prvkem ukládajícím tok v elektrických systémech je induktor (Obr. 3). Veličina, která označuje schopnost indukovat energii u tohoto prvku je indukčnost L [H].



Obr. 3. Cívka

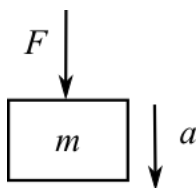
Veličinou úsilí v elektrických systémech je napětí a tokem je proud. Po dosazení těchto hodnot vznikne rovnice pro napětí jako

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$

Dále je možné vyjádřit proud, který bude měřitelný na ampérmetru, jako

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt \quad (4)$$

Mechanickým prvkem ukládajícím tok je hmota m (Obr. 4). Jedná se vlastně o kinetickou energii hmoty.



Obr. 4. Hmota

V mechanických systémech je úsilí reprezentováno silou a tok rychlostí. Proto po dosazení toku a úsilí vznikne rovnice popisující sílu jako

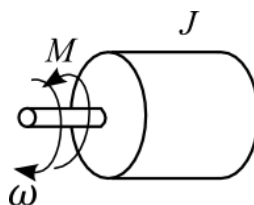
$$F(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \quad (5)$$

Tím vznikne známý vzorec pro výpočet síly $F(t) = ma$.

Je také možné vyjádřit průběh rychlosti jako

$$v(t) = \frac{1}{m} \int F(t) dt \quad (6)$$

V rotačních mechanických systémech ukládá tok setrvačnost hmoty (Obr. 5). Kapacitu energie, kterou lze uložit do setrvačné hmoty popisuje moment setrvačnosti J [kgm^2].



Obr. 5. Setrvačná hmota

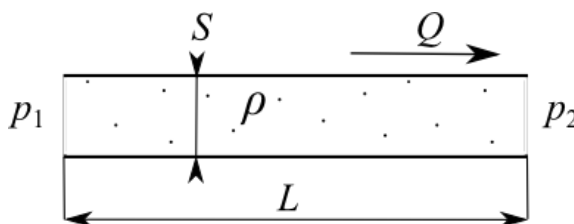
V rotačním mechanickém systému je úsilí reprezentováno kroutícím momentem M [N/m] a tok úhlovou rychlostí ω [rad/s].

$$M(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (7)$$

Úhlovou rychlost lze potom vyjádřit jako

$$\omega(t) = \frac{1}{J} \int M(t) dt \quad (8)$$

V hydraulickém systému ukládá tok potrubí (Obr. 6) o průřezu S [m²] a délce L [m] v němž proudí kapalina o hustotě ρ [kg/m³]. Tokem v hydraulickém systému je objemový průtok Q [m³/s] a úsilím je tlak p [Pa].



Obr. 6. Potrubí

Tlakem v potrubí p bude rozdíl tlaku p_1 a p_2 . Tlak lze vyjádřit jako

$$p(t) = \frac{L\rho}{S} \frac{dQ(t)}{dt} \quad (9)$$

Objemový průtok se dá vyjádřit jako

$$Q(t) = \frac{S}{L\rho} \int p(t) dt \quad (10)$$

Prvky ukládající úsilí jsou si velice podobné. Všechny jsou induktivního charakteru a existují mezi nimi veličinové analogie, dle [5].

1.2.2 Prvky ukládající úsilí

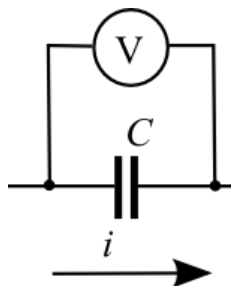
Prvky ukládající úsilí mají určitou kapacitu K a ukládají potenciální energii. Ve všech systémech kde lze zavést tuto veličinovou analogii platí

$$tok(t) = K \frac{d(usilí(t))}{dt} \quad (11)$$

Z tohoto obecného vzorce si můžeme vyjádřit tok , dle [5].

$$usilí(t) = \frac{1}{K} \int tok(t) dt \quad (12)$$

Prvkem ukládajícím úsilí v elektrických systémech je kondenzátor. Veličina, která označuje kapacitu kondenzátoru C je „Farad“ (značí se F). Jak bylo již uvedeno úsilím v elektrických systémech je napětí a tokem proud.



Obr. 7. Kondenzátor

Proto napětí na voltmetru $u(t)$ dosadíme za tok, kapacitu C za K a tím získáme úsilí tedy $i(t)$. Pro proud/úsilí kondenzátor bude tedy platit

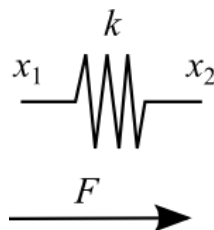
$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (13)$$

a pro napětí/tok na kondenzátoru

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} Q(t) \quad (14)$$

Kde integraci proudu podle času zapíšeme jako náboj $Q(t)$ [C] na kondenzátoru.

Mechanickým prvkem ukládajícím úsilí je pružina (Obr. 8), která v mechanických systémech vykonává translační pohyb. Ve spojitosti s pružinami se nejčastěji uvádí tuhost k [N/m], kde veličina která označuje kapacitu energie, kterou může pružina uchovat je poddajnost [m/N] a je to obrácená hodnota tuhosti. Úsilím v tomto systému je síla a tokem je rychlost.



Obr. 8. Pružina

Proto sílu $F(t)$ dosadíme za tok, za kapacitu dosadíme poddajnost pružiny $\frac{1}{k}$, pro rychlost $v(t)$ platí následující.

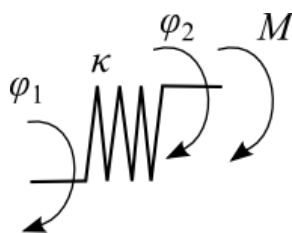
$$v(t) = \frac{1}{k} \frac{dF(t)}{dt} \quad (15)$$

Pro sílu/tok platí

$$F(t) = k \int v(t) dt = k \Delta x(t) \quad (16)$$

Ve výsledku vznikne známý vzorec spojovaný s pružinami $F(t) = k(x_1 - x_2)$.

Dalším mechanickým prvkem ukládajícím úsilí je torzní pružina (Obr. 9), která v mechanických systémech vykonává rotační pohyb a ne translační. Podobně jako u předchozí pružiny se uvádí torzní tuhost κ [N·m/rad]. Opět použijeme převrácenou hodnotu torzní tuhosti jako torzní poddajnost [rad/m·N].



Obr. 9. Torzní pružina

Úhlovou rychlost $\omega(t)$ získáme dosazením obrácené hodnoty torzní tuhosti a usilí, tedy momentu.

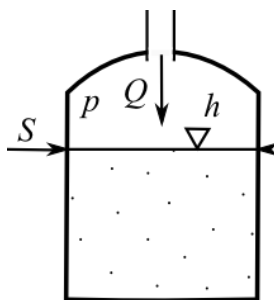
$$\omega(t) = \frac{1}{\kappa} \frac{dM(t)}{dt} \quad (17)$$

Kde moment lze vyjádřit jako

$$M(t) = \kappa \int \omega(t) dt = \kappa \Delta \varphi(t) \quad (18)$$

Z vzorce můžeme například vypočítat moment, který pružina uchová po zkroucení $M(t) = \kappa(\varphi_1 - \varphi_2)$.

V hydraulických systémech je uchování úsilí zastoupeno nádrží (Obr. 10). Veličinou úsilí je objemový průtok $Q(t)$ [m³/s] a tokem je tlak $p(t)$.



Obr. 10. Nádrž

Objemový průtok lze vyjádřit po dosazení toku úsilí a kapacity jako

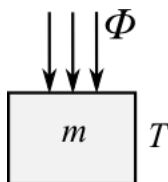
$$Q(t) = K \frac{dp(t)}{dt} \quad (19)$$

A tlak je možné z této rovnice vyjádřit jako

$$p(t) = \frac{1}{K} \int Q(t) dt = \frac{1}{K} V(t) \quad (20)$$

V tomto systému je tedy kapacita zastoupena $K = \frac{V(t)}{p(t)}$ bude se tedy měnit v závislosti na tlaku a objemu.

U tepelných systémů je úsilí uchováno v jakémkoli hmotném tělese (Obr. 11) o hmotnosti m [Kg] a měrné tepelné kapacitě c [J · kg⁻¹K⁻¹]. Kapacita tělesa pro uchování tepla je tedy vyjádřena násobkem hmotnosti a měrné tepelné kapacity materiálu tohoto tělesa.



Obr. 11. Tepelná kapacita hmoty

Veličinou úsilí v tepelných systémech je tepelný tok [W] značený jako Φ . Veličinou toku je teplota T [K]. Tepelný tok lze vyjádřit jako

$$\Phi(t) = cm \frac{dT(t)}{dt} \quad (21)$$

Teplotu lze vyjádřit jako

$$T(t) = \frac{1}{cm} \int \Phi(t) dt \quad (22)$$

Na základě této teorie o částech ukládajících úsilí lze dedukovat, že různé systémy jsou si opravdu podobné a existují mezi nimi veličinové analogie, dle [5].

1.2.3 Disipativní prvky

Tyto prvky mění jeden typ energie na jiný, nejčastěji na tepelnou energii, kladou určitý odpor O a obecný tvar pro výpočet úsilí těchto prvků je

$$usilí(t) = O \cdot tok(t) \quad (23)$$

, dle [5].

V elektrických systémech je tento prvek zastoupen rezistorem o odporu R [Ω]. Dochází na něm k přeměně elektrické energie na teplo. Toho se využívá pro snížení proudu nebo pro vytvoření úbytku napětí.

V elektrických systémech je tokem proud a úsilím napětí proto po dosazení vznikne vztah

$$u(t) = Ri(t) \quad (24)$$

V mechanických systémech je disipativní prvek zastoupen tlumičem s koeficientem tlumení b [Ns/m]. Dochází na nich k přeměně kinetické energie na tepelnou. Tokem v mechanickém systému je rychlost a úsilím síla, proto platí

$$F(t) = bv(t) \quad (25)$$

Tím vznikne obecný vzorec pro výpočet síly na tlumiči $F = b(v_1 - v_2)$.

V rotačních mechanických systémech je tento prvek zastoupen rotačním tlumičem s koeficientem tlumení B [N·m·s/rad].

Tokem v rotačním mechanickém systému je úhlová rychlost a úsilím je kroutící moment proto platí

$$M(t) = B\omega(t) \quad (26)$$

V hydraulických systémech se tento prvek nepoužívá, ale odporový jev vzniká téměř v každém potrubí nerovností povrchu, při zúžení potrubí nebo překážkou v potrubí. Obecně v běžném potrubí při průtoku dochází k tření, při němž vzniká teplo a snížení

kinetické energie kapaliny. Právě tato ztracená energie je nahrazena poklesem tlaku na výstupu. Tok je zastoupen objemovým průtokem a úsilí tlakem proto platí

$$p(t) = KQ(t) \quad (27)$$

Kde K bude konstanta představující hydraulický odpor vzniklý v potrubí. V praxi se podobný zápis nepoužívá, ale z hlediska veličinové analogie je platný.

V tepelných systémech může být vyjádřen pomocí absolutního tepelného odporu R_A [K/W]. V tepelných systémech je tok zastoupen tepelným tokem a úsilí zastoupeno teplotou.

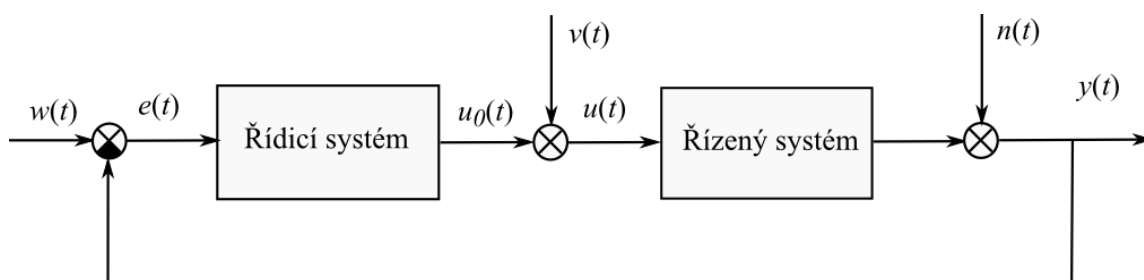
$$T(t) = R_A \Phi(t) \quad (28)$$

V praxi se toto vyjádření často nepoužívá, převážně se využívá tepelný odpor R [Km²/W] nebo tepelná vodivost λ [W/mK].

Je tedy zřejmé, že i mezi disipativními prvky existují veličinové analogie, dle [5].

1.3 Řízení systému

Při využitích různých systémů vzniká potřeba je řídit. K řízení systému dojde připojením řídicího systému, který bude provádět řízení pomocí zpětné vazby z výstupu v uzavřeném systému. Řídicí systém může být člověk, který mačká tlačítka podle hodnot na displeji, nebo počítač který přijímá hodnoty ze snímače a podle nich odešle signál řídicímu systému, aby věděl jak řídit. Může to být i jakýkoliv jiný systém včetně mechanických, elektrických a hydraulických. Toto řízení se dá zakreslit do schématu, které se nazývá zpětnovazební obvod, dle [2].



Obr. 12. Zpětnovazební obvod

Řídicí systém bývá obvykle nazýván jako regulátor a řízený systém jako regulovaná soustava. Řídicí systém porovnává žádanou hodnotu $w(t)$ s regulovanou veličinou $y(t)$. Regulovaná veličina je dána jako součet výstupu z řízené soustavy a chyby na výstupu $n(t)$. Existuje-li mezi žádanou hodnotou $w(t)$ a regulovanou $y(t)$ veličinou odchylka $e(t)$. Pokud vznikla regulační odchylka, působí řídicí systém akční veličinou $u(t)$ na řízený systém a to tak aby byla odchylka odstraněna. Akční veličina $u(t)$ je dána jako součet výstupní veličiny z regulátoru $u_0(t)$ a chyby na vstupu do řízeného systému $v(t)$, dle [1].

Regulované soustavy nemusí mít vždy jen jeden vstup a jeden výstup. V případě jednoho vstupu a jednoho výstupu mluvíme o jednorozměrném systému zkráceně jako SISO (Single Input Single Output). V případě opačném tj. s více vstupy a více výstupy se jedná o systém vícerozměrný, označován zkráceně jako MIMO (Multiple Input Multiple Output).

2 SIMULACE

Simulace představuje důležitý nástroj pro analýzu a pochopení složitých systémů. Simulací označujeme proces tvorby matematického modelu a provádění experimentů s tímto modelem. Pomáhá nám pochopit a předvídat chování různých reálných systémů bez následků pro reálný systém a bez následků pro okolní prostředí. Díky tomu na modelech můžeme simulovat i havarijní stavy, které na reálném systému nesmí nastat. Postup při tvorbě simulace postupujeme v jednotlivých fázích, dle [2].

- Tvorba matematického modelu
- Sestavení modelu
- Simulační ověření chování modelu
- Provedení žádaných simulací na modelu
- Aplikace získaných znalostí na reálný systém

2.1 Matematický model

Základem simulace je nahrazení reálného systému určitým popisem a následná aplikace získaných výsledků z tohoto popisu na reálný systém. Tento popis je označován jako matematický model, který vyjadřuje důležité vlastnosti reálného systému a to vhodným matematickým popisem většinou diferenciálními rovnicemi, dle [4] a [2].

Při tvorbě matematického modelu je důležité myslet na to že, se pravděpodobně nepovede zcela přesně popsat reálný systém a to z důvodu různých zjednodušení a zanedbání. Platí, že čím přesnější model bude vytvořen, tím bude složitější a obtížněji se s ním bude pracovat, proto je dobré se rozhodnout, které jevy jsou v daném případě považovány za důležité a které za méně důležité, dle [6] a [7].

2.2 Lineární a nelineární diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je druh matematické rovnice, v níž jsou obsaženy derivace funkcí. Při popisu reálných systémů se nejčastěji využívá lineárních a nelineárních časově invariantních rovnic (tj. rovnice s konstantními koeficienty) nebo jako časově variantních. Diferenciální rovnice jsou vnějším popisem systému. Důležitým pojmem u diferenciálních rovnic je „řád diferenciální rovnice“, který označuje nejvyšší řád derivace obsažené v diferenciální rovnici.

Rovnice je lineární právě když její závislá proměnná a její derivace je možné zapsat pomocí lineárních kombinací. Obecně tedy platí, že pokud se všechny derivace závislé proměnné vyskytující v rovnici jsou v první mocnině a současně rovnice neobsahuje součin různých derivací a žádná derivace není argumentem jiné funkce, potom je rovnice lineární. Následující příklad je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a_1 a a_0 je tedy časově invariantní protože se koeficienty nemění, dle [4].

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad (29)$$

Příkladem časově variantní diferenciální rovnice prvního řádu může být následující rovnice, kde konstantní koeficienty v rovnici jsou nahrazeny koeficienty, které budou závislé na čase, je tedy časově variantní.

$$\frac{dy(t)}{dt} + (1 - \cos(t))y(t) = u(t) \quad (30)$$

Jako příklad systému, který by se dal pospat časově variantními rovnicemi, může být rozvod tepelné energie do topení v domácnostech, neustále se mění vnější teplota, uživatelé mění nastavení topení a za chodu systému se přidávají nové části vedení, proto je potřeba měnit model tohoto systému v čase, dle [2].

Pokud rovnice nesplňuje některou z výše uvedených podmínek, tedy neexistují lineární kombinace, které by ji popisovali, potom se jedná se o nelineární diferenciální rovnici.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \sqrt{y(t)} = u(t) \quad (31)$$

Vidíme, že v rovnici není splněna podmínka linearity, protože jedna z derivací je v jiné než první mocnině.

Derivace bývá nejčastěji značena v matematice jako y' toto značení lze použít, pokud je jednoznačné, podle které proměnné se derivuje. Vhodnější značení je $\frac{dy(t)}{dt}$ nebo $\frac{\partial y(t)}{\partial t}$ ze kterých lze okamžitě zjistit podle, které proměnné se derivuje. Další možností zápisu je „Newtonova konvence“ \dot{y} , která se může zavést v případě derivace podle času. Tento způsob zápisu se využívá hlavně v případech, kde derivace podle času má fyzikální význam tedy hlavně v mechanice, kde platí, že derivací dráhy je rychlost, derivací rychlosti zrychlení a derivací zrychlení jerk, dle [4].

2.3 Tvorba matematického modelu

Při tvorbě modelů reálného systému je možné postupovat s využitím matematicko-fyzikálního přístupu, přístupu čistě experimentálního nebo kombinací těchto přístupů.

2.3.1 Matematicko-fyzikální metoda

Tato metoda vychází z fyzikálních zákonů, díky kterým lze popsat vztah mezi vstupem do soustavy a výstupem ze soustavy. Při sestavování matematického modelu lze většinou vyjít z bilanční rovnice obecně ve tvaru

$$vstup + vznik = výstup + akumulace \quad (32)$$

výjimkou jsou mechanické systémy, kde je často používána Lagrangeova rovnice druhého druhu (2.4). V matematických modelech lze využít např. hmotové bilance, nebo energetické bilance. Takto vniklý model jednoznačně popisuje reálný systém, skutečnými zákonitostmi, kde jednotlivé parametry modelu mají fyzikální význam. Tento model bývá většinou složitý a často i nelineární.

Největší výhodou matematicko-fyzikální metody je, že je možné ji aplikovat na systém, který ještě není vyroben. Ze znalostí získaných během simulací je možné zkonstruovat systém odpovídající simulacím, nebo lze vhodně upravovat konstrukci již hotového systému, tak aby lépe odpovídal daným požadavkům. Naopak nevýhodou je, že osoba zodpovědná za tvorbu musí mít rozsáhlé znalosti v oboru, kam náleží reálný systém. Další nevýhodou je, že v případě získání nelineárních rovnic se často provádí linearizace matematického modelu, čímž se snižuje přesnost této metody, dle [2].

2.3.2 Experimentální metoda

Tuto metodu lze aplikovat na již existující systém a to na základě experimentálně získaných údajů na daném systému. Dále musí platit, že vstupní i výstupní signály jsou měřitelné. Matematický model je možné získat rozbořem vstupních a výstupních veličin. Výsledný model je většinou jednoduchý, ale je přesný pouze v pracovním bodě. U systému na který chceme použít experimentální metodu, musí být možno na tomto systému provádět experimenty a musí být možné zaznamenávat data v závislosti na čase. Rozbořem těchto měření lze získat matematický model a to nejčastěji na základě aspoň částečné znalosti vnitřní struktury, z této znalosti je možné odhadnout řád systému a koeficienty rovnic, které upravíme na základě experimentů, dle [2].

2.4 Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Lagrangeova rovnice druhého druhu umožňuje získat matematický model mechanického systému, tedy pohybové rovnice. U Lagrangeovy rovnice druhého druhu je jiný přístup než má klasická mechanika. To je zavedením zobecněných souřadnic q_j a rychlosti \dot{q}_j na místo souřadnic euklidovského prostoru x_i a \dot{x}_i , kde $i=1,2,3$ a $j=1,2,3,\dots,n$. Euklidovský prostor je převeden na konfigurační prostor, jehož dimenze n je rovna počtu stupňů volnosti soustavy, v tomto prostoru je systém reprezentován jedním bodem pohybujícím se po konfigurační trajektorii. Nejčastěji se používá u systémů s více stupni volnosti a pomocí této rovnice dokážeme vytvořit pohybové rovnice systému, tedy jeho matematický model. Základem této metody je využití popisu systému Lagrangianem L . Lagrangian popisuje chování mechanického systému jednoduchým výrazem jako rozdíl kinetické E_K a potenciální energie E_P v zobecněných souřadnicích, dle [8].

$$L = E_K(q_j, \dot{q}_j, t) - E_P(q_j, t) \quad (33)$$

Soustava Lagrangeových rovnic druhého druhu potom bude

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (34)$$

Kde po dosazení do této rovnice lze vypočítat pohybové rovnice konzervativní soustavy v konfiguračním prostoru.

V případě disipativních prvků je třeba zavést tzv. Dissipativní funkci R , která se dá vyjádřit jako

$$R = \frac{1}{2} \sum_j k_j \dot{q}_j^2; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (35)$$

kde $k_j \dot{q}_j$ představuje jakoukoliv disipativní sílu. Mezi běžné disipativní síly patří Coulumbovské tření, lineární tlumení (např. tlumič) a nelineární tlumení.

Tuto disipativní funkci potom zavedeme do Lagrangeovy rovnice jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0; j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (36)$$

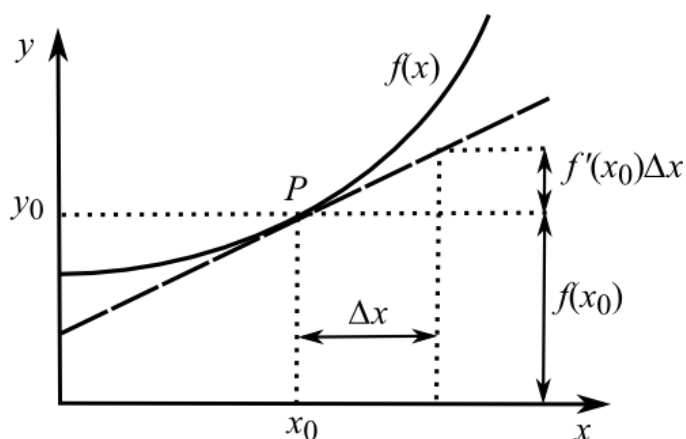
2.5 Linearizace

Při linearizaci (někdy nazýváno jako aproximace funkce) se nahrazuje nelineární křivka, nejčastěji jako průběh funkce, přímkou. V případě linearizace diferenciální rovnice získáme lineární diferenciální rovnici, kterou lze dále zjednodušit do přírůstkového zápisu. Nejčastějším důvodem linearizace je zjednodušení následných výpočtů, nebo linearizace naměřených hodnot (lineární regrese), dle [9].

2.5.1 Linearizace tečnou v pracovním bodě

Na následujícím obrázku (Obr. 13) je ukázán cíl linearizace s tečnou v pracovním bodě a to nahrazení nelineární funkce přímkou. Při linearizaci reálného systému se linearizuje statická charakteristika systému. Statická charakteristika jsou ustálené hodnoty výstupů v nekonečnu pro různé vstupy.

Linearizace je vždy provedena pro konkrétní bod, tento bod je nazýván pracovním bodem a je zvolen v části statické charakteristiky, ve které se náš systém nachází nejčastěji. Na obrázku je pracovní bod P vyznačen souřadnicemi x_0 a y_0 . Z obrázku je zřejmé, že právě v pracovním bodě P , je linearizovaná funkce tečná k původní funkci a že v okolí pracovního bodu bude linearizovaná funkce nejvíce odpovídat původní funkci, dle [10].



Obr. 13. Grafický význam linearizace

Tuto linearizaci lze matematicky provést pomocí rozkladu funkce v Taylorovu řadu a jejím následným omezením na lineární členy. Tím se ztratí přesnost původní funkce, ale v okolí pracovního bodu bude aproximační chyba velmi malá. Taylorovu řadu lze získat pomocí následujícího předpisu s ukázkou několika prvních členů rozvoje, dle [10].

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (37)$$

V případě linearizace systému často zavádíme do tohoto rozvoje přírůstkový model pro proměnou x a y . To se provede zavedením odchylek Δx a Δy od pracovního bodu P substitucí

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ y &= y_0 + \Delta y \end{aligned} \quad (38)$$

Přírůstkový model po dosazení Taylorova rozvoje bude

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots \quad (39)$$

Po zavedení přírůstkového modelu jde z rovnic vykrátit ustálené stavy. Pomocí toho zkrácení lze vyloučit posunutí statické charakteristiky vůči nule (Obr. 14) potom je počátkem matematického modelu ustálený stav o hodnotách pracovního bodu kde posun po osách x a y vyjadřuje velikost přírůstku, dle [10].



Obr. 14. Statická charakteristika přírůstkového modelu

3 POPISY SYSTÉMŮ

Existuje mnoho popisů systémů např. diferenciální rovnicí, přenosem, stavovým popisem, frekvenční přenosem, přechodovou funkcí impulzní funkcí. Tato kapitola je věnována těm nejvhodnějším popisům pro práci s matematickým modelem, kterými je přenos a stavový popis. Je zde kladen také velký důraz na Laplaceovu transformaci, která je úzce spjata jak s přenosem tak stavovým popisem.

3.1 Přenos

Přenos je jednou z nejpoužívanějších metod popisu systému hlavně proto, že je jednoduchý a dobře se s ním pracuje. Přenos systému $G(s)$ z lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty v obecném tvaru získáme pomocí Laplaceovy transformace při nulových počátečních podmínkách $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = y^{(n)}(0) = 0$, $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = u^{(m)}(0) = 0$, dle [1].

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (40)$$

kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $u(t)$ je funkce vstupní veličiny, $y(t)$ je funkce výstupní veličiny, a_n a b_m jsou konstantní koeficienty, m a n nejvyšší derivace čitatele a jmenovatele.

Provedením Laplaceovy transformace na předchozí rovnici vynikne

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s) \end{aligned} \quad (41)$$

Kde s je komplexní proměnná, a_n a b_m jsou konstantní koeficienty LDR, $Y(s)$ a $U(s)$ jsou obrazy funkcí $y(t)$, $u(t)$.

Přenos systému je vyjádřen jako podíl obrazů výstupu $U(s)$ a vstupu $Y(s)$. Vyjádřením přenosu tedy lomené funkce jako

$$G(s) = \frac{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)} Y(s) = U(s) \quad (42)$$

Tedy obecný zápis přenosu může být dán jako podíl polynomů $b(s)$ a $a(s)$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (43)$$

Kde $a(s)$ je označován jako charakteristický polynom přenosu. V případě že je vyjádřen jako, roven nule získáme charakteristickou rovnici $a(s) = 0$, jejímž řešením jsou póly přenosu (tj. kořeny $a(s)$). Řešením rovnice $b(s) = 0$ získáme nuly přenosu (tj. kořeny $b(s)$). Řád přenosu je dán stupněm polynomu ve jmenovateli. Absolutní řád přenosu je potom rozdíl stupně řádu polynomů jmenovatele a čitatele. Dále platí, že hodnota funkce v nekonečnu je získána z obrazu jako

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \frac{b_0(s)}{a_0(s)} \quad (44)$$

kde tato hodnota se nazývá zesílení a obecně se značí k .

Přenosová funkce může být vyjádřena také pomocí nul a pólů.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s - n_1) \dots (s - n_{i-1})(s - n_i)}{(s - p_1) \dots (s - p_{j-1})(s - p_j)} \quad (45)$$

kde n_i jsou kořeny čitatele (nuly), p_j jsou kořeny jmenovatele (póly), i a j je počet kořenů čitatele a jmenovatele.

V případě reálných pólů a nul lze zavést zápis pomocí časových konstant

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(1 + s\tau_1) \dots (1 + s\tau_{i-1})(1 + s\tau_i)}{(1 + sT_1) \dots (1 + sT_{j-1})(1 + sT_j)} \quad (46)$$

kde τ_i jsou časové konstanty v čitateli, T_j jsou časové konstanty ve jmenovateli, i a j je počet časových konstant čitatele a jmenovatele, dle [9].

Časová konstanta je zápornou převrácenou hodnotou nuly nebo pólu přenosu jako

$$T_j = -\frac{1}{p_j}, \tau_i = -\frac{1}{n_i} \quad (47)$$

3.1.1 Laplaceova transformace

Jedná se o integrální transformaci použitelnou k řešení lineárních diferenciálních rovnic. Velice často se používá při práci s modely systémů spojitých v čase. Cílem této transformace je transformace složitých vztahů v časové oblasti do jednodušších vztahů v oblasti komplexní proměnné s . To je velice často převedení diferenciální rovnice na rovnici algebraickou. Vyřešení problému v oblasti komplexní proměnné a pomocí zpětné Laplaceovy transformace získání výsledku v časové oblasti. Laplaceova transformace je označována znakem \mathcal{L} s argumentem ve složených závorkách, kterým je funkční předpis. Originál (také. vzor nebo předmět) je značen malým písmenem a obraz velkým písmenem, dle [11] a [12].

Laplaceovou transformací funkce f získáme funkci komplexní proměnné F . Tato transformace je definována jako

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (48)$$

kde $t \geq 0$, \mathcal{L} je operátor Laplaceovy transformace, f je originál (tj. funkce závislá na čase), F je obraz funkce f (tj. funkce komplexní proměnné), t je čas, s je komplexní proměnná, dle [1].

Aby funkce f byla originálem k obrazu v Laplaceově transformaci F (pozn. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$) musí funkce f splňovat následující podmínky:

- funkce $f(t)$ musí být nulová pro záporný čas

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

- funkce f musí být alespoň po částech spojitá, body nespojitosti musí být spočitatelné a v těchto bodech musí existovat konečné jednostranné limity kde v bodě $t = 0$ existuje pouze jednostranná limita zprava.
- musí být exponenciálního řádu, tj. pokud existují konstanty $M > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ musí platit $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ a to právě pro každé $t \in [0, \infty)$. Číslo α se nazývá indexem růstu funkce exponenciálního řádu. Pokud je funkce f exponenciálního řádu s indexem růstu α potom existuje Laplaceova transformace v intervalu (α, ∞) .

Tyto podmínky jsou definičním oborem Laplaceovy transformace a jsou označovány, jako *předmět standartního typu* většinou je tento obor označován jako \mathcal{L}_0 , dle [13].

Mezi nejpoužívanější a nejdůležitější vlastnosti Laplaceovy transformace patří

- Věta o linearitě – pokud funkce $f_1 \in \mathcal{L}_0$ a současně funkce $f_2 \in \mathcal{L}_0$ potom součet těchto funkcí bude taky náležet předmětu standartního typu, dle [13]. Z důvodu linearity integrálu (tj. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$) a ze vzorce pro Laplaceovu transformaci platí

$$\mathcal{L}\{af_1(t) \pm bf_2(t)\} = aF_1(s) \pm bF_2(s) \quad (49)$$

- Věta o derivování originálu – pokud funkce f a všechny derivace této funkce náleží předmětu standartního typu, potom vztah pro první derivaci odvodíme s použitím integrace per partes jako

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left| \begin{array}{ll} u' = f'(t) & u = f(t) \\ v = e^{-st} & v' = -se^{-st} \end{array} \right| \\ &= [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)f(t)e^{-st}dt \\ &= [f(\infty) \cdot 0 - f(0) \cdot 1] + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

Pro první derivaci tedy platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad (50)$$

Vztah pro vyšší derivace se odvodí obdobně obecně a pro n -tou derivaci platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (51)$$

- Věta o posunutí v čase – pokud f náleží předmětu standartního typu potom a $t < a$ potom pro posunutí v čase můžeme odvodit jako

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\} &= \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt \stackrel{t=\tau+a}{=} \int_{-a}^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau \\ &= e^{-sa} \int_{-a}^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

Lze tedy tvrdit, že pro posunutí v čase platí

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-st}F(s) \quad (52)$$

- Věta o koncové hodnotě – pokud funkce f a všechny derivace této funkce náleží předmětu standartního typu, potom koncovou hodnotu odvodíme z obrazu první derivace, dle [12] a [13].

Protože limita z Laplaceovy transformace první derivace pro s jdoucí k nule, má řešení jako

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = [f(t)]_0^{\infty} = f(\infty) - f(0)$$

tak zároveň musí platit, že limita z obrazu první derivace pro s jdoucí k nule, jí musí být rovna

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = f(\infty) - f(0)$$

Protože platí, že $\lim_{s \rightarrow 0} f(0) = f(0)$ můžeme tyto členy vykrátit, tím získáme konečnou podobu rovnice koncové hodnoty jako

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty) \quad (53)$$

Pro funkci závislou na čase samozřejmě platí, že koncová hodnota bude

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (54)$$

- Věta o počáteční hodnotě – pokud funkce f a všechny derivace této funkce náleží předmětu standartního typu, proto limita z Laplaceovy transformace první derivace pro s jdoucí k nekonečnu, má řešení jako

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = 0,$$

tak zároveň musí platit, že limita z obrazu první derivace pro s jdoucí k nekonečnu, jí musí být rovna, dle [12], jako

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = 0,$$

dle [12]. Převedením funkční hodnoty $\lim_{s \rightarrow \infty} f(0) = f(0)$ v počátku na druhou stranu rovnice získáme konečnou podobu rovnice počáteční hodnoty jako

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0) \quad (55)$$

Pro funkci závislou na čase samozřejmě platí, že počáteční hodnota bude

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \quad (56)$$

3.1.2 Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná (nebo inverzní) Laplaceova transformace slouží k získání originálu $f(t)$ ze známého obrazu $F(s)$. Značí se jako \mathcal{L}^{-1} s argumentem ve složených závorkách.

Pro provedení zpětné Laplaceovy transformace z obrazu funkce v případě že originál funkce náleží \mathcal{L}_0 platí

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \oint_C F(s)e^{-st}ds, \quad (57)$$

kde \mathcal{L}^{-1} představuje operátor zpětné Laplaceovy transformace, $F(s)$ je obraz funkce $f(t)$,

C označuje křivku, ve které leží všechny singulární body. Dále platí že $R \rightarrow \infty$ je poloměr kružnice v počátku komplexní roviny, přetnuté přímkou v bodech $\sigma + j\omega$ a $\sigma - j\omega$, kdy všechny singulární body leží nalevo od této přímky a uvnitř původní kružnice. Úsečka mezi body $\sigma + j\omega$ a $\sigma - j\omega$ se nazývá Bromwichova integrační cesta (nebo linie). Přetnutím kruhu vzniká nová uzavřená křivka C tvořená levou částí kruhu a Bromwichovou integrační cestou, dle [1],[12] a [13].

Pokud je obraz racionální lomená funkce, bude platit, že integrací Bromwichovy cesty získáme originál funkce jako

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{-st}ds \quad (58)$$

Pokud platí, že $F(s)$ je racionální lomená funkce, jejíž kořeny jmenovatele leží uvnitř C , bude součet residuí představovat originál funkce, jako

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=p_k} [F(s)e^{-st}] \quad (59)$$

kde n je počet kořenů čitatele obrazu $F(s)$, p_k jsou jednotlivé kořeny čitatele.

Tento zápis se dá vyjádřit pro nenásobný pól, jako

$$f(t) = \underset{s=p_k}{res} [F(s)e^{-st}] = \lim_{s \rightarrow p_k} [(s - p_k)F(s)e^{-st}] \quad (60)$$

a násobný pól jako

$$f(t) = \underset{s=p_k}{res} [F(s)e^{-st}] = \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow p_k} \frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}} [(s - p_k)^{n_i} F(s)e^{-st}] \quad (61)$$

Mezi další metody řešení zpětné Laplaceovy transformace, patří využití slovníku Laplaceovy transformace nebo také Heavisideův rozvoj, který využívá residuí. Tato metoda spočívá v rozdělení obrazu na parciální zlomky a ve zpětné transformaci jednotlivých zlomků s pomocí slovníku Laplaceovy transformace, je vhodná pro složitější obrazy a komplexně sdružené póly, dle [1].

Uvažujme obraz racionální lomené funkce, kterou je třeba zjednodušit s existujícím originálem. Potom jmenovatel obrazu se rozloží na součin kořenových činitelů, další postup je volen podle typu získaných kořenů.

- Pro nenásobné kořeny platí, že je třeba obraz získat v následujícím tvaru pomocí parciálních zlomků

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n},$$

kde jednotlivé koeficienty A_n získáme jako

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow p_n} [(s - p_k)F(s)] = [(s - p_k)F(s)]_{s=p_n} \quad (62)$$

kde A_n je koeficient nenásobného kořene, p_n je nenásobný kořen.

- Pro násobné kořeny platí, že je třeba obraz získat v následujícím tvaru pomocí parciálních zlomků

$$F(s) = \frac{B_1}{s - p_1} + \frac{B_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{B_k}{(s - p_1)^n} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n},$$

kde koeficienty nenásobných kořenů A_n vypočteme stejně jako v předchozím

případě a koeficienty násobných kořenů B_k jako

$$B_k = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-p_i)^k F(s) e^{-st}] \right)_{s=p_i} \quad (63)$$

kde k je celkový počet jednotlivých násobných kořenů, B_k je koeficient násobného kořenu, p_i je k -násobný kořen, dle [1].

3.2 Stavový popis LSDS

Vnitřní popis chování dynamického systému S se dá popsat stavovým popisem. Tento model má s vstupů $\mathbf{u}(t)$, má p výstupů $\mathbf{y}(t)$ a n stavových proměnných $\mathbf{x}(t)$. Stav spojitého systému je jednoznačně určen stavem systému se znalostí hodnoty vstupu v libovolném okamžiku. Výstupy tohoto matematického modelu nejsou závislé jen na vstupech $\mathbf{u}(t)$ ale i na stavech systému $\mathbf{x}(t)$. V případě že existuje diferenciální rovnice řádu r popisující systém, kterou lze rozepsat na r diferenciálních rovnic prvního řádu, dle [14] a [15]. Které lze, opět převést zpět na původní diferenciální rovnici, potom platí vektorový zápis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (64)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (65)$$

V případě že systém je invariantní v čase a existují lineární funkce \mathbf{f} a \mathbf{g} potom lze stavový popis zapsat v maticovém zápisu ve tvaru

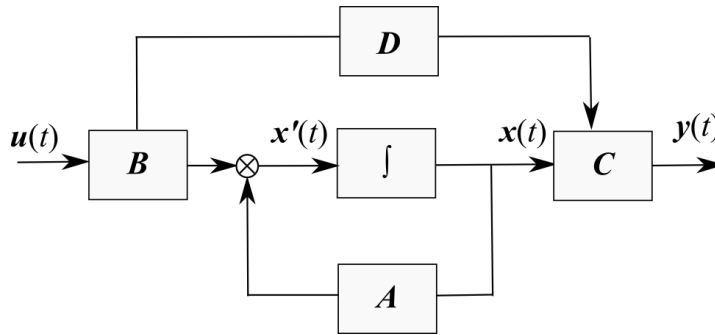
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (66)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (67)$$

Kde $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupních veličin o rozměru p , $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupních veličin o rozměru q , $\mathbf{x}(t)$ je vektor stavových proměnných o rozměru n , \mathbf{A} je matice systému o velikosti $n \times n$, \mathbf{B} je matice buzení o velikosti $n \times p$, \mathbf{C} je matice výstupní o velikosti $q \times n$ a \mathbf{D} je matice převodu o velikosti $q \times p$, dle [15]. Tyto rovnice stavového popisu se dají převést na blokové schéma, které se dá využít i v simulacích. Rovnici pro schéma lze získat integrováním první rovnice, dosazením do druhé rovnice jako

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \int (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) d\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (68)$$

Schématické zapojení získané z této rovnice je uvedeno na následujícím obrázku (Obr. 15), dle [15].



Obr. 15. Blokové schéma stavového popisu

3.2.1 Převod stavového popisu na přenos

Převod na přenos ze stavového popisu je jednoznačný a dá se odvodit z rovnic stavového popisu a to jako Laplaceova transformace první rovnice stavového popisu, dle [15], jako

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (69)$$

Následným vytknutím $X(s)$ a jeho vyjádřením získáme

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (70)$$

Po dosazení do výstupní rovnice v Laplaceově transformaci získáme konečnou rovnici pro výpočet přenosu ze stavového popisu jako

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (71)$$

kde pro výpočet inverzní matice se často používá adjungovaná matice a tento vztah je potom psán ve tvaru

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D \quad (72)$$

3.2.2 Převod přenosu na stavový popis

Převod přenosu je možné učinit pomocí několika metod. Výsledný stavový popis je nejednoznačný a závisí na volbě stavových proměnných. Mezi často používané metody patří přímá metoda, metoda postupné integrace a Jordanův kanonický tvar, dle [15].

4 MNOHOROZMĚROVÉ SYSTÉMY

V mnoho rozměrových systémech (MIMO) je, na rozdíl od jednorozměrných, více vstupů a výstupů. Jednotlivé vstupy v systémech MIMO ovlivňují více výstupů.

V případě popisu mnohorozměrných systémů diferenciální rovnicí, jsou zpravidla popsány soustavou diferenciálních rovnic, aby bylo možno vyjádřit vlivy jednotlivých vstupů na jednotlivé výstupy, dle [14] a [16]. Systém prvního řádu s dvěma vstupy a dvěma výstupy můžeme popsat soustavou diferenciálních rovnic jako

$$y'_1(t) + a_1 y_1(t) + a_0 y_2(t) = b_1 u_1(t) + b_0 u_2(t) \quad (73)$$

$$y'_2(t) + a_4 y_2(t) + a_3 y_1(t) = b_4 u_1(t) + b_3 u_2(t) \quad (74)$$

kde y_1 a y_2 jsou vstupní veličiny, u_1 a u_2 jsou výstupní veličiny a a_i , b_i jsou konstanty.

Aplikací Laplaceovy transformace na tyto rovnice a rozdělení do matic získáme maticovou rovnici ve tvaru

$$\begin{bmatrix} s + a_1 & a_0 \\ a_3 & s + a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \\ b_4 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (75)$$

Obecný tvar tohoto maticového zápisu je tedy

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{B}(s)\mathbf{U}(s) \quad (76)$$

4.1 Přenosová matice

Přenosovou matici mnohorozměrného systému lze obecně psát ve tvaru dílčích přenosů, dle [17], jako

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) & \dots & S_{1r}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) & \dots & S_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1}(s) & S_{n2}(s) & \dots & S_{nr}(s) \end{bmatrix} \quad (77)$$

Obecně lze tuto matici získat jako levý paticový zlomek z maticové rovnice jako

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s)\mathbf{B}(s) \quad (78)$$

5 MATLAB

MATLAB je interaktivní programově ovládané prostředí a skriptovací jazyk. Jehož využití se v posledních letech stává standardem v oblasti vědy, průmyslu a výzkumu, zvláště pak v technických oborech a ekonomii. MATLAB nabízí mnoho výpočetních nástrojů a rozsáhlých knihoven specializovaných na různé obory které jsou dále rozšiřitelné přídatnými „toolboxy“. Mezi základní úkony v MATLAB patří práce s maticemi vykreslování grafů funkcí, implementace algoritmů, počítačové simulace, analýza a vytváření vlastních aplikací s uživatelským rozhraním. Pro počítačové simulace byl později přidán program MATLAB/Simulink jako součást MATLAB. Skriptovací jazyk MATLAB byl původně navržen jen pro matematické účely ale postupem času se rozrostl a v současné době umožňuje programování vlastních aplikací.

5.1 MATLAB/Simulink

Jedná se o program v rámci MATLAB který slouží k simulacím dynamických systémů, kde pro simulace je použito algoritmů MATLAB pro řešení diferenciálních rovnic. Na rozdíl od MATLAB, kde nejčastěji pracujeme s příkazovou řádkou, v MATLAB/Simulink pracujeme interaktivně s blokovým schématem. S pomocí těchto blokových schémat lze vytvořit matematické modely lineárních i nelineárních v čase spojitých nebo diskrétních systémů. MATLAB/Simulink umožňuje tvorbu vlastních uživatelských bloků. Jeho největší výhodou je právě grafická přehlednost grafických schémat, která umožňuje dobře se orientovat i ve složitých matematických modelech. Knihovny MATLAB/Simulink jde nadále rozšiřovat pomocí takzvaného „blocksetu“ který obsahuje další bloky a to nejčastěji vytvořených pro určité vědní obory, dle [18].

5.2 Simscape

Simscape je rozšiřující knihovna MATLAB/Simulink. Tato knihovna umožňuje vytvoření matematického modelu určitých systémů např. mechanických, elektrických a hydraulických. Jednotlivé bloky v knihovně Simscape odpovídají reálným součástem např. blok pružiny nebo blok rezistoru. Na rozdíl od standartního blokového schématu v MATLAB/Simulink zavádí do schémat fyzikální veličiny a pokročilé nastavení řešitelů diferenciálních rovnic. Z důvodu, že bloky reprezentují reálné součásti a signály mezi nimi, jsou signály fyzikálních veličin propojení bloků, tedy veškerá propojení představují přenos energie. Z toho vyplývá největší výhoda knihovny Simscape a to je že nemusíme

znát žádné fyzikální zákony, nemusíme získávat matematicko-fyzikální model, protože ze znalosti struktury systému dokážeme vytvořit schéma v Simscape, které bude reprezentovat systém jako jeho matematický model.

Knihovna Simscape má mnoho podknihoven pro konkrétní obory např. SimMechanics, SimHydraulics, SimElectronics, SimDriveline a SimPowerSystems. V případě, že požadovaný blok neexistuje v žádné knihovně Simscape, může si ho uživatel vytvořit pomocí programovacího jazyku speciálního pro Simscape „Simscape language“.

5.2.1 Programovací jazyk Simscape

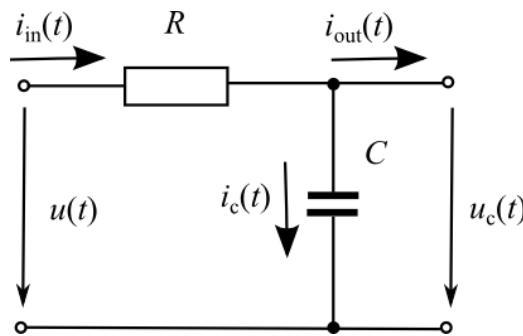
Tento programovací jazyk umožňuje vytváření vlastních bloků a nových, nebo upravených fyzikálních oblastí. Program lze psát přímo v MATLAB nebo v jakémkoliv textovém editoru. Programovací jazyk je intuitivní a dovoluje používání některých matematických funkcí z MATLAB a jiné jsou specifické pro tento programovací jazyk. Jednotlivé části programu jsou vždy uloženy v programovém bloku, který označuje, co je v něm obsaženo např. „params“, „inputs“ a „equations“, každý programový blok je zakončen příkazem „end“. Každý program začíná fyzikální doménou, do které patří modelovaná součást, dále může následovat programový blok deklarace vstupů, výstupů, programový blok zadávaných parametrů a programový blok podmínek ošetřujících zadavatelé parametry v určitém rozsahu. A jako poslední je hlavní část, kde jsou rovnice popisující vytvářenou součást. Hotový program je uložen s koncovkou „.sc“ a je třeba ho přeložit v MATLAB. Po přeložení se vytvoří soubor s blokem, který jsme naprogramovali.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

6 UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY ELEKTRICKÝCH SYSTÉMŮ

6.1 Integrační článek RC

Jde o jednoduché sériové zapojení rezistoru R a kondenzátoru C kde výstupní napětí $u_c(t)$ je odbíráno na svorkách kondenzátoru.



Obr. 16. Schéma zapojení integračního článku

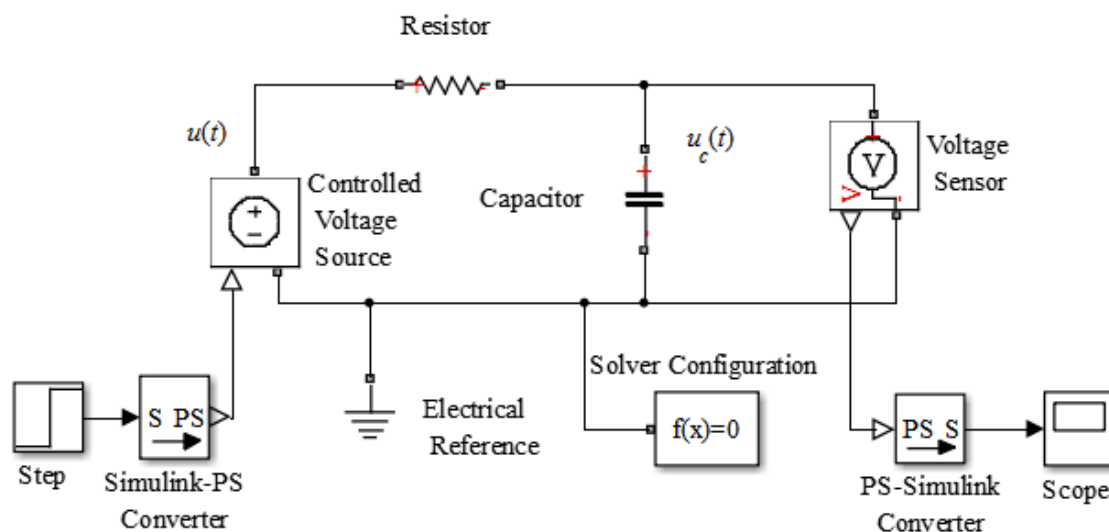
Výstupní napětí $u_c(t)$ je integrací vstupního napětí $u(t)$ podle času. Obvod může sloužit jako dolní propust nebo jako integrátor.

Protože jde o sériové zapojení, musí platit, že součet jednotlivých dílčích napětí bude roven vstupnímu napětí $u(t)$.

$$u(t) = u_c(t) + u_R(t) \quad (79)$$

Kde $u_R(t)$ je úbytek napětí na rezistoru a $u_c(t)$ je úbytek napětí na kondenzátoru.

Zdroj napětí je řízený skokovou funkcí ze MATLAB/Simulink, převedenou pomocí bloku *MATLAB/Simulink-PS*. Dále je připojen referenční bod a také *Solver Configuration*. Napětí je snímáno voltmetrem a je převáděno pomocí bloku *PS-MATLAB/Simulink* do bloku *Scope* kde si můžeme zobrazit výsledný graf.



Obr. 17. Schéma zapojení integračního članku v MATLAB/Simulink s použitím knihovny Simscape

6.1.1 Diferenciální rovnice

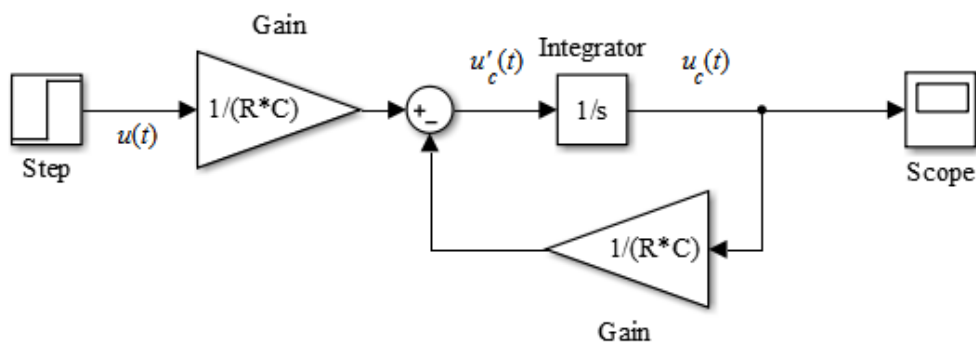
Na rezistor lze aplikovat Ohmův zákon $u_R(t) = Ri_c(t)$ a následně za proud na kondenzátoru lze dosadit rovnici $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$, která platí za předpokladu, že výstupní proud bude nulový.

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u(t) \quad (80)$$

Dále je možné tuto rovnici vyjádřit ve tvaru, kde derivace je převedena na jednu stranu rovnice a zbytek na druhou. Toto je ideální tvar pro použití zpětnovazebního obvodu v MATLAB/Simulink kdy bude schéma nejjednodušší a výsledek nejpřesnější.

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{u(t)}{RC} - \frac{u_c(t)}{RC} \quad (81)$$

Při simulaci volíme základní bloky MATLAB/Simulink jako je *Sum*, *Gain* a *Integrator*. Je vhodné změnit řešitele v nastavení, pro tento obvod je vhodný např. řešitel ode15s.



Obr. 18. Schématické zapojení integračního článku v MATLAB/Simulink ze základních bloků

6.1.2 Přenos systému

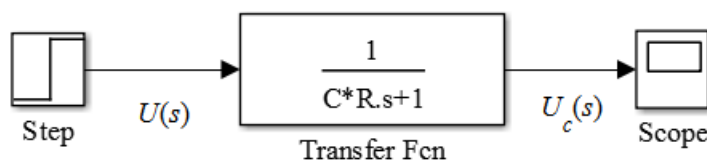
Získanou diferenciální rovnici je možné řešit pomocí Laplaceovy transformace. Diferenciální rovnice po aplikaci zákona o n-té derivaci bude vypadat následovně.

$$RCU_c(s)s + U_c(s) = U(s) \quad (82)$$

Přenos lze získat jako poměr výstupu ke vstupu.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (83)$$

Se znalostí přenosu je nyní možné provést simulaci s využitím bloku *Transfer Fcn*, ke kterému se připojí požadovaný vstup např. *Step* a výstup v podobě *Scope* pro zobrazení grafu.



Obr. 19. Schématické zapojení integračního článku v MATLAB/Simulink z přenosové funkce

6.1.3 Stavový popis

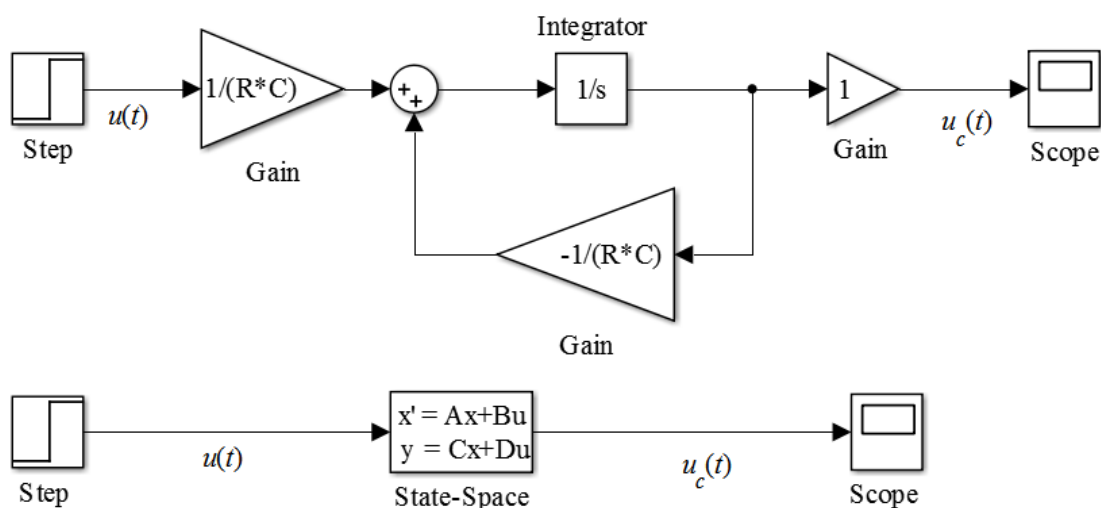
Stavový popis lze určit přímo z diferenciálních rovnic jednoduchou úvahou. Je zřejmé, že rozměry všech matic budou 1x1 protože rovnice je prvního řádu. Z tohoto důvodu stačí vyjádřit první derivaci napětí na kondenzátoru z diferenciální rovnice, protože napětí na

kondenzátoru bude stavovou proměnnou. Výstupní rovnice je zřejmá, protože chceme zjistit napětí na kondenzátoru, proto výstupem bude přímo stavová proměnná.

$$u'_c(t) = -\frac{1}{RC}u_c(t) + \frac{1}{RC}u(t) \quad (84)$$

$$u_c(t) = 1u_c(t)$$

Na základě získaného popisu lze provést další simulace a to přímo s využitím *State-Space* nebo ze základních bloků. Začneme s blokem *State-Space*, kde stačí zadat matice popisu, to jsou v našem případě $A = \left[-\frac{1}{RC}\right]$, $B = \frac{1}{RC}$, $C = [1]$ a $D = [0]$. Dalším způsobem může být, právě jmenované zapojení ze základních bloků, které vychází z rovnic stavového popisu.



Obr. 20. Zapojení stavového modelu integračního članku ze základních bloků a s využitím bloku State-Space

6.1.4 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací zvolíme hodnoty součástí obvodu a vstupního napětí. Rezistor bude mít odpor $100\text{k}\Omega$ a kapacita kondenzátoru je 31nF . Vstupní napětí $u(t)$ bude odpovídat jednotkovému skoku, který v počátku simulace nabude hodnotu 1V z hodnoty 0V.

V příkazové řádce MATLAB zadáme $C=31\text{e-}9$ a potom $R=100\text{e}3$. Získáme diferenciální rovnici pro MATLAB/Simulink ve tvaru

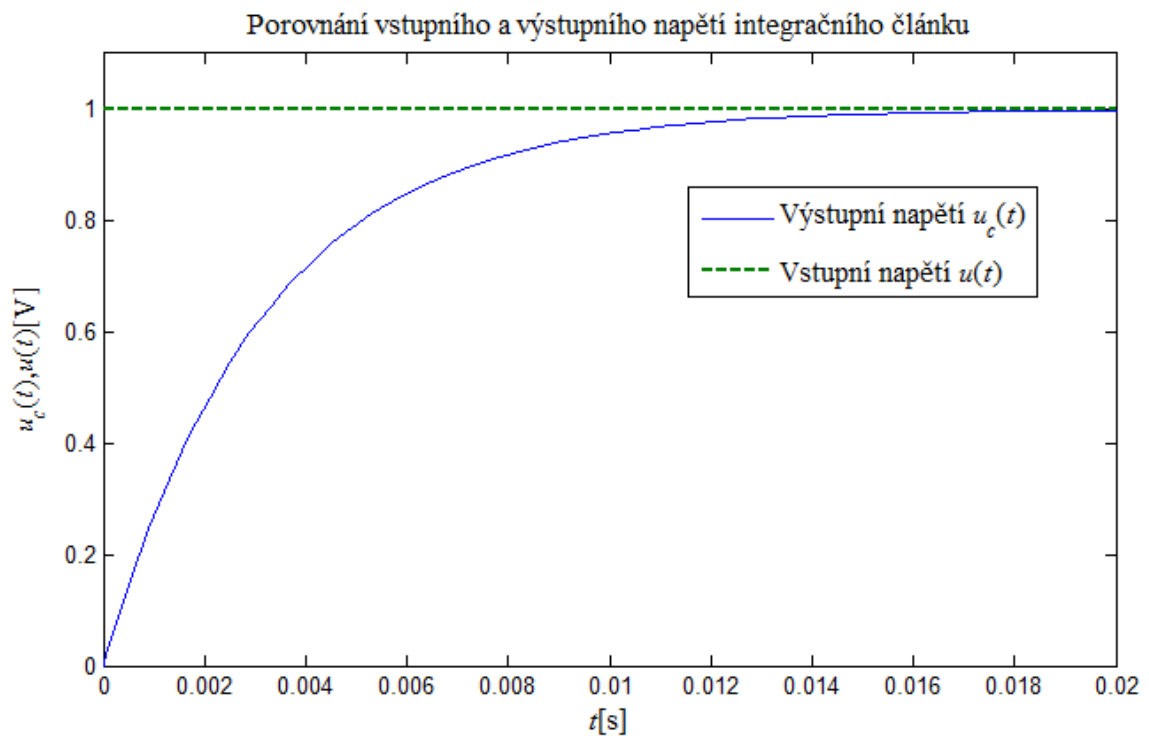
$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{u(t)}{0,0032} - \frac{u_c(t)}{0,0032}$$

Po dosazení do stavového popisu dostaneme matice jako $\mathbf{A} = \left[-\frac{1}{0,0032}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\frac{1}{0,0032}\right]$, $\mathbf{C} = [1]$ a $\mathbf{D} = [0]$.

Po dosazení do přenosu získáme přenos ve tvaru

$$G(s) = \frac{1}{0,0032s + 1}$$

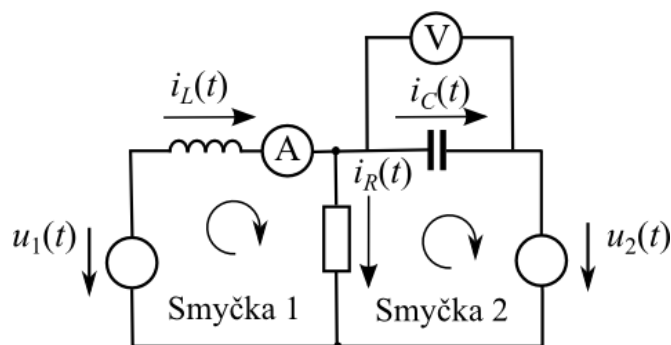
Délku simulace nastavíme na 0,02 sekundy. Provedeme simulaci a výsledek si zobrazíme v bloku *Scope*. Při správném zapojení blokových schémat v MATLAB/Simulink a správném dosazení parametrů je výsledek totožný u všech simulací.



Obr. 21. Graf výstupu simulací integračního článku

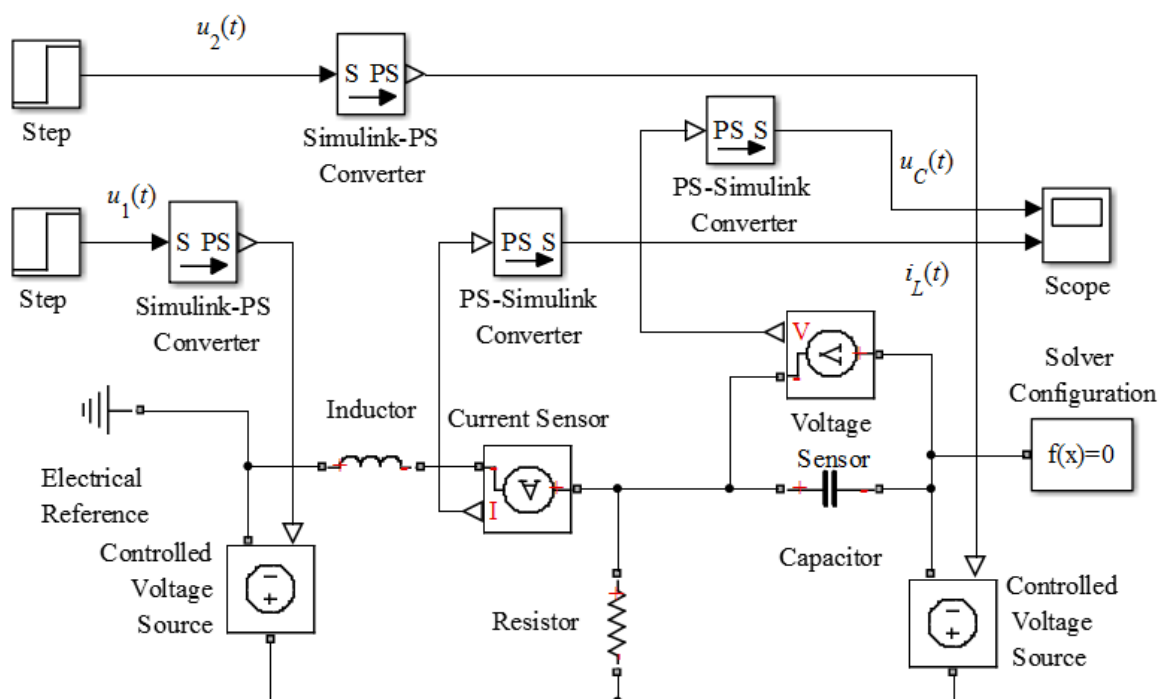
6.2 Obvod s dvěma zdroji a dvěma dynamickými prvky

Jedná se o elektrický obvod s dvěma vstupy $u_1(t)$ a $u_2(t)$, které jsou symbolizovány zdroji. Výstupem je proud cívku $i_L(t)$ a napětí na kondenzátoru $u_C(t)$, dle [19]. Jedná se tedy o MIMO systém, protože proud cívku a napětí na kondenzátoru jsou na sobě závislé.



Obr. 22. Schéma zapojení elektrického obvodu

Ze znalosti zapojení můžeme přímo provést simulaci v Simscape. Zapojení je úplně stejné jako na Obr. 22. Jako zdroje jsou zvoleny *Controlled Voltage Source* s přívodem signálu z MATLAB/Simulink. K obvodu je nutné dále připojit Solver a referenční bod.



Obr. 23. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink – Simscape

6.2.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice lze získat pomocí Kirchhoffových zákonů.

Nejdříve je nutné zvolit směr proudů v obvodu a směr smyček. Potom lze pomocí prvního Kirchhoffova zákona určit rovnici proudu v obvodu.

$$i_c(t) - i_L(t) + i_R(t) = 0 \quad (85)$$

Pomocí druhého Kirchhoffova zákona lze určit napětí v jednotlivých smyčkách.

$$u_L(t) + u_R(t) - u_1(t) = 0 \quad (86)$$

$$u_C(t) + u_2(t) - u_R(t) = 0 \quad (87)$$

Z rovnice pro druhou smyčku lze vyjádřit

$$u_R(t) = u_2(t) + u_C(t) \quad (88)$$

a tuto rovnici přímo dosadit do první rovnice napětí. Následovně lze dosadit rovnici pro napětí na cívce $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$, tím vznikne diferenciální rovnice ve tvaru

$$L \frac{di_L}{dt} + u_C(t) = u_1(t) - u_2(t) \quad (89)$$

Z rovnice pro proud lze vyjádřit diferenciální rovnici pro napětí na kondenzátoru dosazením $i_c(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$. Stejně tak si lze z Ohmova zákona vyjádřit proud $i_R(t)$ jako

$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}. \quad (90)$$

Po dosazení do rovnice proudu a vyjádření $u_R(t)$ získáme rovnici

$$u_R(t) = Ri_L(t) - RC \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (91)$$

Dále se dosazením rovnice z minulého kroku za $u_R(t)$ vykrátí $u_R(t)$ a vznikne soustava dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých $i_L(t)$ a $u_C(t)$, což jsou výstupy ze systému.

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} - Ri_L(t) + u_C(t) = -u_2(t) \quad (92)$$

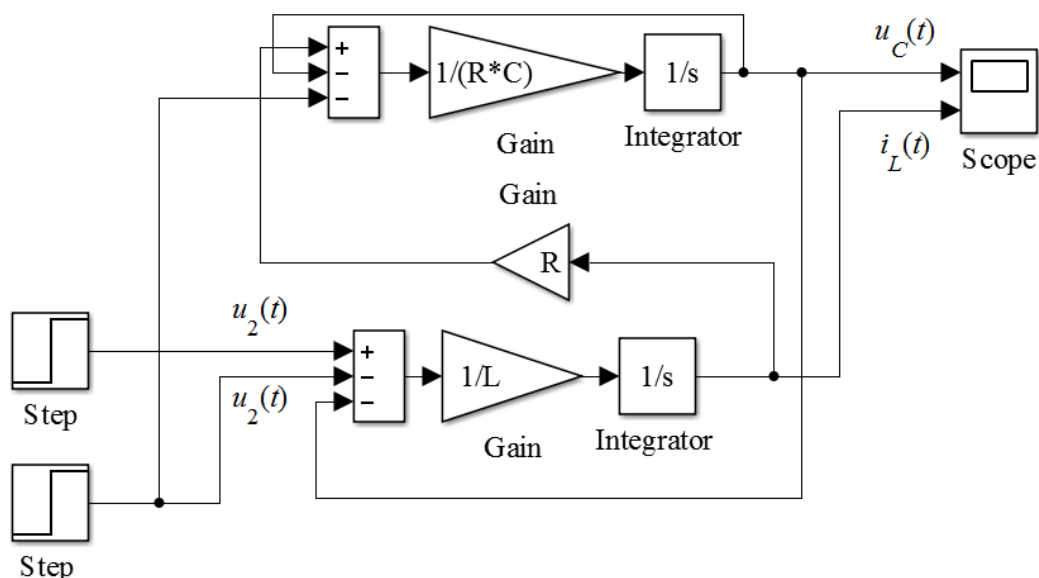
$$L \frac{di_L(t)}{dt} + u_C(t) = u_1(t) - u_2(t) \quad (93)$$

Rovnice pro simulaci v MATLAB/Simulink se vyjádří s derivací na jedné straně rovnice a ostatními prvky na druhé straně

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{R}{RC} i_L(t) - \frac{1}{RC} u_C(t) - \frac{1}{RC} u_2(t) \quad (94)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_1(t) - \frac{1}{L} u_2(t) - \frac{1}{L} u_C(t) \quad (95)$$

Pro tuto simulaci byly využity základní bloky MATLAB/Simulink. Je zřejmé, že zpětnovazební obvody jsou na sobě závislé.



Obr. 24. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink ze základních bloků

6.2.2 Stavový popis

Stavový popis lze určit přímo, z diferenciálních rovnic kdy se jako jeden stav zvolí $u'_C(t)$ a jako druhý $i'_L(t)$.

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

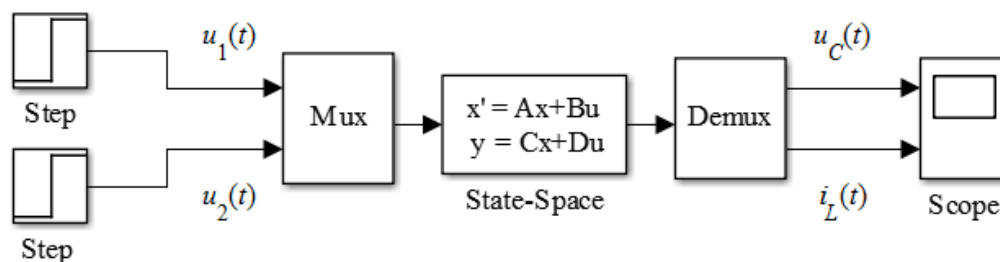
Výstupní rovnice je zřejmá ze zadání systému, kdy na výstupu má být napětí na kondenzátoru a proud na cívce.

$$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (97)$$

Tedy matice tohoto stavového popisu jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [0]$$

Tyto matice lze použít pro simulaci v MATLAB/Simulink s použitím základních bloků nebo opět s blokem *State-Space*. Při použití bloku *State-Space* využijeme, že vstup i výstup z tohoto bloku je vektorizovaný, proto nám stačí připojit bloky *Mux* ke vstupu a *Demux* k výstupu a vstupu. Důležité je správně připojit vstupy a výstupy, tak aby odpovídaly řádkům matic.



Obr. 25. Simulace obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink s použitím bloku *State-Space*

Při zapojení ze základních bloků vyjdeme z rovnic stavového popisu. Využijeme opět podobného principu jako s blokem *State-Space* a vektorizací vstupních, stavových a výstupních veličin. Použijeme blok *Sum* a *Integrator*, ale jádrem tohoto obvodu budou bloky *Gain* které budou představovat jednotlivé matice. Tento případ zapojení si bude vyžadovat aby bylo změněno násobení jaké tyto bloky používají. Standartně je nastaveno $K \cdot u$ což vyjadřuje násobení prvků K s vstupním vektorem u po prvcích, ale ne maticově. Proto zvolíme metodu násobení jako $K * u$, která odpovídá maticovému násobení a našemu směru násobení matic a vstupního vektoru. Obrázek zapojení je k dispozici v příloze PII.

6.2.3 Přenosová matice

Potřebné matice A, B, C a D získáme ze stavového popisu systému.

Pro určení přenosu se vyjde z rovnice pro určení přenosu ze stavového popisu.

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} \frac{1}{CL} & -\frac{R + Ls}{CLR} \\ \frac{1}{CR} + s & -\frac{CRs}{CLR} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Po úpravách získáme přenosovou matici, jako

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{R}{CLRs^2 + Ls + R} & -\frac{Ls + R}{CLRs^2 + Ls + R} \\ \frac{CRs + 1}{CLRs^2 + Ls + R} & -\frac{CRs}{CLRs^2 + Ls + R} \end{bmatrix} \quad (98)$$

Z přenosu lze provést simulaci a to zapojením dílčích přenosů tak že jsou rozepsány na jednotlivé diferenciální rovnice.

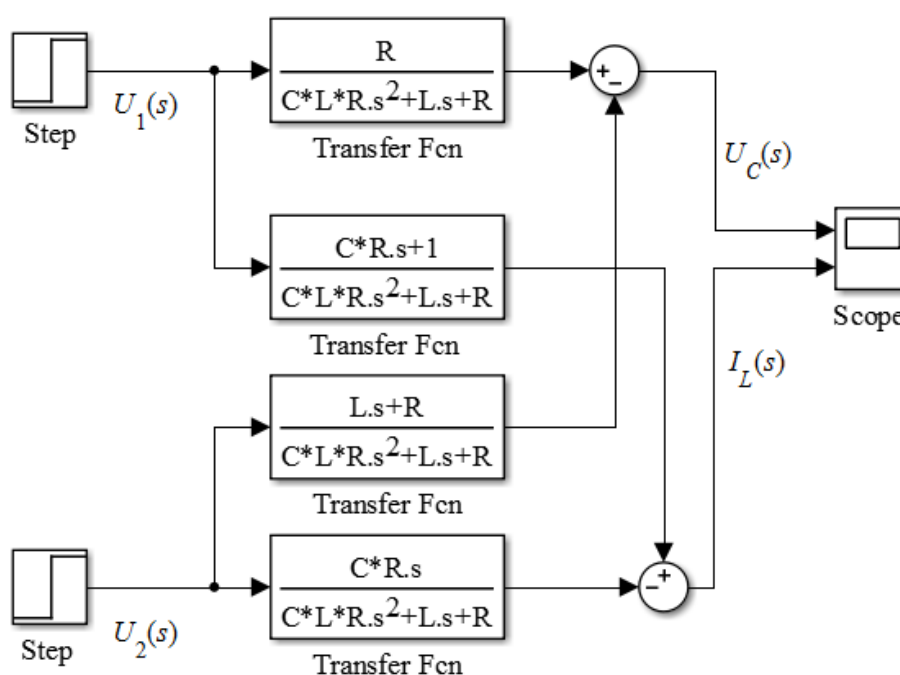
$$\begin{bmatrix} U_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{CLRs^2 + Ls + R} & -\frac{Ls + R}{CLRs^2 + Ls + R} \\ \frac{CRs + 1}{CLRs^2 + Ls + R} & -\frac{CRs}{CLRs^2 + Ls + R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (99)$$

Tímto krokem vznikne soustava dvou rovnic složená z dílčích přenosů matice $\mathbf{G}(s)$.

$$U_C(s) = \frac{R}{CLRs^2 + Ls + R} U_1(s) - \frac{Ls + R}{CLRs^2 + Ls + R} U_2(s) \quad (100)$$

$$I_L(s) = \frac{CRs + 1}{CLRs^2 + Ls + R} U_1(s) - \frac{CRs}{CLRs^2 + Ls + R} U_2(s) \quad (101)$$

které lze řešit v MATLAB/Simulink s využitím základních bloků a bloku *Transfer Fcn*.



Obr. 26. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji z dílčích přenosů v MATLAB/Simulink

6.2.4 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací si zvolíme hodnoty součástí obvodu a vstupních napětí. Rezistor bude mít odpor 5Ω , kapacita kondenzátoru je 300nF a indukčnost cívky je $0,4\text{H}$. Vstupní napětí $u_1(t)$ bude odpovídat jednotkovému skoku, který v čase 1 sekunda nabude hodnotu 1V z hodnoty 0V . Napětí $u_2(t)$ bude také odpovídat jednotkovému skoku, který v čase 3 sekundy nabude hodnotu 1V z hodnoty 0V . V MATLAB zadáme jednotlivé parametry simulace $C=300\text{e-9}$, $L=0.4\text{H}$ a potom $R=5$.

Získáme diferenciální rovnici pro MATLAB/Simulink ve tvaru

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{5}{1,5 * 10^{-7}} i_L(t) - \frac{1}{1,5 * 10^{-7}} u_c(t) - \frac{1}{1,5 * 10^{-7}} u_2(t)$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{0,4} u_1(t) - \frac{1}{0,4} u_2(t) - \frac{1}{0,4} u_c(t)$$

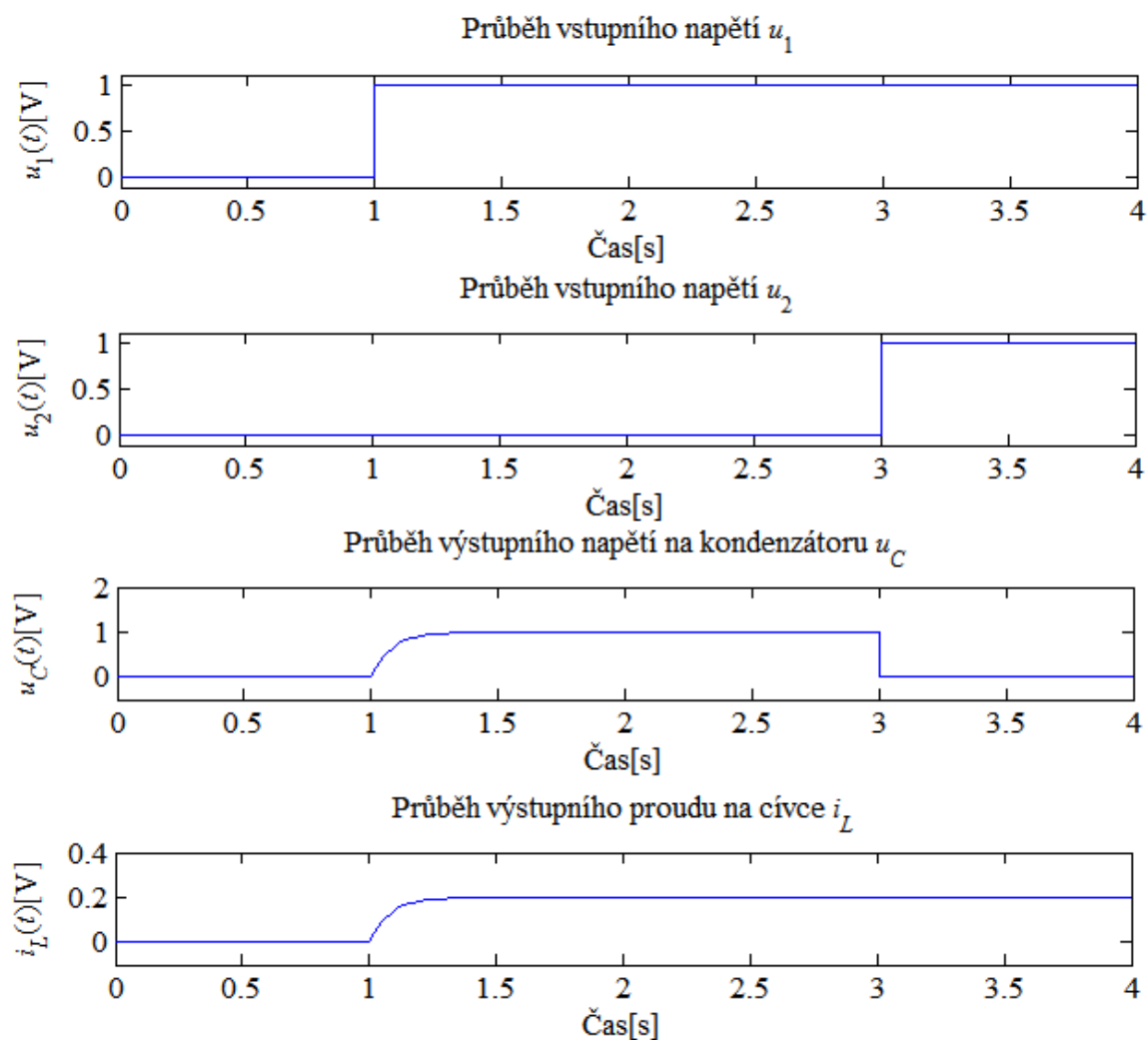
Dosazením do stavového popisu získáme matice stavového popisu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1,5 * 10^{-7}} & -\frac{1}{300 * 10^{-9}} \\ -\frac{1}{0,4} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{1,5 * 10^{-7}} \\ \frac{1}{0,4} & -\frac{1}{0,4} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [0]$$

Dosazením do přenosové matice získáme

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6 * 10^{-8}s^2 + 0,4s + 5} & -\frac{0,4s + 5}{6 * 10^{-8}s^2 + 0,4s + 5} \\ \frac{1,5 * 10^{-7}s + 1}{6 * 10^{-8}s^2 + 0,4s + 5} & -\frac{1,5 * 10^{-7}s}{6 * 10^{-8}s^2 + 0,4s + 5} \end{bmatrix}$$

Délku simulace nastavíme na 4 sekundy. Provedeme simulaci a výsledek si zobrazíme v bloku *Scope*. Při správném zapojení blokových schémat v MATLAB/Simulink a správném dosazení parametrů je výsledek totožný u všech simulací.

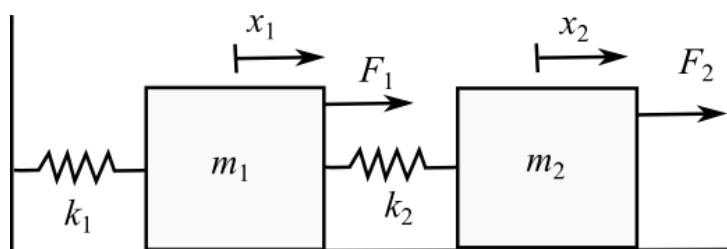


Obr. 27. Průběhy vstupních a výstupních veličin v obvodu s dvěma zdroji

7 UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY MECHANICKÝCH SYSTÉMŮ

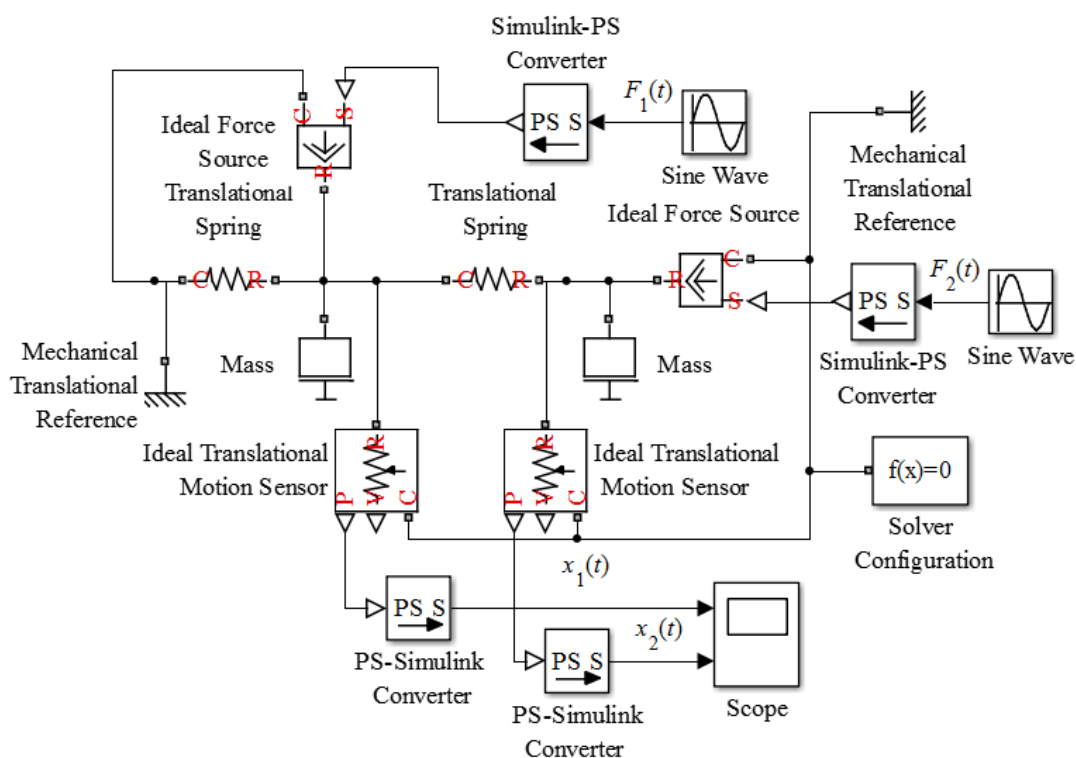
7.1 Hmoty propojené pružinou

Tento systém se skládá ze dvou hmot m_1 a m_2 , které jsou propojené pružinami o koeficientu tuhosti b_1, b_2 z nichž jedna je pevně zakotvena. Tyto hmoty jsou na vodorovné podložce bez tření. Na tento systém působí vnější síla F_1 na hmotu m_1 a F_2 na hmotu m_2 . Pozice hmoty m_1 je x_1 a pozice hmoty m_2 je x_2 .



Obr. 28. Schematické znázornění mechanického systému

Se znalostí propojení součástí ze schématu lze přejít k simulaci s knihovnou Simscape. Využije se základních mechanických prvků obsažených v tomto systému, jako je pružina odpovídající bloku *Translational Spring* a hmota odpovídající bloku *Mass*.



Obr. 29. Blokové schéma hmot propojených pružinou v Simscape

Jako zdroj signálu je zvolen blok *Sine Wave*. Pomocí *Simulink-PS Converter* je signál převeden pro *Ideal Force Source*, který bude fungovat jako ideální zdroj síly sledující sinusový signál.

7.1.1 Diferenciální rovnice

Při tvorbě diferenciálních rovnic je možné vyjít z druhého Newtonova zákona $ma = \sum F$. Pro tento systém bude tedy platit

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_1 \quad (102)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 (x_1 - x_2) + F_2 \quad (103)$$

Nebo lze využít Lagrangeovu rovnici druhého druhu a to tak že nejdříve určíme kinetickou a potenciální energii systému jako

$$E_P = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (104)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (105)$$

Pro další výpočet musíme určit lagrangian jako rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = E_K - E_P = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (106)$$

Dosadíme do Euler-Lagrangeovy rovnice pro souřadnice x_1 a x_2 jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) \right)}{\partial x_1} = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2)$$

a pro x_2 platí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \right)}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1)$$

Po dosazení vnějších sil vzniknou stejné rovnice jako pomocí Newtonovy metody.

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + F_1 \quad (107)$$

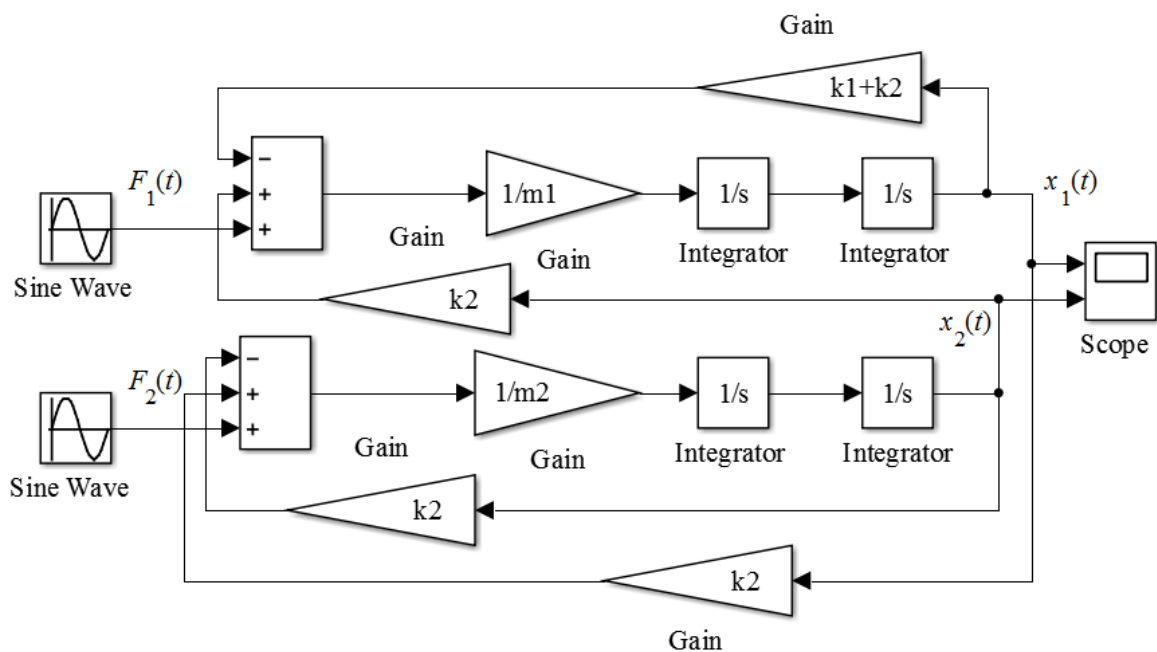
$$m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + F_2 \quad (108)$$

Z těchto rovnic lze výhodně vyjádřit rovnice pro simulaci v MATLAB/Simulink s použitím zpětnovazebního obvodu jako

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1x_1}{m_1} + \frac{k_2(x_2 - x_1)}{m_1} + \frac{F_1}{m_1} \quad (109)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2(x_1 - x_2)}{m_2} + \frac{F_2}{m_2} \quad (110)$$

Blokové schéma je možné vytvořit v MATLAB/Simulink pomocí dvou zpětnovazebních obvodů ze základních bloků jako je *Gain*, *Integrator* a *Sum*. Zdrojem signálu bude blok *Sine Wave* a pro čtení výsledků byl zvolen blok *Scope*.



Obr. 30. Blokové zapojení hmot propojených pružinou v MATLAB/Simulink

7.1.2 Stavový popis

Stavový popis lze odvodit z diferenciálních rovnic úvahou na základě, že derivací dráhy podle času je rychlost, derivací rychlosti podle času je zrychlení. Protože, je tento systém tvořen dvěma rovnicemi druhého řádu, musí se zavést 4 stavové proměnné. Necht' jsou tedy zavedeny stavové proměnné x_1 a x_2 , jejichž první derivace bude odpovídat zrychlení \ddot{x}_1 a \ddot{x}_2 . Dále jsou zavedeny stavové proměnné x_3 a x_4 , jejichž první derivace bude odpovídat rychlosti \dot{x}_1 a \dot{x}_2 . Platí tedy substituce

$$x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = \dot{x}_1, x_4 = \dot{x}_2 \quad (111)$$

Tím že byly zavedeny stavové proměnné tímto způsobem, budou určitě mít všechny stavy systému fyzikální význam. Diferenciální rovnice lze upravit do lepšího tvaru, aby přepis na stavový popis byl zřetelnější

$$\ddot{x}_1 = -\frac{x_1(k_1 + k_2)}{m_1} + \frac{k_2 x_2}{m_1} + \frac{F_1}{m_1} \quad (112)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2 x_1}{m_2} - \frac{k_2 x_2}{m_2} + \frac{F_2}{m_2} \quad (113)$$

Výsledný stavový popis z těchto rovnic potom bude

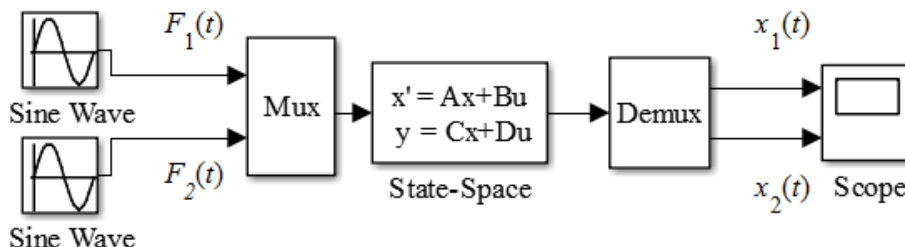
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Jednotlivé matice stavového popisu jsou tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se znalostí stavového popisu lze vytvořit zapojení v MATLAB/Simulink s využitím bloku *State-Space*. Dále s využitím bloku *Mux* pro vektorizaci vstupu a *Demux* pro rozdělení vektoru výstupu na jednotlivé prvky.



Obr. 31. Blokové zapojení hmot propojených pružinou v MATLAB/Simulink pomocí bloku State-Space

Stavový popis lze ověřit zpětnovazebním obvodem s maticemi stavového popisu. Rovnice pro tuto simulaci vychází z rovnice stavového popisu, kterou lze získat dosazením rovnice stavových proměnných do výstupní rovnice stavového popisu. Simulace je provedena s využitím základních bloků jako je *Sum*, *Gain* a *Integrator*. Vstupem jsou dva bloky *Sine Wave* propojené přes blok *Mux*. Výstup je proveden přes *Mux* připojený na *Scope*. Schéma tohoto zapojení je umístěno v příloze PII.

7.1.3 Přenosová matice

Přenos lze získat jako Laplaceovu transformaci rovnice stavového popisu. Po dosazení za jednotlivé matice získáme

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Po provedení matematických úprav získáme přenosovou matici ve tvaru

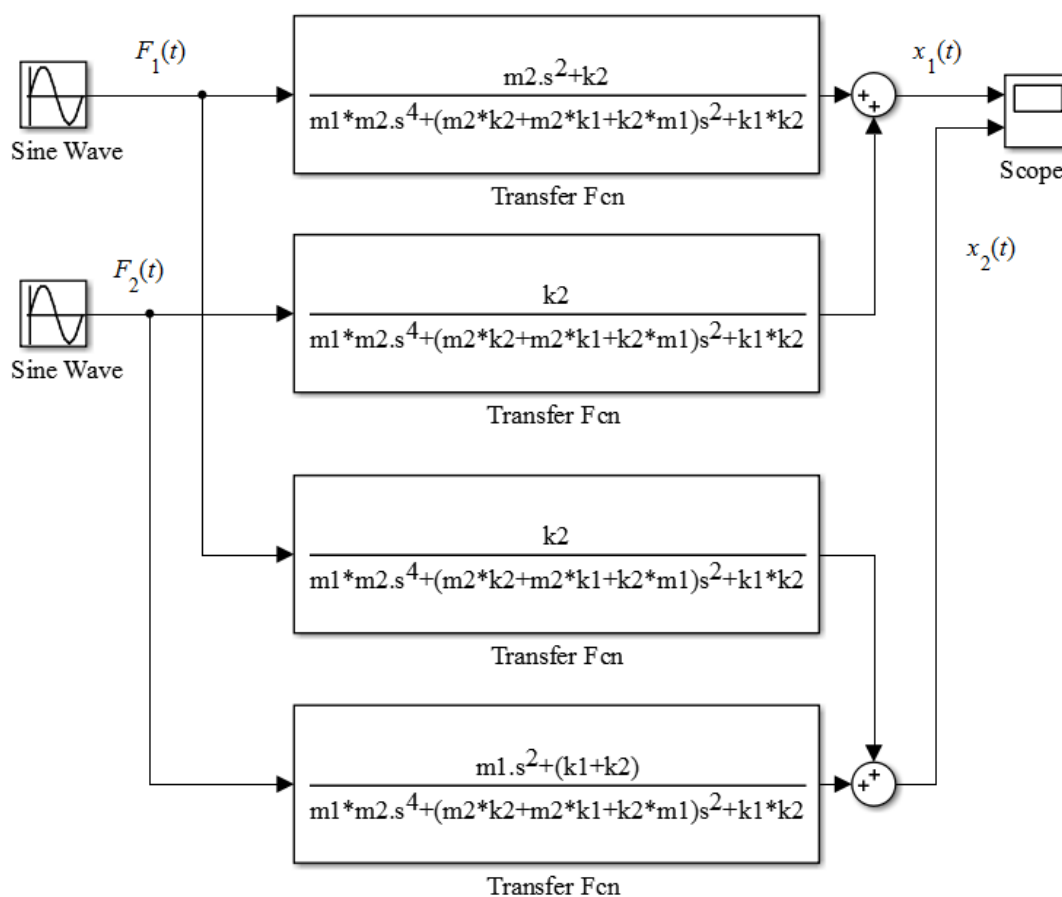
$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{m_2 s^2 + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2) s^2 + k_2 k_1} & \frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2) s^2 + k_2 k_1} \\ \frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2) s^2 + k_2 k_1} & \frac{m_1 s^2 + k_2 + k_1}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2) s^2 + k_2 k_1} \end{bmatrix}$$

Rozdělením této matice na dílčí přenosy lze provést další simulaci v MATLAB/Simulink. Dílčí přenosy jsou získány rozepsáním maticového přenosu na dvě rovnice, které se budou řešit v MATLAB/Simulink

$$X_1(s) = \frac{m_2 s^2 + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2)} F_1(s) + \frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2)} F_2(s) \quad (116)$$

$$X_2(s) = \frac{k_2}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2)} F_1(s) + \frac{m_1 s^2 + k_2 + k_1}{m_1 m_2 s^4 + (k_2 m_1 + k_2 m_2 + k_1 m_2)} F_2(s) \quad (117)$$

V této simulaci se využije bloků *Transfer Fcn* a *Sum*. Zdrojem bude *Sine Wave*, a data se zobrazí pomocí bloku *Scope*.



Obr. 32. Blokové schéma zapojení hmot propojených pružinou z dílčích přenosů

7.1.4 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací byly zvoleny následující hodnoty součástí mechanického systému a vstupních sil. Tuhost pružiny $k_1=50\text{N/m}$, $k_2=60\text{N/m}$, hmota $m_1=1\text{kg}$, $m_2=2\text{kg}$.

Vstupní síla F_1 a F_2 bude odpovídat sinusovému průběhu s amplitudou 1N a frekvencí 1Hz. V MATLAB zadáme jednotlivě příkazy pro nastavení parametrů $k_1=50$, $k_2=60$, $m_1=1$ a $m_2=2$. Získáme diferenciální rovnici pro MATLAB/Simulink ve tvaru

$$\ddot{x}_1 = -50x_1 + 60(x_2 - x_1) + F_1$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{60(x_1 - x_2)}{2} + \frac{F_2}{2}$$

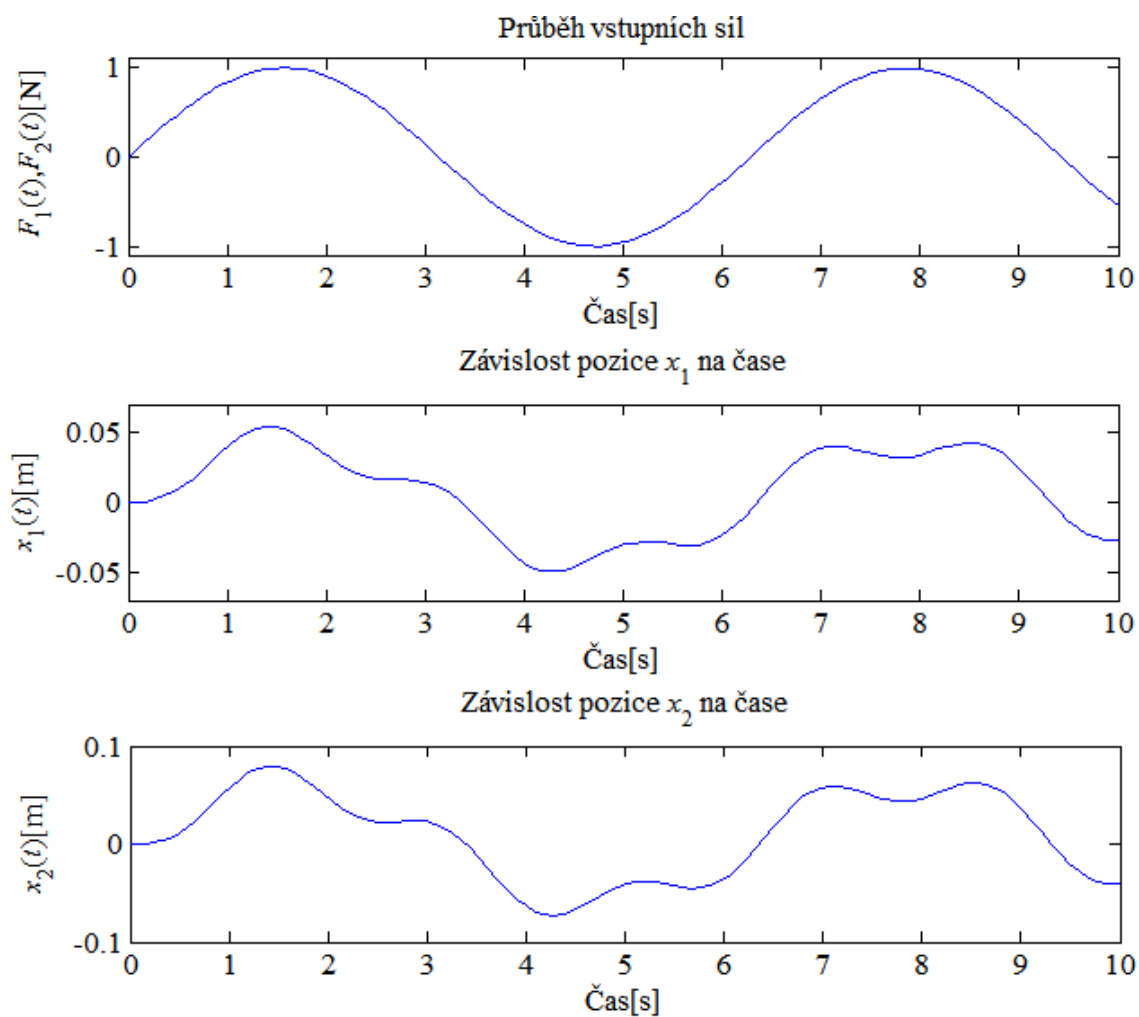
Dosazením do stavového popisu získáme matice stavového popisu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -110 & 60 & 0 & 0 \\ 30 & -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dosazením do přenosové matice získáme

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 60}{2s^4 + 280s^2 + 3000} & \frac{60}{2s^4 + 280s^2 + 3000} \\ \frac{60}{2s^4 + 280s^2 + 3000} & \frac{s^2 + 110}{2s^4 + 280s^2 + 3000} \end{bmatrix}$$

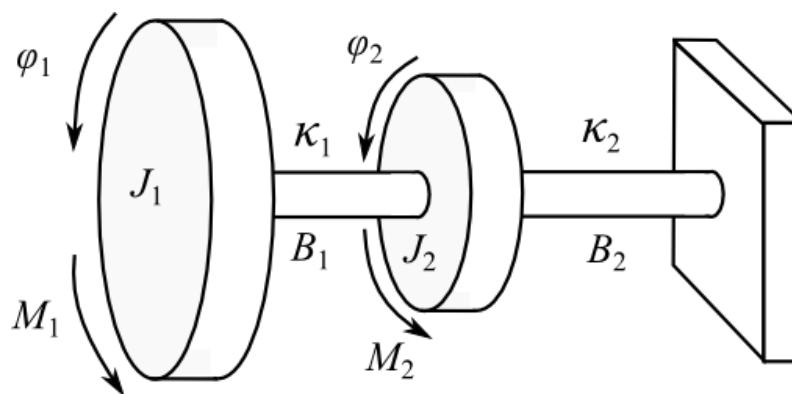
Délku simulace nastavíme na 10 sekundy. Provedeme simulaci a výsledek si zobrazíme v bloku *Scope*. Při správném zapojení blokových schémat v MATLAB/Simulink a správném dosazení parametrů je výsledek totožný u všech simulací.



Obr. 33. Průběh závislosti poloh hmot na čase mechanického systému

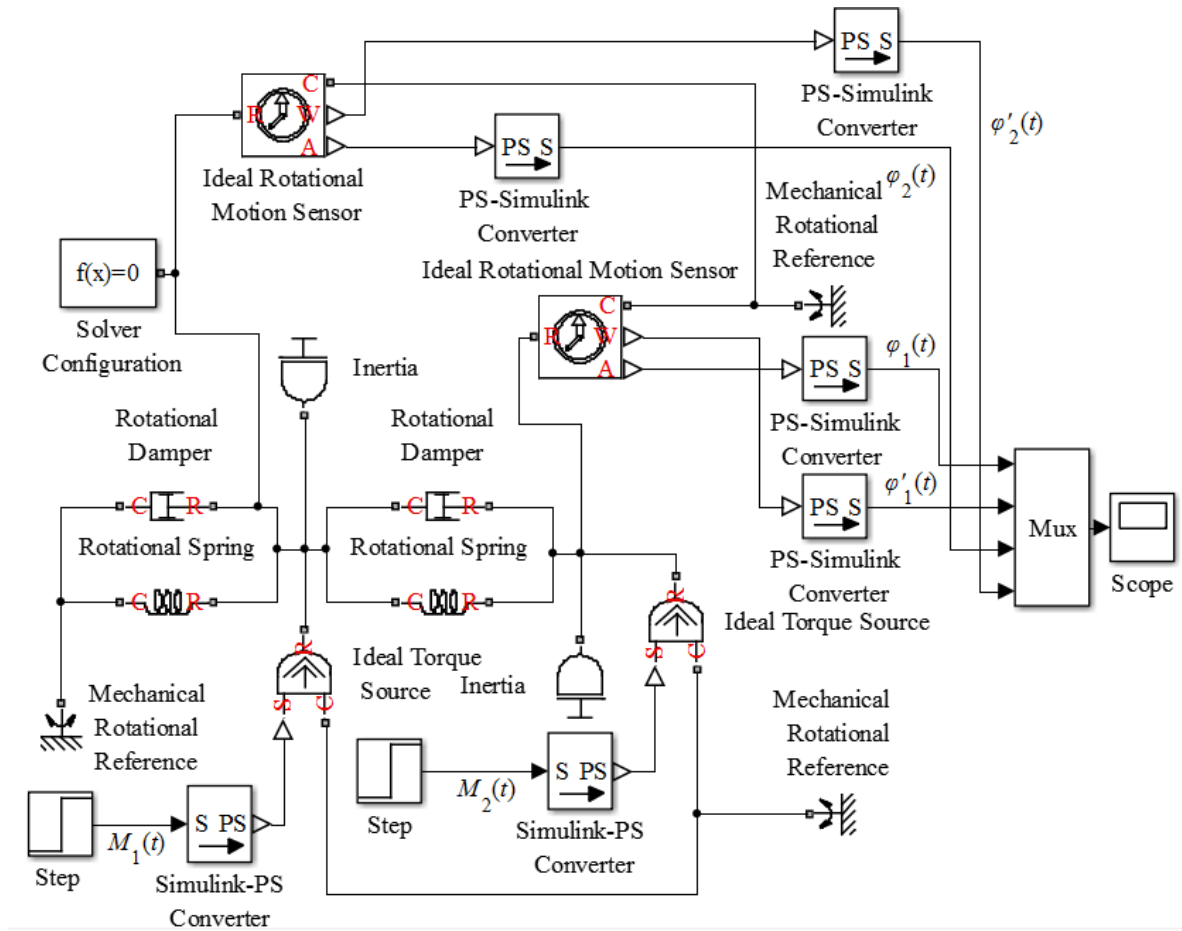
7.2 Rotační systém s pružinou a tlumičem

Jde o systém s dvěma vstupy a výstupy. Systém je tvořen dvěma rovnoměrně rozloženými hmotami s momentem setrvačnosti J_1 a J_2 . Tyto hmoty jsou propojeny trubkou, která obsahuje torzní pružinu a tlumič stejně propojená je i druhá hmota se stěnou, která je pevně ukotvená. Koeficient tuhosti pružiny mezi hmotami je κ_1 a tlumič mezi hmotami má koeficient tlumení B_1 . Koeficient tuhosti pružiny mezi druhou hmotou a stěnou je označen κ_2 a tlumič mezi druhou a hmotou má koeficient tlumení B_2 . Vstupy do systému jsou zajištěny pomocí momentů působících na hmoty, moment M_1 na první hmotu a moment M_2 na druhou. Výstupem z tohoto systému jsou úhly natočení hmot jako φ_1 a φ_2 .



Obr. 34. Schéma rotačních hmot

Se znalostí struktury mechanického modelu lze provést zapojení s použitím knihovny Simscape. Pro zapojení se dá využít bloků *Inertia*, *Rotational Spring*, *Rotational Damper* a *Mechanical Rotational Reference*. Vstup do systému je proveden pomocí bloků *Step* a převodu na Simscape signál který je přiveden na *Ideal Torque Source*. Detekce úhlu je zajištěna pomocí bloků *Ideal Rotational Motion Sensor*, kde po převedení signálu se výsledky zobrazí na bloku *Scope*.



Obr. 35. Zapojení rotačního mechanického systému s knihovnou Simscape

7.2.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice se dají získat ze znalosti druhého Newtonova zákona pro rotační systém tedy $J\ddot{\varphi} = \sum M$. Se znalostí momentu na tlumiči a torzní pružině dokážeme zapsat diferenciální rovnice jako

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 - B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (118)$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = M_2 + B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) - B_2\dot{\varphi}_2 - \kappa_2\varphi_2 \quad (119)$$

Nebo lze využít Lagrangeovu rovnici druhého druhu a to tak že nejdříve určíme kinetickou a potenciální energii systému, následovně je třeba odvodit i disipativní funkci jako

$$E_P = \frac{1}{2}\kappa_2\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\kappa_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (120)$$

$$E_K = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 \quad (121)$$

$$R = \frac{1}{2}B_1(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}B_2\dot{\varphi}_2^2 \quad (122)$$

Pro další výpočet musíme určit Lagrangian jako rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = E_K - E_P = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_2\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (123)$$

Dosadíme do Euler-Lagrangeovy rovnice pro souřadnice x_1 a x_2 jako

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial R}{\partial \varphi_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{d}{dt}(J_1\dot{\varphi}_1) = J_1\ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_2\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_1(\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2) \right)}{\partial \varphi_1} = -\kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}B_1(\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1^2) + \frac{1}{2}B_2\dot{\varphi}_2^2 \right)}{\partial \dot{\varphi}_1} = B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$

a pro φ_2 platí

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial R}{\partial \varphi_2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{d}{dt}(J_2\dot{\varphi}_2) = J_2\ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_2\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_1(\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2) \right)}{\partial \varphi_2} = \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) - \kappa_2\varphi_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}B_1(\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1^2) + \frac{1}{2}B_2\dot{\varphi}_2^2 \right)}{\partial \dot{\varphi}_2} = -B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + B_2\dot{\varphi}_2$$

Po dosazení vnějších sil vzniknou stejné rovnice jako pomocí Newtonovy metody.

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = M_1 - B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (124)$$

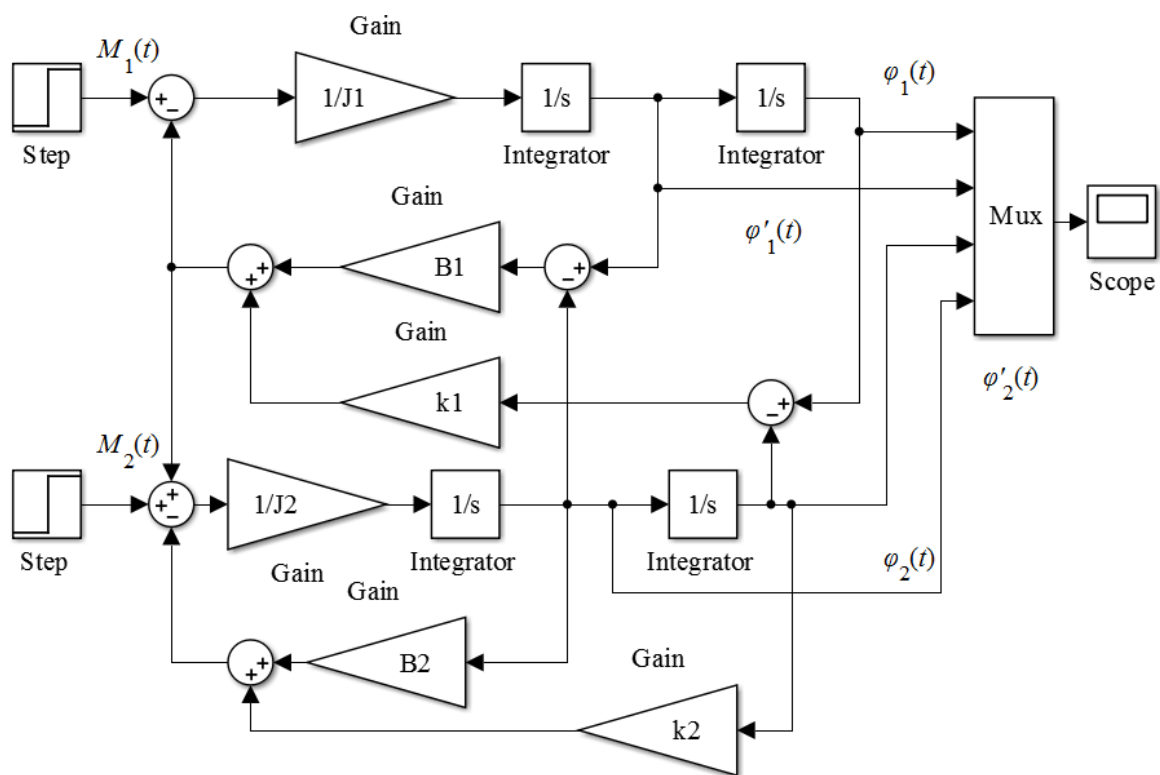
$$J_2\ddot{\varphi}_2 = M_2 + B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) - B_2\dot{\varphi}_2 - \kappa_2\varphi_2 \quad (125)$$

Z těchto rovnic lze vyjádřit nejvyšší derivaci pro simulaci v MATLAB/Simulink s použitím základních bloků jako

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{J_1} (M_1 - B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{J_2} (M_2 + B_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \kappa_1(\varphi_1 - \varphi_2) - B_2\dot{\varphi}_2 - \kappa_2\varphi_2)$$

V simulaci je využito základních bloků pro vytvoření zpětnovazebního obvodu *Gain*, *Integrator* a *Sum*. Zdrojem signálu jsou dva bloky *Step* a výsledné hodnoty se získají z bloků *Scope*. S výhodou lze využít bloku *Mux*, pro porovnání hodnot.



Obr. 36. Blokové zapojení rotačního mechanického systému ze základních bloků v MATLAB/Simulink

7.2.2 Stavový popis

Stavový popis lze odvodit z diferenciálních rovnic úvahou ze znalosti, že derivací úhlu podle času je úhlová rychlost, derivací úhlové rychlosti podle času je úhlové zrychlení. Protože, je systém popsán dvěma rovnicemi druhého řádu, musíme zavést 4 stavové proměnné. Nechť jsou zavedeny stavové proměnné x_1 a x_2 , jejichž první derivace bude

odpovídat zrychlení $\ddot{\varphi}_1$ a $\ddot{\varphi}_2$. Dále jsou zavedeny stavové proměnné x_3 a x_4 , jejichž první derivace bude odpovídat úhlové rychlosti $\dot{\varphi}_1$ a $\dot{\varphi}_2$ v našem systému. Tedy

$$x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, x_3 = \dot{\varphi}_1, x_4 = \dot{\varphi}_2$$

Tím že jsou stavové proměnné zavedené tímto způsobem, budou mít všechny stavy systému fyzikální význam. Diferenciální rovnice upravíme do lepšího tvaru, aby přepis na stavový popis byl zřetelnější

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{\kappa_1 \varphi_1}{J_1} + \frac{\kappa_1 \varphi_2}{J_1} - \frac{B_1 \dot{\varphi}_1}{J_1} + \frac{B_1 \dot{\varphi}_2}{J_1} + \frac{M_1}{J_1} \quad (126)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\kappa_1 \varphi_1}{J_2} - \frac{\varphi_2(\kappa_1 + \kappa_2)}{J_2} + \frac{B_1 \dot{\varphi}_1}{J_2} - \frac{\dot{\varphi}_2(B_1 + B_2)}{J_2} + \frac{M_2}{J_2} \quad (127)$$

Po zavedení stavových proměnných získáme rovnice ve tvaru

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{\kappa_1 x_1}{J_1} + \frac{\kappa_1 x_2}{J_1} - \frac{B_1 x_3}{J_1} + \frac{B_1 x_4}{J_1} + \frac{M_1}{J_1} \quad (128)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\kappa_1 x_1}{J_2} - \frac{x_2(\kappa_1 + \kappa_2)}{J_2} + \frac{B_1 x_3}{J_2} - \frac{x_4(B_1 + B_2)}{J_2} + \frac{M_2}{J_2} \quad (129)$$

Výsledný stavový popis je tedy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa_1}{J_1} & \frac{\kappa_1}{J_1} & -\frac{B_1}{J_1} & \frac{B_1}{J_1} \\ \frac{\kappa_1}{J_2} & -\frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{J_2} & \frac{B_1}{J_2} & -\frac{(B_1 + B_2)}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (130)$$

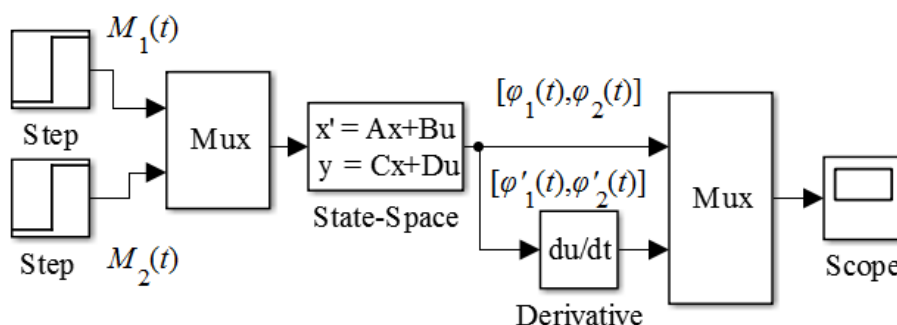
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Jednotlivé matice stavového popisu jsou tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa_1}{J_1} & \frac{\kappa_1}{J_1} & -\frac{B_1}{J_1} & \frac{B_1}{J_1} \\ \frac{\kappa_1}{J_2} & -\frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{J_2} & \frac{B_1}{J_2} & -\frac{(B_1 + B_2)}{J_2} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se znalostí stavového popisu lze vytvořit zapojení v MATLAB/Simulink s využitím bloku *State-Space*. Další využité bloky jsou *Mux* pro vektorizaci vstupu a *Demux* pro rozdělení vektoru výstupu na jednotlivé prvky. Přidáním bloku *Derivate* je možné zjistit průběh úhlové rychlosti.



Obr. 37. Blokové zapojení rotačního mechanického systému s blokem *State-space*

Stavový popis lze ověřit zpětnovazebním obvodem s maticemi stavového popisu. Rovnice pro tuto simulaci vychází z rovnice stavového popisu, kterou lze získat dosazením rovnice stavových proměnných do výstupní rovnice stavového popisu. V této simulaci je použito základních bloků *Sum*, *Gain* a *Integrator*. Vstupem jsou dva bloky *Step* propojené přes blok *Mux*. Výstup je proveden přes *Mux* připojený na *Scope*. Rychlost je možné získat, jako první dva stavy před integrací to je provedeno pomocí bloku *Mux* a *Demux*. Schéma tohoto zapojení je k dispozici v příloze PII.

7.2.3 Přenosová matice

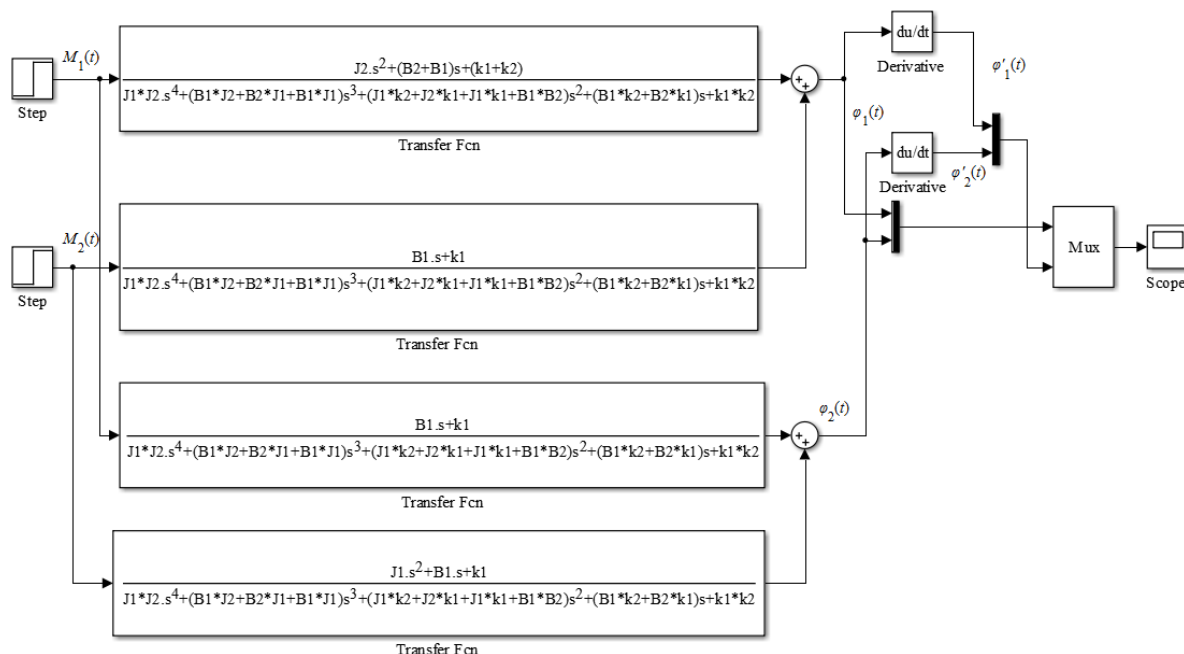
Přenos lze získat jako Laplaceovu transformaci rovnice stavového popisu. Po dosazení za jednotlivé matice získáme

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1}{J_1} & -\frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{J_2} & \frac{B_1}{J_2} & -\frac{(B_1 + B_2)}{J_2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

Po provedení matematických úprav získáme přenosovou matici ve tvaru

$$G(s) = \frac{1}{J_1 J_2 s^4 + (B_1 J_2 + B_2 J_1 + B_1 J_1) s^3 + (J_1 \kappa_2 + J_2 \kappa_1 + J_1 \kappa_1 + B_1 B_2) s^2 + (B_1 \kappa_2 + B_2 \kappa_1) s + \kappa_1 \kappa_2} \begin{bmatrix} J_2 s^2 + B_1 s + B_2 s + \kappa_1 + \kappa_2 & B_1 s + \kappa_1 \\ B_1 s + \kappa_1 & J_1 s^2 + B_1 s + \kappa_1 \end{bmatrix}$$

Rozdělením této matice na dílčí přenosy lze provést simulaci v MATLAB/Simulink. Dílčí přenosy se získají rozepsáním maticového přenosu na dvě rovnice, které se budou řešit v MATLAB/Simulink.



Obr. 38. Stavový popis rotačního mechanického systému simulovaný pomocí dílčích přenosů v MATLAB/Simulink

7.2.4 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací byly zvoleny hodnoty součástí obvodu a vstupních kroutících momentů. Moment setrvačnosti J_1 byl zvolen $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, torzní tuhost κ_1 je 10 Nm/rad a koeficient tlumení B_1 $0,05 \text{ Nms/rad}$. Moment setrvačnosti J_2 byl zvolen $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, torzní tuhost κ_2 je 10 Nm/rad a koeficient tlumení B_2 $0,75 \text{ Nms/rad}$. Moment M_1 v čase jedné sekundy nabyde hodnoty 1 N/m z hodnoty 0 N/m . Moment M_2 v čase jedné sekundy nabyde hodnoty $0,3 \text{ N/m}$ z hodnoty 0 N/m .

V MATLAB zadáme jednotlivé parametry simulace $J_1=20$, $J_2=2$, $k_1=10$, $k_2=10$, $B_1=0.05$ a $B_2=0.75$.

Dosazením získáme diferenciální rovnici pro MATLAB/Simulink ve tvaru

$$20\ddot{\phi}_1 = M_1 - 0,05(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) - 10(\phi_1 - \phi_2)$$

$$2\ddot{\phi}_2 = M_2 + 0,05(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + 10(\phi_1 - \phi_2) - 0,75\dot{\phi}_2 - 10\phi_2$$

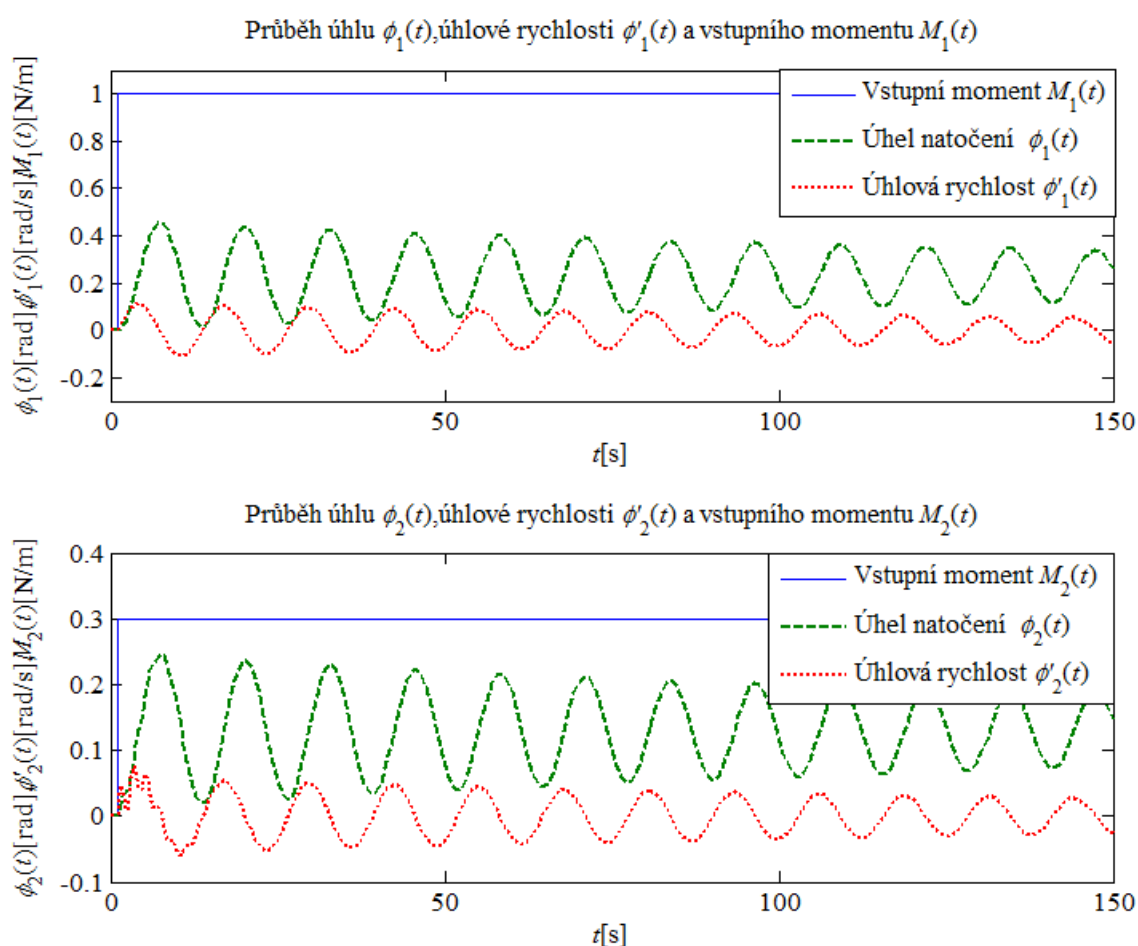
Dosazením získáme matice stavového popisu jako

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -0,0025 & 0,0025 \\ 5 & -10 & 0,025 & -0,4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dosažením do přenosové matice získáme

$$G(s) = \frac{1}{40s^4 + 16,1s^3 + 420,0375s^2 + 8s + 100} \begin{bmatrix} 2s^2 + 0,8s + 20 & 0,05s + 10 \\ 0,05s + 10 & 20s^2 + 0,05s + 10 \end{bmatrix}$$

Délku simulace nastavíme na 150 sekundy. Provedeme simulaci a výsledek si zobrazíme v bloku *Scope*. Při správném zapojení blokových schémat v MATLAB/Simulink a správném dosazení parametrů je výsledek totožný u všech simulací. Malé rozdíly mohou nastat při použití bloku *Derivative*.

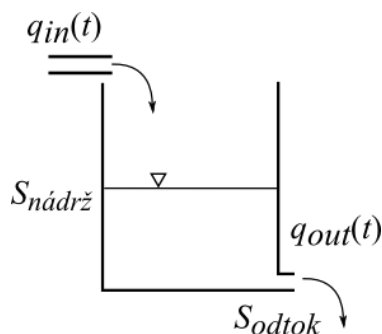


Obr. 39. Průběhy veličin u rotačního mechanického systému

8 UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY HYDRAULICKÝCH SYSTÉMŮ

8.1 Nádrž

Jde o systém s jedním vstupem přítokem $q_{in}(t)$ a jedním výstupem, v podobě hladiny $h(t)$. Nádrž je popsána plochou průřezu $S_{nádrž}$ a plochou průřezu výtoku S_{odtok} . Výtok z nádrže je označen $q_{out}(t)$.



Obr. 40. Schéma nádrže

Za pomoci bilance lze získat rovnici popisující nádrž a to jako

$$q_{in} = q_{out} + S_{nádrž} \frac{dh(t)}{dt}$$

Pro nádrž a otvor musí platit zákon o zachování energie v podobě rovnice kontinuity.

$$S_{nádrž}v = S_{odtok}v_{odtok}$$

Z rovnice kontinuity se dá odvodit výtaková rychlost a to pomocí Bernulliho. Bernulliho rovnice popisuje zákon zachování mechanické energie, kde bude platit, že součet kinetické, potenciální a gravitační energie je roven konstantě

Z toho že platí zákon zachování mechanické energie lze usoudit, že energie před výtokem z nádrže a po výtoku bude stejná. Pro nádrž potom platí

$$\frac{v}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \frac{v_{odtok}}{2} + \frac{p_{odtok}}{\rho} + gh_z \quad (132)$$

kde hodnoty v , p jsou hodnoty před odtokem, hodnoty v_{odtok} , p_{odtok} po odtoku a h_z představuje ztrátu vzniklou ve výtakovém otvoru, dle [20] a [6]. Po dosazení rovnice kontinuity do Bernulliho rovnice a dosazení za $h_z = \xi \frac{v_{odtok}^2}{2g}$ a vyjádřením výtakové rychlosti, kterou je nutná pro vytvoření matematického modelu, získáme jako

$$v_{odtok} = \sqrt{2 \frac{\frac{p - p_{odtok}}{\rho} + gh}{1 + \xi - \left(\frac{S_{odtok}}{S_{nádrž}}\right)^2}} \quad (133)$$

Protože se počítá s dokonalou kapalinou, ztrátový součinitel bude tedy $\xi = 0$. Dále je zřejmé, že nádrž má zásadně větší průřez než odtokový otvor proto můžeme úplně vyloučit člen $\left(\frac{S_{odtok}}{S_{nádrž}}\right)^2$. Všechny nádrže jsou otevřeny do atmosféry, proto bude přibližně platit $p \cong p_{odtok}$, dle [6]. Proto jako výslednou rovnici pro rychlost dostaneme

$$v_{odtok} = \sqrt{2gh} \quad (134)$$

8.1.1 Diferenciální rovnice

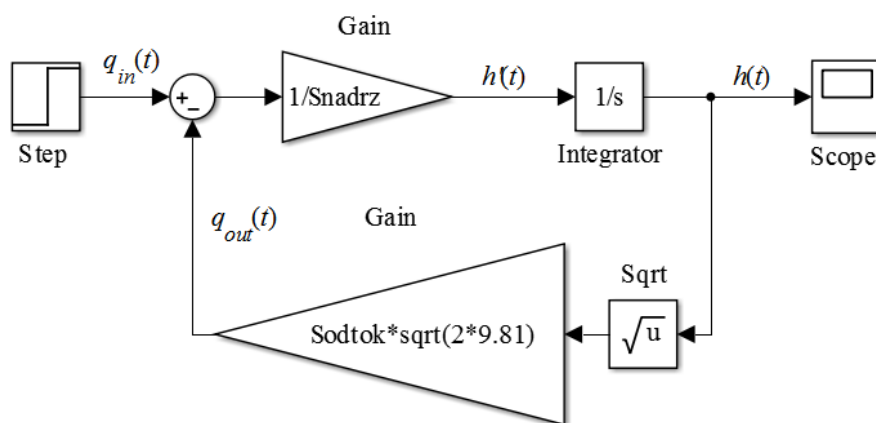
Se znalostí výtokové rychlosti lze určit objemový průtok kapaliny, který vyteče z nádrže. Po dosazení do bilanční rovnice vznikne matematický model nádrže, jako

$$q_{in} = S_{odtok} \sqrt{2gh} + S_{nádrž} \frac{dh(t)}{dt} \quad (135)$$

Vyjádřením nejvyšší derivace vznikne rovnice vhodná pro použití ve zpětnovazebním obvodu MATLAB/Simulink.

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_{in}}{S_{nádrž}} - \frac{S_{odtok}}{S_{nádrž}} \sqrt{2g} * \sqrt{h} \quad (136)$$

V blokovém schématu se využije základních bloků jako *Sum*, *Integrator* a *Gain*. Tentokrát se navíc využije matematický blok *Sqrt* pro odmocnění signálu hladiny. Zdrojem signálu je blok *Step* a výsledné hodnoty se získají pomocí bloku *Scope*.



Obr. 41. Schematické zapojení nádrže v MATLAB/Simulink

8.1.2 Simscape model

Protože v knihovně Simscape v hydraulické podknihovně neexistuje model nádrže podobný té simulované. Vytvoříme vlastní Simscape blok s použitím „*Simscape language*“. Pro vytvoření nového modelu je nutné vytvořit novou knihovnu bloků, to lze provést vytvořením složky kdekoliv na disku, kde chceme mít uloženou knihovnu. Název složky musí začínat znakem „+“. Všechny zdrojové kódy obsažené v této složce budou součástí knihovny s názvem složky. Nový zdrojový kód vytvoříme v menu MATLAB výběrem „*New>Script*“. Nově vytvořený soubor okamžitě uložíme do vytvořené složky budoucí knihovny. Soubor uložíme pod názvem bloku, který vytváříme a s koncovkou „*.ssc*“. Po uložení s touto koncovkou se bude zvýrazňovat syntax „*Simscape language*“. Každý zdrojový kód bloku Simscape začíná názvem bloku, kde může být uvedena fyzikální doména všech portů, pokud je jednotná, dále se uvedou parametry bloku, vstupy a výstupy pro MATLAB/Simulink. Proměnné a jejich vliv na vstupy a výstupy bloku a nakonec diferenciální rovnice. Kód bloku je umístěn v příloze bakalářské práce PIII.

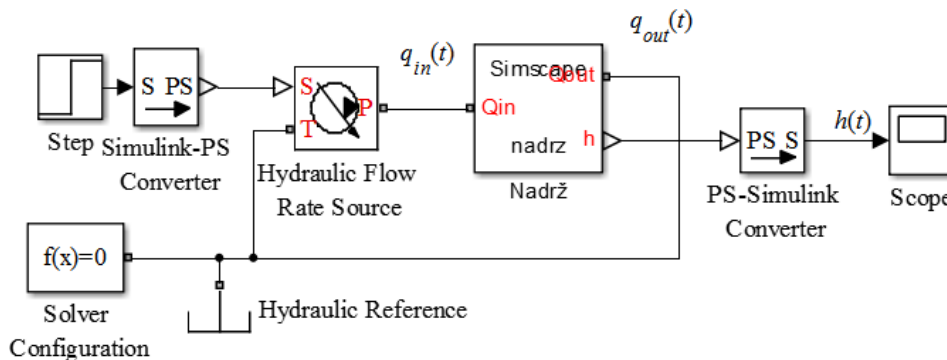
Pro matematický model si vyjádříme hladinu jednou rovnicí tak abychom mohli zjistit její okamžitou hodnotu, druhou rovnicí určíme odtok z nádrže. Rovnici pro hladinu si odvodíme za pomoci rovnice odtokové rychlosti jako

$$h = \left(\frac{q_{in}}{S_{odtok}} \right)^2 \frac{1}{2g} \quad (137)$$

Rovnice popisující odtok z nádrže potom bude

$$q_{out} = q_{in} - S_{nádrž} \frac{dh(t)}{dt} \quad (138)$$

Po zápisu těchto rovnic uložíme kód a přeložíme ho pomocí příkaz *ssc_build* „navez knihovny“. Otevřeme si vytvořenou knihovnu, použijeme vytvořený blok nádrže a vytvoříme zapojení s knihovnou Simscape (Obr. 42).



Obr. 42. Zapojení nádrže s valstním blokem v Simscape

8.1.3 Určení pracovního bodu

Nyní je vhodné určit pracovní bod, pro který bude provedena linearizace. Je zřejmé, že pokud se jedná o ustálenou hodnotu hladiny, její derivace bude nulová, tedy z diferenciálních rovnic lze vyjádřit hodnotu hladiny pro daný přítok. Vyjádříme tedy $h(\infty)$ a to při ustálené hodnotě $\frac{dh(t)}{dt} = 0$.

$$h(\infty) = \left(\frac{q_{in}}{S_{odtok}\sqrt{2g}} \right)^2 \quad (139)$$

Se znalostí tohoto vztahu dokážeme dopočítat $h(\infty)$ pro jakoukoliv hodnotu přítoku a tím získat pracovní bod.

8.1.4 Linearizace modelu

Model nádrže není lineární, z důvodu přítomnosti odmocniny okamžité hladiny. Model je třeba linearizovat, linearizovaný model získáme tak že určíme pracovní bod, který bude počátkem v přírůstkovém modelu. Pracovní bod bude ve tvaru $[q_{in-0}; h_0]$. Nejdříve se zavedou přítoky a hladiny v přírůstkovém tvaru.

Tedy pro přítoky v přírůstkovém modelu bude platit

$$q_{in}(t) = q_{in-0} + \Delta q_{in}(t) \quad (140)$$

kde q_{in} původní průtok, q_{in-0} průtok odpovídající pracovnímu bodu, Δq_{in} přírůstek vzhledem k q_{in-0} a pro hladinu

$$h(t) = h_0 + \Delta h(t) \quad (141)$$

kde h_0 je hladina odpovídající pracovnímu bodu, $\Delta h(t)$ přírůstek vzhledem k h_0 .

Nyní se linearizuje hladina v přírůstkovém zápisu hladiny $\sqrt{h_0 + \Delta h(t)}$, pomocí prvních dvou členů Taylorova polynomu tak aby vznikla přímka tečná k statické charakteristice v pracovním bodě.

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0 + \Delta h(t)} \approx \sqrt{h_0} + \frac{1}{1!} (\sqrt{h_0})' \Delta h(t) = \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h(t) \quad (142)$$

Po dosazení do diferenciálních rovnic kde jsou upraveny přítoky do přírůstkového zápisu, získáme rovnici

$$q_{in-0} + \Delta q_{in}(t) = S_v \sqrt{2g} \left(\sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h(t) \right) + S(h_0 + \Delta h(t))'$$

Tuto rovnici lze výrazně zjednodušit ze znalosti počáteční hladina je nulová, tedy její derivace bude vždy nulová $h'_0 = 0$. Dále musí platit, že přítok a odtok jsou si v ustáleném stavu rovny, platí tedy následující rovnice

$$q_{in-0} = S_v \sqrt{2gh_0} \quad (143)$$

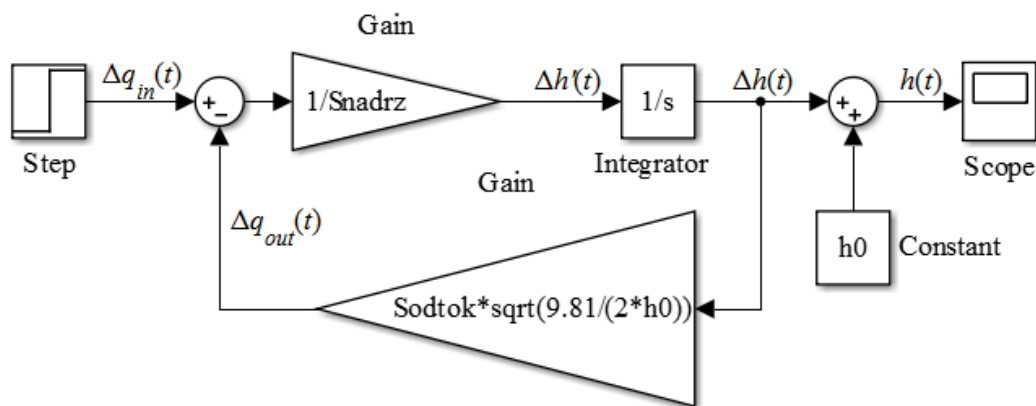
Proto lze tyto hodnoty odečíst a tím vznikne rovnici ve tvaru

$$\Delta q_{in}(t) = S_v \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \Delta h(t) + S \Delta h'(t) \quad (144)$$

Vyjádřením nejvyšší derivace lze provést další simulaci v MATLAB/Simulink jako

$$\Delta h'(t) = \frac{\Delta q_{in}(t)}{S} - \frac{S_v}{S} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \Delta h(t) \quad (145)$$

a provede se ověření správnosti rovnice s pomocí základních bloků jako je *Sum*, *Gain* a *Integrator*. Signál povede z bloku *Step*, hladina pracovního bodu se získá pomocí bloku *Constant* a výsledné hodnoty se získají z bloku *Scope*.



Obr. 43. Zapojení linearizovaného modelu nádrže v MATLAB/Simulink

8.1.5 Přenos

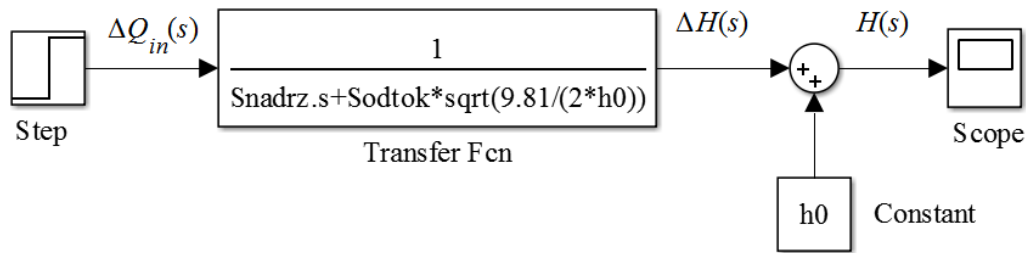
Po vytvoření linearizované diferenciální rovnice, je možné ji řešit pomocí Laplaceovy transformace. Po aplikaci zákona o n-té derivaci vznikne rovnice ve tvaru

$$\Delta Q_{in}(s) = S_v \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \Delta H(s) + S \Delta H(s) s \quad (146)$$

Přenos se odvodí jako poměr obrazů výstupu ku vstupu.

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_{in}(s)} = \frac{1}{Ss + S_v \sqrt{\frac{g}{2h_0}}} \quad (147)$$

Se znalostí přenosu je možné provést simulaci. Mezi hlavní použité bloky patří *Transfer Fcn* a *Constant*, který se přičte pomocí bloku *Sum*. Konstanta počáteční hladiny je přičtena k přírůstku, aby ve výsledku byla okamžitá hladina. Dále je připojen blok *Step* a na výstup *Scope* pro zobrazení grafu.



Obr. 44. Schématické zapojení nádrže v MATLAB/Simulink s přenosovou funkcí

8.1.6 Stavový popis

Stavový popis určíme přímo z diferenciálních rovnic jednoduchou úvahou. Je zřejmé, že rozměry všech matic budou 1x1 protože rovnice je prvního řádu. Z tohoto důvodu stačí vyjádřit první derivaci přírůstku hladiny z rovnice, protože pávě přírůstek hladiny bude stavovou proměnnou. Výstupní rovnice je zřejmá, protože cílem je zjistit přírůstek hladiny, proto výstupem bude přímo stavová proměnná.

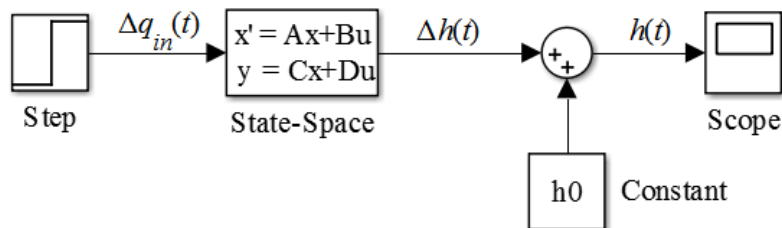
$$\Delta h'(t) = -\frac{S_v}{S} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \Delta h(t) + \frac{1}{S} \Delta q_{in}(t) \quad (148)$$

$$\Delta h(t) = 1 \Delta h(t) \quad (149)$$

Jednotlivé matice stavového popisu jsou potom

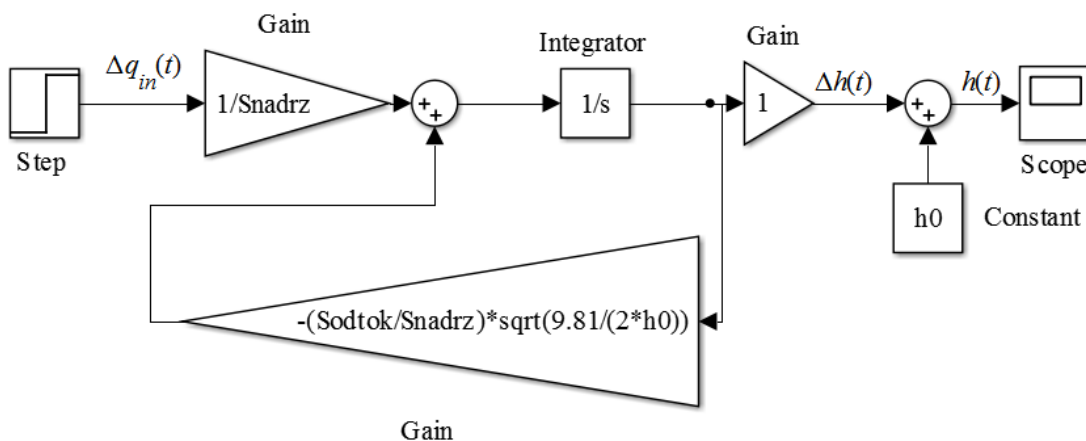
$$\mathbf{A} = \left[-\frac{S_v}{S} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \right], \mathbf{B} = \left[\frac{1}{S} \right], \mathbf{C} = [1] \text{ a } \mathbf{D} = [0]$$

Se znalostí stavového popisu vytvoříme zapojení v MATLAB/Simulink s využitím bloku *State-Space*. Signál povede z bloku *Step*, hladina pracovního bodu se získá pomocí bloku *Constant* a výsledné hodnoty budeme číst z bloku *Scope*.



Obr. 45. Zapojení stavového popisu s blokem State-Space v MATLAB/Simulink

Tuto simulaci lze ověřit zapojením matic do zpětnovazebního obvodu v MATLAB/Simulink. S využitím bloků *Gain*, *Sum*, *Integrator* a *Constant*. Signál povede z bloku *Step*, hladina pracovního bodu se získá pomocí bloku *Constant* a výsledné hodnoty budeme číst z bloku *Scope*.



Obr. 46. Zpětnovazební zapojení stavového popisu nadrž v MATLAB/Simulink

8.1.7 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací byly zvoleny hodnoty součástí reprezentující systém nádrže. Vstupní objemový průtok je reprezentován blokem *Step* a jeho velikost se v počátku změní z $q_{in}(t) = 0$ na $q_{in}(t) = 8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Plocha průřezu nádrže je $S_{nadrz} = 0,0028 \text{m}^2$ a plocha odtokového otvoru je $S_{odtok} = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$. Hodnoty dosadíme přímo do simulačního obvodu nebo na příkazovou řádku MATLAB zadáme jednotlivě příkazy $q=9\text{e-}6$, $S_{nadrz}=0.0028$ a $S_{odtok}=7.1\text{e-}6$.

Získáme diferenciální rovnici pro MATLAB/Simulink ve tvaru

$$q_{in} = (7,1 \cdot 10^{-6}) \sqrt{19,62 * h} + 0,0028 \frac{dh(t)}{dt}$$

Pro linearizovaný model byl zvolen pracovní bod $[q_0, h_0] = [8\text{e-}6; 0,6471]$. Linearizovaná přírůstková diferenciální rovnice po dosazení bude

$$\Delta q_{in}(t) = 0,0000195 \Delta h(t) + 0,0028 \Delta h'(t)$$

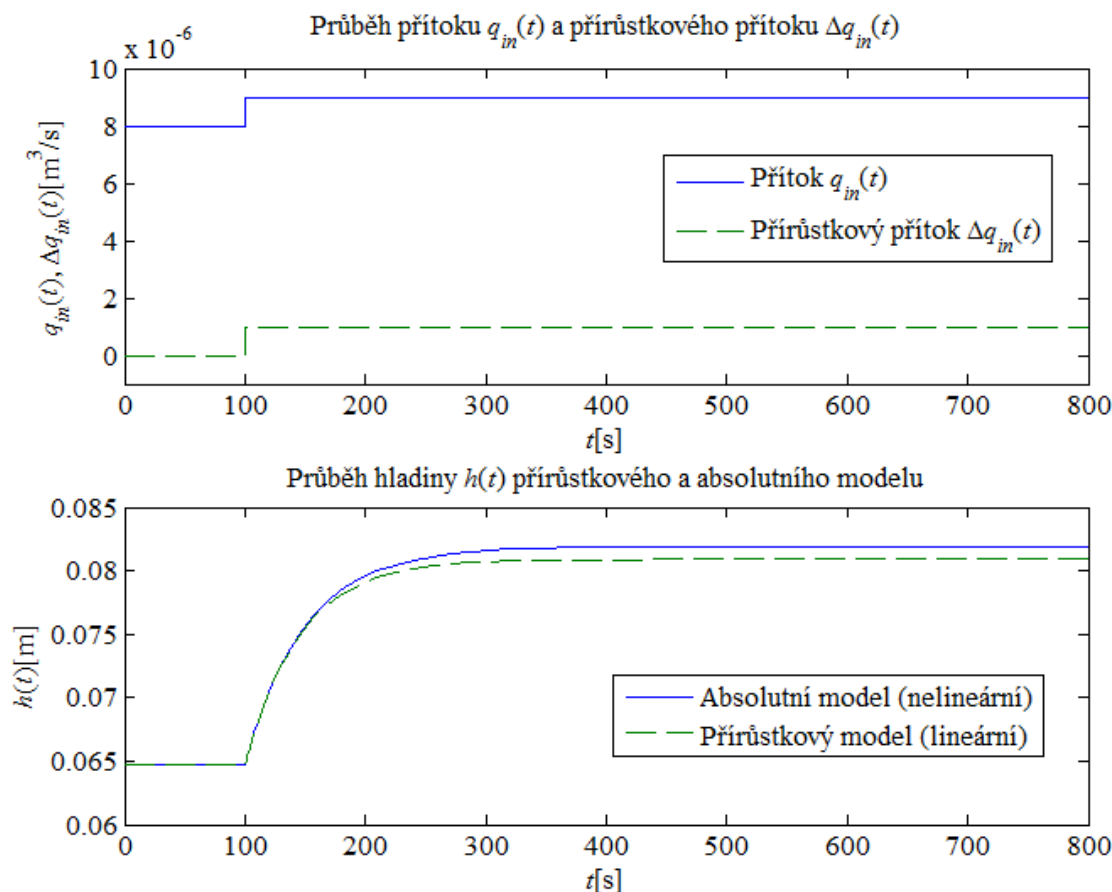
Přenos s linearizované rovnice po dosazení hodnot

$$G(s) = \frac{1}{0,0028s + 0,0000195}$$

Matice stavového popisu po dosazení hodnot jsou

$$\mathbf{A} = [-0,00696], \mathbf{B} = \left[\frac{1}{0,0028} \right], \mathbf{C} = [1] \text{ a } \mathbf{D} = [0]$$

Pro porovnání linearizovaného a nelinearizovaného modelu je nutné nastavit stejné vstupy v obou modelech v absolutním modelu v bloku *Step* je doba skoku 100s počáteční hodnota $8\text{e-}6$ a konečná hodnota $9\text{e-}6$. Dále je nutné zadat počáteční podmínku do integrátoru jako h_0 . Ekvivalentní k hodnotám absolutního modelu jsou tyto hodnoty pro linearizovaný model v bloku *Step* doba skoku 100 sekund počáteční hodnota 0 (stav přírůstkového systému je v pracovním bodě) a konečnou hodnotu na $1\text{e-}6$. Délka simulace je 800 sekund.

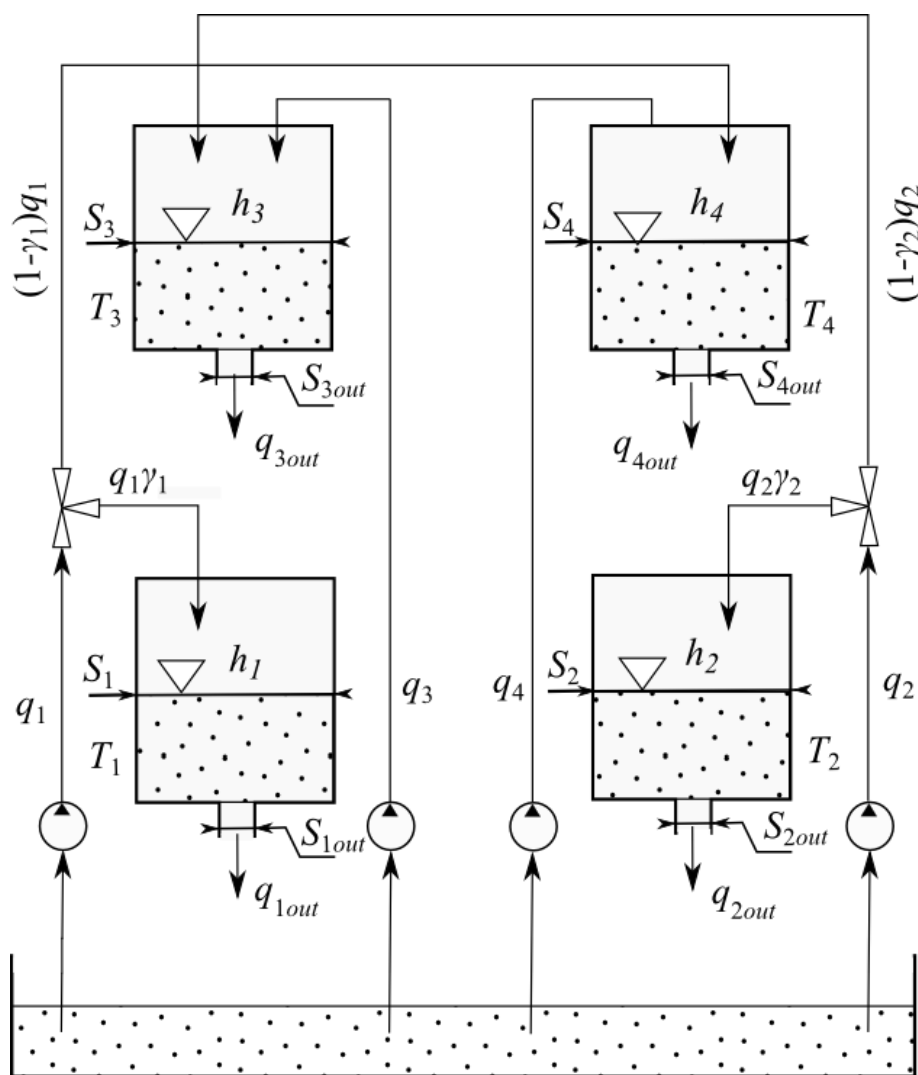


Obr. 47. Porovnání přírůstkového a absolutního modelu nádrže

Na grafu s porovnáním hladin přírůstkového a absolutního modelu (Obr. 47) je patrné, že je zde rozdíl ustálený hladin. Tato nepřesnost vznikla, protože jsme se vzdálili od pracovního bodu a tím jsme se vzdálili od skutečného průběhu hladiny. Z grafu porovnání přírůstkového a absolutního modelu si můžeme ověřit, že vstupy obou modelů jsou nastaveny správně, protože vyvolili přibližně stejnou odezvu.

8.2 Čtyř válcová vodárna

Jde o systém s dvěma vstupy dvěma výstupy a dvěma poruchovými veličinami. Skládající se ze čtyř nádrží T_1, T_2, T_3 a T_4 , vždy s dvěma nádržemi nad sebou. Kohouty γ_1 a γ_2 dělíme přítok q_1, q_2 mezi dvě nádrže a to mezi levou spodní T_1 a pravou horní T_4 nebo pravou spodní T_2 a levou horní T_3 . Průřezy nádrží jsou označeny S_1, S_2, S_3 a S_4 , průřezy odtoků nádrží jsou označeny $S_{1out}, S_{2out}, S_{3out}$ a S_{4out} , jejichž indexy odpovídají číslům jednotlivých nádrží. Odtoky z jednotlivých nádrží jsou $q_{1out}, q_{2out}, q_{3out}$ a q_{4out} , kde čísla indexu odpovídají nádrži, ke které náleží daný odtok. Jedná se o MIMO systém, protože hladiny spodních nádrží budou závislé na hladinách horních nádrží. Dále je přidána poruchová veličina q_3 a q_4 , která působí pouze na horní nádrže.



Obr. 48. Schématické zapojení nádrží

Za pomoci bilance vytvoříme následující rovnice pro systém čtyř nádržové vodárny. Rovnice bilance budou čtyři pro každou nádrž jedna, kde na levé straně je vstup, na pravé výstup z nádrže a akumulace.

$$\gamma_1 q_1 + q_{3out} = q_{1out} + S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (150)$$

$$\gamma_2 q_2 + q_{4out} = q_{2out} + S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (151)$$

$$q_3 + (1 - \gamma_2)q_2 = q_{3out} + S_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (152)$$

$$q_4 + (1 - \gamma_2)q_1 = q_{4out} + S_4 \frac{dh_4(t)}{dt} \quad (153)$$

Dále budou platit rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_{1out} v_{1out} \quad (154)$$

$$S_2 v_2 = S_{2out} v_{2out} \quad (155)$$

$$S_3 v_3 = S_{3out} v_{3out} \quad (156)$$

$$S_4 v_4 = S_{4out} v_{4out} \quad (157)$$

kde S_1, S_2, S_3 a S_4 představují plochu průřezů nádrží, $S_{1out}, S_{2out}, S_{3out}$ a S_{4out} jsou plochy průřezů výtoků z nádrží, v_1, v_2, v_3 a v_4 jsou rychlosti kapaliny vtékající do zúžení, $v_{1out}, v_{2out}, v_{3out}$ a v_{4out} jsou rychlosti kapaliny vtékající do zúžení.

Z rovnic kontinuity se dá odvodit výtoková rychlost a to pomocí Bernulliho rovnice. Bernulliho. Je to velice podobné jako v příkladu jedné nádrže, kde pro jednotlivé nádrže $i=1,2,3,4$ platí

$$\frac{v_i^2}{2} + \frac{p_i}{\rho} + gh = \frac{v_{iout}^2}{2} + \frac{p_{iout}}{\rho} + gh_z$$

Kde hodnoty s indexy i jsou před odtokem, indexy $iout$ po odtoku a h_z představuje ztrátu vzniklou ve výtokovém otvoru.

Po dosazení rovnic kontinuity do Bernulliho rovnice a dosazení za $h_z = \xi \frac{v_{iout}^2}{2g}$ a vyjádřením výtokové rychlosti, kterou potřebujeme pro vytvoření matematického modelu, získáme jako

$$v_{iout} = \sqrt{2 \frac{\frac{p_i - p_{iout}}{\rho} + gh}{1 + \xi - \left(\frac{S_{iout}}{S_i}\right)^2}} \quad (158)$$

Protože počítáme s dokonalou kapalinou, ztrátový součinitel bude tedy $\xi = 0$. Dále víme, že nádrž má zásadně větší průřez než odtokový otvor proto můžeme úplně vyloučit člen $\left(\frac{S_{iout}}{S_i}\right)^2$, dle [20] a [6]. Všechny nádrže jsou otevřeny do atmosféry, proto bude přibližně platit $p_i \cong p_{iout}$. Proto výsledná rovnice pro rychlost je

$$v_{iout} = \sqrt{2gh} \quad (159)$$

Získané výtokové rychlosti vynásobíme plochou výtokového otvoru a tím získáme objemový průtok ve výtoku každé nádrže. Ty dosadíme do rovnic získaných pomocí bilance.

$$\gamma_1 q_1 + S_{3V} \sqrt{2gh_3} = S_{1out} \sqrt{2gh_1} + S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (160)$$

$$\gamma_2 q_2 + S_{4V} \sqrt{2gh_4} = S_{2out} \sqrt{2gh_2} + S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (161)$$

$$q_3 + (1 - \gamma_2) q_2 = S_{3out} \sqrt{2gh_3} + S_3 \frac{dh_3(t)}{dt} \quad (162)$$

$$q_4 + (1 - \gamma_2) q_1 = S_{4out} \sqrt{2gh_4} + S_4 \frac{dh_4(t)}{dt} \quad (163)$$

Protože jsou hotovy všechny diferenciální rovnice, lze přejít k simulaci v MATLAB/Simulink. Rovnice se upraví tak že se převede derivace na jednu stranu rovnice a zbytek na druhou, pro získání lepšího tvaru na vytvoření zpětnovazebního obvodu.

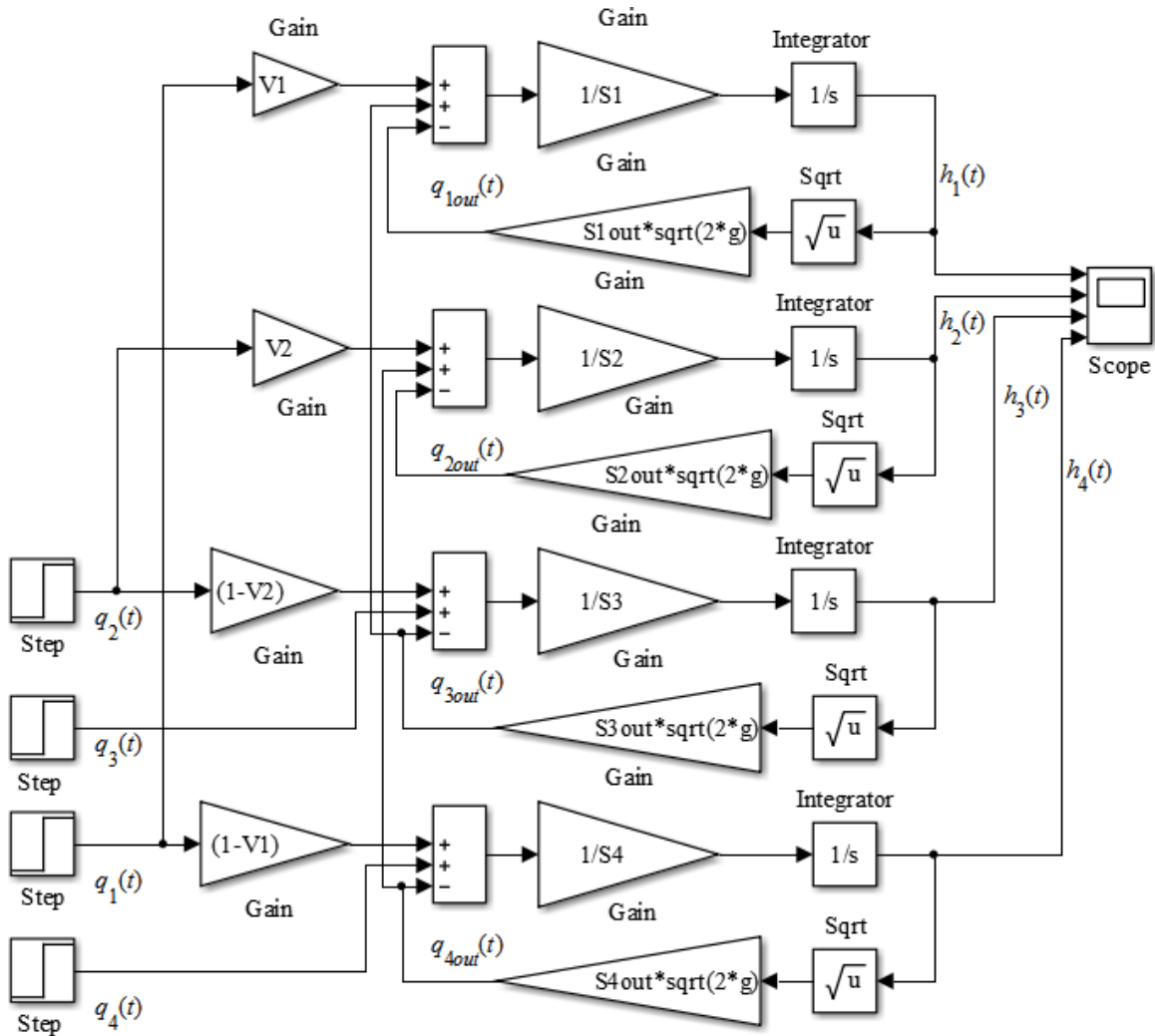
$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{\gamma_1}{S_1} q_1 + \frac{S_{3out}}{S_1} \sqrt{2gh_3} - \frac{S_{1out}}{S_1} \sqrt{2gh_1} \quad (164)$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{\gamma_2}{S_2} q_2 + \frac{S_{4out}}{S_2} \sqrt{2gh_4} - \frac{S_{2out}}{S_2} \sqrt{2gh_2} \quad (165)$$

$$\frac{dh_3(t)}{dt} = \frac{1}{S_3} q_3 + \frac{(1 - \gamma_2)}{S_3} q_2 - \frac{S_{3out}}{S_3} \sqrt{2gh_3} \quad (166)$$

$$\frac{dh_4(t)}{dt} = \frac{1}{S_4}q_4 + \frac{(1-\gamma_2)}{S_4}q_1 - \frac{S_{4out}}{S_4}\sqrt{2gh_4} \quad (167)$$

Za použití bloků step vzniknou čtyři vstupy pro q_1 , q_2 , q_3 a q_4 . Diferenciální rovnice lze řešit pomocí zpětnovazebního obvodu.



Obr. 49. Schéma obvodu vodárny z diferenciálních rovnic v MATLAB/Simulink

8.2.1 Pracovní body

Nyní je vhodné určit pracovní body, pro které bude provedena linearizace. Protože se jedná o ustálenou hodnotu hladiny, její derivace bude nulová, tedy z diferenciálních rovnic lze vyjádřit hodnoty jednotlivých hladin pro dané přítoky. Cílem je tedy získat hodnotu $h_i(\infty)$, která odpovídá ustálené hodnotě $\frac{dh_i(t)}{dt} = 0$.

Odvozené ustálené hladiny pro nádrže 3 a 4 jsou tedy

$$h_4(\infty) = \frac{(q_4 + (1 - \gamma_1)q_1)^2}{2gS_{4V}^2} \quad (168)$$

$$h_3(\infty) = \frac{(q_3 + (1 - \gamma_2)q_2)^2}{2gS_{3V}^2} \quad (169)$$

Ustálené hodnoty hladin z nádrží 3,4 se dosadí do rovnic pro hladiny 1,2 a tím vzniknou rovnice pro další dvě nádrže

$$h_4(\infty) = 2g \left(\frac{\gamma_2}{S_{2V}} q_2 + \frac{q_4 + (1 - \gamma_1)q_1}{S_{2V}} \right)^2 \quad (170)$$

$$h_3(\infty) = 2g \left(\frac{\gamma_1}{S_{1V}} q_2 + \frac{q_3 + (1 - \gamma_2)q_2}{S_{1V}} \right)^2 \quad (171)$$

Z těchto rovnic lze vypočítat pracovní body a provést pro něj linearizaci.

8.2.2 Linearizovaný model

Model nádrže není lineární, z důvodu členů rovnic kde není první mocnina ale odmocnina okamžité hladiny. Model je tedy třeba linearizovat, linearizovaný model získáme tak, že si určíme pracovní bod, který bude počátkem v přírůstkovém modelu. Pracovní bod bude ve tvaru $[q_{i-0}; h_{i-0}]$. Nejdříve zavedeme přítoky a hladiny v přírůstkovém tvaru.

Tedy pro naše přítoky v přírůstkovém modelu bude platit

$$q_i(t) = q_{i0} + \Delta q_i(t) \quad (172)$$

pro $i=1, 2, 3$ a 4 , kde $q_i(t)$ původní průtok, q_{i0} průtok odpovídající pracovnímu bodu, $\Delta q_i(t)$ přírůstek vzhledem k q_{i0} a pro hladiny

$$h_i(t) = h_{i0} + \Delta h_i(t) \quad (173)$$

pro $i=1, 2, 3$ a 4 , kde h_{i0} je hladina odpovídající pracovnímu bodu, $\Delta h_i(t)$ přírůstek vzhledem k h_{i0} .

Nyní je možné linearizovat přírůstkovou hodnotu hladiny $\sqrt{h_{i0} + \Delta h_i(t)}$, pomocí prvních dvou členů Taylorova polynomu tak abychom získaly přímkou tečnou k statické charakteristice v pracovním bodě.

$$\begin{aligned}\sqrt{h_i(t)} &= \sqrt{h_{i0} + \Delta h_i(t)} \approx \sqrt{h_{i0}} + \frac{1}{1!}(\sqrt{h_{i0}})' \Delta h_i(t) \\ &\approx \sqrt{h_{i0}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{i0}}} \Delta h_i(t)\end{aligned}\quad (174)$$

Po dosazení do diferenciálních rovnic kde se provedla úprava průtoků do přírůstkového zápisu získáme rovnice jako

$$\begin{aligned}\gamma_1(q_{10} + \Delta q_1) + S_{3out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{30}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{30}}}\Delta h_3\right) \\ = S_{1out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{10}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{10}}}\Delta h_1\right) + S_1(h_{10} + \Delta h_1)'\end{aligned}\quad (175)$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(q_{20} + \Delta q_2) + S_{4out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{40}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{40}}}\Delta h_4\right) \\ = S_{2out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{20}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{20}}}\Delta h_2\right) + S_2(h_{20} + \Delta h_2)'\end{aligned}\quad (176)$$

$$\begin{aligned}(q_{30} + \Delta q_3) + (1 - \gamma_2)(q_{20} + \Delta q_2) \\ = S_{3out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{30}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{30}}}\Delta h_3\right) + S_3(h_{30} + \Delta h_3)'\end{aligned}\quad (177)$$

$$\begin{aligned}(q_{40} + \Delta q_4) + (1 - \gamma_1)(q_{10} + \Delta q_1) \\ = S_{4out}\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_{40}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{40}}}\Delta h_4\right) + S_4(h_{40} + \Delta h_4)'\end{aligned}\quad (178)$$

které lze dále upravit a to ze znalosti že přítok a odtok v ustáleném stavu, což je počáteční stav přírůstkového modelu, bude stejný a derivace ustálené hladiny bude nulová. Musí tedy platit, že následující objemové průtoky jsou rovny, proto je můžeme v rovnici vykrátit

$$\gamma_1 q_{10} + S_{3out}\sqrt{2gh_{30}} = S_{1out}\sqrt{2gh_{10}}\quad (179)$$

$$\gamma_2 q_{20} + S_{4out}\sqrt{2gh_{40}} = S_{2out}\sqrt{2gh_{20}}\quad (180)$$

$$q_{30} + (1 - \gamma_2)q_{20} = S_{3out}\sqrt{2gh_{30}}\quad (181)$$

$$q_{40} + (1 - \gamma_1)q_{10} = S_{4out}\sqrt{2gh_{40}}\quad (182)$$

potom vzniknou rovnice ve tvaru

$$\gamma_1 \Delta q_1 + S_{3out} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} \Delta h_3 = S_{1out} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} \Delta h_1 + S_1 \Delta h_1' \quad (183)$$

$$\gamma_2 \Delta q_2 + S_{4out} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \Delta h_4 = S_{2out} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} \Delta h_2 + S_2 \Delta h_2' \quad (184)$$

$$\Delta q_3 + (1 - \gamma_2) \Delta q_2 = S_{3out} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} \Delta h_3 + S_3 \Delta h_3' \quad (185)$$

$$\Delta q_4 + (1 - \gamma_1) \Delta q_1 = S_{4out} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \Delta h_4 + S_4 \Delta h_4' \quad (186)$$

což jsou přírůstkové rovnice linearizovaného modelu, dle [22].

Zápis rovnic vhodný pro simulaci v MATLAB/Simulinku zvolíme s derivací na jedné straně a zbytkem prvků na druhé straně.

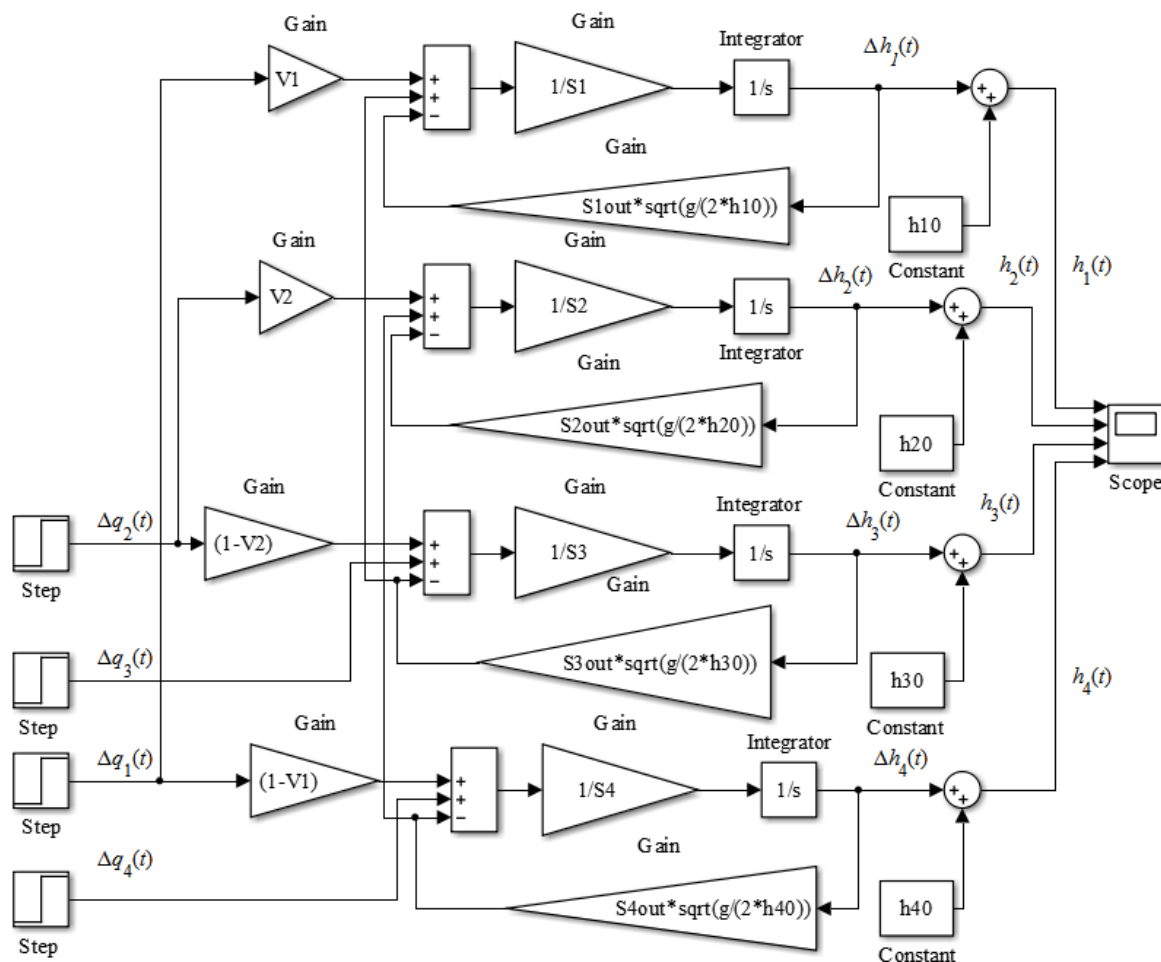
$$\Delta h_1' = \frac{\gamma_1}{S_1} \Delta q_1 + \frac{S_{3out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} \Delta h_3 - \frac{S_{1out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} \Delta h_1 \quad (187)$$

$$\Delta h_2' = \frac{\gamma_2}{S_2} \Delta q_2 + \frac{S_{4out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \Delta h_4 - \frac{S_{2out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} \Delta h_2 \quad (188)$$

$$\Delta h_3' = \frac{\Delta q_3}{S_3} + \frac{(1 - \gamma_2)}{S_3} \Delta q_2 - \frac{S_{3out}}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} \Delta h_3 \quad (189)$$

$$\Delta h_4' = \frac{\Delta q_4}{S_4} + \frac{(1 - \gamma_1)}{S_4} \Delta q_1 - \frac{S_{4out}}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \Delta h_4 \quad (190)$$

Před zapojením v MATLAB/Simulink je vhodné změnit uvažování, protože se jedná o přírůstkový model. Tedy pokud vstup $\Delta q_i(t) = 0$, potom i výstup $\Delta h_i = 0$ ale zároveň bude hladina v nádrži i bude rovna hladině pracovního bodu nádrže i , tedy $[q_{i0}; h_{i0}]$.



Obr. 50. Schéma zapojení vodárny z linearizovaných přírůstkových rovnic

8.2.3 Stavový popis

Z linearizovaných rovnic lze přímo získat stavový popis. Kde se zvolí stavové proměnné $\Delta h'_1, \Delta h'_2, \Delta h'_3$ a $\Delta h'_4$. Pro lepší pochopení je zde použit upravený zápis stavového popisu jako

$$y' = \mathbf{A}y(t) + \mathbf{B}_1u(t) + \mathbf{B}_2v(t) \quad (191)$$

Stavový popis se skládá ze čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu.

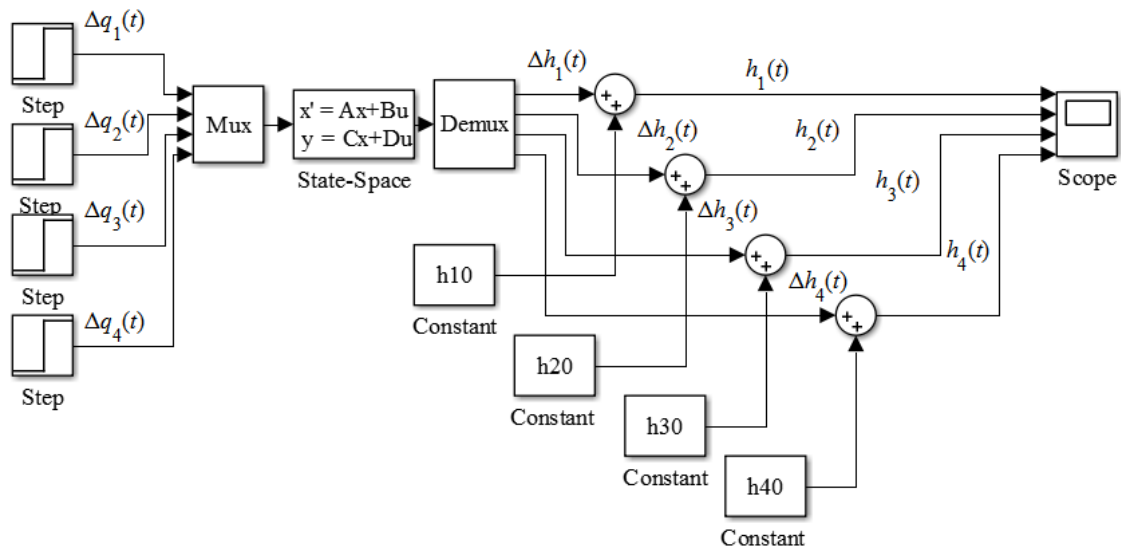
$$\begin{bmatrix} \Delta h'_1 \\ \Delta h'_2 \\ \Delta h'_3 \\ \Delta h'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_{1out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} & 0 & -\frac{S_{3out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & -\frac{S_{2out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} & 0 & -\frac{S_{4out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \\ 0 & 0 & -\frac{S_{3out}}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{S_{4out}}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{S_2} \\ 0 & \frac{1-\gamma_2}{S_3} \\ \frac{1-\gamma_1}{S_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \end{bmatrix}$$

Výstupní rovnici vytvoříme znalostí toho, že výstupem našeho MIMO systému mají být hladiny h_1 a h_2 . V našem případě můžeme tedy ve výstupní rovnici použít přírůstkové hladiny Δh_1 a Δh_2 .

$$\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix}$$

Se znalostí stavového popisu dokážeme vytvořit simulaci z důvodu, že matice \mathbf{B} je rozdělena na dvě části musíme upravit matice stavového popisu, tak aby je bylo možné použít s blokem *State-Space*. To lze provést spojením matic \mathbf{B}_1 a \mathbf{B}_2 do jedné matice a

přidáním dalších dvou řádků do matice C a to s nulami nebo s jedničkami odpovídajícím pozicím stavům Δh_3 a Δh_4 . Tyto matice jsou uvedeny v příloze PII.



Obr. 51. Stavový popis vodárny pomocí bloku State-Space

Tuto simulaci lze ověřit zapojením matic do zpětnovazebního obvodu v MATLAB/Simulink. S využitím bloků *Gain*, *Sum*, *Integrator* a *Constant*. Signál povede z bloku *Step*, hladinu pracovního bodu lze nastavit pomocí bloku *Constant* a výsledné hodnoty se získají z bloku *Scope*. Schéma tohoto zapojení je v příloze (PII).

8.2.4 Přenosová matice

Přenosová matice se vyjádří ze stavového popisu. Přenos bude rozdělen na dvě části a to přenos systému $\mathbf{G}_S(s)$ a přenos poruchy $\mathbf{G}_V(s)$. Vztah mezi těmito přenosy a celkovým přenosem je potom.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_S(s)U(s) + \mathbf{G}_V(s)V(s) \quad (192)$$

Kde tyto přenosy se určí jako

$$\mathbf{G}_S(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{B}_1 \quad (193)$$

$$\mathbf{G}_V(s) = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{B}_2 \quad (194)$$

Pro zjednodušení zápisu a dalších výpočtů je vhodné zavést substituci v matici na hlavní diagonále \mathbf{A} .

$$\frac{1}{T_i} = \frac{S_{iout}}{S_i} \sqrt{\frac{g}{2h_{i-0}}} \quad (195)$$

Přenosovou matici systému potom určíme jako

$$\mathbf{G}_S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{S_3}{S_1 * T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{S_4}{S_2 * T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{S_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{S_2} \\ 0 & \frac{1 - \gamma_2}{S_3} \\ \frac{1 - \gamma_1}{S_4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{S_1(s + \frac{1}{T_1})} & \frac{1 - \gamma_2}{S_1(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_3})T_3} \\ \frac{1 - \gamma_1}{S_2(s + \frac{1}{T_2})(s + \frac{1}{T_4})T_4} & \frac{\gamma_2}{S_2(s + \frac{1}{T_2})} \end{bmatrix}$$

Přenosovou matici poruchy lze určit jako

$$\mathbf{G}_V(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{S_3}{S_1 * T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{S_4}{S_2 * T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_3})T_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_2(s + \frac{1}{T_2})(s + \frac{1}{T_4})T_4} \end{bmatrix}$$

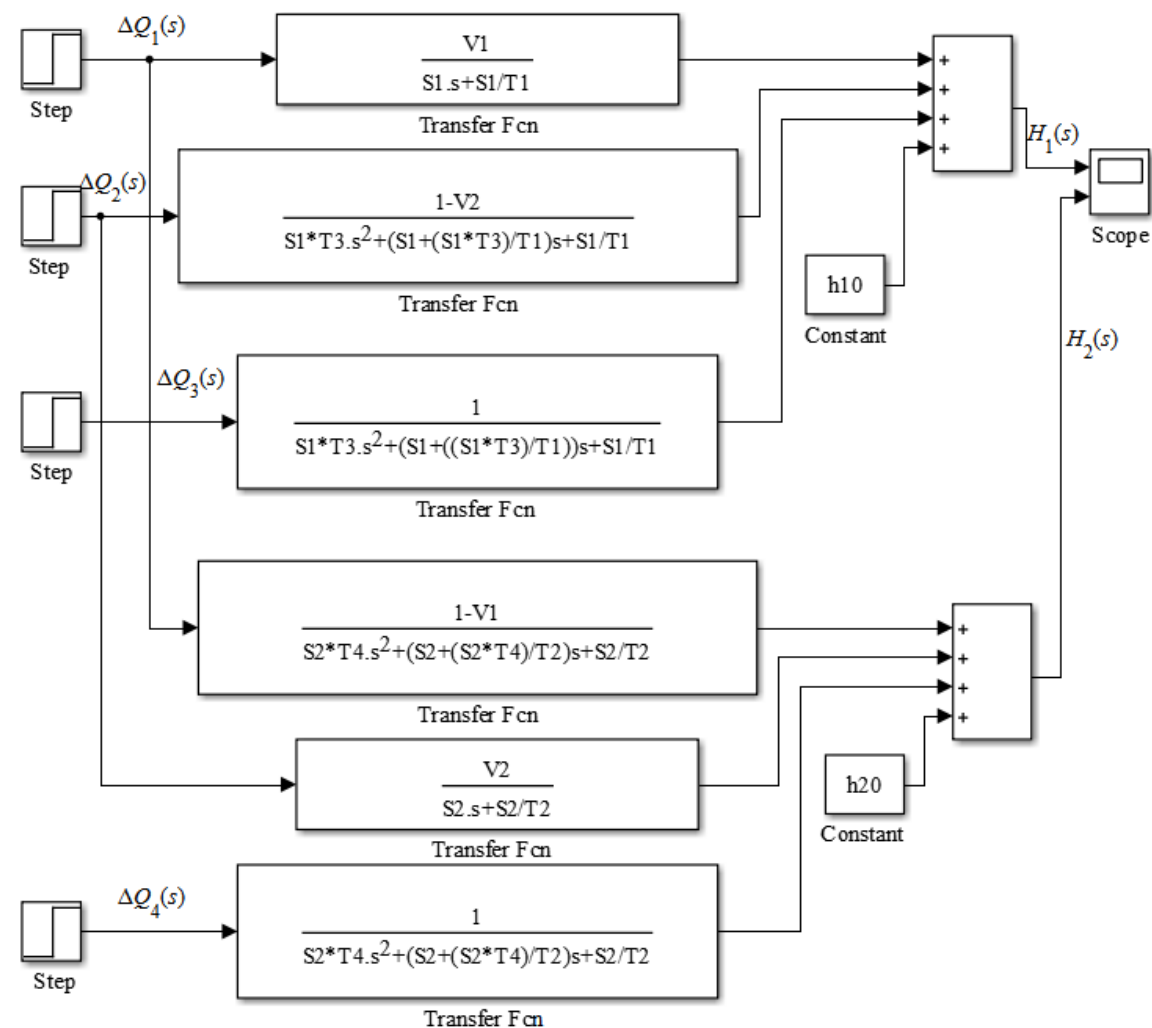
se znalostí těchto přenosů je možné vytvořit zapojení z dílčích přenosů matic \mathbf{G}_S a \mathbf{G}_V .

Dílčí přenosy jsou následovné

$$\Delta H_1 = \frac{\gamma_1}{S_1 \left(s + \frac{1}{T_1}\right)} Q_1 + \frac{1 - \gamma_2}{S_1 \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_3}\right) T_3} Q_2 + \frac{1}{S_1 \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_3}\right) T_3} Q_3$$

$$\Delta H_2 = \frac{1 - \gamma_1}{S_2 \left(s + \frac{1}{T_2}\right) \left(s + \frac{1}{T_4}\right) T_4} Q_1 + \frac{\gamma_2}{S_2 \left(s + \frac{1}{T_2}\right)} Q_2 + \frac{1}{S_2 \left(s + \frac{1}{T_2}\right) \left(s + \frac{1}{T_4}\right) T_4} Q_4$$

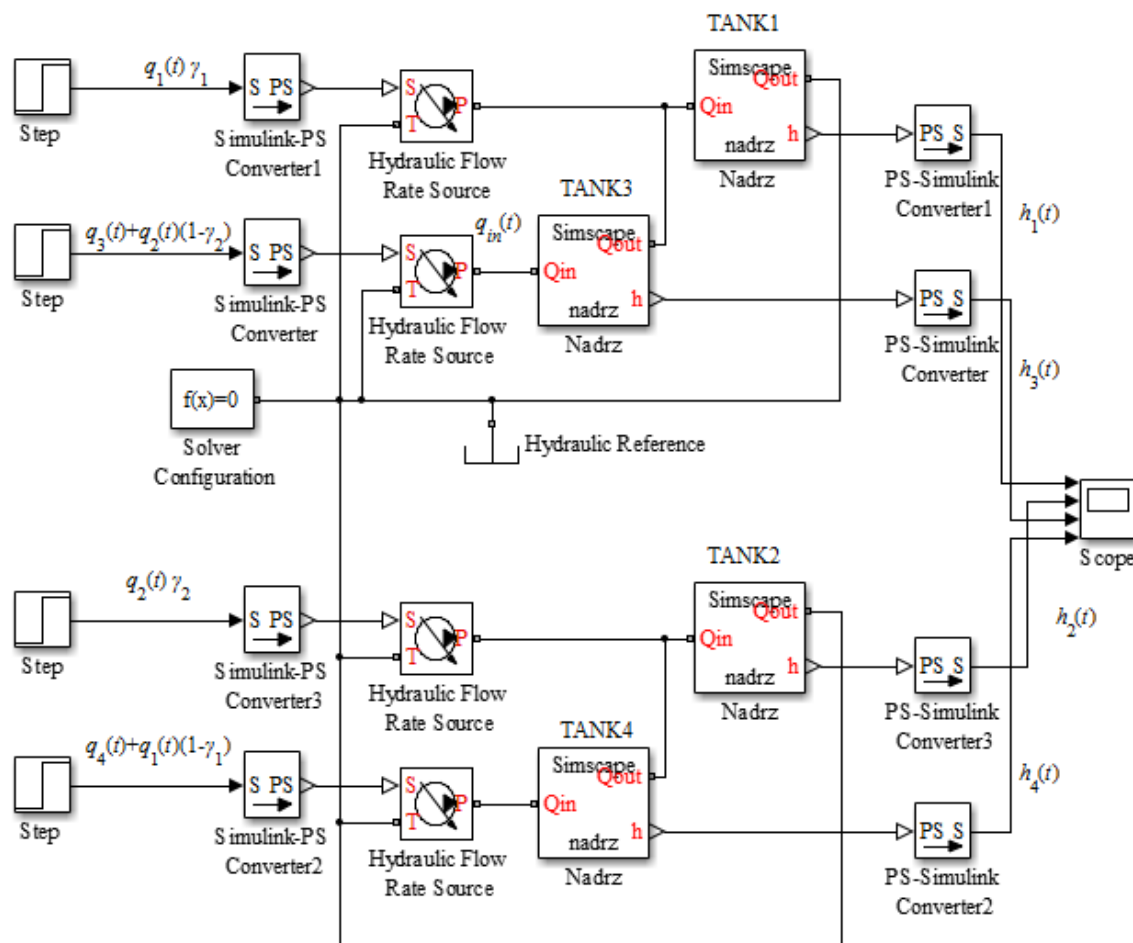
jejich zapojením v MATLAB/Simulink získáme následující blokové schéma (Obr. 52).



Obr. 52. Zapojení vodárny z dílčích přenosů v MATLAB/Simulink

8.2.5 Simscape model

Pro zapojení je využito námi vytvořeného bloku z příkladu nádrže (8.1), tím lze současně ověřit modulárnost vytvořeného bloku. Dále jsou potřeba bloky *Hydraulic Flow Rate Source*, *Simulink-PS Converter*, *PS-Simulink Converter*, *Hydraulic Reference* a *Solver Configuration*. Zdrojem signálu pro *Hydraulic Flow Rate Source* bude *Step* a výsledky se ověří pomocí bloku *Scope*.



Obr. 53. Zapojení vodárny s využitím knihovny Simscape

8.2.6 Porovnání simulací

Pro porovnání jednotlivých možností simulací byly zvoleny hodnoty součástí reprezentující systém čtyřválcové vodárny. Vstupní objemové průtoky jsou reprezentovány blokem *Step* a jeho velikost se v 100s změní z $q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = q_4(t) = 0$ na $q_1(t) = q_2(t) = 9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ a $q_3(t) = q_4(t) = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Plocha průřezů nádrží byla zvolena jako $S_1 = S_3 = 0,0028\text{m}$ a $S_2 = S_4 = 0,0032\text{m}$. Plocha odtokových otvorů byla

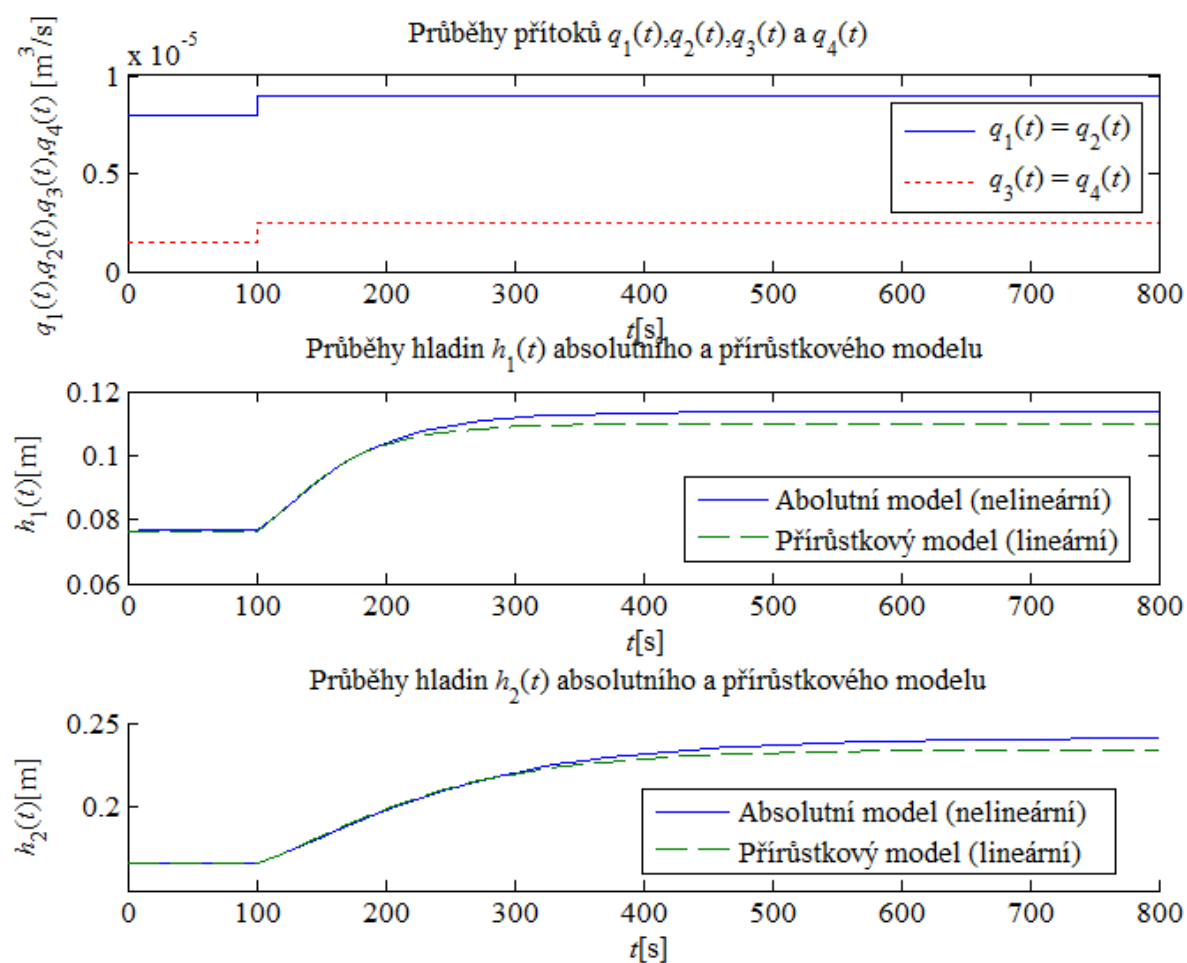
zvolena $S_{1out} = S_{3out} = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$ a $S_{1out} = S_{3out} = 5,7 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$. Otevření ventilů bylo zvoleno na $\gamma_1 = 0,6$ a $\gamma_2 = 0,7$. Pro linearizované simulace byly vypočítány počáteční hodnoty přírůstkových modelů jako $q_{10}(t) = q_{20}(t) = 8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ a $q_{30}(t) = q_{40}(t) = 1,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, jimž odpovídají hladiny $h_{10}(t) = 0,0765 \text{m}$, $h_{20}(t) = 0,1664 \text{m}$, $h_{30}(t) = 0,0154 \text{m}$ a $h_{40}(t) = 0,0347 \text{m}$. Na příkazovou řádku MATLAB zadáme jednotlivě příkazy $S4=0.0032$, $S2=0.0032$, $S3=0.0028$, $S1 = 0.0028$, $S1out = 7.1000\text{e-}06$, $S4out=5.7\text{e-}6$, $S2out=5.7\text{e-}6$, $S3out=7.1\text{e-}6$, $V1=0.6$, $V2=0.7$, $h10=0.0765$, $h20=0.1664$, $h30=0.0154$, $h40=0.0347$, $q1=9\text{e-}6$, $q2=9\text{e-}6$, $q3=2.5\text{e-}6$, $q4=2.5\text{e-}6$, $q10=8\text{e-}6$, $q20=8\text{e-}6$, $q30=1.5\text{e-}6$, $q40=1.5\text{e-}6$, $g=9.81$.

Dále pro zjednodušení zápisu v simulaci s dílčími přenosy byly použity zavedené konstanty, které se určí zadáním následujících příkazů na příkazovou řádku

$T1=1/((S1out/S1)*\text{sqrt}(9.81/(2*h10)))$, $T2=1/((S2out/S2)*\text{sqrt}(9.81/(2*h20)))$,

$T3=1/((S3out/S3)*\text{sqrt}(9.81/(2*h30)))$ a $T4=1/((S4out/S4)*\text{sqrt}(9.81/(2*h40)))$.

Porovnání simulačních modelů je provedeno na obrázku *Obr. 54*. Z výsledků simulací je zřejmé, že výsledné modely jsou správné, protože u přírůstkového modelu došlo jen k malé odchylce od absolutního modelu. Rozdíl je opět způsoben vzdálením se od pracovního bodu jako v případě jedné nádrže.



Obr. 54. Porovnání simulací čtyřválcové vodárny

ZÁVĚR

V teoretické části bakalářské práce jsem popsal základní teorii systémů nutnou pro vytvoření matematických modelů, kterou jsem následovně aplikoval na reálné příklady systémů v praktické části. Základní teorie systémů a matematickým modelům je velice rozsáhlá proto jsem se věnoval vybraným a často používaným matematickým modelům jako je přenos, diferenciální rovnice a stavový popis. Následovně jsem zde uvedl základy Laplaceovy transformace z důvodu její důležitosti ve stavovém popisu a přenosu. Krátce se zde věnuji také Lagrangeově rovnici druhého druhu, pomocí které je odvozen matematický model v mechanických systémech v teoretické části. Následovně jsem se věnoval teorii linearizace pomocí Taylorova polynomu, která je využita v praktické části u příkladů nádrží.

V praktické části jsem uvedl příklady rozdělené do tří kapitol jako mechanické systémy, elektrické systémy a hydraulické systémy. V každé z těchto kapitol jsou uvedeny dva příklady první je vždy jednodušší než druhý, který je složitější. V každém příkladu je uveden jeho popis včetně obrázků. Následuje vytvoření simulace s využitím knihovny Simscape. Dále je vytvořen matematický model v podobě diferenciální rovnice a provedeny simulace u hydraulických systémů navíc provedena linearizace této rovnice. Z diferenciální rovnice jsem vytvořil přenos a stavový popis, kde je provedena další simulace. V závěru každého příkladu jsou uvedeny ukázkové parametry a porovnání jednotlivých simulací pomocí grafů. Z těchto závěrů vyplývá, že jednotlivé matematické modely jsou ekvivalentní, protože výsledky jejich simulací jsou stejné. Při porovnání těchto modelů se simulačním modelem využívajícím knihovny Simscape jsem dospěl k závěru, že výsledky jsou totožné. Je tedy možné vytvořit simulační model bez znalosti matematického modelu s využitím knihovny Simscape a to jen z popisu systému, jeho součástí a jejich vnitřních vazeb. V této bakalářské práci je také ověřena funkčnost vlastních Simscape bloků a jejich modulárnost, a to na příkladech nádrží. Správnost výpočtu všech matematických modelů byla ověřena v programu Wolfram Mathematica. Všechny simulační modely uvedené v této práci jsou uvedeny na přiloženém CD.

Předpokládám, že tato práce, případnému čtenáři ukáže jak postupovat při popisu reálného systému matematickým modelem a jeho následující simulaci s využitím MATLAB/Simulink.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

In theoretical part of this bachelor thesis I was trying to describe basic theory of systems required for creation of mathematical models, which was later used in examples of real systems in practical part of this thesis. The basic theory of systems and mathematical models is very extensive so I was focused on chosen, commonly used mathematical models like transfer function, state space model and differential equations. Furthermore basic Laplace transform theory is listed, because it's essential in state space model and transfer function. In short I explained basic use of Euler–Lagrange equation, which is later used to create mathematical model in mechanical systems in practical part of this thesis. Further I was looking in to the basic theory of linearization, using Taylors series, which was later used in theoretical part in hydraulic tank examples.

In practical part examples of mechanical, electrical and hydraulic systems are split in three chapters. In each of these chapters are two examples first one is easier than the other one. In each example description of system with picture is listed. Followed by, creation of simulation using Simscape library. Differential equations are deduced and next simulation is created, in hydraulic systems in addition linearization is realized. Transfer function and space state model is created from differential equations and more simulations are realized. In sum of each example functioning parameters and plot comparison of simulations are listed. From these conclusions we can say that individual mathematical models are equivalent, because their simulation results are the same. In comparison of these models with simulations using Simscape library the outcome was the same. So there is a possibility to create simulation model without knowledge of mathematical model with Simscape library only from system description of its parts and inner bonds. In this thesis custom Simscape blocks and their modularity are verified. Rightness of all mathematical models calculations were verified using Wolfram Mathematica software. All simulation models which are listed in this thesis are available from enclosed CD.

Personally I hope that this thesis will show to its reader how to progress in creation of description of real systems with mathematical models and how to create simulation with this model with use of MATLAB/Simulink.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace: Vybrané statě*. První vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2011. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18581>
- [2] ZORA, Jančíková Ostrava. *Teorie systémů* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: <http://www.person.vsb.cz/archivcd/FMMI/TS/Teorie%20systemu.pdf>
- [3] WOODS, Robert L. a Kent L. LAWRENCE. Modeling and simulation of dynamic systems. 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice-Hall, 1997, ix, 768 s. ISBN 01-333-7379-7.
- [4] OGATA, Katsuhiko. System Dynamics. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004, ix, 768 s. ISBN 01-314-2462-9.
- [5] HUŠEK, Petr. *Analogie systémů* [online]. 2013 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: https://moodle.dce.fel.cvut.cz/pluginfile.php/1446/mod_resource/content/2/Pred_3new.pdf
- [6] NOSKIEVIČ, Petr. *Modelování a identifikace systémů*. Ostrava: MONTANEX, 1999. ISBN 80-7225-030-2.
- [7] ŠČEVÍK, Petr. *Zpracování výukových textů z oblasti číslicové regulace v prostředí Internetu*. Ostrava, 2008. Diplomová práce. Vysoká škola báňská, Fakulta strojní, Katedra automatizační techniky a řízení. Vedoucí diplomové práce Miluše Vítečková.
- [8] Euler–Lagrange equation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-2015 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Lagrange_equation
- [9] ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. Druhé vyd. Praha: Ediční středisko ČVUT, 2002. ISBN 80-01-01971-3.
- [10] JANEČEK, Josef. Základy spojitého řízení: Linearizace popisu dynamického systému. [online]. 2010 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: www.fm.tul.cz/esf0247/index.php?download=548

- [11] MELICHAR, Jiří. *Lineární systémy 1*. Plzeň, 2007. Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/cs/courses/lsl>
- [12] SCHIFF, Joel L. *The Laplace transform: theory and applications*. New York: Springer, 1999, xiv. ISBN 03-879-8698-7.
- [13] HEKRDLA, Josef. *Laplaceova transformace* [online]. 2008 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: <https://math.feld.cvut.cz/hekrdla/Teaching/X01MA2/Prednasky/LT.pdf>
- [14] JURA Pavel. *Signály a systémy*. Elektronické skriptum, část I, II, III, druhé opravené vydání, 2010.
- [15] MATUŠŮ, Radek a Petr DOSTÁL. *Stavová a algebraická teorie řízení*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2010. ISBN 978-80-7318-991-4. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18580>
- [16] SKALICKÝ, Jiří. *Teorie řízení I*. První vyd. Brno: VUT FEKT, 2002. ISBN 80-214-2112-6.
- [17] HLINÁK, Milan. *Knihovna komplexních příkladů a úloh z předmětu Teorie systémů* [online]. 2013 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/25187>. Bakalářská práce. UTB. Vedoucí práce Pekař Libor.
- [18] THE MATHWORKS, Inc. *MATLAB/Simulink: Simulation and Model-Based Design* [online]. [cit. 2015-01-16]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/products/MATLAB/Simulink/>
- [19] HURÁK, Z. HROMČÍK M. a ROUBAL J. *Teorie dynamických systémů* [online]. 2006 [cit. 2015-04-16].
- [20] DRÁBKOVÁ, Silva a Milada KOZUBKOVÁ. *Cvičení z mechaniky tekutin* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/HydroPrikklad.pdf>
- [21] LOSOS, Radek. *Řízení vácerozměrných systémů pomocí PID regulátorů* [online]. Praha, 2011 [cit. 2015-04-16]. Dostupné z: http://support.dce.felk.cvut.cz/mediawiki/index.php/Dp_447_cz. Diplomová Práce. ČVUT. Vedoucí práce Petr Hušek.
- [22] JOHANSSON, Karl. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. In: *Control Systems Technology*. IEEE, 2000.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Seznam Symbolů

A	Matice systému
a	Zrychlení
a_n	Konstantní koeficient diferenciální rovnice
B	Matice buzení
B	Koeficient tlumení rotačních prvků
b	Koeficient tlumení translačních prvků
b_n	Konstantní koeficient diferenciální rovnice
C	Výstupní matice
C	Elektrická kapacita
c	Měrná tepelná kapacita
D	Matice převodu
Δx	Odchylka od pracovního bodu na ose x
Δy	Odchylka od pracovního bodu na osy y
E_k	Kinetická energie
E_p	Potencionální energie
$e(t)$	Regulační odchylka
F	Síla
$G(s)$	Přenosová matice
$G(s)$	Přenosová funkce
i	Proud
J	Moment setrvačnosti
k	Tuhost translační pružiny
κ	Tuhost torzní pružiny

L	Indukčnost, Lagrangian
\mathcal{L}	Operátor Laplaceovy transformace
\mathcal{L}^{-1}	Operátor zpětné Laplaceovy transformace
λ	Tepelná vodivost
m	Hmotnost
M	Kroutící moment
$n(t)$	Porucha na výstupu
n_j	Nuly přenosu
P	Pracovní bod
p	Tlak
p_i	Póly přenosu
Q	Objemový průtok
R	Elektrický odpor, Disipativní funkce
R_A	Absolutní tepelný odpor
s	Operátor komplexní proměnné
T	Teplota
T_j	Časová konstanta
t	Čas
Φ	Tepelný tok
φ	Úhel
u	Napětí
$U(s)$	Obraz vstupu v Laplaceově transformaci
$u(t)$	Vstupní veličina, akční veličina
$u_0(t)$	Akční veličina na výstupu regulátoru
$\mathbf{u}(t)$	Vektor vstupních veličin

V	Objem
v	Rychlost
$v(t)$	Porucha na vstupu
$w(t)$	Regulovaná veličina
ω	Úhlová rychlost
$X(s)$	Obraz stavové proměnné v Laplaceově transformaci
$\mathbf{x}(t)$	Vektor stavových proměnných
x_0	Počáteční souřadnice x přírůstkového modelu, souřadnice x pracovního bodu
$Y(s)$	Obraz výstupu v Laplaceově transformaci
$y(t)$	Vstupní veličina
$\mathbf{y}(t)$	Vektor výstupních veličin
y_0	Počáteční souřadnice y přírůstkového modelu, souřadnice y pracovního bodu

Seznam Zkratk

deg	Stupeň polynomu
LDR	Lineární diferenciální rovnice
LSDS	Lineární spojitý dynamický systém
MIMO	systém s více vstupy a výstupy (Multiple-input multiple-output systém)
SISO	Single-input single-output

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Obecné schéma systému a ukázkou na příkladu nádrže.....	11
Obr. 2. Příklad odezvy nádrže	12
Obr. 3. Cívka.....	14
Obr. 4. Hmota	14
Obr. 5. Setrvačná hmota	15
Obr. 6. Potrubí	15
Obr. 7. Kondenzátor.....	16
Obr. 8. Pružina	17
Obr. 9. Torzní pružina.....	17
Obr. 10. Nádrž	18
Obr. 11. Tepelná kapacita hmoty	18
Obr. 12. Zpětnovazební obvod	21
Obr. 13. Grafický význam linearizace	26
Obr. 14. Statická charakteristika přírůstkového modelu.....	27
Obr. 15. Blokové schéma stavového popisu	36
Obr. 16. Schéma zapojení integračního članku	41
Obr. 17. Schéma zapojení integračního članku v MATLAB/Simulink s použitím knihovny Simscape.....	42
Obr. 18. Schématické zapojení integračního članku v MATLAB/Simulink ze základních bloků.....	43
Obr. 19. Schématické zapojení integračního članku v MATLAB/Simulink z přenosové funkce	43
Obr. 20. Zapojení stavového modelu integračního članku ze základních bloků a s využitím bloku State-Space	44
Obr. 21. Graf výstupu simulací integračního članku	45
Obr. 22. Schéma zapojení elektrického obvodu	46
Obr. 23. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink – Simscape	46
Obr. 24. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink ze základních bloků.....	48
Obr. 25. Simulace obvodu s dvěma zdroji v MATLAB/Simulink s použitím bloku State-Space	49

Obr. 26. Schéma zapojení obvodu s dvěma zdroji z dílčích přenosů v MATLAB/Simulink	51
Obr. 27. Průběhy vstupních a výstupních veličin v obvodu s dvěma zdroji.....	53
Obr. 28. Schematické znázornění mechanického systému	54
Obr. 29. Blokové schéma hmot propojených pružinou v Simscape	54
Obr. 30. Blokové zapojení hmot propojených pružinou v MATLAB/Simulink	56
Obr. 31. Blokové zapojení hmot propojených pružinou v MATLAB/Simulink pomocí bloku State-Space	58
Obr. 32. Blokové schéma zapojení hmot propojených pružinou z dílčích přenosů	59
Obr. 33. Průběh závislosti poloh hmot na čase mechanického systému.....	61
Obr. 34. Schéma rotačních hmot	62
Obr. 35. Zapojení rotačního mechanického systému s knihovnou Simscape.....	63
Obr. 36. Blokové zapojení rotačního mechanického systému systému ze základních bloků v MATLAB/Simulink	65
Obr. 37. Blokové zapojení rotačního mechanického systému s blokem State-space	67
Obr. 38. Stavový popis rotačního mechanického systému simulovaný pomocí dílčích přenosů v MATLAB/Simulink.....	68
Obr. 39. Průběhy veličin u rotačního mechanického systému.....	69
Obr. 40. Schéma nádrže	70
Obr. 41. Schematické zapojení nádrže v MATLAB/Simulink	71
Obr. 42. Zapojení nádrže s vlastním blokem v Simscape.....	72
Obr. 43. Zapojení linearizovaného modelu nádrže v MATLAB/Simulink	74
Obr. 44. Schématické zapojení nádrže v MATLAB/Simulink s přenosovou funkcí	75
Obr. 45. Zapojení stavového popisu s blokem State-Space v MATLAB/Simulink	76
Obr. 46. Zpětnovazební zapojení stavového popisu nádrže v MATLAB/Simulink.....	76
Obr. 47. Porovnání přírůstkového a absolutního modelu nádrže	78
Obr. 48. Schématické zapojení nádrží	79
Obr. 49. Schéma obvodu vodárny z diferenciálních rovnic v MATLAB/Simulink.....	82
Obr. 50. Schéma zapojení vodárny z linearizovaných přírůstkových rovnic	86
Obr. 51. Stavový popis vodárny pomocí bloku State-Space	88
Obr. 52. Zapojení vodárny z dílčích přenosů v MATLAB/Simulink.....	91
Obr. 53. Zapojení vodárny s využitím knihovny Simscape.....	92
Obr. 54. Porovnání simulací čtyřválcové vodárny	94

SEZNAM PŘÍLOH

PI	Soubory na disku CD (Simulace, skripty, gui ...)
PII	Zapojení maticových simulací ze základních bloků
PIII	Kód bloku nádrže
PIV	Návod pro Simscape (Dostupný z disku CD)

PŘÍLOHA P I: SIMULAČNÍ SOUBORY

Důležité soubory, které jsou uloženy na disku cd:

Soubory ve složce Simulace jsou řazeny do složek fyzikálního oboru a potom konkrétní název modelu. V složce konkrétního modelu jsou vždy umístěny všechny simulační soubory „.slx“, ke každému z těchto souborů je vytvořen m-file který nastaví parametry, s kterými bude model správně fungovat. V každé složce modelu je i gui v m-file s kterým lze provést, základní porovnání matematických modelů. U každého modelu je taky „.pdf“ soubor obsahující základní popis modelu.

Obsah složky Simulace \Elektricke_modely

\Integracni_clanek	\Integracni_clanek_simscape.slx	6.1
	\Integracni_clanek_simscape_a.m	
	\Integracni_clanek_diferencialni_rovnice.slx	6.1.1
	\Integracni_clanek_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Integracni_clanek_prenos.slx	6.1.2
	\Integracni_clanek_prenos_a.m	
	\Integracni_clanek_stavovy_popis.slx	6.1.3
	\Integracni_clanek_stavovy_popis_a.m	
	\Integracni_clanek_gui.m	
\Obvod_s_dvema_zdroji	\Integracni_clanek.pdf	
	\Obvod_s_dvema_zdroji_simscape.slx	6.2
	\Obvod_s_dvema_zdroji_simscape_a.m	
	\Obvod_s_dvema_zdroji_diferencialni_rovnice.slx	6.2.1
	\Obvod_s_dvema_zdroji_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Obvod_s_dvema_zdroji_prenos.slx	6.2.3
	\Obvod_s_dvema_zdroji_prenos_a.m	
	\Obvod_s_dvema_zdroji_stavovy_popis.slx	6.2.2
	\Obvod_s_dvema_zdroji_stavovy_popis_a.m	
\Obvod_s_dvema_zdroji_gui.m	\Obvod_s_dvema_zdroji_gui.m	
	\Obvod_s_dvema_zdroji.pdf	

Obsah složky Simulace \Mechanicke_modely

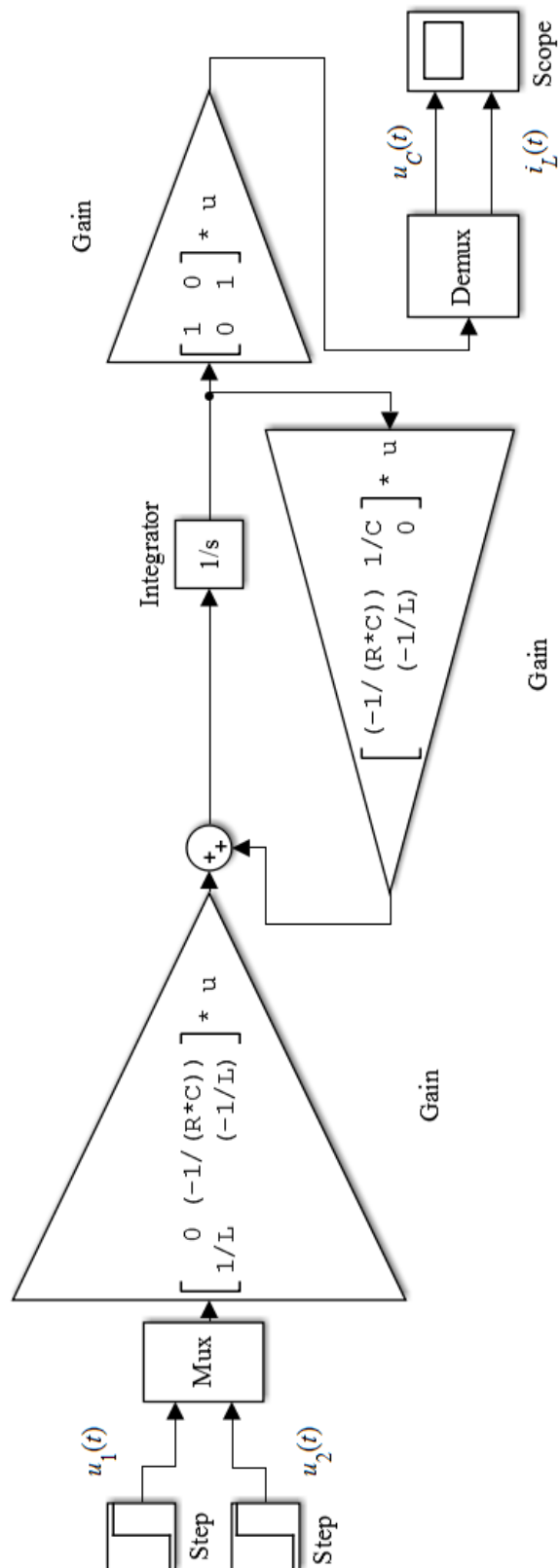
\Hmoty_propojene_pruzinou	\Hmoty_propojene_pruzinou_simscape.slx	7.1
	\Hmoty_propojene_pruzinou_simscape_a.m	
	\Hmoty_propojene_pruzinou_diferencialni_rovnice.slx	7.1.1
	\Hmoty_propojene_pruzinou_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Hmoty_propojene_pruzinou_prenos.slx	7.1.3
	\Hmoty_propojene_pruzinou_prenos_a.m	
	\Hmoty_propojene_pruzinou_stavovy_popis.slx	7.1.2
	\Hmoty_propojene_pruzinou_stavovy_popis_a.m	
	\Hmoty_propojene_pruzinou_gui.m	
\Rotacni_system	\Rotacni_system_pruzinou_simscape.slx	7.2
	\Rotacni_system_pruzinou_simscape_a.m	
	\Rotacni_system_pruzinou_diferencialni_rovnice.slx	7.2.1
	\Rotacni_system_pruzinou_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Rotacni_system_pruzinou_prenos.slx	7.2.3
	\Rotacni_system_pruzinou_prenos_a.m	
	\Rotacni_system_pruzinou_stavovy_popis.slx	7.2.2
	\Rotacni_system_pruzinou_stavovy_popis_a.m	
	\Rotacni_system_pruzinou_gui.m	
\Rotacni_system_pruzinou.pdf	\Rotacni_system_pruzinou.pdf	

Obsah složky Simulace \Hydraulicke_modely

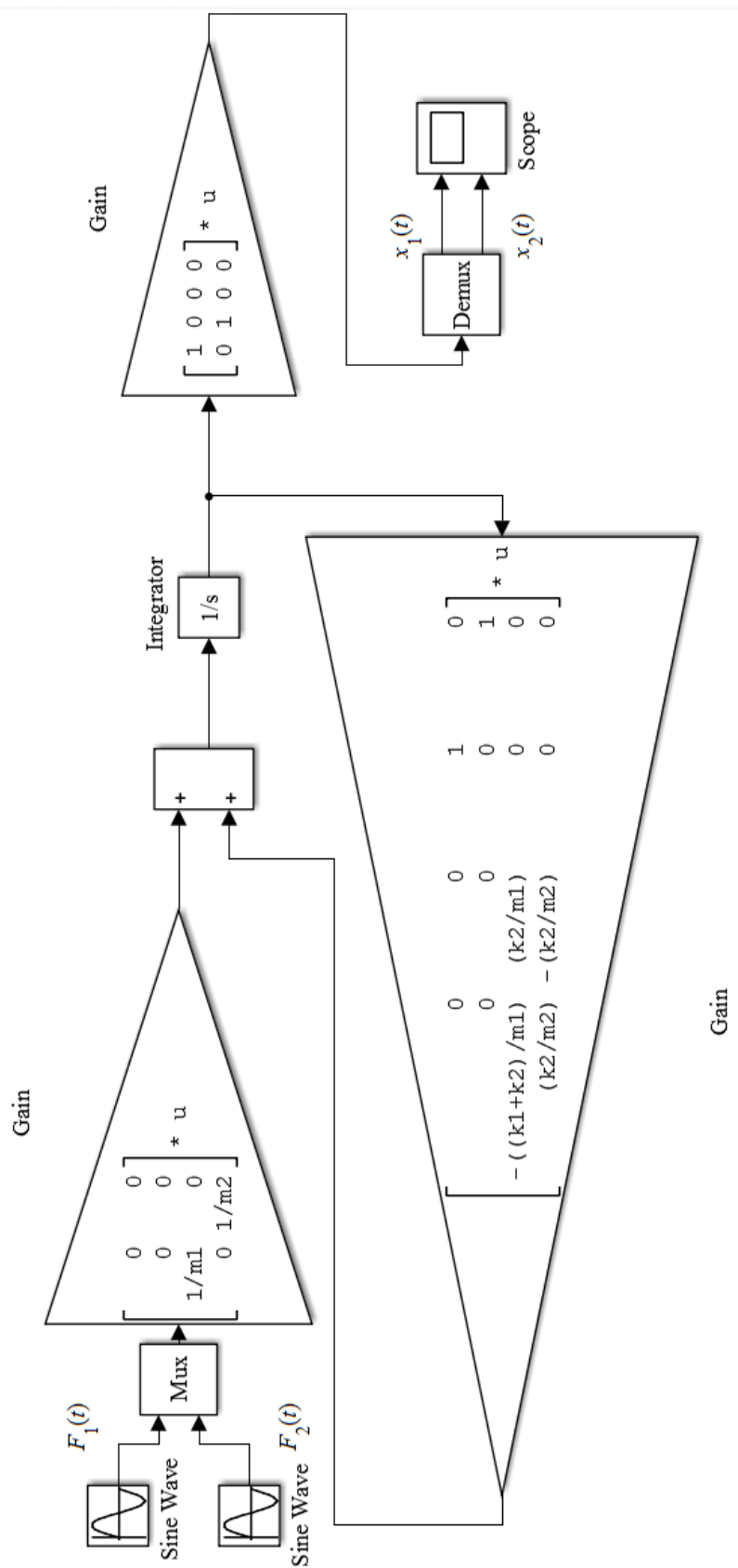
\Nadrz	\Nadrz _simscape.slx	8.1.2
	\Nadrz _simscape_a.m	
	\Nadrz _diferencialni_rovnice.slx	8.1.1
	\Nadrz _diferencialni_rovnice_a.m	
	\Nadrz _linearizovana_diferencialni_rovnice.slx	8.1.4
	\Nadrz _linearizovana_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Nadrz _linearizovana _prenos.slx	8.1.5
	\Nadrz _linearizovana _prenos_a.m	
	\Nadrz _linearizovana _stavovy_popis.slx	8.1.6
	\Nadrz _linearizovana _stavovy_popis_a.m	
\Vodarna	\Nadrz _linearizovana _gui.m	
	\Nadrz _linearizovana.pdf	
	\Vodarna _simscape.slx	8.2.5
	\Vodarna _simscape_a.m	
	\Vodarna _diferencialni_rovnice.slx	8.2
	\Vodarna _diferencialni_rovnice_a.m	
	\Vodarna _linearizovana_diferencialni_rovnice.slx	8.2.2
	\Vodarna _linearizovana_diferencialni_rovnice_a.m	
	\Vodarna _linearizovana _prenos.slx	8.2.4
	\Vodarna _linearizovana _prenos_a.m	
	\Vodarna _linearizovana _stavovy_popis.slx	8.2.3
	\Vodarna _linearizovana _stavovy_popis_a.m	
	\Vodarna _linearizovana _gui.m	
	\Vodarna _linearizovana.pdf	

PŘÍLOHA P II: ZAPOJENÍ MATICOVÝCH SIMULACÍ ZE ZÁKLADNÍCH BLOKŮ

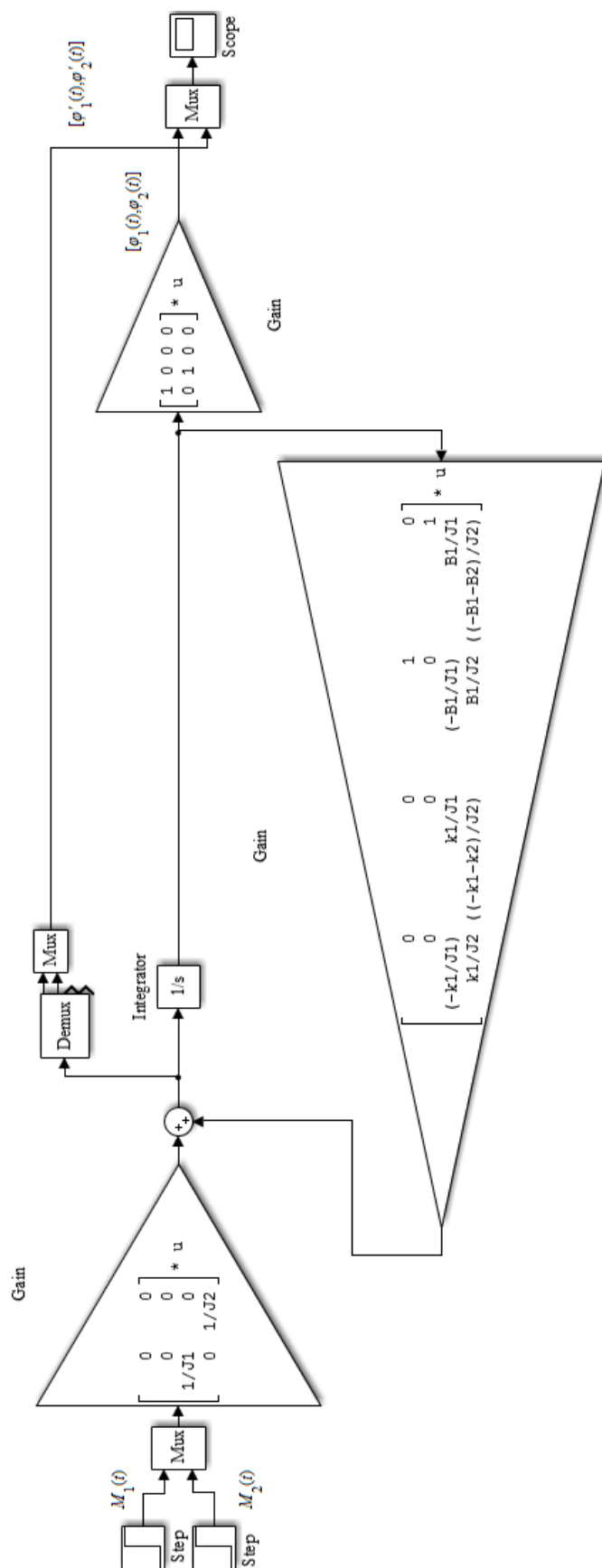
PII-Obvod s dvěma zdroji (6.2)



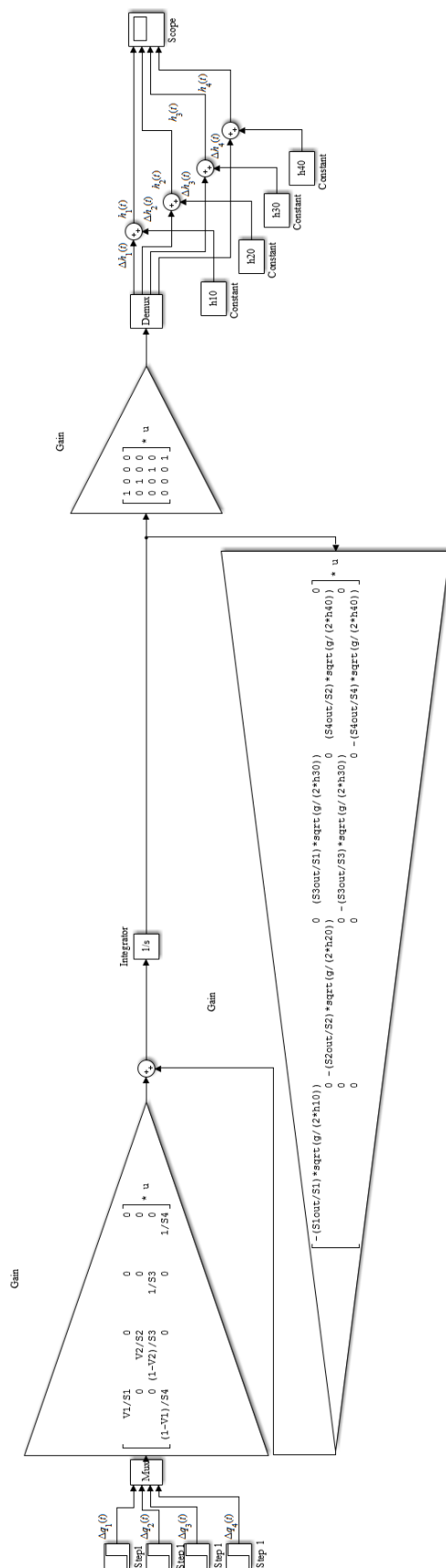
PII-Hmoty propojené pružinou (7.1)



PII-Rotační mechanický systém (7.2)



PII-Čtyřválnová vodárna (8.2)



Použité upravené matice pro simulaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{S_{1out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}} & 0 & -\frac{S_{3out}}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & -\frac{S_{2out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{20}}} & 0 & -\frac{S_{4out}}{S_2} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \\ 0 & 0 & -\frac{S_{3out}}{S_3} \sqrt{\frac{g}{2h_{30}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{S_{4out}}{S_4} \sqrt{\frac{g}{2h_{40}}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{S_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{S_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\gamma_2}{S_3} & 0 & 0 \\ \frac{1-\gamma_1}{S_4} & 0 & 0 & \frac{1}{S_4} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PŘÍLOHA P III: KÓD BLOKU NÁDRŽE

```
component nadrz
% Nádrž
nodes %vytvoření vstupu a výstupu v hydraulické doméně
    IN = foundation.hydraulic.hydraulic;% Qin:left
    OUT = foundation.hydraulic.hydraulic;% Qout:right
end
parameters % nastavitelné parametry bloku
    Sv = {1,'m^2'};
    S = {1,'m^2'};
    g={9.81,'m/s^2'};
end
outputs %výstup pro převod do simulink
    h = {0,'m'}; % h:right
end
variables %proměnné vstupů a výstupů
    qi = {0,'m^3/s'};
    qo = {0,'m^3/s'};
    pi = {0,'Pa'};
    po = {0,'Pa'};
end
function setup %podmínky pro zadávání parametrů modelu
    if (Sv <=0)
        error('Sv musí být větší než 0');
    end
    if (g <=0)
        error('g musí být větší než 0');
    end
    if (S <= 0)
        error('S musí být větší než 0');
    end
    across(pi, IN.p, []); %tlak na vstupu je zapsán do proměnné pi
    across(po, [], OUT.p); %tlak na výstupu je zapsán do proměnné po
    through(qi, IN.q, []); %přítok je zapsán do proměnné qi
    through(qo, [], OUT.q); %odtok je zapsán do proměnné qo
end
equations % rovnice popisující nádrž vztahy vstupů a výstupů
    h == qo^2/(2*g*Sv^2);
    qo == qi - h.der*S;
    po==pi;
end
end
```