

Integrálny počet funkcií viacerých premenných zbierka riešených a neriešených príkladov

Integral calculus of functions of more variables -
collection of solved and unsolved examples

Matej Čičo



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Matej ČÍČO**

Osobní číslo: **A08031**

Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Integrální počet funkcí více proměnných – sbírka řešených a neřešených příkladů.**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte základní pojmy z teorie integrálního počtu funkcí dvou a tří proměnných.
2. Uveďte základní vlastnosti a metody výpočtu dvojného a trojného integrálu.
3. Popište transformace do polárních, válcových a sférických souřadnic.
4. Jednotlivé metody výpočtu včetně transformací demonstруйте na vhodně zvolených příkladech.
5. Sbíрку doplňte o neřešené příklady s výsledky.
6. Uveďte některé aplikace dvojných a trojných integrálů v praxi a vyřešte je.
7. Sbíрку zpracujte v systému LATEX.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. THOMAS, George B., Thomas' Calculus 11th edition. Pearson Education 2008. ISBN 0-321-48987-X
2. MENDELSON, E., Schaum's 3000 solved problems in calculus, McGraw-Hill, 1988. ISBN 0-07-041480-7
3. DĚMIDOVÍČ, B. P., Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1
4. REKROTYS, K. Přehled užití matematiky I. Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7
5. PLCH, R., ŠARMANOVÁ, P., SOJKA, P., Integrální počet funkcí více proměnných, interaktivní sbírka příkladů a testových otázek, MU Brno 2009. Dostupné z URL <http://is.muni.cz/el/1431/jaro2009/M2010/um/fopt.pdf>
6. LOMTATIDZE, L., PLCH, R., Sázíme v LATEXU diplomovou práci z matematiky, Brno 2003. ISBN 80-210-3228-6

Vedoucí bakalářské práce:

Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

25. února 2011

Termín odevzdání bakalářské práce:

7. června 2011

Ve Zlíně dne 25. února 2011

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce bolo vytvoriť zbierku riešených a neriešených príkladov z integrálneho počtu viacerých premenných. Zbierka by mala slúžiť hlavne študentom na FAI UTB ve Zlíně ako študijná pomôcka v predmete Matematika 2.

Klíčová slova: dvojný a trojný integrál, Fubiniho veta, polárne, valcové a sférické súradnice, obsah rovinného obrazca, objem telesa, L^AT_EX.

ABSTRACT

The aim of the bachelor thesis was to create a collection of solved and unsolved examples of integral calculus of more variables. The collection can be used as a helpful instrument for students at Faculty of Applied Informatics TBU in Zlín in the Mathematics 2 course.

Keywords: double and triple integral, Fubini theorem, polar coordinates, cylindrical and spherical coordinates, area of a region in the plane, volume of a region in the space, L^AT_EX.

Touto cestou by som rád poďakoval pani Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za cenné rady, pripomienky či návrhy pri konzultáciách a všetok čas, ktorý mi venovala pri odbornom vedení tejto práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

Obsah

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČASŤ	9
1 Dvojný (dvojrozmerný) integrál	11
1.1 DVOJNÝ INTEGRÁL NA OBDĹŽNIKU	11
1.2 DVOJNÝ INTEGRÁL NA OBEČNEJ MNOŽINE.....	13
1.3 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI DVOJNÉHO INTEGRÁLU	14
1.4 VÝPOČET DVOJNÉHO INTEGRÁLU - FUBINIHO VETA.....	14
1.5 TRANSFORMÁCIE DVOJNÉHO INTEGRÁLU	16
2 Trojný (trojrozmerný) integrál	16
2.1 TROJNÝ INTEGRÁL NA KVÁDRI.....	16
2.2 TROJNÝ INTEGRÁL NA OBEČNEJ MNOŽINE.....	19
2.3 VÝPOČET TROJNÉHO INTEGRÁLU - FUBINIHO VETA.....	19
2.4 TRANSFORMÁCIE TROJNÉHO INTEGRÁLU	21
2.4.1 Transformácie do valcových súradníc	21
2.4.2 Transformácie do sférických súradníc	23
II PRAKTICKÁ ČASŤ	24
3 Dvojný integrál	26
3.1 VYJADRENIE MNOŽÍN POMOCOU NEROVNOSTÍ.....	26
3.2 VÝPOČET DVOJNÉHO INTEGRÁLU NA OBDĹŽNIKU.....	34
3.3 VÝPOČET DVOJNÉHO INTEGRÁLU NA MNOŽINE Ω_x A Ω_y	35
3.4 VÝPOČET DVOJNÉHO INTEGRÁLU V POLÁRNYCH SÚRADNICIACH..	45
3.5 NERIEŠENÉ PRÍKLADY	49
4 Trojný integrál	50
4.1 VÝPOČET TROJNÉHO INTEGRÁLU V KARTÉZSKYCH SÚRADNICIACH	50
4.2 VÝPOČET TROJNÉHO INTEGRÁLU VO VALCOVÝCH SÚRADNICIACH	56
4.3 VÝPOČET TROJNÉHO INTEGRÁLU VO SFÉRIČKÝCH SÚRADNICIACH	60
4.4 NERIEŠENÉ PRÍKLADY	64
5 Vybrané aplikácie viacnásobných integrálov	65
5.1 OBSAH ROVINNÉHO OBRAZCA POMOCOU POLÁRNYCH SÚRADNÍČ..	65
5.2 VÝPOČET OBJEMU TELESA V KARTÉZSKYCH SÚRADNICIACH	67
5.3 VÝPOČET OBJEMU TELESA VO VALCOVÝCH SÚRADNICIACH.....	69
5.4 VÝPOČET OBJEMU TELESA VO SFÉRIČKÝCH SÚRADNICIACH.....	72

5.5	NERIEŠENÉ PŘÍKLADY	75
ZÁVER		76
CONCLUSION		77
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY		78
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK		79
ZOZNAM OBRÁZKOV		81
ZOZNAM PRÍLOH		82

ÚVOD

Integrální počet je jednou zo základných matematických disciplín. Zavedenie integrálneho počtu funkcií viacerých premenných bolo motivované snahou nájsť obsah rovinných obrazcov a objemy priestorových telies. S viacnásobnými integrálmi sa môžeme stretnúť nielen v oblasti matematiky, ale tiež v rôznych technických a fyzikálnych disciplínach, napr. pri hľadaní hmotnosti nehomogénneho telesa, pri výpočte momentu zotrvačnosti, obsahu plochy v priestore apod.

Predložená bakalárska práca je rozdelená do dvoch častí, teoretickej a praktickej. V teoretickej časti sú uvedené základné pojmy z integrálneho počtu funkcií dvoch a troch premenných vrátane vlastností a vzorcov pre výpočet dvojného a trojného integrálu. Ďalej sú uvedené najčastejšie používané transformácie dvojných a trojných integrálov, pre dvojný integrál sú to transformácie do polárnych súradníc a pre trojný transformácie do valcových a sférických súradníc. Praktickú časť tvoria riešené príklady s podrobným postupom riešenia. V závere každej kapitoly je uvedené niekoľko neriešených príkladov s výsledkami, na ktorých si študenti môžu overiť ako danú látku zvládli. Na záver praktickej časti je zaradená kapitola s aplikáciami dvojných a trojných integrálov.

Celá práca je písaná v sádzacom systéme \LaTeX , ktorý sa používa hlavne pre tvorbu matematických dokumentov. Obrázky sú taktiež kreslené v tomto systéme.

Pre pochopenie problematiky a zvládnutie príkladov sa predpokladajú znalosti z diferenciálneho a integrálneho počtu funkcií jednej premennej.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 Dvojný (dvojrozmerný) integrál

V integrálnom počte funkcií jednej premennej bol definovaný **určitý** (jednoduchý) integrál na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. V integrálnom počte funkcií dvoch premenných definujeme tzv. **dvojný (dvojrozmerný)** integrál v rovinnej oblasti, pre funkciu troch premenných tzv. **trojný (trojrozmerný)** integrál v priestorovej oblasti.

V tejto kapitole zavedieme dvojný integrál najskôr na obdĺžniku, ktorého strany sú rovnobežné so súradnicovými osami. Potom naše úvahy rozšírime na obecnú množinu a naučíme sa vyjadriť hranice množiny v takom tvare, aby sme ich mohli použiť ako integračné medze. Ukážeme tiež spôsoby výpočtu dvojného integrálu cez takéto oblasti.

1.1 Dvojný integrál na obdĺžniku

Budeme predpokladať, že funkcia $f(x, y)$ je **spojitá** a **ohraničená** na obdĺžniku

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ktorého strany sú rovnobežné s osami súradníc.

Ďalej postupujeme nasledovne:

1. Interval $\langle a, b \rangle$, resp. $\langle c, d \rangle$ rozdelíme pomocou deliacich bodov

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b, \text{ resp. } c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

na podintervaly

$$\langle x_{i-1}, x_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{resp.} \quad \langle y_{j-1}, y_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Toto delenie označme \mathcal{D} . Dĺžky týchto podintervalov označíme

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Rovnobežky s osou y vedené bodmi x_i a rovnobežky s osou x vedené bodmi y_j rozdelia obdĺžnik D na $m \cdot n$ obdĺžnikov, ktoré označíme D_{ij} . Pre obsah každého takéhoto obdĺžniku platí

$$\Delta P_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

2. V každom obdĺžniku D_{ij} zvolíme tzv. **reprezentanta**, tj. bod

$R_{ij} = (\xi_i, \eta_j)$ a určíme príslušnú funkčnú hodnotu $z_{ij} = f(\xi_i, \eta_j)$. Množinu všetkých reprezentantov nazývame **výber reprezentantov**, označme ju R .

3. Vytvoríme súčin

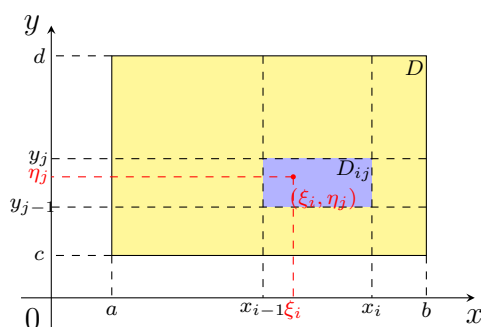
$$f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta P_{ij} = f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$

Tento súčin vyjadruje objem hranolu o podstave D_{ij} (ktorá má obsah ΔP_{ij}) a výške $f(\xi_i, \eta_j)$.

4. Zostavíme dvojité sčítanie

$$S(f, \mathcal{D}, R) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$

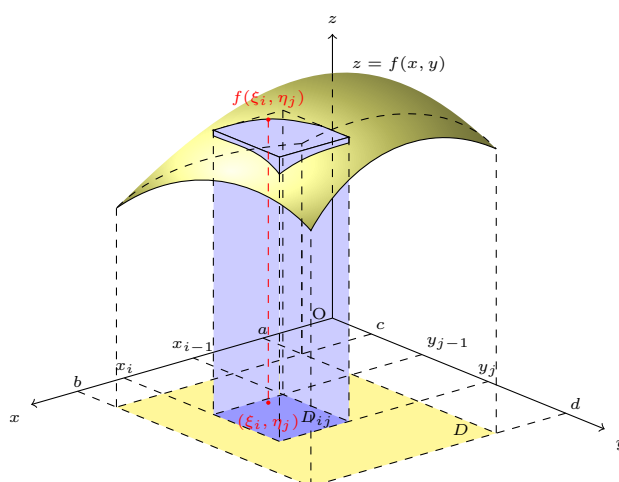
Tento súčet nazývame **(Riemannov) integrálny súčet** funkcie f pre delenie \mathcal{D} a výber reprezentantov R . Geometricky tento súčet vyjadruje objem telesa zloženého z hranoliek vztýčených nad obdĺžnikmi D_{ij} .



Obrázok 1.1.1 Delenie množiny D

5. Postupne zjemňujeme obidva intervaly na osiach x, y a vytvoríme limitu postupností integrálneho súčtu pre $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, tj.

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$



Obrázok 1.1.2 Dvojný integrál na obdĺžniku

Definícia 1.1.1 Povedzme, že ohraničená funkcia f je **(Riemannovsky) integrovateľná na obdĺžniku** D , ak pre $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ a pre každé delenie $\Delta x_i \rightarrow 0$, $\Delta y_j \rightarrow 0$ a pre každý výber reprezentantov R v týchto deleniach existuje vlastná limita

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$

Túto limitu nazývame **(Riemannov) dvojný integrál funkcie $f(x, y)$ na obdĺžniku D** a označujeme ju

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Výpočet dvojného integrálu na obdĺžniku:

Ak je funkcia $f(x, y)$ integrovateľná na obdĺžniku $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, potom platí

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

1.2 Dvojný integrál na obecnej množine

Definícia 1.2.1 Predpokladajme, že Ω je uzavretá ohraničená oblasť¹⁾ a D je ľubovoľný obdĺžnik obsahujúci Ω , tj. $\Omega \subseteq D$. Definujme na D funkciu g predpisom

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pre } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{pre } (x, y) \in D \setminus \Omega. \end{cases}$$

Potom definujeme **dvojný integrál na množine Ω** predpisom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_D g(x, y) \, dx dy.$$

Povedzme, že funkcia f je **Riemannovsky integrovateľná na Ω** , ak funkcia g je Riemannovsky integrovateľná na D .

- Ak existuje $\iint_{\Omega} dx dy$ (tj. $f(x, y) = 1$ na Ω), potom sa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazýva **merateľná množina v Jordanovom zmysle** (alebo tiež **Jordanovsky merateľná**) a príslušný integrál nazývame **miera** množiny Ω . Geometrická miera znamená obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, budeme ju teda označovať $P(\Omega)$. Píšeme

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy,$$

kde $dP := dx dy$ sa nazýva **element obsahu** v \mathbb{R}^2 .

¹⁾oblasť = otvorená súvislá množina

1.3 Základné vlastnosti dvojného integrálu

Nech f je spojitá na merateľnej množine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Potom f je integrovateľná na Ω , tj. existuje dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy.$$

Nech f, g sú integrovateľné funkcie na merateľnej množine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nech

$f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$. Potom

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy.$$

Linearita integrálu:

Nech f_1, \dots, f_n sú integrovateľné funkcie dvoch premenných definované na merateľnej množine Ω a nech $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Potom je integrovateľná tiež lineárna kombinácia $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ funkcií f_1, \dots, f_n a platí

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [c_1 f_1(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y)] \, dx dy = \\ c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y) \, dx dy + \dots + c_n \iint_{\Omega} f_n(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Ak je funkcia f integrovateľná na merateľnej množine Ω , potom je integrovateľná na každej merateľnej podmnožine $M \subseteq \Omega$.

Aditivnosť integrálu vzhľadom k množine:

Nech funkcia f je integrovateľná na merateľnej množine Ω . Nech je Ω rozdelená na merateľné množiny $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, ktoré majú spoločné najviac hraničné body. Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx dy + \dots + \iint_{\Omega_n} f(x, y) \, dx dy.$$

1.4 Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho veta

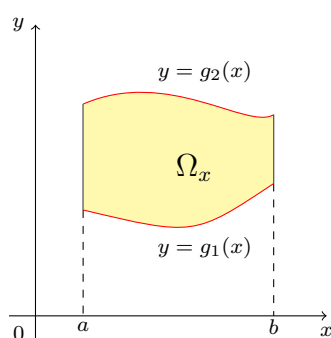
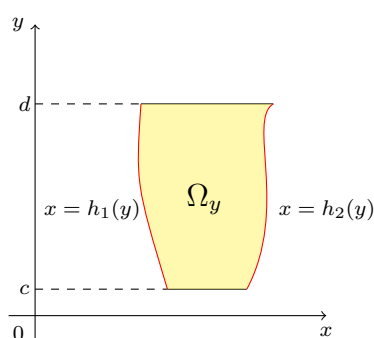
Definícia 1.4.1 Elementárnou oblasťou v rovine rozumieme uzavretú a obmedzenú rovinnú množinu typu

$$\Omega_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

resp.

$$\Omega_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $g_1(x) < g_2(x)$ na celom intervale $\langle a, b \rangle$ a $h_1(y) < h_2(y)$ na celom intervale $\langle c, d \rangle$.

Obrázok 1.4.1 Elementárna oblasť typu Ω_x Obrázok 1.4.2 Elementárna oblasť typu Ω_y

Fubiniho veta pre dvojný integrál:

- Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na množine typu Ω_x . Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

- Nech funkcia $f(x, y)$ je spojitá na množine typu Ω_y . Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Geometrické a fyzikálne aplikácie dvojného integrálu:

- Mierou merateľnej množiny Ω rozumieme **obsah** množiny Ω a platí

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy. \quad (1)$$

- Ak je $f(x, y)$ nezáporná a spojitá funkcia definovaná na merateľnej množine Ω potom **objem** V telesa, ktoré je ohraňované rovinami $z = 0, z = f(x, y)$ a rovnobežkami s osou z vedenými kolmo ku hranici množiny Ω , platí

$$V(\Omega) = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy. \quad (2)$$

- Nech ρ je hustota merateľnej množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ak je táto hustota spojitou funkciou dvoch premenných x, y , potom pre celkovú **hmotnosť** M množiny Ω platí

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \rho(x, y) \, dx dy.$$

1.5 Transformácie dvojného integrálu

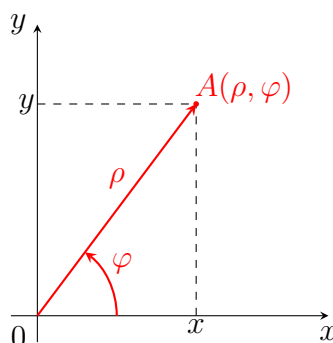
Teraz zavedieme polárne súradnice. Pomocou nich určujeme polohu bodu A tak, že určíme vzdialenosť ρ bodu A od počiatku sústavy súradníc a uhol φ , ktorý zvierá spojnice počiatku a bodu A s kladnou časťou osi x .

Definícia 1.5.1 Transformácia, ktorá je definovaná rovnicami

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (3)$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \in \langle 0, \infty \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, sa nazýva **transformácia do polárnych súradníc**. Rovnice transformujú množinu \mathbb{R}^2 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obrázok 1.5.1 Polárne súradnice

Transformácia do polárnych súradníc má jakobián $J = J(\rho, \varphi) = \rho$.

2 Trojný (trojrozmerný) integrál

Podobne ako dvojrozmerný (dvojný) integrál zavádzame integrál trojný, resp. trojrozmerný. Ten je definovaný pre funkciu troch premenných $f(x, y, z)$ na trojrozmernej integračnej množine Ω .

2.1 Trojný integrál na kvádri

Najjednoduchšiu integračnú množinu u dvojrozmerných integrálov tvoril obdĺžnik, ktorého strany boli rovnobežné s osami súradníc. Podobne u trojrozmerných integrálov je výpočet najjednoduchší v prípade, kedy integračná množina je kváder, ktorého

steny sú rovnobežné so súradnými rovinami. Definícia Riemannovho trojrozmerného integrálu na kváder je obdobná definícii dvojrozmerného integrálu na obdĺžniku.

Majme teda funkciu troch nezávisle premenných $u = f(x, y, z)$ **spojitú** a **ohraničenú** na kvádri

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\},$$

ktorého steny sú rovnobežné so súradnými rovinami.

Ďalej postupujeme nasledovne:

1. Intervaly $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle$ rozdelíme pomocou deliacich bodov

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_p = f$$

na podintervaly

$$\langle x_{i-1}, x_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\langle y_{j-1}, y_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\langle z_{k-1}, z_k \rangle, \quad k = 1, \dots, p.$$

Toto delenie označme \mathcal{D} .

Označíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Roviny vedené bodmi x_i , resp. y_j , resp. z_k rovnobežne so súradnými rovinami ρ_{yz} , resp. ρ_{xz} , resp. ρ_{xy} rozdelí kváder G na $m \cdot n \cdot p$ kvádrov G_{ijk} . Pre objem každého takéhoto kvádra platí

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k.$$

2. V každom kvádri G_{ijk} zvolíme tzv. **reprezentanta**, tj. bod

$R_{ijk} = (\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$, a určíme hodnotu $u_{ijk} = f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$. Množinu všetkých reprezentantov nazývame **výber reprezentantov**, označme ju R .

3. Vytvoríme súčin

$$f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \Delta V_{ijk} = f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Tento súčin vyjadruje geometricky objem štvorrozmerného telesa s podstavou G_{ijk} , ktorá má objem ΔV_{ijk} , a výške $f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$. To sa samozrejme vymyká našej predstavivosti, a preto budeme za týmto súčinom vidieť skôr fyzikálnu aplikáciu. Jednou z nich je napríklad hmotnosť kvádra G_{ijk} o hustote $f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$.

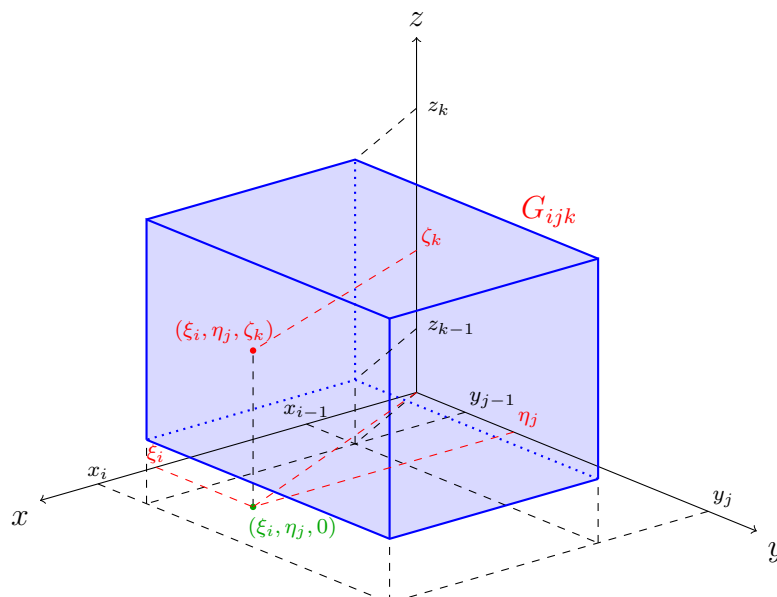
4. Zostavíme trojitý súčet

$$S(f, \mathcal{D}, R) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Tento súčet nazývame **(Riemannov) integrálny súčet** funkcie f pre delenie \mathcal{D} a výber reprezentantov R . Fyzikálne tento súčet vyjadruje napríklad celkovú hmotnosť telesa zloženého z kvádra G_{ijk} , z ktorých má každý hustotu $f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$.

5. Postupne zjemňujeme všetky tri intervaly na osách x, y, z a vytvoríme limitu postupnosti integrálneho súčtu pre $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$, tj.

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$



Obrázok 2.1.1 Trojný integrál na kvádri G_{ijk}

Definícia 2.1.1 Povedzme, že ohraničená funkcia f je **(Riemannovsky) integrovateľná na kvádri G** , ak pre $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ a pre každé delenie $\Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0$ a pre každý výber reprezentantov R v týchto deleniach existuje vlastná limita

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Túto limitu nazývame **(Riemannov) trojný integrál funkcie $f(x, y, z)$ na kvádri G** a označujeme ju

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Výpočet trojného integrálu:

Ak je funkcia $f(x, y, z)$ integrovateľná na kvádri $G = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, f \rangle$, potom platí

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Tento vzťah sa dá zapísať zámenou poradia integrácie ešte ďalšími piatimi spôsobmi.

- V prípade, že funkciu $f(x, y, z)$ môžeme napísať ako súčin funkcie premennej x , funkcie premennej y a funkcie premennej z , tj. $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$, potom

platí

$$\iiint_G g(x)h(y)k(z) \, dx dy dz = \int_a^b g(x) \, dx \int_c^d h(y) \, dy \int_e^f k(z) \, dz.$$

2.2 Trojný integrál na obecnej množine

Budeme predpokladať, že obecnou množinou je nejaká uzavretá ohraničená oblasť v priestore, označme ju Ω . Trojný integrál na uzavretej ohraničenej priestorovej oblasti sa definuje podobne ako dvojný integrál na uzavretej ohraničenej rovinnej oblasti.

Definícia 2.2.1 Nech Ω je uzavretá ohraničená oblasť v priestore \mathbb{R}^3 a G je ľubovoľný kváder obsahujúci Ω , tj. $\Omega \subseteq G$. Definujeme na G funkciu g s predpisom

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pre } (x, y, z) \in \Omega, \\ 0 & \text{pre } (x, y, z) \in G \setminus \Omega. \end{cases}$$

Potom definujeme **trojný integrál na množine** Ω predpisom

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_G g(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Povedzme, že funkcia f je **Riemannovsky integrovateľná na** Ω , v prípade že funkcia g je Riemannovsky integrovateľná na G .

Ak existuje $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ (tj, $f(x, y, z) = 1$ na Ω), potom sa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nazýva **merateľná množina v Jordanovom zmysle** (alebo tiež **Jordanovsky merateľná**) a príslušný integrál nazývame **trojrozmerná miera** množiny Ω . Geometricky trojrozmerná miera znamená objem množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, budeme ich teda označovať $V(\Omega)$. Píšeme

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz,$$

kde $dV := dx dy dz$ sa nazýva **element objemu** v \mathbb{R}^3 .

Základné vlastnosti trojného integrálu sú analogické vlastnostiam, ktoré platili pre dvojný integrály, preto ju nebudeme uvádzať.

2.3 Výpočet trojného integrálu - Fubiniho veta

Budeme uvažovať trojrozmernú uzavretú oblasť Ω ohraničenou uzavretou plochou, ktorá sama seba nepretína, pričom rovnobežky s osou z vedené vnútornými bodmi množiny pretínajú túto plochu vo dvoch bodoch. Ak určíme pravouhlý priemet vyššie popísanej plochy do roviny ρ_{xy} , potom dotyková valcová plocha rozdelí danú uzavretú plochu na dve časti, ktoré sa dajú vyjadriť rovnicami $z = f_1(x, y)$ a $z = f_2(x, y)$. Predpokladajme, že $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$. Pravouhlým priemetom danej uzavretej plochy

do súradnicovej roviny ρ_{xy} je rovinná množina Ω_1 , ktorá môže byť typu Ω_x alebo Ω_y . Tieto množiny sme zaviedli v predchádzajúcej kapitole pre výpočte dvojného integrálu a nazvali sme ich **elementárnou oblasťou**.

Fubiniho veta pre trojný integrál:

Nech $f(x, y, z)$ je integrovateľná na merateľnej množine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

- Nech funkcie $g_1(x), g_2(x)$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$ a funkcie $f_1(x, y), f_2(x, y)$ spojité na $\Omega_x \subset \mathbb{R}^2$. Ďalej nech pre všetky body $(x, y, z) \in \Omega$ platí

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b, \\ g_1(x) &\leq y \leq g_2(x), \\ f_1(x, y) &\leq z \leq f_2(x, y). \end{aligned}$$

Potom existuje trojný integrál $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ a platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

- Nech funkcie $h_1(y), h_2(y)$ sú spojité na intervale $\langle c, d \rangle$ a funkcie $f_1(x, y), f_2(x, y)$ spojité na $\Omega_y \subset \mathbb{R}^2$. Ďalej nech pre všetky body $(x, y, z) \in \Omega$ platí

$$\begin{aligned} c &\leq y \leq d, \\ h_1(y) &\leq x \leq h_2(y), \\ f_1(x, y) &\leq z \leq f_2(x, y). \end{aligned}$$

Potom existuje trojný integrál $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ a platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy.$$

V predchádzajúcich dvoch vzťahov musíme najskôr previesť integráciu vnútorného integrálu, tj. podľa premennej z , ktorej medze sú funkciami dvoch premenných. Po integrácii podľa premennej z sa už jedná o výpočet dvojného integrálu uvedeného v predchádzajúcej kapitole.

Pravouhlé priemety množiny Ω je možné previesť taktiež do súradnicových rovín ρ_{yz} , resp. ρ_{xz} . Situácia je obdobná, napr. ak vyjadríme množinu Ω nerovnosťami

$$\begin{aligned} e &\leq z \leq f, \\ g_1(z) &\leq y \leq g_2(z), \\ f_1(y, z) &\leq x \leq f_2(y, z), \end{aligned}$$

potom

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f \left(\int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \left(\int_{f_1(y, z)}^{f_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

Geometrické a fyzikálne aplikácie trojného integrálu

- Ak je Ω merateľná množina v \mathbb{R}^3 , potom pre **objem** tejto množiny platí

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (4)$$

- Nech hustota ρ merateľnej množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je spojitá a nezáporná funkcia na Ω . Potom pre **hmotnosť** M trojrozmiernej množiny Ω platí

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

2.4 Transformácie trojného integrálu

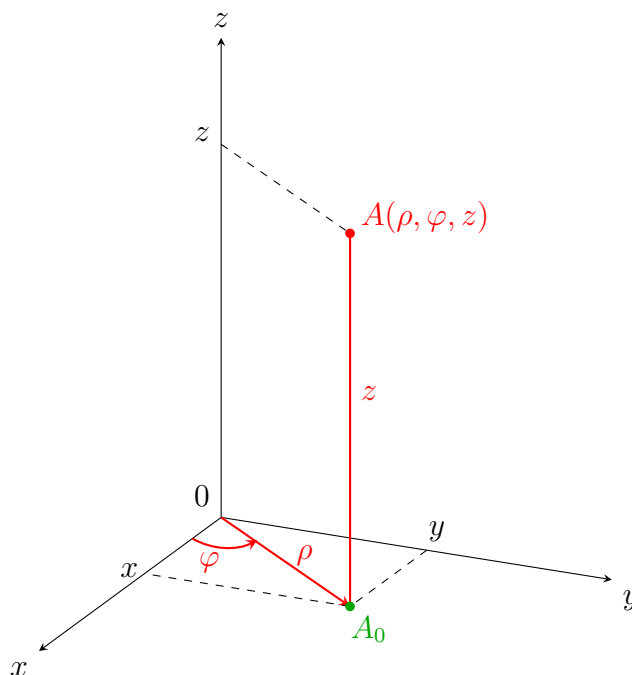
Ak je integračnou množinou valec alebo guľa, prípadne ich časti, je výpočet trojného integrálu v kartézskych súradniciach väčšinou značne obtiažny. Preto zavádzame tzv. **válcové (cylindrické)** alebo **guľové (sférické)** súradnice, ktoré nám výpočet značne zjednodušia.

2.4.1 Transformácie do valcových súradníc

Definícia 2.4.1 Transformácia, ktorá je definovaná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \quad (5)$$

kde $\rho \in \langle 0, \infty \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \mathbb{R}$, sa nazýva **transformácia do valcových (cylindrických) súradníc**. Rovnice transformujú množinu \mathbb{R}^3 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R}$.



Obrázok 2.4.1 Valcové súradnice

Jakobián pre valcové súradnice:

Transformácia do valcových súradníc má jakobián $J = J(\rho, \varphi, z) = \rho$.

Transformácie do valcových súradníc:

Pre trojrozmerný integrál platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho d\varphi dz,$$

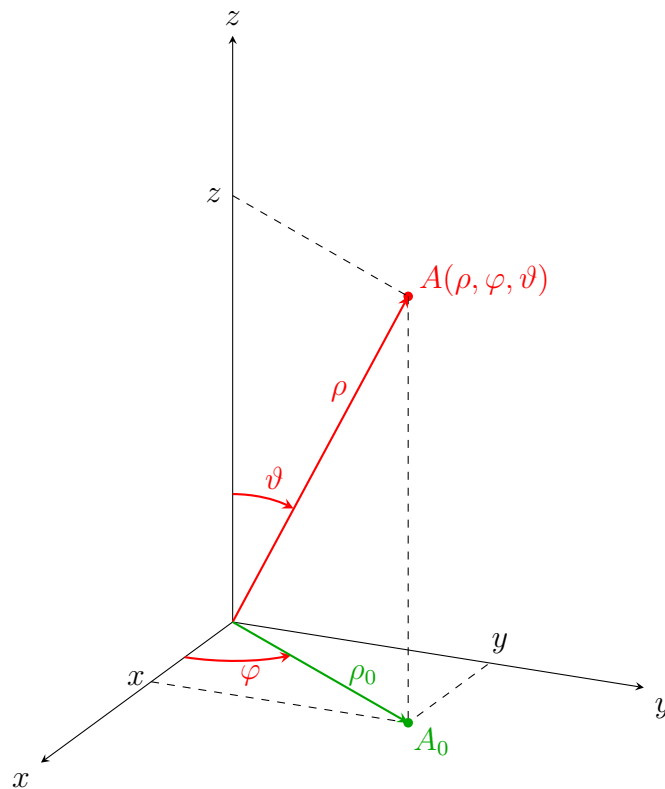
kde Ω^* je integračná množina vyjadrená vo valcových súradniciach.

Valec s osou v ose z , výškou v a polomerom r sa vo valcových súradniciach zobrazí na kváder

$$0 < \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq v.$$

Ako sme sa oboznámili v predchádzajúcej časti, je výpočet trojného integrálu na kvádri jednoduchší ako na obecnej množine Ω .

Transformácia do valcových súradníc sa používa vtedy, keď integračnou množinou Ω je valec alebo jeho časť, alebo v prípadoch, kedy pravouhlým priemetom trojrozmernej množiny Ω do súradnej roviny ρ_{xy} je kruh alebo jeho časť.



Obrázok 2.4.2 Sférické súradnice

2.4.2 Transformácie do sférických súradníc

Definícia 2.4.2 Transformácia, ktorá je definovaná rovnicami

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \\z &= \rho \cos \vartheta,\end{aligned}\tag{6}$$

kde $\rho \in \langle 0, \infty \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, sa nazýva **transformácia do guľových (sférických) súradníc**. Rovnice transformujú množinu \mathbb{R}^3 na množinu $\langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$.

Jakobián pre sférické súradnice:

Transformácia do sférických súradníc má jakobián $J = J(\rho, \varphi, \vartheta) = -\rho^2 \sin \vartheta$.

Transformácie do sférických súradníc:

Pre trojrozmerný integrál platí

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\&= \iiint_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi \sin \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta) \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,\end{aligned}$$

kde Ω^* je integračná množina vyjadrená vo sférických súradniciach.

Gule so stredom v počiatku sústavy súradníc a polomerom r sa vo sférických súradniciach

zobrazia na kváder

$$0 < \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi,$$

čo vedie opäť na jednoduchší výpočet.

Transformácia do sférických súradníc sa používa väčšinou vtedy, keď integračná množina Ω je guľa, alebo jej časť alebo v prípadoch, kedy pravouhlým priemetom množiny Ω do roviny ρ_{xy} je kruh alebo jeho časť.

Pri vypracovaní teórie boli použité zdroje [1], [4] a zápisky z prednášiek kurzu Matematika 2 na FAI UTB ve Zlíně.

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

3 Dvojný integrál

3.1 Vyjadrenie množín pomocou nerovností

Príklad 3.1.1 Určite rovnice priamok, na ktorých ležia strany obdĺžniku $(2,1)$, $(5,1)$, $(5,3)$, $(2,3)$.

Priamka spájajúca body:

$$(2, 1), (5, 1) : y = 1,$$

$$(5, 1), (5, 3) : x = 5,$$

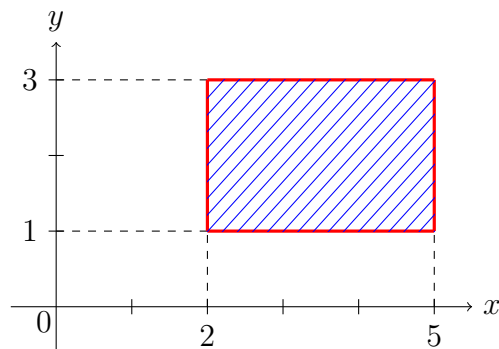
$$(5, 3), (2, 3) : y = 3,$$

$$(2, 1), (2, 3) : x = 2.$$

Množina Ω bude určená nerovnosťami:

$$2 \leq x \leq 5,$$

$$1 \leq y \leq 3.$$



Obrázok 3.1.1 Množina Ω pre obdĺžnik $\langle 2, 1 \rangle \times \langle 5, 3 \rangle$

Príklad 3.1.2 Určite rovnice priamok, na ktorých ležia strany trojuholníka $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,3)$.

Priamka spájajúca body

$$(0, 0), (3, 0) : y = 0,$$

$$(3, 0), (3, 3) : x = 3,$$

$$(0, 0), (3, 3) : y = x.$$

Množina Ω bude určená nerovnosťami:

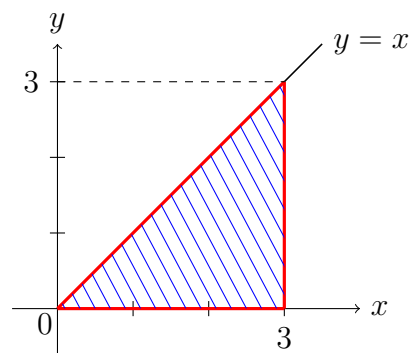
$$0 \leq x \leq 3,$$

$$0 \leq y \leq x,$$

alebo

$$0 \leq y \leq 3,$$

$$y \leq x \leq 3.$$

Obrázok 3.1.2 Množina Ω pre daný trojuholník

Príklad 3.1.3 Určite rovnice priamok, na ktorých ležia strany trojuholníka $(-2,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$.

Priamka spájajúca body

$$(-2, 0), (2, 0) : y = 0,$$

$$(-2, 0), (0, 1) : y = \frac{x}{2} + 1,$$

$$(0, 1), (2, 0) : y = 1 - \frac{x}{2}.$$

Množinu Ω rozdelíme na dve časti, ktoré budú určené nerovnosťami:

$$\Omega_1 :$$

$$-2 \leq x \leq 0,$$

$$0 \leq y \leq \frac{x}{2} + 1,$$

$$\Omega_2 :$$

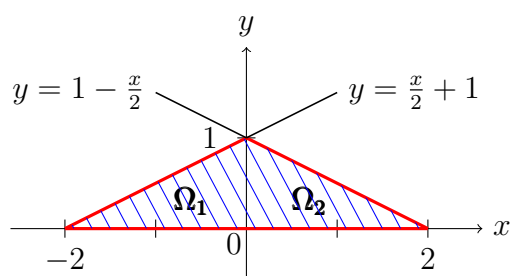
$$0 \leq x \leq 2,$$

$$0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Množinu Ω môžeme zapísať tiež nasledovne:

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$2y - 2 \leq x \leq 2 - 2y.$$

Obrázok 3.1.3 Množina Ω pre daný trojuholník

Príklad 3.1.4 Určite rovnice priamok, na ktorých ležia strany lichobežníka $(3,1)$, $(5,1)$, $(5,3)$, $(3,5)$.

Priamka spájajúca body

$$(3, 1), (5, 1) : y = 1,$$

$$(5, 1), (5, 3) : x = 5,$$

$$(5, 3), (3, 5) : y = 8 - x,$$

$$(3, 1), (3, 5) : x = 3.$$

Množina Ω bude, potom určená nerovnosťami:

$$3 \leq x \leq 5,$$

$$1 \leq y \leq 8 - x.$$

Druhý spôsob vyjadrenia množiny Ω , je treba rozdeliť množinu na dve časti Ω_1 , Ω_2 :

Ω_1 :

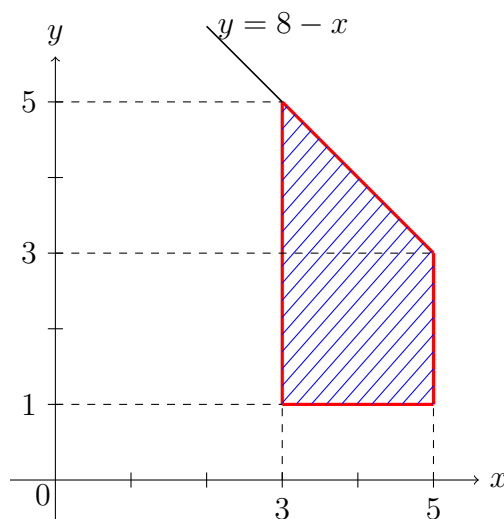
$$1 \leq y \leq 3,$$

$$3 \leq x \leq 5,$$

Ω_2 :

$$3 \leq y \leq 5,$$

$$3 \leq x \leq 8 - y.$$



Obrázok 3.1.4 Množina Ω daná stranami lichobežníka

Príklad 3.1.5 Je daná množina ohraničená krivkami $y = x^2, y = 2 - x$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázornite.

Najskôr vypočítame priesečníky daných kriviek:

$$x^2 = 2 - x,$$

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0,$$

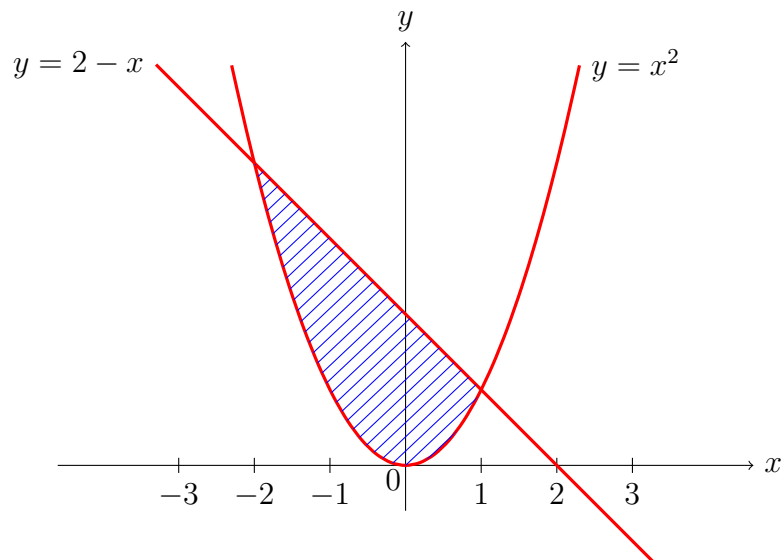
$$x_1 = -2,$$

$$x_2 = 1.$$

Množina Ω bude určená nerovnosťami:

$$-2 \leq x \leq 1,$$

$$x^2 \leq y \leq 2 - x.$$



Obrázok 3.1.5 Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2, y = 2 - x$

Príklad 3.1.6 Je daná množina ohraničená krivkami $y = x^2 + 2, y = 10 - x^2$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázornite.

Najskôr vypočítame priesečníky daných kriviek:

$$x^2 + 2 = 10 - x^2,$$

$$2x^2 = 8,$$

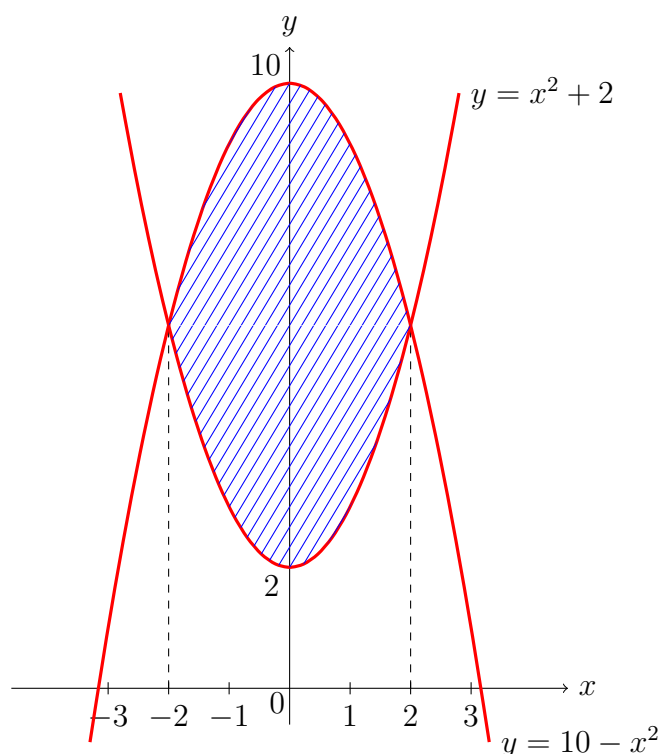
$$x^2 = 4,$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = -2.$$

Množina Ω bude určená nerovnostami:

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 2, \\ x^2 + 2 \leq y \leq 10 - x^2. \end{aligned}$$



Obrázok 3.1.6 Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2 + 2, y = 10 - x^2$

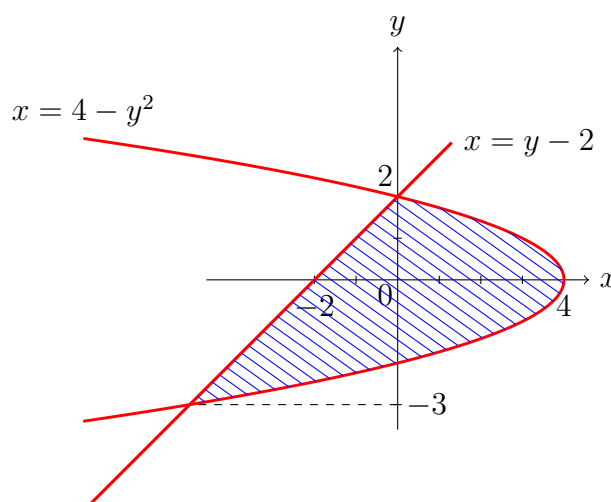
Príklad 3.1.7 Je daná množina ohraničená krivkami $y = x + 2, x = 4 - y^2$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázornite.

V tomto prípade bude jednoduchšie vypočítať y -ové súradnice priesečníkov, preto si v prvom rade vyjadríme x a následne vypočítame priesečníky:

$$\begin{aligned} y = x + 2 &\Rightarrow x = y - 2, \\ x = 4 - y^2, \\ y - 2 &= 4 - y^2, \\ y^2 + y - 6 &= 0, \\ (y - 2)(y + 3) &= 0, \\ y_1 &= -3, \\ y_2 &= 2. \end{aligned}$$

Množina Ω bude určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} -3 \leq y \leq 2, \\ y - 2 \leq x \leq 4 - y^2. \end{aligned}$$

Obrázok 3.1.7 Množina Ω ohraničená krivkami $x = 4 - y^2$, $x = y - 2$

Príklad 3.1.8 Je daná množina Ω , ktorá je určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázornite.

Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 4$ je kruh so stredom $S(0, 0)$ a s polomerom $r = 2$. Druhá nerovnosť $x \geq 0$ určuje, že množina Ω bude v I. a IV. kvadrante.

Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 4$ zistíme medze pre y :

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$y^2 = 4 - x^2,$$

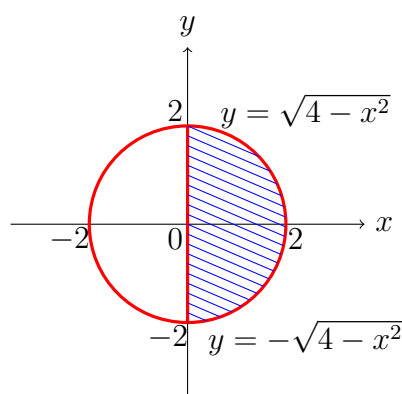
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Kladné znamienko pred odmocninou určuje hornú polrovinu a naopak záporné znamienko určuje dolnú polrovinu.

Množina Ω je potom určená nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Obrázok 3.1.8 Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$

Príklad 3.1.9 Je daná množina Ω , ktorá je určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 6x$, $y \leq 0$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázorníte.

Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 6x$ môžeme prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\leq 6x, \\x^2 - 6x + y^2 &\leq 0, \\(x - 3)^2 + y^2 &\leq 9.\end{aligned}$$

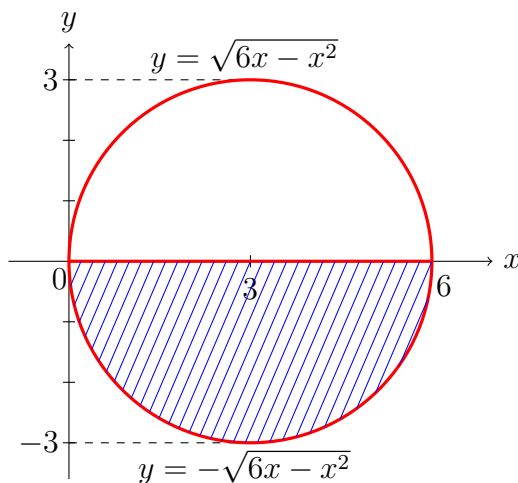
Z predchádzajúceho výpočtu vyplýva, že nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 6x$ je kruh so stredom $S(3, 0)$ a s polomerom $r = 3$. Druhá nerovnosť $y \leq 0$ určuje III. a IV. kvadrant.

Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 6x$ spočítame medz pre y :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 6x, \\y^2 &= 6x - x^2, \\y &= \pm\sqrt{6x - x^2}.\end{aligned}$$

Množina Ω je potom určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq 6, \\-\sqrt{6x - x^2} &\leq y \leq 0.\end{aligned}$$



Obrázok 3.1.9 Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 6x$, $y \leq 0$

Príklad 3.1.10 Je daná množina Ω , ktorá je určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 4 - x$. Zapište množinu Ω pomocou nerovností a graficky ju znázornite.

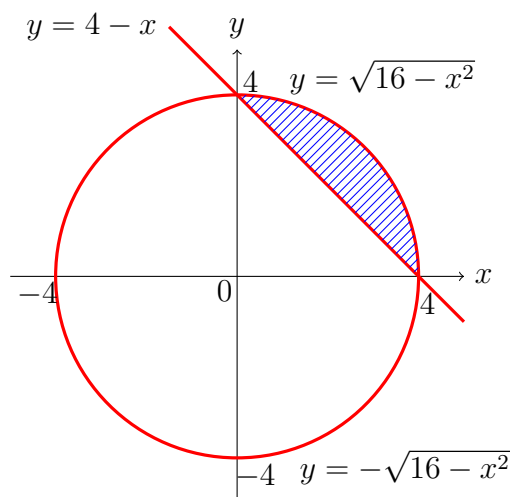
Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 16$ je kruh so stredom $S(0,0)$ a s polomerom $r = 4$. Druhá nerovnosť $y \geq 4 - x$ určuje polovinu s hraničnou priamkou $y = 4 - x$.

Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 16$ spočítame medz pre y :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 16, \\y^2 &= 16 - x^2, \\y &= \pm\sqrt{16 - x^2}.\end{aligned}$$

Množina Ω je potom určená nerovnosťami:

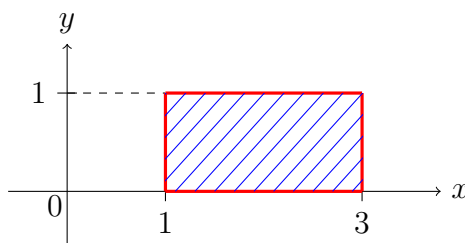
$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq 4, \\4 - x &\leq y \leq \sqrt{16 - x^2}.\end{aligned}$$



Obrázok 3.1.10 Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 16$, $y \geq 4 - x$

3.2 Výpočet dvojného integrálu na obdĺžniku

Príklad 3.2.1 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (xy^2 + 3x^2) dx dy$, kde $\Omega = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.



Obrázok 3.2.1 Množina $\Omega = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

Ako je vidieť na obrázku (3.2.1), integračnou množinou Ω je obdĺžnik $\langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ určený nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 3, \\ 0 &\leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Najskôr si spočítame vnútorný integrál a potom vonkajší:

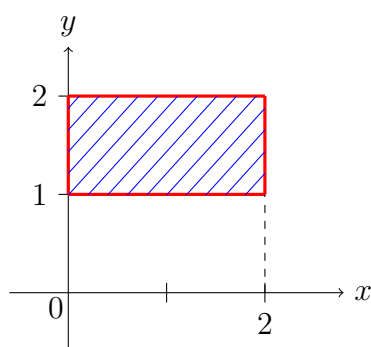
$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\int_0^1 (xy^2 + 3x^2) dy \right) dx &= \int_1^3 \left[x \cdot \frac{y^3}{3} + 3x^2 y \right]_0^1 dx = \int_1^3 \left(x \cdot \frac{1}{3} + 3x^2 \cdot 1 - x \cdot \frac{0}{3} - 3x^2 \cdot 0 \right) dx = \\ &= \int_1^3 \left(\frac{1}{3}x + 3x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \left[\frac{x^2}{6} + x^3 \right]_1^3 = \frac{3^2}{6} + 3^3 - \frac{1^2}{6} - 1^3 = \\ &= \frac{9}{6} + 27 - \frac{1}{6} - 1 = \frac{4}{3} + 26 = \frac{4 + 78}{3} = \frac{82}{3}. \end{aligned}$$

Výsledkom je číslo $\frac{82}{3}$.

Príklad 3.2.2 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Ako je vidieť na obrázku (3.2.2), integračnou množinou Ω je obdĺžnik $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ určený nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2, \\ 1 &\leq y \leq 2. \end{aligned}$$

Obrázok 3.2.2 Množina $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$

Obdobne ako v predošlom príklade, si najskôr spočítame vnútorný integrál a potom vonkajší:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{(1+x+y)^2} dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_1^2 (1+x+y)^{-2} dy \right) dx = \int_0^2 \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_1^2 dx = \\ \int_0^2 \left(-\frac{1}{3+x} + \frac{1}{2+x} \right) dx &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{3+x} + \frac{1}{2+x} \right) dx = \left[-\ln|3+x| + \ln|2+x| \right]_0^2 = \\ \left[\ln \left| \frac{2+x}{3+x} \right| \right]_0^2 &= \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \ln \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Výsledkom je číslo $\ln \frac{6}{5}$.

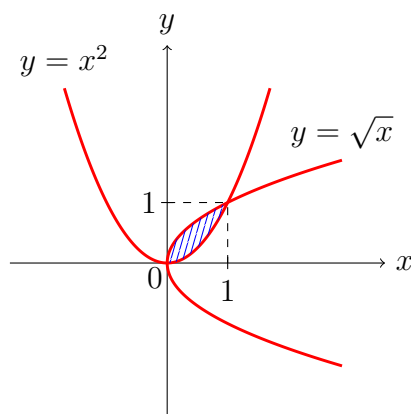
3.3 Výpočet dvojného integrálu na množine Ω_x a Ω_y

Príklad 3.3.1 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (3x + y^2) dx dy$, kde $\Omega : y = x^2, x = y^2$.

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ x^2 &\leq y \leq \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Grafické znázornenie množiny Ω :



Obrázok 3.3.1 Množina Ω ohraničená krivkami $x = 4 - y^2, x = y - 2$

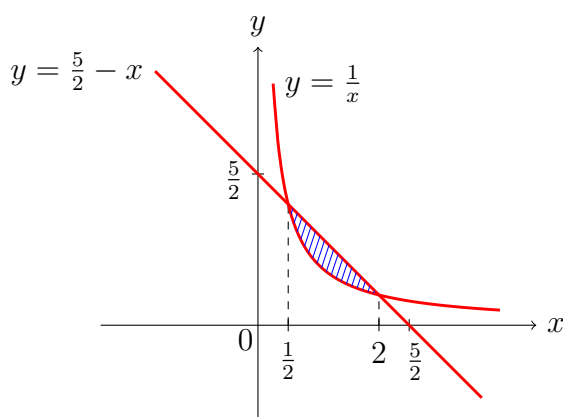
Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x + y^2) dy \right) dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x + y^2) dy \right) dx &= \int_0^1 \left[3xy + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(3x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^6 \right) dx = \\ &= \left[3 \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \left(3 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{21} \right) = \frac{15}{28}. \end{aligned}$$

Príklad 3.3.2 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$, kde $\Omega : xy = 1, y = \frac{5}{2} - x$.

Najskôr vypočítame priesečníky daných kriviek $xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$, pričom z druhej podmienky vyjadríme $y : y = \frac{5}{2} - x$ a dosadíme do prvej podmienky:

$$\begin{aligned} x \cdot \left(\frac{5}{2} - x \right) &= 1, \\ \frac{5}{2} \cdot x - x^2 - 1 &= 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}, \\ x_1 &= 2, \\ x_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obrázok 3.3.2 Množina Ω ohraničená krivkami $xy = 1$, $x + y = \frac{5}{2}$

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2,$$

$$\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x.$$

A teraz prevedieme výpočet dvojnásobného integrálu $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \, dy \right) dx$:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \, dy \right) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{25}{8} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{25}{16} \cdot x^2 - \frac{5}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot \ln |x| \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \\ &= \frac{25}{4} - \frac{20}{3} + 2 - \frac{25}{64} + \frac{5}{48} - \frac{1}{128} - \ln 2 = \frac{165}{128} - \ln 2. \end{aligned}$$

Príklad 3.3.3 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} xy^2 \, dx dy$, kde $\Omega : y = x^2, y = x$.

Najskôr vypočítame priesečníky daných kriviek:

$$y = x^2, y = x,$$

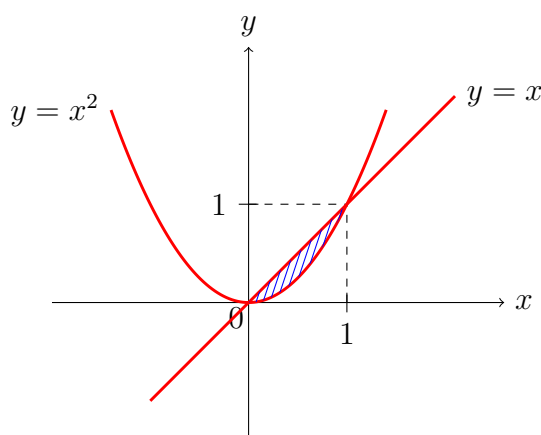
$$x = x^2,$$

$$x^2 - x = 0,$$

$$x \cdot (x - 1) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 1.$$

Obrázok 3.3.3 Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2, y = x$

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$x^2 \leq y \leq x.$$

Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (xy^2) dy \right) dx$:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$

Príklad 3.3.4 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (4 + x^2) dx dy$, kde Ω :

$$y = 1 + x^2, y = 9 - x^2.$$

Najskôr vypočítame priesečníky daných kriviek:

$$y = 1 + x^2, y = 9 - x^2,$$

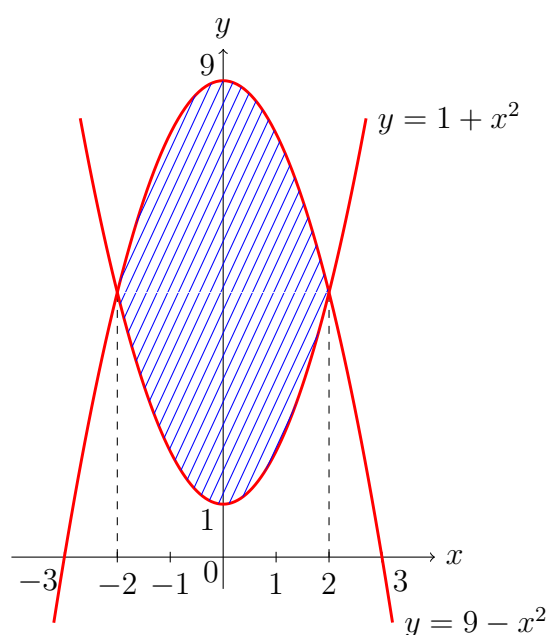
$$1 + x^2 = 9 - x^2,$$

$$2x^2 = 8,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = -2.$$

Obrázok 3.3.4 Množina Ω ohraničená krivkami $y = 1 + x^2$, $y = 9 - x^2$

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} -2 &\leq x \leq 2, \\ 1 + x^2 &\leq y \leq 9 - x^2. \end{aligned}$$

Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_{-2}^2 \left(\int_{1+x^2}^{9-x^2} (4 + x^2) dy \right) dx$:

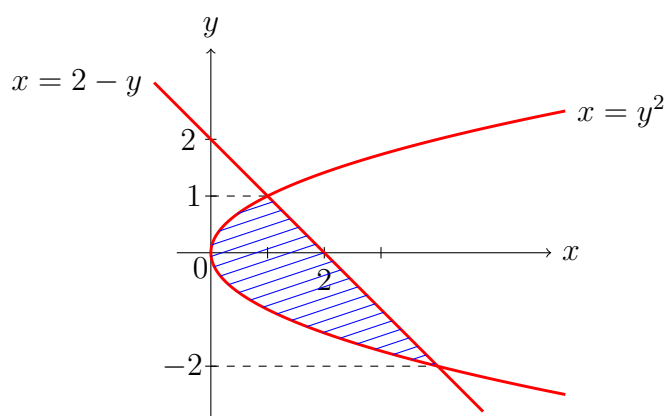
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \left(\int_{1+x^2}^{9-x^2} (4 + x^2) dy \right) dx &= \int_{-2}^2 [4y + x^2 y]_{1+x^2}^{9-x^2} dx = \\ \int_{-2}^2 [4 \cdot (9 - x^2) + x^2 \cdot (9 - x^2) - 4 \cdot (1 + x^2) - x^2 \cdot (1 + x^2)] dx &= \int_{-2}^2 (-2x^4 + 32) dx = \\ \left[\frac{-2x^5}{5} + 32x \right]_{-2}^2 &= -\frac{64}{5} + 64 - \frac{64}{5} + 64 = \frac{512}{5}. \end{aligned}$$

Príklad 3.3.5 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (1 - y) dx dy$, kde Ω :

$$x = y^2, x = 2 - y.$$

Jedná sa o integračnú množinu Ω_y , z čoho vyplýva, že budeme počítať y -ové súradnice priesečníkov:

$$\begin{aligned}
 x &= y^2, \quad x = 2 - y, \\
 y^2 &= 2 - y, \\
 y^2 + y - 2 &= 0, \\
 y_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \\
 y_1 &= 1, \\
 y_2 &= -2.
 \end{aligned}$$

Obrázok 3.3.5 Množina Ω ohraničená krivkami $x = y^2, x = 2 - y$

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}
 -2 &\leq y \leq 1, \\
 y^2 &\leq x \leq 2 - y.
 \end{aligned}$$

Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_{-2}^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} (1-y) dx \right) dy$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} (1-y) dx \right) dy &= \int_{-2}^1 [x - xy]_{y^2}^{2-y} dy = \int_{-2}^1 (y^3 - 3y + 2) dy = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{3y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^1 = \\
 \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 &= \frac{27}{4}.
 \end{aligned}$$

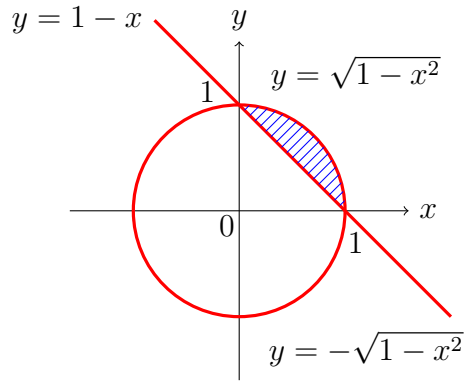
Príklad 3.3.6 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$, kde Ω :

$$x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1.$$

Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 1$ je kruh so stredom $S(0,0)$ a s polomerom $r = 1$. Druhá nerovnosť určuje polrovinu danú priamkou $x + y = 1$.

Vyjadříme medz pre y :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\y^2 &= 1 - x^2, \\y &= \pm\sqrt{1 - x^2}.\end{aligned}$$



Obrázok 3.3.6 Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$

Množina Ω je potom určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}0 &\leq x \leq 1, \\1 - x &\leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.\end{aligned}$$

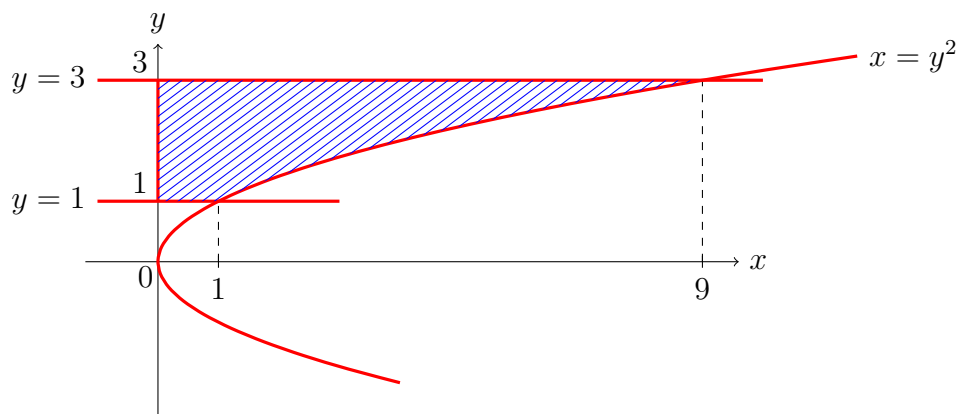
Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx &= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \left[1 - x^2 - (1 - x)^2 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\&= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot (1 - x^2 - 1 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot (2x - 2x^2) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \\&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Príklad 3.3.7 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω :

$$x = 0, y = 1, y = 3, y^2 = x.$$

Jedná sa o integračnú množinu Ω_y , ktorá je ohraničená priamkami $x = 0, y = 1, y = 3$ a parabolou $x = y^2$.

Obrázok 3.3.7 Množina Ω ohraničená krivkami $x = 0, y = 1, y = 3, x = y^2$

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 1 &\leq y \leq 3, \\ 0 &\leq x \leq y^2. \end{aligned}$$

Výpočet dvojnásobného integrálu $\int_1^3 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy$:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy &= \int_1^3 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} dy = \int_1^3 (y e^y - y) dy = \left[y e^y - e^y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^3 = \\ &= 3e^3 - e^3 - \frac{9}{2} - e^1 + e^1 + \frac{1}{2} = \mathbf{2e^3 - 4}. \end{aligned}$$

Príklad 3.3.8 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, kde Ω :

$$y^2 = 2x, x+y=4, x+y=12.$$

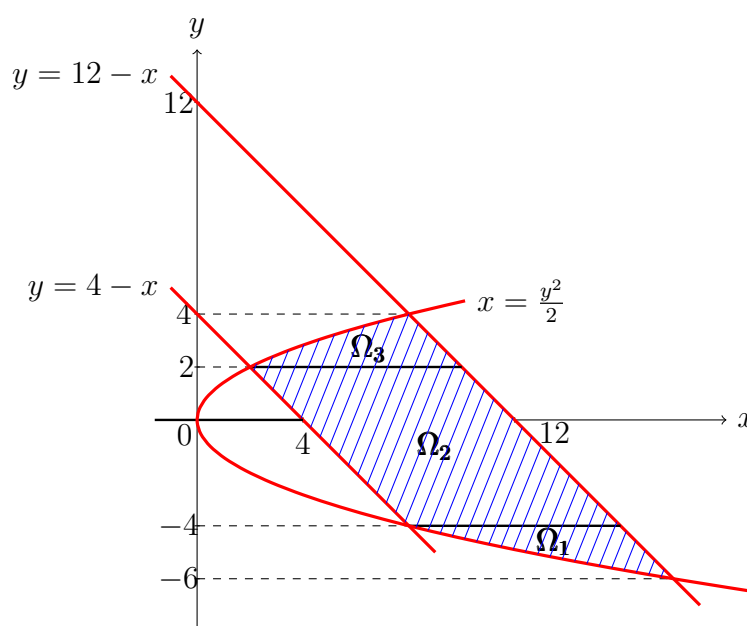
Integračnú množinu Ω je potrebné rozdeliť na tri časti $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, z čoho vyplýva že integrál I je rozdelený na tri časti I_1, I_2, I_3 :

Výpočet priesečníkov $x+y=12, y^2=2x$:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} + y &= 12, \\ y^2 + 2y - 24 &= 0, \\ (y-4) \cdot (y+6) &= 0, \\ y_1 &= 4, \\ y_2 &= -6. \end{aligned}$$

Výpočet priesečníkov $x + y = 4$, $y^2 = 2x$:

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{2} + y &= 4, \\ y^2 + 2y - 8 &= 0, \\ (y - 2) \cdot (y + 4) &= 0, \\ y_1 &= 2, \\ y_2 &= -4.\end{aligned}$$



Obrázok 3.3.8 Množina Ω ohraničená krivkami $x = \frac{y^2}{2}$, $x + y = 4$, $x + y = 12$

Integračná množina Ω_1 je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}-6 &\leq y \leq -4, \\ \frac{y^2}{2} &\leq x \leq 12 - y.\end{aligned}$$

Integračná množina Ω_2 je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}-4 &\leq y \leq 2, \\ 4 - y &\leq x \leq 12 - y.\end{aligned}$$

Integračná množina Ω_3 je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}2 &\leq y \leq 4, \\ \frac{y^2}{2} &\leq x \leq 12 - y.\end{aligned}$$

Výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ pre všetky tri integračné množiny:

Výpočet pre I_1 :

$$\begin{aligned} \int_{-6}^{-4} \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx \right) dy &= \int_{-6}^{-4} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} dy = \int_{-6}^{-4} \left(\frac{(12-y)^2}{2} + \right. \\ & y \cdot (12-y) - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} \Big) dy = \int_{-6}^{-4} 72 dy - \frac{1}{2} \int_{-6}^{-4} y^3 dy - \frac{1}{8} \int_{-6}^{-4} y^4 dy - \frac{1}{2} \int_{-6}^{-4} y^2 dy = \\ & \left[72y - \frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{40} - \frac{y^3}{6} \right]_{-6}^{-4} = -288 - 32 + \frac{128}{5} + \frac{32}{3} + 432 + 162 - \frac{972}{5} - \frac{108}{3} = \frac{1198}{15}. \end{aligned}$$

Výpočet pre I_2 :

$$\begin{aligned} \int_{-4}^2 \left(\int_{4-y}^{12-y} (x+y) dx \right) dy &= \int_{-4}^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{4-y}^{12-y} dy = \\ & \int_{-4}^2 \left(\frac{(12-y)^2}{2} + y \cdot (12-y) - \frac{(4-y)^2}{2} - (4-y) \cdot y \right) dy = \int_{-4}^2 64 dy = 64 \cdot [y]_{-4}^2 = \mathbf{384}. \end{aligned}$$

Výpočet pre I_3 :

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx \right) dy &= \int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} dy = \int_2^4 \left(\frac{(12-y)^2}{2} + y \cdot (12-y) - \right. \\ & \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} \Big) dy = \int_2^4 72 dy - \frac{1}{2} \int_2^4 y^3 dy - \frac{1}{8} \int_2^4 y^4 dy - \frac{1}{2} \int_2^4 y^2 dy = \\ & \left[72y - \frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{40} - \frac{y^3}{6} \right]_2^4 = 288 - 32 - \frac{128}{5} - \frac{32}{3} - 144 + 2 + \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{1198}{15}. \end{aligned}$$

Výsledok pre celý integrál I potom vychádza:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1198}{15} + 384 + \frac{1198}{15} = \frac{8156}{15}.$$

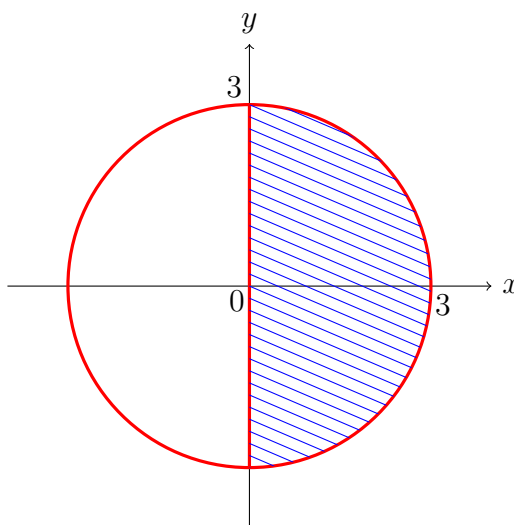
3.4 Výpočet dvojného integrálu v polárnych súradniciach

Príklad 3.4.1 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} (2 + x + y) dx dy$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$x^2 + y^2 \leq 9,$$

$$x \geq 0.$$

Znázornenie množiny Ω v rovine xy :



Obrázok 3.4.1 Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0$

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \rho \leq 3.$$

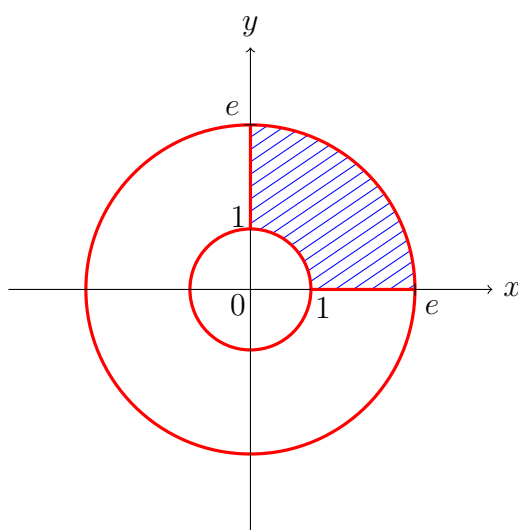
Výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega^*} (2 + \rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^*} (2 + \rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 (2\rho + \rho^2 \cos \varphi + \rho^2 \sin \varphi) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^2 + \frac{\rho^3}{3} \cos \varphi + \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_0^3 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (9 + 9 \cos \varphi + 9 \sin \varphi) d\varphi = \\ &= 9 \cdot \left[\varphi + \sin \varphi - \cos \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 9 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 1 - 0 + \frac{\pi}{2} + 1 + 0 \right) = 9 \cdot (\pi + 2) = \mathbf{9\pi + 18}. \end{aligned}$$

Příklad 3.4.2 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} \frac{\ln \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\geq 1, \\x^2 + y^2 &\leq e^2, \\x &\geq 0, \\y &\geq 0.\end{aligned}$$

Znázornenie množiny Ω :



Obrázok 3.4.2 Množina Ω v rovine xy

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned}0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\1 &\leq \rho \leq e.\end{aligned}$$

Výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega^*} \frac{\ln \sqrt{\rho^2}}{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi$:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^*} \frac{\ln \sqrt{\rho^2}}{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^e \frac{\ln \rho}{\rho} d\rho \right) d\varphi = \\ \left| \begin{array}{ll} \ln \rho = t & \rho = 1 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{1}{\rho} d\rho = dt & \rho = e \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 t dt \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

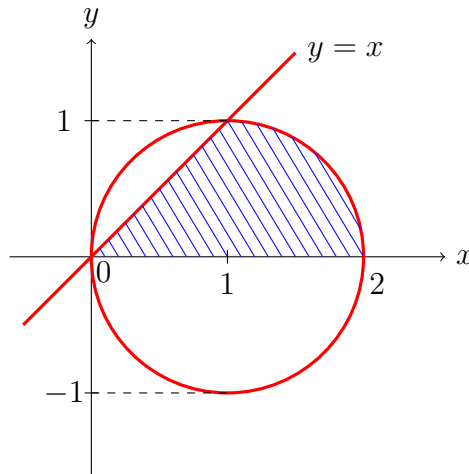
Príklad 3.4.3 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$x^2 + y^2 \leq 2x,$$

$$y \geq 0,$$

$$y \leq x.$$

Prvá nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 2x$ je kruh so stredom v $S(1, 0)$ a s polomerom $r = 1$.



Obrázok 3.4.3 Znázornenie množiny Ω

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi.$$

Výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega^*} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^*} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \cdot \frac{8}{3} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \varphi)^2 \, d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos^2 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\varphi + \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left[\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

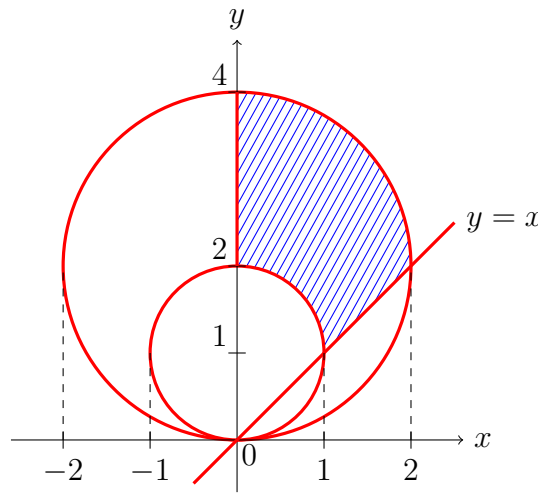
Príklad 3.4.4 Vypočítajte dvojný integrál $\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$, kde Ω je ohraničená krivkami:

$$x^2 + y^2 = 2y,$$

$$x^2 + y^2 = 4y,$$

$$x = 0, y = x.$$

Rovnica $x^2 + y^2 = 2y$ je kružnica so stredom v $S(0, 1)$ a s polomerom $r = 1$ a rovnica $x^2 + y^2 = 4y$ je kružnica so stredom v $S(0, 2)$ a s polomerom $r = 2$. Množina Ω vypadá nasledovne:



Obrázok 3.4.4 Znáozornenie množiny Ω

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$2 \sin \varphi \leq \rho \leq 4 \sin \varphi.$$

Výpočet dvojného integrálu $\iint_{\Omega^*} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^*} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \left(\frac{64 \sin^3 \varphi}{3} - \frac{8 \sin^3 \varphi}{3} \right) d\varphi = \frac{56}{3} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \sin \varphi = t & \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \varphi \, d\varphi = dt & \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{56}{3} \cdot \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^3 \, dt = \frac{14}{3} \cdot \left[t^4 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{14}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

3.5 Neriešené příklady

1. Vypočítajte dvojný integrál na obdĺžniku:

$$\text{a) } \iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy, \quad \Omega : x = 1, x = 4, y = -2, y = 3, \quad \left[\frac{105}{2} \right]$$

$$\text{b) } \iint_{\Omega} \frac{1}{(x+y)^2} \, dx dy, \quad \Omega : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2, \quad \left[\ln \frac{25}{24} \right]$$

$$\text{c) } \iint_{\Omega} x \sin y \, dx dy, \quad \Omega : x = 1, x = 2, y = 0, y = \frac{\pi}{2}. \quad \left[\frac{3}{2} \right]$$

2. Vypočítajte dvojný integrál na danej množine Ω :

$$\text{a) } \iint_{\Omega} (5x^2 - 2xy) \, dx dy, \quad \Omega : \triangle ABC, A(2, 0), B(0, 1), C(0, 0), \quad \left[3 \right]$$

$$\text{b) } \iint_{\Omega} y \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 9, x + y \geq 3, \quad \left[\frac{9}{2} \right]$$

$$\text{c) } \iint_{\Omega} \frac{x}{y} \, dx dy, \quad \Omega : x = 1, x = 2, y = 1, y = x, \quad \left[2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right]$$

$$\text{d) } \iint_{\Omega} \cos(x + y) \, dx dy, \quad \Omega : x = 0, y = \pi, y = x, \quad \left[-2 \right]$$

$$\text{e) } \iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} \, dx dy, \quad \Omega : x = 2, y = x, xy = 1, \quad \left[\frac{9}{4} \right]$$

$$\text{f) } \iint_{\Omega} (3x - 5) \, dx dy, \quad \Omega : y = 5 + x, y = 7 - x, x = 10, \quad \left[1296 \right]$$

$$\text{g) } \iint_{\Omega} \, dx dy, \quad \Omega : x = 2 - y^2, x = 0, y = x. \quad \left[\frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{7}{6} \right]$$

3. Vypočítajte dvojný integrál pomocou polárnych súradníc:

$$\text{a) } \iint_{\Omega} xy \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, \quad \left[\frac{81}{8} \right]$$

$$\text{b) } \iint_{\Omega} (x + y) \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, \quad \left[\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 1) \right]$$

$$\text{c) } \iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, \quad \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4e} \right]$$

$$\text{d) } \iint_{\Omega} y \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0, \quad \left[\frac{1}{6} \right]$$

$$\text{e) } \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 4x. \quad \left[\frac{3}{32} \pi \right]$$

4 Trojný integrál

4.1 Výpočet trojného integrálu v kartézských súradniciach

Príklad 4.1.1 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} (y-xz) \, dx \, dy \, dz$ na množine Ω určené nerovnosťami:

$$-1 \leq x \leq 1,$$

$$2 \leq y \leq 4,$$

$$0 \leq z \leq 3.$$

Výpočet trojnásobného integrálu $\int_{-1}^1 \left(\int_2^4 \left(\int_0^3 (y-xz) \, dz \right) dy \right) dx :$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\int_2^4 \left(\int_0^3 (y-xz) \, dz \right) dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left(\int_2^4 \left[yz - \frac{xz^2}{2} \right]_0^3 dy \right) dx = \\ \int_{-1}^1 \left(\int_2^4 \left(3y - \frac{9}{2}x \right) dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[\frac{3y^2}{2} - \frac{9}{2}xy \right]_2^4 dx = \int_{-1}^1 (24 - 18x - 6 + 9x) dx = \\ \int_{-1}^1 (18 - 9x) dx &= \left[18x - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-1}^1 = 18 - \frac{9}{2} + 18 + \frac{9}{2} = \mathbf{36}. \end{aligned}$$

Príklad 4.1.2 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} x \cdot \cos z \, dx \, dy \, dz$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

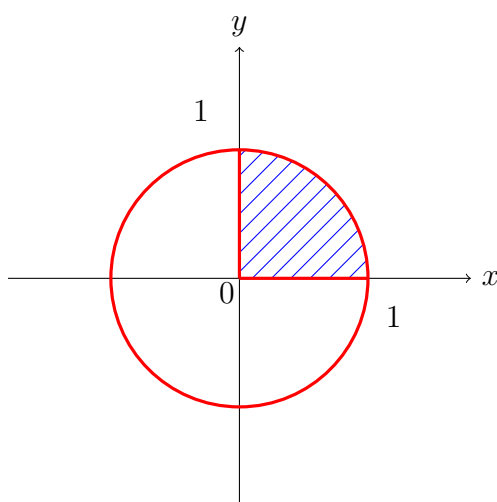
$$z \geq 0, z \leq \frac{\pi}{2}.$$

Rovnica $x^2 + y^2 = 1$ je rovnicou valcovej plochy, jej kolmý priemet do roviny xy je kružnica o rovnakej rovnici, z ktorej si vyjadríme y :

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$y^2 = 1 - x^2,$$

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Obrázok 4.1.1 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.2

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ 0 &\leq z \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Výpočet trojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos z \, dz \right) dy \right) dx :$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos z \, dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} [x \cdot \sin z]_0^{\frac{\pi}{2}} dy \right) dx = \\ \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx &= \int_0^1 [xy]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx = \\ \left| \begin{array}{ll} 1-x^2 = t & x=0 \Rightarrow t=1 \\ -2x \, dx = dt & x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right| &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [t^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

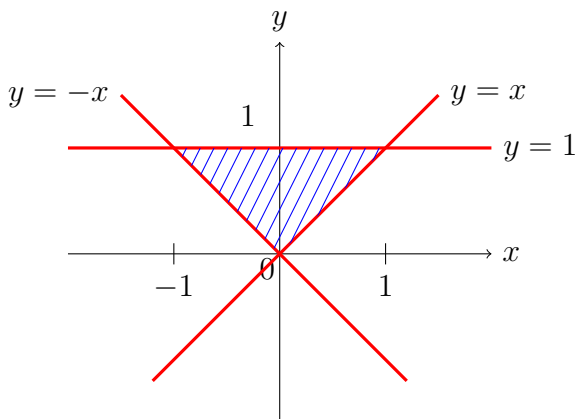
Příklad 4.1.3 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} e^y \, dx dy dz$, kde Ω je ohraničená plochami:

$$y = 1,$$

$$y = x, y = -x,$$

$$z = 0, z = y.$$

Premietnutie množiny Ω do roviny xy :



Obrázok 4.1.2 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.3

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$-y \leq x \leq y,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq y.$$

Výpočet trojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_{-y}^y \left(\int_0^y e^y \, dz \right) dx \right) dy$. Pri výpočte dvakrát použijeme metódu per partes.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{-y}^y \left(\int_0^y e^y \, dz \right) dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_{-y}^y e^y \cdot [z]_0^y dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_{-y}^y e^y \cdot y \, dx \right) dy = \\ \int_0^1 [e^y \cdot y \cdot x]_{-y}^y dy &= \int_0^1 e^y \cdot y \cdot (y + y) dy = \left| \begin{array}{ll} u = 2y^2 & u' = 4y \\ v' = e^y & v = e^y \end{array} \right| = [2y^2 \cdot e^y]_0^1 - \int_0^1 4ye^y dy = \\ \left| \begin{array}{ll} u = 4y & u' = 4 \\ v' = e^y & v = e^y \end{array} \right| &= 2e - 0 - [4ye^y]_0^1 + \int_0^1 4e^y dy = 2e - 4e + [4e^y]_0^1 = 2e - 4e + 4e - 4 = \mathbf{2e - 4}. \end{aligned}$$

Príklad 4.1.4 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x} dx dy dz$, kde Ω je ohraničená plochami:

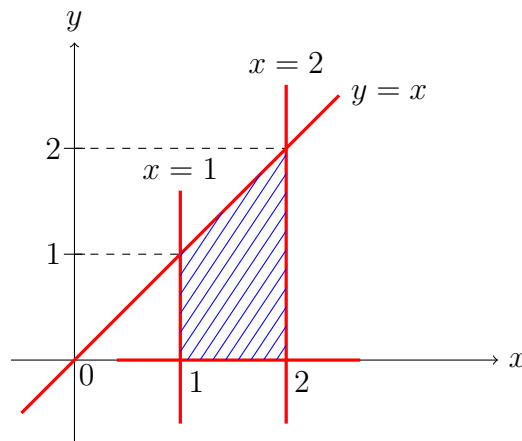
$$x + y + z = 4,$$

$$y = x, y = 0,$$

$$x = 1, x = 2,$$

$$z = 0.$$

Znázornenie situácie v rovine xy :



Obrázok 4.1.3 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.4

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$1 \leq x \leq 2,$$

$$0 \leq y \leq x,$$

$$0 \leq z \leq 4 - x - y.$$

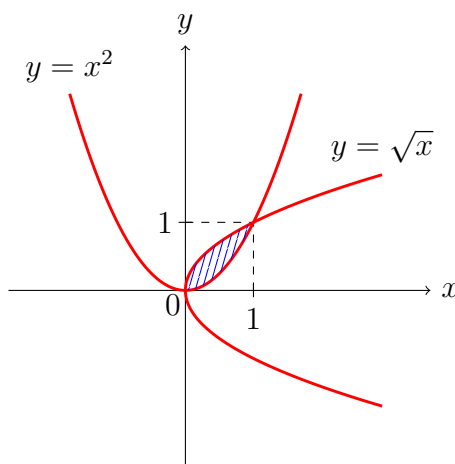
Výpočet trojnásobného integrálu $\int_1^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{4-x-y} \frac{1}{x} dz \right) dy \right) dx$:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{4-x-y} \frac{1}{x} dz \right) dy \right) dx &= \int_1^2 \left(\int_0^x \left[\frac{1}{x} \cdot z \right]_0^{4-x-y} dy \right) dx = \\ \int_1^2 \left(\int_0^x \left(\frac{4}{x} - 1 - \frac{y}{x} \right) dy \right) dx &= \int_1^2 \left[\frac{4y}{x} - y - \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_1^2 \left(4 - x - \frac{x}{2} \right) dx = \\ \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 &= 8 - 2 - 1 - 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Příklad 4.1.5 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} y &\geq x^2, \\ x &\geq y^2, \\ z &\geq 0, z \leq xy. \end{aligned}$$

Situácia v rovine xy :



Obrázok 4.1.4 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.5

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ x^2 &\leq y \leq \sqrt{x}, \\ 0 &\leq z \leq xy. \end{aligned}$$

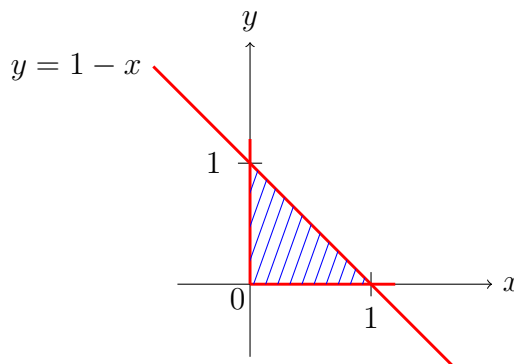
Výpočet trojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{xy} xyz \, dz \right) dy \right) dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{xy} xyz \, dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left[xy \cdot \frac{z^2}{2} \right]_0^{xy} dy \right) dx = \\ \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x^3 y^3}{2} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[\frac{x^3 y^4}{8} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3 \cdot x^2}{8} - \frac{x^3 \cdot x^8}{8} \right) dx = \frac{1}{8} \cdot \int_0^1 (x^5 - x^{11}) dx = \\ \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12} \right]_0^1 &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

Príklad 4.1.6 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} dx dy dz$, kde množina Ω leží v I. oktante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) a je ohraničená plochou $x + y + z = 1$.

Rovnica $x + y + z = 1$ je rovnicou roviny, jej kolmý priemet do roviny xy je priamka o rovnici $y = 1 - x$.

Situácia v rovine xy :



Obrázok 4.1.5 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.6

Integračná množina Ω je určená nerovnosťami:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1 - x,$$

$$0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

Výpočet trojnásobného integrálu $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} dz \right) dy \right) dx$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^2} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{x+y+z+1} \right]_0^{1-x-y} dy \right) dx = \\ & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{x+y+1-x-y+1} + \frac{1}{x+y+1} \right) dy \right) dx = \\ & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{x+y+1} - \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\ln|x+y+1| - \frac{1}{2} \cdot y \right]_0^{1-x} dx = \\ & \int_0^1 \left[\ln|x+1-x+1| - \frac{1}{2}(1-x) - \ln|x+1| \right] dx = \int_0^1 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \ln(x+1) \right) dx = \\ & \left[x \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \ln(x+1) dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1) & u' = \frac{1}{x+1} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left[x \cdot \ln(x+1) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \ln 2 - \frac{1}{4} - \ln 2 + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$-\frac{1}{4} + \left[x - \ln(x+1) \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + 1 - \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

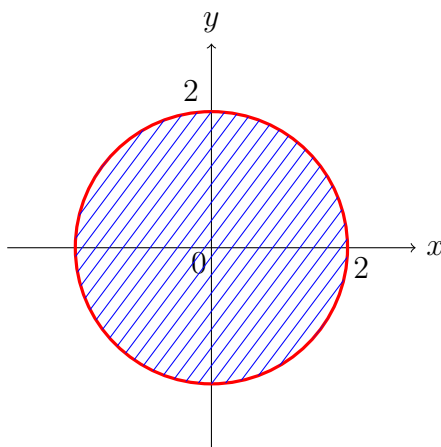
4.2 Výpočet trojného integrálu vo valcových súradniciach

Príklad 4.2.1 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, kde Ω je ohraničená plochami:

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$z = 0, z = 3.$$

Situácia v rovine xy :



Obrázok 4.2.1 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.2.1

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$0 \leq \rho \leq 2,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq z \leq 3.$$

Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} [(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2] \rho d\rho d\varphi dz$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^*} [(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2] \rho d\rho d\varphi dz &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho dz \right) d\rho \right) d\varphi &= \\ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (\rho^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \cdot \rho) dz \right) d\rho \right) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left[\rho^3 z \right]_0^3 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 3\rho^3 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} \rho^4 \right]_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} 12 d\varphi = \left[12\varphi \right]_0^{2\pi} = \mathbf{24\pi}.$$

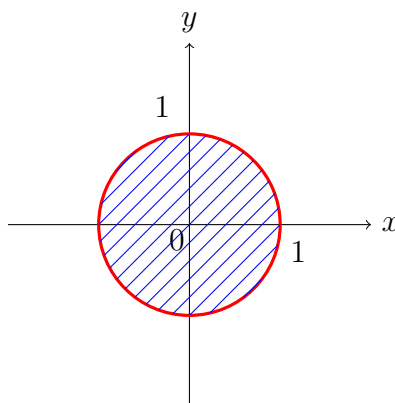
Príklad 4.2.2 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4. \end{aligned}$$

Kolmým priemetom valca $x^2 + y^2 \leq 1$ je kruh na nasledujúcom obrázku. Rovnica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ je rovnicou guľovej plochy, z ktorej určíme medze pre z :

$$\begin{aligned} \rho^2 + z^2 &= 4, \\ z^2 &= 4 - \rho^2, \\ z &= \pm \sqrt{4 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Situácia v rovine xy :



Obrázok 4.2.2 Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.2.2

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \rho \leq 1, \\ -\sqrt{4 - \rho^2} &\leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho dz d\rho d\varphi$:

$$\iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho dz d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho^3 \sin^2 \varphi dz \right) d\rho \right) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[\rho^3 \sin^2 \varphi z \right]_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \sin^2 \varphi \cdot 2 \cdot \sqrt{4-\rho^2} d\rho \right) d\varphi = \\
& \left| \begin{array}{ll} 4 - \rho^2 = t \Rightarrow \rho^2 = 4 - t & \rho = 0 \Rightarrow t = 4 \\ -2\rho d\rho = dt & \rho = 1 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \varphi \cdot \int_4^3 2 \cdot (4 - t) \cdot \sqrt{t} \left(-\frac{dt}{2} \right) \right) d\varphi = \\
& \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \varphi \cdot \int_3^4 (4 - t) \cdot \sqrt{t} dt \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \left[4 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_3^4 d\varphi = \\
& \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \cdot 3^{\frac{5}{2}} \right) d\varphi = \\
& \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} - 8 \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3} \right) d\varphi = \frac{128 - 66 \cdot \sqrt{3}}{15} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\
& \frac{128 - 66 \cdot \sqrt{3}}{30} \cdot \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{15} \cdot (128 - 66 \cdot \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Příklad 4.2.3 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} yz \, dx dy dz$, kde Ω je ohraničená plochami:

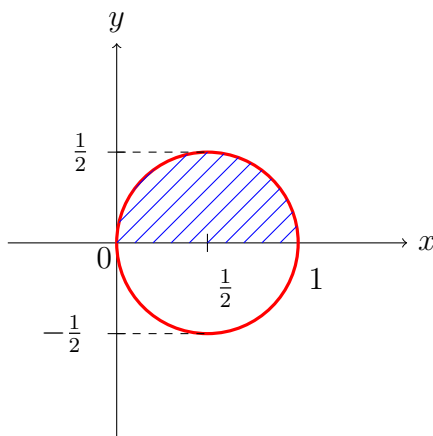
$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\
x^2 + y^2 &= x, \\
y &= 0, z = 0.
\end{aligned}$$

Rovnica $x^2 + y^2 = x$ je rovnica valcovej plochy, ktorej kolmým priemetom do roviny xy je kružnica, ktorá ma po úprave tvar $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Jej stred je v bode $S(\frac{1}{2}, 0)$ a polomer $r = \frac{1}{2}$.

Z rovnice $x^2 + y^2 = x$ dostávame:

$$\begin{aligned}
\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &= \rho \cos \varphi, \\
\rho^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= \rho \cos \varphi, \\
\rho^2 &= \rho \cos \varphi, \\
\rho &= \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Situácia v rovine xy :



Obrázok 4.2.3 Premietnutie valca do roviny xy

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \rho \leq \cos \varphi, \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} \rho \sin \varphi z \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi$:

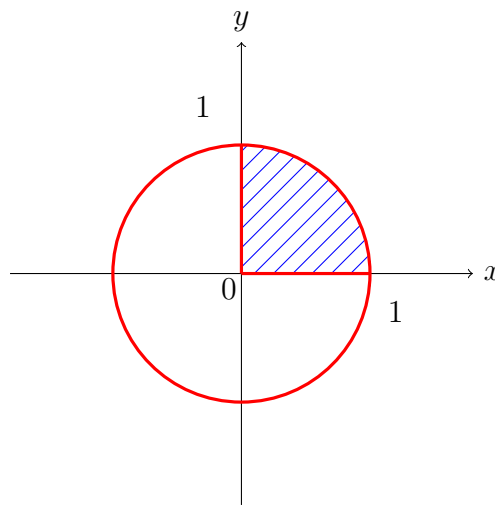
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^*} \rho \sin \varphi z \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \varphi} \left(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \sin \varphi z \rho \, dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi (1 - \rho^2) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \varphi} \sin \varphi (\rho^2 - \rho^4) d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{\cos \varphi} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right) d\varphi = \left| \begin{array}{ll} \cos \varphi = t & \varphi = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1 \\ -\sin \varphi \, d\varphi = dt & \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^0 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{30} \right]_1^0 = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

4.3 Výpočet trojného integrálu vo sférických súradniciach

Príklad 4.3.1 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde Ω je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1, \\ x &\geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Nerovnosť $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určuje guľu so stredom v $S(0, 0, 0)$ a polomerom $r = 1$. Jej kolmý priemet do roviny xy je kruh so stredom v $S(0, 0)$ a polomerom $r = 1$. Spoločne s podmienkami $x \geq 0, y \geq 0$ dostávame v rovine xy obrázok:



Obrázok 4.3.1 Premietnutie gule do roviny xy

Integračná množina Ω^* je určená nerovnosťami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \rho \leq 1. \end{aligned}$$

Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} \rho \cos \vartheta \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^*} \rho \cos \vartheta \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho \cos \vartheta \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = \left| \begin{array}{ll} \sin \vartheta = t & \vartheta = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = dt & \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 t \, dt \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{8} [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

Príklad 4.3.2 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, kde Ω je určená nerovnosťami:

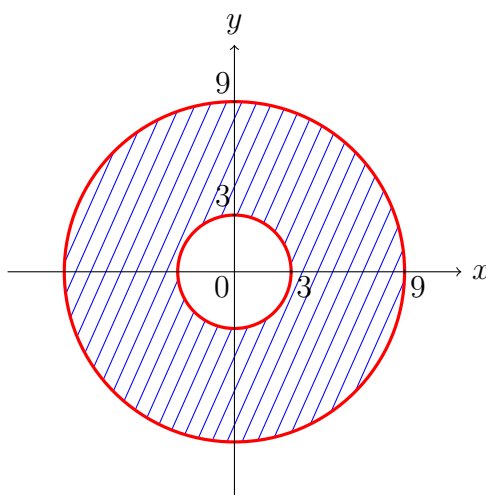
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 81, \\ z &\geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq 9. \end{aligned}$$

Rovnosť $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ je guľová plocha so stredom $S(0, 0, 0)$ a polomerom $r = 3$ a rovnosť $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ je tiež guľová plocha so stredom $S(0, 0, 0)$ a polomerom $r = 9$. Tretia rovnosť $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ je kuželová plocha. Z rovnice kuželovej plochy dostaneme:

$$\begin{aligned} z^2 &= 3x^2 + 3y^2, \\ \rho^2 \cos^2 \vartheta &= 3 \cdot (\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta), \\ \cos^2 \vartheta &= 3 \cdot \sin^2 \vartheta, \\ \operatorname{tg}^2 \vartheta &= \frac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \pm \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Úlohe vyhovuje iba kladné znamienko, takže $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.

Premietnutie guľových plôch do roviny xy :



Obrázok 4.3.2 Premietnutie guľových plôch do roviny xy

Integračná množina Ω^* je určená nerovnostami:

$$\begin{aligned} 3 &\leq \rho \leq 9, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

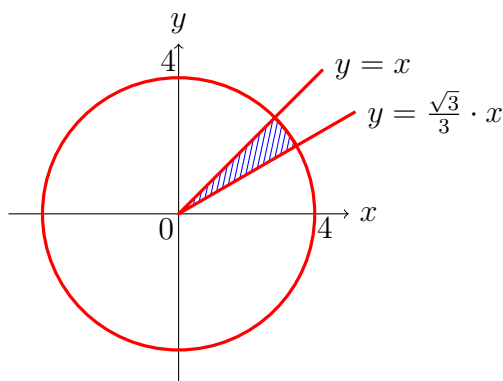
Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\rho \, d\varphi$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^*} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_3^9 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\rho \right) d\varphi = \\ \int_0^{2\pi} \left(\int_3^9 [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{6}} d\rho \right) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_3^9 \left[-\cos \frac{\pi}{6} - (-\cos 0) \right] d\rho \right) d\varphi = \\ \int_0^{2\pi} \left(\int_3^9 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) d\rho \right) d\varphi &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \int_0^{2\pi} [\rho]_3^9 d\varphi = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 6 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot 6 \cdot 2\pi &= 6\pi \cdot (2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Príklad 4.3.3 Vypočítajte trojný integrál $\iiint_{\Omega} \sqrt{z} \, dx \, dy \, dz$, kde Ω je ohraničená plochami:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 16, \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{3}x, \, y = x, \\ x = 0, \, y = 0 \, z &= 0. \end{aligned}$$

Rovnica $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ je rovnica guľovej plochy so stredom v $S(0, 0, 0)$ a polomerom $r = 4$. Ostatné rovnice určujú roviny. Kolmými priemetami do roviny xy dostaneme obrázok:



Obrázok 4.3.3 Premietnutie množiny Ω do roviny xy

Integrační množina Ω^* je určena nerovnostami:

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \rho \leq 4.$$

Výpočet trojného integrálu $\iiint_{\Omega^*} \sqrt{\rho \cos \vartheta} \cdot \rho^2 \cdot \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta$:

$$\iiint_{\Omega^*} \sqrt{\rho \cos \vartheta} \cdot \rho^2 \cdot \sin \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^4 \rho^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi =$$

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta \left[\frac{\rho^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right]_0^4 d\vartheta = \left| \begin{array}{ll} \cos \vartheta = t & \vartheta = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -\sin \vartheta \, d\vartheta = dt & \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| =$$

$$\frac{\pi}{12} \cdot \frac{2}{7} \cdot 4^{\frac{7}{2}} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{42} \cdot 128 \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{63} \pi.$$

4.4 Neriešené příklady

1. Vypočítajte trojný integrál pomocou kartézskych súradníc:

$$\text{a) } \iiint_{\Omega} xy^2z \, dx dy dz, \quad \Omega : x = 0, x = 2, y = 1, y = 3, z = 1, z = 2, \quad \left[26 \right]$$

$$\text{b) } \iiint_{\Omega} \frac{1}{1-x-y} \, dx dy dz, \quad \Omega : x = 0, x = 1, y = 2, y = 5, \\ z = 2, z = 4, \quad \left[10 \cdot \ln \frac{4}{5} \right]$$

$$\text{c) } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy dz, \quad \Omega : x + y \leq 2, z \geq 0, z \leq x + y, \quad \left[\frac{64}{15} \right]$$

$$\text{d) } \iiint_{\Omega} \frac{x+y}{z} \, dx dy dz, \quad \Omega : x = 1, y = -1, y = 2, y = x - 2, \\ z = e, z = e^2, \quad \left[\frac{27}{2} \right]$$

$$\text{e) } \iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz, \quad \Omega : \text{I. oktant, } x + y + z = 1, \quad \left[\frac{1}{720} \right]$$

$$\text{f) } \iiint_{\Omega} xy \, dx dy dz, \quad \Omega : \text{I. oktant, } x + y = 1, z = x^2 + y^2 + 1. \quad \left[\frac{7}{120} \right]$$

2. Vypočítajte trojný integrál pomocou valcových súradníc:

$$\text{a) } \iiint_{\Omega} z \cdot (x^2 + y^2) \, dx dy dz, \quad \Omega : \text{I. oktant, } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \left[\frac{\pi}{48} \right]$$

$$\text{b) } \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 2, \quad \left[4\pi \right]$$

$$\text{c) } \iiint_{\Omega} 3 \cdot (x^2 + y^2)z \, dx dy dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0, z \geq 0, z \leq x^2 + \\ y^2. \quad \left[\frac{105}{4096} \pi \right]$$

3. Vypočítajte trojný integrál pomocou sférických súradníc:

$$\text{a) } \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz, \quad \Omega : \text{I. oktant, } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \left[\frac{\pi}{8} a^4 \right]$$

$$\text{b) } \iiint_{\Omega} x^2 \, dx dy dz, \quad \Omega : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad \left[\frac{844}{15} \pi \right]$$

$$\text{c) } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz, \quad \Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0. \quad \left[\frac{\pi}{7} (2 - \sqrt{2}) \right]$$

5 Vybrané aplikácie viacnásobných integrálov

5.1 Obsah rovinného obrazca pomocou polárnych súradníc

Príklad 5.1.1 Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah P rovinného obrazca Ω určeného nerovnosťami:

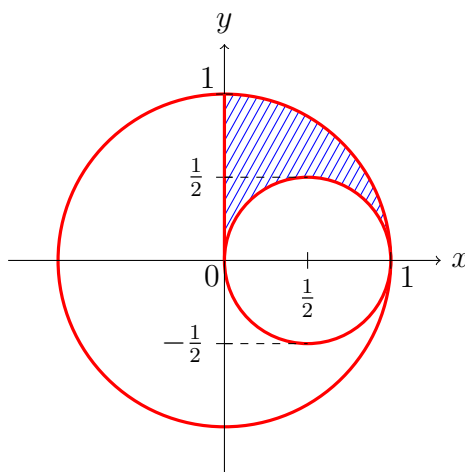
$$x^2 + y^2 \geq x,$$

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$y \geq 0,$$

$$x \geq 0.$$

Rovnica $x^2 + y^2 = x$ je kruh, po úprave na štvorec dostaneme $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Stred je v $S(\frac{1}{2}, 0)$ a polomer je $r = \frac{1}{2}$. Rovnica $x^2 + y^2 \leq 1$ je kruh so stredom $S(0, 0)$ a polomerom $r = 1$.



Obrázok 5.1.1 Znázornenie obrazca Ω

Dosadíme polárne súradnice zo vzťahu (3) do rovnice $x^2 + y^2 = x$ a dostaneme dolnú medz pre ρ : $\rho = \cos \rho$.

Obrazec Ω je určený nerovnosťami:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \varphi \leq \rho \leq 1.$$

Obsah $P(\Omega)$ obrazca vypočítame pomocou vzťahu (1):

$$P(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = \iint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos \varphi}^1 \rho d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\cos \varphi}^1 d\varphi =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Príklad 5.1.2 Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah P rovinného obrazca Ω ohraničeného krivkami:

$$x^2 + y^2 = 4x,$$

$$x^2 + y^2 = 8x,$$

$$y = -x,$$

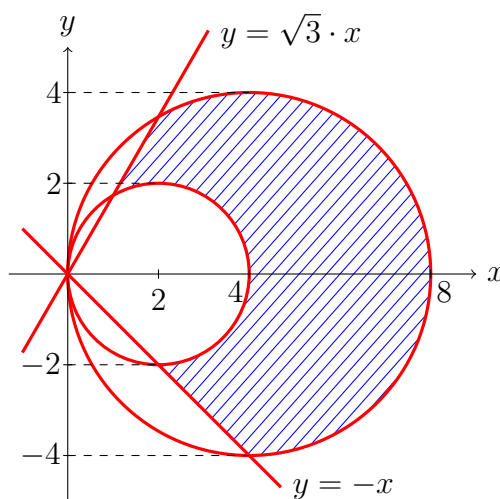
$$y = \sqrt{3} \cdot x.$$

Rovnice kružníc upravíme na stredový tvar:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

Prvá kružnica má stred $S_1(2, 0)$ a polomer $r_1 = 2$, druhá je so stredom $S_2(4, 0)$ a s polomerom $r_2 = 4$.



Obrázok 5.1.2 Znázornenie množiny Ω

Medze pre ρ dostaneme dosadením polárnych súradníc do rovníc kružníc:

$$x^2 + y^2 = 4x,$$

$$\rho = 4 \cos \varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 8x,$$

$$\rho = 8 \cos \varphi.$$

Obrazec Ω je určený nerovnostami:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$4 \cos \varphi \leq \rho \leq 8 \cos \varphi.$$

Obsah $P(\Omega)$ obrazca vypočítame pomocou vzťahu (1):

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy = \iint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \rho d\rho \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{64 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{16 \cos^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = 24 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi d\varphi = 24 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 12 \cdot \left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 12 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = 12 \cdot \frac{7\pi + 3\sqrt{3} + 6}{12} = \mathbf{7\pi + 3\sqrt{3} + 6}. \end{aligned}$$

5.2 Výpočet objemu telesa v kartézskych súradniciach

Príklad 5.2.1 Vypočítajte objem V telesa Ω ohraňovaného plochami:

$$x + 3y + 6z = 1,$$

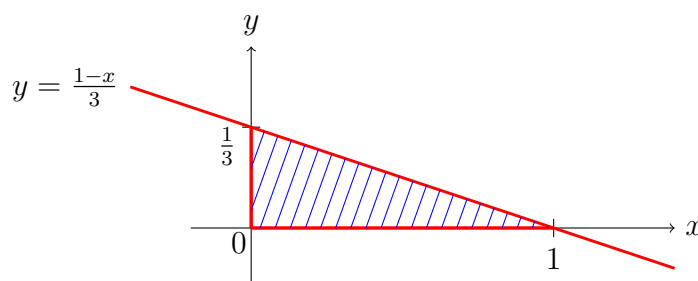
$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$z = 0.$$

Rovnica $x + 3y + 6z = 1$ je rovnica roviny, z ktorej plynie $z = \frac{1}{6} - \frac{x}{6} - \frac{y}{2}$. Kolmým priemetom do roviny xy je priamka $x + 3y = 1$, z ktorej plynie $y = \frac{1-x}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x}{3}$.

Priemet telesa do roviny xy :



Obrázok 5.2.1 Priemet telesa do roviny xy

Teleso Ω je určené nerovnostami:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq \frac{1}{3} - \frac{x}{3}, \\ 0 &\leq z \leq \frac{1}{6} - \frac{x}{6} - \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Objem $V(\Omega)$ telesa vypočítame pomocou vzťahu (4):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{3}-\frac{x}{3}} \left(\int_0^{\frac{1}{6}-\frac{x}{6}-\frac{y}{2}} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{3}-\frac{x}{3}} \left[z \right]_0^{\frac{1}{6}-\frac{x}{6}-\frac{y}{2}} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{3}-\frac{x}{3}} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{6} - \frac{y}{2} \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{6} \cdot y - \frac{x}{6} \cdot y - \frac{y^2}{4} \right]_0^{\frac{1}{3}-\frac{x}{3}} dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3} \right) - \frac{x}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3} \right)^2 \right] dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{36} dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{108} - \frac{2x^2}{72} + \frac{x}{36} \right]_0^1 = \frac{1}{108} - \frac{2}{72} + \frac{1}{36} = \frac{1}{108}. \end{aligned}$$

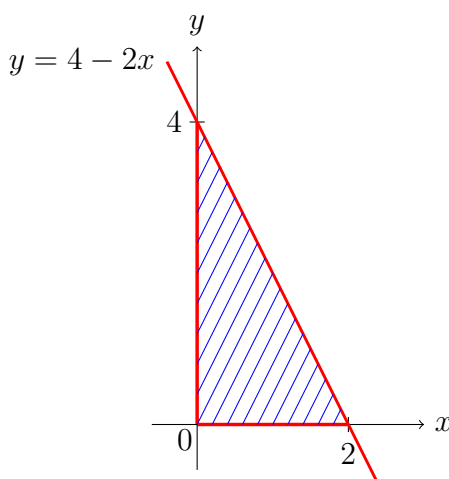
Príklad 5.2.2 Vypočítajte objem V telesa Ω ohraňovaného plochami:

$$z = 4 - x^2,$$

$$2x + y = 4,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Rovnica $z = 4 - x^2$ je rovnicou parabolickej plochy s osou v ose z a vrcholom $V(0, 0, 4)$. Priemet roviny $2x + y = 4$ do roviny xy je priamka $y = 4 - 2x$.



Obrázok 5.2.2 Priemet telesa do roviny xy

Teleso Ω je určené nerovnostami:

$$0 \leq x \leq 2,$$

$$0 \leq y \leq 4 - 2x,$$

$$0 \leq z \leq 4 - x^2.$$

Objem $V(\Omega)$ telesa vypočítame pomocou vzťahu (4):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{4-x^2} dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} [z]_0^{4-x^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} (4-x^2) dy \right) dx = \int_0^2 [(4-x^2) \cdot y]_0^{4-2x} dx = \int_0^2 [(4-x^2) \cdot (4-2x)] dx = \\ &= \int_0^2 (2x^3 - 4x^2 - 8x + 16) dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 16x \right]_0^2 = 8 - \frac{32}{3} - 16 + 32 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

5.3 Výpočet objemu telesa vo valcových súradniciach

Príklad 5.3.1 Vypočítajte objem V telesa Ω určeného nerovnosťami:

$$z \leq 16 - x^2 - y^2,$$

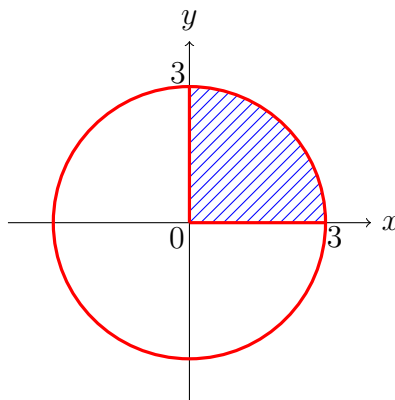
$$x^2 + y^2 \leq 9,$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Rovnica $z = 16 - x^2 - y^2$ určuje parabolickú plochu, jej transformáciou do valcových súradníc dostaneme hornú medz $z = 16 - \rho^2$.

Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 9$ určuje kruh so stredom $S(0,0)$ a polomerom $r = 3$.

Posledné tri nerovnosti určujú I. oktant.



Obrázok 5.3.1 Kolmý priemet telesa do roviny xy

Teleso Ω je určené nerovnostami:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \rho \leq 3,$$

$$0 \leq z \leq 16 - \rho^2.$$

Objem $V(\Omega)$ tělesa vypočítáme pomocí vztahu (4):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_0^{16-\rho^2} \rho dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \rho \cdot [z]_0^{16-\rho^2} d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \rho \cdot (16 - \rho^2) d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(72 - \frac{81}{4} \right) d\varphi = \frac{207}{4} [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{207}{8} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 5.3.2 Vypočítajte objem V tělesa Ω určeného nerovnostami Ω :

$$\begin{aligned} z &\geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4. \end{aligned}$$

Prvá nerovnosť $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ určuje oblasť vnútri kužela, druhá nerovnosť $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ určuje guľu so stredom $S(0, 0, 0)$ a polomerom $r = 2$.

Nájdeme priesečnicu kuželovej plochy $3x^2 + 3y^2 = z^2$ a guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 4$:

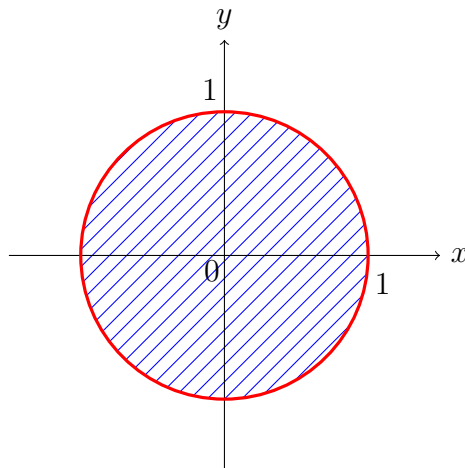
$$3 \cdot (4 - z^2) = z^2,$$

$$4z^2 = 12,$$

$$z^2 = 3,$$

$$z = \sqrt{3}.$$

Dosadíme $z = \sqrt{3}$ do rovnice kuželovej plochy a dostaneme priesečnicu $x^2 + y^2 = 1$, ktorou je kružnica, jej kolmý priemet do roviny xy je znázornený na obrázku:

Obrázok 5.3.2 Kolmý priemet telesa do roviny xy

Nájdeme medze pre z :

dolná medz - kuželová plocha:

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2},$$

$$z = \sqrt{3}\rho,$$

horná medz - guľová plocha:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

$$z = \sqrt{4 - \rho^2}.$$

Teleso Ω je určené nerovnosťami:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\sqrt{3}\rho \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}.$$

Objem $V(\Omega)$ telesa vypočítame pomocou vzťahu (4):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \cdot [z]_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\rho \cdot \sqrt{4-\rho^2} - \sqrt{3} \cdot \rho^2 \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \cdot \sqrt{4-\rho^2} d\rho - 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{3} \rho^2 d\rho = \left| \begin{array}{ll} 4 - \rho^2 = t & \rho = 0 \Rightarrow t = 4 \\ -2\rho d\rho = dt & \rho = 1 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_3^4 \sqrt{t} \, dt - 2\pi \cdot \sqrt{3} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 - 2\pi \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi \cdot (8 - 3\sqrt{3}) - \frac{2}{3}\pi\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi \cdot (8 - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi \cdot (8 - 4\sqrt{3}) = \frac{8}{3}\pi \cdot (2 - \sqrt{3}).$$

5.4 Výpočet objemu telesa vo sférických súradniciach

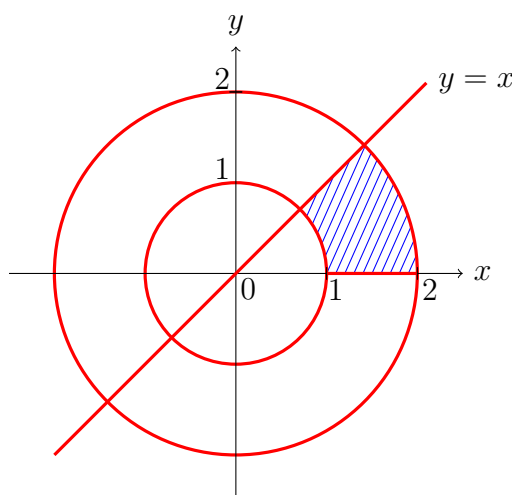
Príklad 5.4.1 Vypočítajte objem V telesa Ω ohraničeného nerovnosťami:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,$$

$$y \geq 0, y \leq x, z \geq 0.$$

Rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ určujú guľové plochy, ktorých kolmé priemety do roviny xy sú kružnice znázornené na obrázku, v ktorom vyznačená plocha znázorňuje kolmý priemet telesa do roviny xy .



Obrázok 5.4.1 Kolmý priemet telesa do roviny xy

Teleso Ω je určené nerovnosťami:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$1 \leq \rho \leq 2.$$

Objem $V(\Omega)$ telesa vypočítame pomocou vzťahu (4):

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho d\vartheta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^2 \sin \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 d\vartheta \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) d\vartheta \right) d\varphi = \frac{7}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$\frac{7}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-0 + 1) d\varphi = \frac{7}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12} \pi.$$

Príklad 5.4.2 Vypočítajte objem V telesa Ω určeného nerovnosťami:

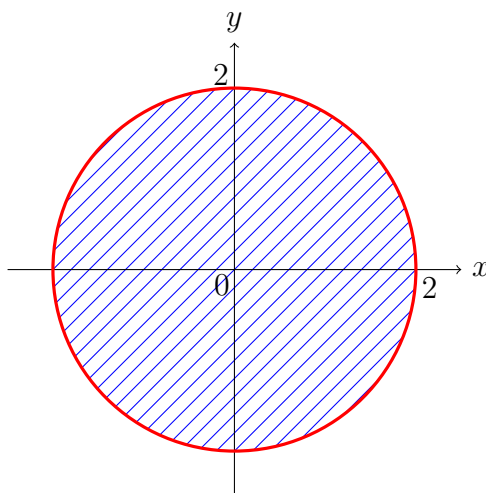
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq 4z, \\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 &\leq 4, \\ z &\geq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Prvá nerovnosť je guľa $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ so stredom $S(0, 0, 2)$ a polomerom $r = 2$, z ktorej plynie $\rho \leq 4 \cos \vartheta$.

Z rovnice kužeľovej plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ máme:

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2, \\ \rho^2 \cos^2 \vartheta &= \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta, \\ \rho^2 \cos^2 \vartheta &= \rho^2 \sin^2 \vartheta, \\ \operatorname{tg}^2 \vartheta &= 1, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= 1 \text{ (} -1 \text{ nevyhovuje)}, \\ \vartheta &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Kolmým priemetom telesa do roviny xy je kruh $x^2 + y^2 \leq 4$:



Obrázok 5.4.2 Kolmý priemet telesa do roviny xy

Teleso Ω je určené nerovnostami:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi.$$

Objem $V(\Omega)$ telesa vypočítáme pomocou vzťahu (4):

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\cos \vartheta} \rho^2 \sin \vartheta d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\cos \vartheta} d\vartheta \right) d\varphi = \frac{64}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \cos^3 \vartheta d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \cos \vartheta = t & \vartheta = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -\sin \vartheta d\vartheta = dt & \vartheta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \frac{64}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^3 dt \right) d\varphi = \frac{64}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{t^4}{4} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 d\varphi = \\ &= \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \mathbf{8\pi}. \end{aligned}$$

Riešené a neriešené príklady boli čerpané z nasledujúcich zdrojov [2], [3], [5], [7], [8], [9].

5.5 Neriešené příklady

1. Vypočítajte obsah obrazca určeného nerovnosťami:

a) $x^2 + y^2 \leq y, y \geq x, x \geq 0,$ $\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\right]$

b) $x^2 + y^2 \geq 2y, x^2 + y^2 \leq 4y, y \geq -x, y \leq \sqrt{3} \cdot x.$ $\left[\frac{1}{4}(5\pi + 6 + 3\sqrt{3})\right]$

2. Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami:

a) $x + y - z + 10 = 0, y = 2 - x, y = x, z = 0, x = 0,$ $\left[\frac{34}{3}\right]$

b) $z = 4x^2 + 4y^2, z = -2, y = x^2, y = x.$ $\left[\frac{71}{105}\right]$

3. Vypočítajte pomocou valcových súradníc objem telesa určeného nerovnosťami:

a) $z \leq 1 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 9,$ $\left[\frac{99}{2}\pi\right]$

b) $z \leq 25 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 4, y \geq 0.$ $[46\pi]$

4. Vypočítajte pomocou sférických súradníc objem telesa určeného nerovnosťami:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq x, z \geq 0,$ $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$ $[27\pi]$

ZÁVER

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvoriť zbierku riešených a neriešených príkladov z integrálneho počtu funkcií viacerých premenných. Táto zbierka by mala slúžiť študentom FAI UTB ve Zlíně ako študijná opora k predmetu Matematika 2. Celá zbierka bola písaná tak, aby pokrývala celé učivo týkajúce sa integrálneho počtu funkcií viacerých premenných v predmete Matematika 2 a tiež aby podrobne a zrozumiteľne vysvetľovala postupy použité v jednotlivých príkladoch. V každom príklade je uvedený ilustračný obrázok, ktorý by mal pomôcť pochopiť danú situáciu. Práca je písaná v systéme \LaTeX , obrázky boli vytvorené pomocou balíku maker `TikZ & PGF`. Návod na písanie textu a kreslenie obrázkov boli čerpané zo zdroja [6].

Teoretická časť obsahuje stručný prehľad základných pojmov a vzťahov, ktoré sú dôležité pre zvládnutie príkladov. Praktická časť je rozdelená na tri kapitoly - dvojný integrál, trojný integrál a vybrané aplikácie dvojných a trojných integrálov. V kapitole Dvojný integrál je na začiatku uvedené niekoľko príkladov na znázornenie množín v rovine a zápis týchto množín pomocou nerovností. Potom nasledujú príklady na výpočet dvojného integrálu najskôr v kartézskych súradniciach a potom v polárnych súradniciach, ktoré sa používajú hlavne vtedy, keď je integračnou množinou kruh alebo jeho časť. Kapitola Trojný integrál obsahuje výpočty trojných integrálov v kartézskych súradniciach, potom nasledujú transformácie do valcových súradníc, ktoré je vhodné využiť vtedy, keď integrujeme cez valec alebo jeho časť. Nakoniec sú zaradené príklady na transformácie do sférických súradníc, ktoré využívame pri integračných množinách v tvare gule alebo ich častí. Viacnásobné integrály majú bohaté využitie nielen v matematike, ale aj v technických a fyzikálnych aplikáciách. Pretože má táto zbierka slúžiť predovšetkým ako študijná opora v predmete Matematika 2, vybral som do kapitoly Vybrané aplikácie viacnásobných integrálov iba tie, ktoré sa vyskytujú práve v tomto predmete.

Verím, že táto zbierka bude pre študentov prínosom a že im pomôže k úspešnému absolvovaniu predmetu Matematika 2. Prajem im veľa úspechov nielen pri štúdiu matematiky.

CONCLUSION

The purpose of this bachelor thesis was to create a collection of solved and unsolved examples of integral calculus of functions of more variables. This collection is intended for students of Mathematics 2 course at Faculty of Applied Informatics TBU in Zlín. It was written with the view to cover the whole integral calculus of more variables of Mathematics 2 course and to explain procedures used in particular examples as well. In every example there is a picture to better illustration of a situation. The thesis is written in the typesetting program \LaTeX , a graphical package TikZ \& PGF was chosen for creating pictures.

The theoretical part contains a brief survey of the basic concepts and formulas which are necessary to manage presented examples. The practical part is divided into three parts - the double integral, the triple integral and finally some applications of double and triple integrals. In the part Double integral there are solved examples which illustrate regions in the plane and write them using inequalities. Evaluating of double integrals in cartesian and polar coordinates are presented as well. Note that polar coordinates we use in the case when the region of integration is a circle or a part of a circle. The part Triple integral solves integrals of functions of three variables in cartesian, cylindrical and spherical coordinates. Cylindrical coordinates we use namely in the situations when the region of integration is a cylinder or its part, spherical coordinates we use in the case when the region of integration is a sphere or its part.

Integrals of more variables are used not only in mathematics but also in technical and physical applications. This thesis contains namely applications appearing in Mathematics 2 course. I hope this collection will be a good and useful instrument for students to pass Mathematics 2 course. I would like to wish them good luck not only in studying mathematics.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY

- [1] THOMAS, George B. *Thomas' Calculus 11th edition*, Pearson Education. 2008. ISBN 0-321-48987-X.
- [2] MENDELSON, E. *Schaum's 3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill, 1988. ISBN 0-07-041480-7.
- [3] DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.
- [4] REKROTYS, K. *Přehled užití matematiky I.*, Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7.
- [5] PLCH, R., ŠARMANOVÁ, P. , SOJKA, P. *Integrovaný počet funkcí více proměnných, interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, MU Brno 2009. Dostupné z URL <http://is.muni.cz/el/1431/jaro2009/M2010/um/fopt.pdf>.
- [6] LOMTATIDZE, L., PLCH, R., *Sázíme v L^AT_EXu diplomovou práci z matematiky* MU Brno 2003. ISBN 80-210-3228-6
- [7] TOMICA, R. *Cvičení z matematiky II.*, Brno, VUT, 1974
- [8] *Matematika online* [online]. [cit. 2011-4-6]. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-II/sc-6-sr-1-a-25/default.aspx>.
- [9] *Matematika III* [online]. Ostrava : Evropský sociální fond, 2006 [cit. 2011-06-02]. Dostupný z WWW: http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaIII/Matematika3_obsah.pdf. ISBN 80-248-1195-2.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

\mathbb{R}	množina všetkých reálnych čísiel
\mathbb{R}^2	dvojrozmerný reálny priestor
\mathbb{R}^3	trojrozmerný reálny priestor
apod.	a podobne

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr. 1.1.1. Delenie množiny D	12
Obr. 1.1.2. Dvojný integrál na obdĺžniku	12
Obr. 1.4.1. Elementárna oblasť typu Ω_x	15
Obr. 1.4.2. Elementárna oblasť typu Ω_y	15
Obr. 1.5.1. Polárne súradnice	16
Obr. 2.1.1. Trojný integrál na kvádri G_{ijk}	18
Obr. 2.4.1. Valcové súradnice	22
Obr. 2.4.2. Sféricke súradnice	23
Obr. 3.1.1. Množina Ω pre obdĺžnik $\langle 2, 1 \rangle \times \langle 5, 3 \rangle$	26
Obr. 3.1.2. Množina Ω pre daný trojuholník	27
Obr. 3.1.3. Množina Ω pre daný trojuholník	27
Obr. 3.1.4. Množina Ω daná stranami lichobežníka	28
Obr. 3.1.5. Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2, y = 2 - x$	29
Obr. 3.1.6. Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2 + 2, y = 10 - x^2$	30
Obr. 3.1.7. Množina Ω ohraničená krivkami $x = 4 - y^2, x = y - 2$	31
Obr. 3.1.8. Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$	31
Obr. 3.1.9. Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq 0$	32
Obr. 3.1.10. Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 4 - x$	33
Obr. 3.2.1. Množina $\Omega = \langle 1, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$	34
Obr. 3.2.2. Množina $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$	35
Obr. 3.3.1. Množina Ω ohraničená krivkami $x = 4 - y^2, x = y - 2$	36
Obr. 3.3.2. Množina Ω ohraničená krivkami $xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$	37
Obr. 3.3.3. Množina Ω ohraničená krivkami $y = x^2, y = x$	38
Obr. 3.3.4. Množina Ω ohraničená krivkami $y = 1 + x^2, y = 9 - x^2$	39
Obr. 3.3.5. Množina Ω ohraničená krivkami $x = y^2, x = 2 - y$	40
Obr. 3.3.6. Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$	41
Obr. 3.3.7. Množina Ω ohraničená krivkami $x = 0, y = 1, y = 3, x = y^2$	42
Obr. 3.3.8. Množina Ω ohraničená krivkami $x = \frac{y^2}{2}, x + y = 4, x + y = 12$	43
Obr. 3.4.1. Množina Ω určená nerovnosťami $x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0$	45
Obr. 3.4.2. Množina Ω v rovine xy	46
Obr. 3.4.3. Znázornenie množiny Ω	47
Obr. 3.4.4. Znázornenie množiny Ω	48
Obr. 4.1.1. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.2	51
Obr. 4.1.2. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.3	52
Obr. 4.1.3. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.4	53
Obr. 4.1.4. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.5	54
Obr. 4.1.5. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.1.6	55

Obr. 4.2.1. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.2.1	56
Obr. 4.2.2. Premietnutie množiny Ω do roviny xy k príkladu 4.2.2	57
Obr. 4.2.3. Premietnutie valca do roviny xy	59
Obr. 4.3.1. Premietnutie gule do roviny xy	60
Obr. 4.3.2. Premietnutie guľových plôch do roviny xy	61
Obr. 4.3.3. Premietnutie množiny Ω do roviny xy	62
Obr. 5.1.1. Znázornenie obrazca Ω	65
Obr. 5.1.2. Znázornenie množiny Ω	66
Obr. 5.2.1. Priemet telesa do roviny xy	67
Obr. 5.2.2. Priemet telesa do roviny xy	68
Obr. 5.3.1. Kolmý priemet telesa do roviny xy	69
Obr. 5.3.2. Kolmý priemet telesa do roviny xy	71
Obr. 5.4.1. Kolmý priemet telesa do roviny xy	72
Obr. 5.4.2. Kolmý priemet telesa do roviny xy	73

ZOZNAM PRÍLOH

Zdrojové kódy k príkladom a grafom na CD v prílohe.