

# **Metoda přiřazení pólů v řízení lineárních spojitéch SISO systémů**

Pole placement method in control of linear continuous-time SISO systems

Bc. Zdeněk Babík

---

Diplomová práce  
2009



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
Ústav automatizace a řídicí techniky  
akademický rok: 2008/2009

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Zdeněk BABÍK**  
Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Metoda přiřazení pólů v řízení lineárních spojitých SISO systémů**

Zásady pro vypracování:

1. Uvedte principy polynomiální metody v řízení procesů.
2. Odvodte vztahy pro výpočet struktury regulátorů v 1DOF a 2DOF konfiguracích systému řízení a konfiguraci se dvěma zpětnovazebními regulátory.
3. Použijte polynomiální metodu pro řízení procesů s vlastnostmi nepříznivými z hlediska řízení a pro vybrané tvary signálů vstupujících do systému řízení (referenční signál a porucha).
4. Uvedte některé způsoby přiřazení pólů přenosu systému řízení.
5. Aplikujte polynomiální metodu při řízení systémů s dopravním zpožděním a adaptivním řízení nelineárních procesů, řízení ověřte simulacemi a porovnejte kvalitu řízení při různých způsobech přiřazení pólů.

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. KUČERA, V. Discrete linear control: The polynomial equation approach. Wiley, New York, (1980). ISBN 0471997269.
2. KUČERA, V. Diophantine equations in control — a survey. Automatica 29, 1361–1375 (1993) ISSN:0005–1098
3. KAILATH, T. Linear Systems. Prentice Hall, New Jersey (1980) ISBN 0–13–536961–4.
4. BROGAN, W.L. Modern Control Theory. Prentice Hall, New Jersey (1991) ISBN 0–13–589763–7.
5. CORRIOU, J-P. Process Control. Theory and Applications. Springer, London (2004) ISBN 1–85233–776–1.
6. ANTSAKLIS, P.J., MICHEL, A.N. Linear Systems. Birghäuser, Boston (2006) ISBN 0–8176–4434–2.
7. DOSTÁL, P., GAZDOŠ, F., BOBÁL, V. Design of controllers for processes with time delay by polynomial method. In: European Control Conference ECC2007, Kos, Greece, 2007, 4540–4545.
8. DOSTÁL, P., GAZDOŠ, F., BOBÁL, V. Design of controllers for time delay systems Part II: Integrating and unstable systems. Journal of Electrical Engineering, Vol. 59, No 1, 2008, 3–8 ISSN 1335–3632.
9. DOSTÁL, P., BOBÁL, V., GAZDOŠ, F. Adaptive control of a nonlinear process by two feedback controllers. In: 13th Mediterranean Conference on Control and Automation, Limassol, Cyprus, 2005, 946–951 ISBN 0–7803–8937–9.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Petr Dostál, CSc.**  
Ústav řízení procesů

Datum zadání diplomové práce: **27. února 2009**

Termín odevzdání diplomové práce: **20. května 2009**

Ve Zlíně dne 27. února 2009

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## **ABSTRAKT**

Cílem této diplomové práce je aplikovat metodu přiřazení pólů, která je logickým vyústěním polynomiálního přístupu, při řízení různých typů regulovaných soustav a pro různé konfigurace systémů řízení. V teoretické části jsou uvedeny postupy pro návrh regulátorů v konfiguracích 1DOF, 2DOF a se dvěma zpětnovazebními regulátory včetně odvození. Dále jsou zde uvedeny vybrané tvary charakteristického polynomu přenosu uzavřeného regulačního obvodu a postupy při výpočtu jeho parametrů v souvislosti s přiřazením jeho pólů. V praktické části jsou pak uvedeny ukázky řízení pro některé soustavy obtížně říditelné konvenčními metodami (soustavy nestabilní, integrační, neminimálně fázové, s dopravním zpožděním). V poslední části je pak ukázána aplikace polynomiálního přístupu s metodou přiřazení pólů při adaptivním řízení nelineárního spojitého SISO systému (dvojice sériově spojených kulových zásobníků).

Klíčová slova: polynomiální přístup, přiřazení pólů, polynomiální rovnice, konfigurace systému řízení.

## **ABSTRACT**

The objective of this diploma work is to apply the pole assignment (PA) method as a closely associated part of the polynomial approach in the control of various types of controlled processes and for different configurations of control systems. In the theoretical section, the controller design procedures in the 1DOF, 2DOF and two-feedback-controllers (TFC) configurations are presented inclusive of their derivation. Moreover, the selected forms of the characteristic polynomial of a closed-loop including its parameters calculation are presented in connection with its pole allocation. In the practical section, some illustrations of difficult to control by conventional methods processes (e.g. unstable, integrative, non-minimum phase and time delay processes) are exhibited. In the last section, an application of the polynomial approach with the PA method is demonstrated on an example of the adaptive control of a non-linear continuous-time SISO system (two spherical liquid tanks in series).

Keywords: polynomial approach, pole assignment, polynomial equation, control system configuration.

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své diplomové práce panu prof. Ing. Petru Dostálovi, CSc. za rady, podněty a odborné vedení, které mi poskytoval během období vzniku této práce. Rád bych také poděkoval panu Ing. Jiřímu Vojtěškovi, Ph.D. za množství odborných rad, které mi umožnily realizovat praktickou část tohoto projektu.

Nakonec bych chtěl poděkovat také rodinným příslušníkům za podporu, kterou mi poskytli, a dále za trpělivost, se kterou byli ochotni mě poslouchat.

Bez jejich přispění by tato práce nikdy nemohla vzniknout.

Motto:

„Je lepší rozsvítit, byť jen malou svíčku, než proklínat temnotu.“

Konfucius (?551 př. n. l. - ?479 př. n. l.)

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně 20.5.2009

.....  
Podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>I TEORETICKÁ ČÁST</b> .....	<b>10</b>
<b>1 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE ŘÍZENÍ A AUTOMATIZACE</b> .....	<b>11</b>
1.1 POJEM SYSTÉMU A JEHO KLASIFIKACE.....	11
1.2 ŘÍZENÍ.....	12
1.3 TYPY REGULOVANÝCH SOUSTAV.....	12
<b>2 POLYNOMIÁLNÍ METODY SYNTÉZY</b> .....	<b>14</b>
2.1 OBECNÉ POŽADAVKY NA SYSTÉM ŘÍZENÍ .....	14
2.2 1DOF KONFIGURACE SYSTÉMU ŘÍZENÍ.....	15
2.3 2DOF KONFIGURACE SYSTÉMU ŘÍZENÍ.....	19
2.4 KONFIGURACE SE DVĚMA ZPĚTNOVAZEBNÍMI REGULÁTORY (TFC).....	23
<b>3 METODA PŘÍŘAZENÍ PÓLŮ</b> .....	<b>27</b>
3.1 OBECNÉ POŽADAVKY NA CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM PŘENOSU URO.....	27
3.2 VYBRANÉ TVARY CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU PŘENOSU URO .....	27
3.3 APLIKACE TECHNIKY LQ ŘÍZENÍ.....	29
<b>4 SYSTÉMY OBTÍŽNĚ ŘIDITELNÉ KONVENČNÍMI METODAMI</b> .....	<b>33</b>
4.1 SYSTÉMY S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM.....	33
4.1.1 Zanedbání dopravního zpoždění .....	34
4.1.2 Smithův prediktor.....	35
4.1.3 Aproximace dopravního zpoždění .....	36
4.2 NESTABILNÍ SYSTÉMY .....	36
4.3 SYSTÉMY S NEMINIMÁLNÍ FÁZÍ .....	37
<b>II PRAKTICKÁ ČÁST</b> .....	<b>38</b>
<b>5 PRAKTICKÁ UKÁZKA NÁVRHU REGULÁTORŮ POLYNOMIÁLNÍ METODOU</b> .....	<b>39</b>
5.1 NÁVRH REGULÁTORU 1DOF .....	39
5.2 NÁVRH REGULÁTORU 2DOF .....	43
5.3 OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ.....	45
<b>6 UKÁZKY REGULAČNÍCH POCHODŮ</b> .....	<b>48</b>
6.1 POUŽITÉ PROGRAMOVÉ VYBAVENÍ .....	49
6.1.1 Popis jednotlivých částí programu.....	50

6.2	ŘÍZENÍ INTEGRAČNÍCH SOUSTAV .....	52
6.3	VLIV PŘÍŘAZENÍ PÓLŮ NA PRŮBĚH REGULAČNÍHO POCHODU .....	61
6.4	ŘÍZENÍ PROCESŮ S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM .....	64
6.5	REGULAČNÍ POCHODY PRO NESTANDARDNÍ VSTUPNÍ SIGNÁLY .....	71
<b>7</b>	<b>ADAPTIVNÍ METODY PŘI ŘÍZENÍ NELINEÁRNÍCH PROCESŮ.....</b>	<b>73</b>
7.1	EXTERNÍ LINEÁRNÍ $\delta$ -MODEL ŘÍZENÉHO PROCESU .....	74
7.2	DELTA MODEL PROCESU .....	74
7.3	NELINEÁRNÍ PROCES – DVOJICE KULOVÝCH ZÁSOBNÍKŮ .....	76
7.4	PRŮBĚHY REGULACE PRO MODEL DVOJICE KULOVÝCH ZÁSOBNÍKŮ .....	82
	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>89</b>
	<b>ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ.....</b>	<b>90</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>91</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....</b>	<b>93</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>94</b>
	<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>96</b>



## ÚVOD

První pokusy o nahrazení člověka strojem v procesu řízení spadají do období počátku průmyslové revoluce na přelomu 18. a 19. století, kdy se objevily první mechanické regulátory. Jednalo se především o Wattův odstředivý regulátor (1784) a dále Polzunovův regulátor výšky hladiny (1765). V průběhu 19. století se problematika řízení dostává do oblasti zájmu vědecké obce a stále více se matematizuje, a to zejména díky E. J. Routhovi (1831-1907), A. Hurwitzovi (1858-1919) a A. M. Ljapunovovi (1857-1918), který se zasloužil o vypracování obecné teorie stability. Vlastní realizace regulátorů však zůstává založena výhradně na mechanických principech.

Teprve v první polovině 20. století však nastává skutečný rozvoj automatického řízení. Objevují se jednak první efektivní metody pro nastavení regulátorů (H. Nyquist a H. W. Bode) a také dochází k rychlému vývoji v oblasti elektrotechniky – což se projevuje především na konstrukci řídicích, měřicích a akčních členů, které mohou být menší, rychlejší a především výrazně spolehlivější.

Po 2. světové válce se tento trend mnohonásobně zrychlil a řídicí systémy se stávají součástí nejen průmyslových podniků, ale také strategických zbraní, navigačních systémů letadel a kosmických raket. Objevují se zcela nové přístupy – jako například optimální řízení, principy adaptivního a prediktivního řízení, apod..

V dnešní době jsme svědky procesu, kdy se integrují dva původně zcela samostatné obory – informatika a automatizace. Díky tomu se dnes mohou v praxi uplatnit také metody, které byly dříve pouze předmětem akademických úvah, protože v praxi chyběly prostředky, jak je realizovat. Regulátor tak může být realizován pouze jako algoritmus uvnitř počítače a mohou tak být prováděny i výpočetně velmi náročné metody regulace.

Jednou z těchto metod je i polynomiální metoda syntézy, která představuje moderní princip, jak regulovat také soustavy, které jsou běžnými metodami regulovatelné jen obtížně nebo vůbec. Polynomiální metoda přímo vede k úloze přiřazení pólů přenosu ÚRO. Výhoda těchto postupů se ještě znásobí, pokud je propojíme s dalšími poznatky např. z teorie LQ řízení, adaptivního a prediktivního řízení, atd.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s postupy, používanými při návrhu regulátorů, získaných na základě polynomiálního přístupu a metody přiřazení pólů a ukázat výsledky řízení při jejich aplikacích.

## I. TEORETICKÁ ČÁST

# 1 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE ŘÍZENÍ A AUTOMATIZACE

## 1.1 Pojem systému a jeho klasifikace

Jedním ze základních pojmů z teorie řízení je pojem systém. Systém představuje abstraktní pojem, jehož úplná definice je značně obecná a komplikovaná. Pro běžné účely automatizace však postačí následující definice. Systém představuje množinu:

$$S = \{P, R, U, Y\} \quad (1)$$

kde: P jsou prvky systému, R relace mezi prvky systému, U vstupní veličiny systému a Y výstupní veličiny systému [1].

Relace mezi prvky systému jsou zpravidla formulovány pomocí matematických rovnic.

Z hlediska relací můžeme systémy klasifikovat podle následujícího rozdělení:

- statické x dynamické
- deterministické x stochastické
- lineární x nelineární
- t-variantní (nestacionární) x t-invariantní (stacionární)
- jednorozměrné x vícerozměrné

Z hlediska teorie řízení rozdělujeme vstupní veličiny systému do tří skupin:

- akční veličiny (lze je vědomě ovlivňovat)
- měřitelné poruchy
- neměřitelné poruchy

Výstupní veličiny systému můžeme rozdělit obdobně a to na:

- měřitelné
- neměřitelné

## 1.2 Řízení

Úlohou řízení rozumíme cílevědomé generování akční veličiny tak, aby se výstupní veličina chovala podle předem zadaného cíle. Tento cíl je obvykle určen velikostí, resp. průběhem žádané (referenční) veličiny.

Úlohu řízení můžeme rozdělit podle několika hledisek. Mezi ty nejdůležitější patří:

- Podle toho zda je akční veličina funkcí pouze žádané veličiny nebo také výstupní veličiny.
- Kdo nebo co akční veličinu generuje.

V případě, že je akční veličina generována bez znalosti výstupní veličiny, jedná se o přímovazební řízení (ovládání). Pro účely řízení má však zásadní význam zpětnovazební řízení neboli regulace. Při regulaci je akční veličina generována jako funkce výstupní a žádané veličiny.

Podle generátoru akční veličiny můžeme řízení rozdělit na dva základní typy:

- **ruční řízení** - generátorem akčního zásahu je člověk, byť zpravidla pouze nepřímou (např. ovládání přítoku kapaliny do zásobníku prostřednictvím ručně ovládaného ventilu)
- **automatické řízení** (generátorem akčního zásahu je zařízení nazývané regulátor, které je schopné samostatné činnosti bez přímého zásahu člověka)

Je zřejmé, že v dnešní době je pozornost zaměřena téměř výhradně na automatické řízení, přesto však nelze zcela opomenout ani ruční řízení. Je to dáno tím, že se s ručním řízením setkáváme prakticky každý den, byť si to často ani neuvědomujeme. Jako příklad ruční regulace velmi dobře poslouží například napouštění konvice vodou.

## 1.3 Typy regulovaných soustav

Pod pojmem regulovaná soustava se rozumí zařízení, na kterém provádíme regulaci. Abychom mohli regulaci provádět, musíme zvolit typ regulátoru vhodného pro danou soustavu a následně nastavit parametry popř. jeho strukturu. K tomu musíme znát dynamické parametry soustavy. Ty jsou dány především konstrukcí zařízení a často nemusí být vhodné pro regulaci.

Nejjednodušší způsob, jak zjistit dynamické vlastnosti soustavy, je získat (změřit) její *přechodovou charakteristiku*. V případech, kdy přechodovou charakteristiku nelze získat, můžeme použít *frekvenční charakteristiku*, i když její získání je mnohem náročnější a je vhodná spíše pro elektronická zařízení.

K získání přechodové charakteristiky regulované soustavy se využívá skoková změna akční veličiny tzv. *jednotkový skok*. Odezva soustavy se sleduje a z takto získané přechodové charakteristiky lze určit veličiny charakterizující dynamické vlastnosti regulované soustavy. Znalost charakteristických veličin regulované soustavy využíváme pro volbu regulátoru i pro jeho seřízení.

Na základě stability přenosu a podle průběhu odezvy výstupní veličiny na změnu vstupního signálu můžeme soustavy rozdělit do následujících skupin podle:

1. stability jmenovatele
  - a) stabilní
  - b) na mezi stability
  - c) nestabilní
2. stability čitatele
  - a) minimálně fázové
  - b) neminimálně fázové
3. periodicity průběhu výstupního signálu
  - a) periodické
  - b) aperiodické
4. dopravního zpoždění
  - a) bez dopravního zpoždění
  - b) s dopravním zpožděním

Jednotlivé vlastnosti regulovaných soustav budou blíže popsány ve 4. kapitole, kde bude věnována zvláštní pozornost především těm vlastnostem, které způsobují problémy při zpětnovazebním řízení (regulaci).

## 2 POLYNOMIÁLNÍ METODY SYNTÉZY

### 2.1 Obecné požadavky na systém řízení

Polynomiální metody syntézy představují moderní způsob návrhu regulátoru, který se svým pojetím značně odlišuje od konvenčních metod syntézy (např. Ziegler-Nicholsova, Naslinova, Whiteleyho aj.). Při použití konvenčních metod zpravidla nejprve určíme konkrétní typ regulátoru (P, PI, PID) a poté podle pravidel zvolené metody vypočítáme jeho parametry. Vztahy pro výpočet parametrů jsou někdy dány tabelárně, což neumožňuje aplikaci příslušné metody při počítačovém zpracování např. při adaptivním řízení.

Při použití polynomiální metody syntézy však určujeme kromě vztahů pro výpočet parametrů regulátoru také jeho strukturu. Právě díky tomu jsme schopni relativně snadno navrhnout regulátor i pro řízení systémů nestabilních, s neminimální fází, dopravním zpožděním, popř. pro vstupní signály (žádaná hodnota a porucha) jiné než skokové funkce (rampa, harmonický signál, apod.).[3]

Postup při aplikaci polynomiální metody syntézy vychází ze základních požadavků na systém řízení. Tyto požadavky mohou být formulovány následovně:

- a) Stabilita systému řízení.
- b) Vnitřní ryzost systému řízení (přenosy všech jeho prvků musí být ryzí, tzn., že metoda poskytuje pouze fyzikálně realizovatelné regulátory).
- c) Asymptotické sledování referenčního signálu (žádané hodnoty výstupu)
- d) Úplná kompenzace poruchy vstupující do systému řízení.

Výchozí myšlenkou polynomiálních metod syntézy je řešení tzv. polynomiálních (diofantických) rovnic. Jejich řešením lze získat regulátor, který regulační obvod nejen stabilizuje, ale umožňuje splnění i některých dalších požadavků kladených na systém řízení. Podrobnější informace k diofantickým rovnicím a jejich využití při řízení lineárních systémů lze nalézt např. v [9], [12], [13], [14].

Na rozdíl od tzv. zlomkového přístupu, chápeme při polynomiální metodě syntézy přenosy jednotlivých prvků v systému řízení (regulačním obvodu) jako podíly polynomů, resp. racionální funkce.

V dalších částech práce bude přenos akční veličiny v regulované soustavě vždy uvažován ve tvaru:

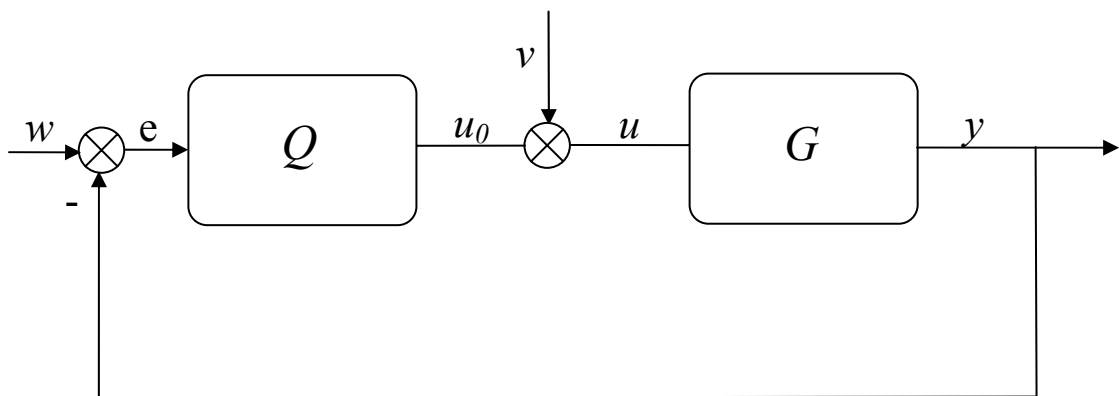
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (2)$$

kde  $a(s)$  a  $b(s)$  představují polynomy v  $s$ . Předpokládáme, že polynomy  $a(s)$  a  $b(s)$  jsou nesoudělné a je splněna podmínka ryzosti přenosu (2):

$$\deg b(s) \leq \deg a(s) \quad (3)$$

## 2.2 1DOF konfigurace systému řízení

Označení této konfigurace vzniklo z anglického *one degree of freedom* (jeden stupeň volnosti). Konfigurace vychází z klasické regulační smyčky se zpětnovazebním regulátorem. Schéma je na Obr. 1.



Obr. 1 – 1DOF konfigurace systému řízení

Přenosy v regulačním obvodu

$G$  – vstupně-výstupní lineární model řízeného procesu

$Q$  – zpětnovazební regulátor

Signály působící v regulačním obvodu

$w$  – žádaná hodnota

$v$  – porucha působící na vstupu regulované soustavy

$e$  – regulační odchylka

$u_0$  – akční zásah na výstupu regulátoru

$y$  – výstupní signál

$u$  – akční zásah působící na vstupu soustavy

Přenos regulátoru uvažujeme ve tvaru podílu nesoudělných polynomů  $q$  a  $p$ :

$$Q(s) = \frac{U_0(s)}{E(s)} = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (4)$$

s podmínkou ryzosti (fyzikální realizovatelnosti regulátoru):

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (5)$$

Obrazy obou vstupních signálů (referenčního signálu a poruchy) můžeme rovněž chápat jako podíly polynomů ve tvaru:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)}, \quad V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (6)$$

Pro obrazy řízeného výstupu a akčního vstupu platí:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot [U_0(s) + V(s)] = \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U_0(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot V(s) \quad (7)$$

$$U(s) = Q(s) \cdot E(s) + V(s) = Q(s) \cdot [W(s) - Y(s)] + V(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \cdot [W(s) - Y(s)] + V(s) \quad (8)$$

Po úpravách rovnic (7), (8) nyní můžeme pro základní signály v regulačním obvodu odvodit následující vztahy (v zájmu zkrácení zápisu bude v některých dalších vztazích u polynomů argument  $s$  vynechán a bude zachován pouze u obrazů signálů):

$$Y(s) = \frac{b}{d} \cdot [qW(s) + pV(s)] \quad (9)$$

$$E(s) = \frac{p}{d} \cdot [aW(s) - bV(s)] \quad (10)$$

$$U_0(s) = \frac{q}{d} \cdot [aW(s) - bV(s)] \quad (11)$$

kde  $d$  představuje charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu:

$$d = ap + bq \quad (12)$$

Parametry polynomu  $d$  v sobě obsahují známé parametry polynomů  $a$ ,  $b$  z přenosu řízeného systému a prozatím neznámé parametry polynomů  $q$ ,  $p$  z přenosu regulátoru.

Nyní můžeme definovat podmínku vnitřní stability uzavřeného regulačního obvodu:



System řízení (regulační obvod) je stabilní tehdy, jestliže polynomy  $q$  a  $p$  v přenosu zpětnovazebního regulátoru (4) jsou řešeními polynomiální (diofantické) rovnice:

$$a(s) \cdot p(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (13)$$

se stabilním polynomem  $d(s)$  na pravé straně.

Rovnicí (13) je zajištěna první ze základních podmínek kladených na systém řízení. Podmínka vnitřní ryzosti systému řízení je splněna nerovnostmi (5). Tyto nerovnosti později využijeme při určení stupňů neznámých polynomů v rovnici (13).

Nyní se budeme zabývat podmínkou asymptotického sledování žádané hodnoty a kompenzací poruchy.

Do obrazu regulační odchylky (10) dosadíme vztahy (6) a dostaneme:

$$E(s) = \frac{p}{d} \cdot \left[ a \cdot \frac{h_w(s)}{f_w(s)} + b \cdot \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \right] \quad (14)$$

Aby byly splněny požadavky asymptotického sledování a kompenzace poruchy, je nutné, aby trvalá regulační odchylka byla nulová, tj. aby platilo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (15)$$

resp. po Laplaceově transformaci musí platit:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = 0 \quad (16)$$

Je zřejmé, že podmínka (16) bude splněna, jestliže se podaří odstranit oba jmenovatele  $f_w(s)$  a  $f_v(s)$  z obrazu (14). Za předpokladu, že polynomy  $f_w(s)$  a  $a(s)$ ,  $f_v(s)$  a  $b(s)$  jsou nesoudělné, budou  $f_w(s)$  a  $f_v(s)$  odstraněny, jestliže polynom  $p(s)$  bude současně dělitelný oběma těmito polynomy. To bude splněno tehdy, jestliže bude existovat polynom  $f(s)$  jako jejich nejmenší společný násobek a pro polynom  $p(s)$  bude platit:

$$p(s) = f(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (17)$$

Dosazením vztahu (17) do rovnice (13) dostaneme polynomiální rovnici ve tvaru:

$$a(s) \cdot f(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (18)$$

Ve vztahu (18) jsou stupně polynomů  $\tilde{p}(s)$  a  $q(s)$ , které prozatím neznáme. Pro jejich získání vycházíme z úvahy o řešitelnosti polynomiálních rovnic metodou neurčitých koeficientů.

Stupeň polynomiální rovnice (18) a tedy i stupeň polynomu  $d(s)$  je dán vyšším ze stupňů obou členů levé strany této rovnice. Z podmínky ryzosti (5) vždy platí, že  $\deg(af\tilde{p}) > \deg(bq)$ . Z toho následně plyne, že také platí:

$$\deg(d) = \deg(af\tilde{p}) = \deg(a) + \deg(f) + \deg(\tilde{p}) \quad (19)$$

Dále je známo, že každý polynom stupně  $m$  má  $m + 1$  koeficientů a polynomiální rovnice stupně  $n$  poskytuje pro porovnání koeficientů při stejných mocninách  $s^{n+1}$  rovnic (prostý člen je u  $s_0$ ).

To znamená, že polynomy  $\tilde{p}(s)$  a  $q(s)$  mají  $\deg(\tilde{p})+1$  a  $\deg(q)+1$  neznámých koeficientů a celkový počet neznámých koeficientů v obou polynomech je tedy:

$$PN = \deg(\tilde{p}) + \deg(q) + 2 \quad (20)$$

Počet rovnic pro porovnání koeficientů na levé a pravé straně polynomiální rovnice (18) je:

$$PR = \deg(d) + 1 = \deg(a) + \deg(f) + \deg(\tilde{p}) + 1 \quad (21)$$

Protože počet neznámých a počet rovnic musí být stejný, dostaneme porovnáním (20) a (21) (tedy  $PR=PN$ ):

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f) - 1 \quad (22)$$

Při určování stupně polynomu  $\tilde{p}$  vycházíme z podmínky fyzikální realizovatelnosti regulátoru (4). Dosazením (26) do (4) a následnou úpravou tak získáme:

$$\deg(\tilde{p}) \geq \deg(a) - 1 \quad (23)$$

Stupeň pravé strany polynomiální rovnice získáme dosazením (23) do (21):

$$\deg(d) \geq 2\deg(a) + \deg(f) - 1 \quad (24)$$

Pozn.: Pokud v rovnicích (23) a (24) uvažujeme rovnost, získáme nestriktně ryzí regulátor, pokud budeme uvažovat nerovnost, získáme striktně ryzí regulátor.

Pozn.: V uvedeném textu byl regulátor odvozen pro poruchovou veličinu, která se pouze „přičítá“ k vypočtenému akčnímu zásahu regulátoru. Existují však další možnosti, jak lze poruchovou veličinu do soustavy zavést (lze ji např. připočítávat k výstupu, apod.).

Poměrně často uváděnou možností je postup, kdy skokovou poruchu necháme působit na přenos ve tvaru:

$$G_V(s) = \frac{Y_V(s)}{V(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} \quad (25)$$

kde  $a(s)$  a  $c(s)$  představují polynomy v  $s$ . Předpokládáme, že polynomy  $a(s)$  a  $c(s)$  jsou nesoudělné a splňují podmínku ryzosti:

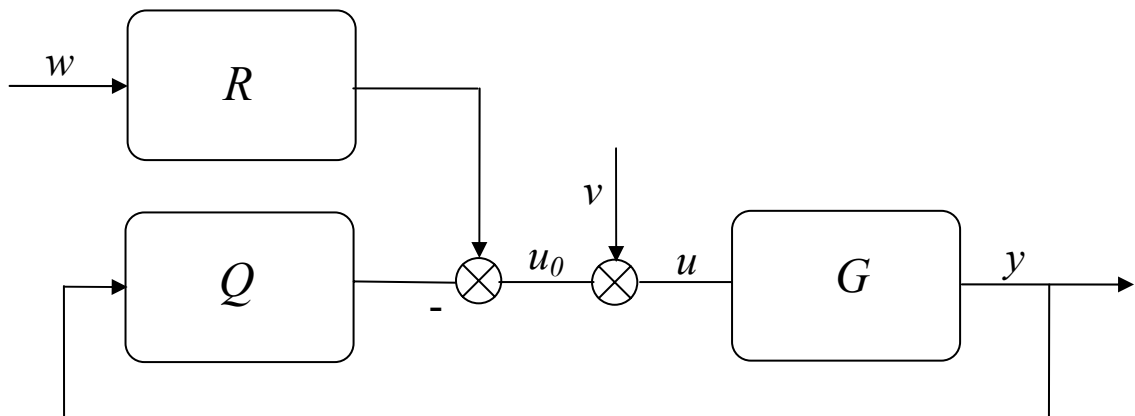
$$\deg c(s) \leq \deg a(s) \quad (26)$$

a takto získaný signál připočítáváme k výstupu soustavy.

Uvedená metoda má však ten nedostatek, že ji lze používat pouze pro stabilní soustavy. Pokud totiž regulujeme nestabilní soustavu (tj. polynom  $a(s)$  je nestabilní), zjistíme, že vliv poruchové veličiny nelze eliminovat a regulační pochod bude nestabilní. Důvodem je, že přenos  $G_V(s)$  není v uzavřené regulační smyčce a tudíž jeho výstupní signál trvale narůstá a může teoreticky dosahovat až nekonečných hodnot.

### 2.3 2DOF konfigurace systému řízení

Označení této konfigurace vzniklo z anglického *two degree of freedom* (dva stupně volnosti). Při této konfiguraci regulátor obsahuje vedle zpětnovazební části  $Q$  také přímo-vazební část  $R$ . Schéma je na Obr. 2.



Obr. 2 – 2DOF konfigurace systému řízení

Signály působící v regulačním obvodu:

Význam symbolů v regulačním obvodu 2DOF znázorněném na Obr. 2 odpovídá značení použitému v kapitole 2.2.

Přenosy obou částí regulátoru předpokládáme ve tvaru podílu nesoudělných polynomů  $q$ ,  $p$  a  $r$ ,  $p$ :

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (27)$$

Podmínka ryzosti (fyzikální realizovatelnosti regulátoru) zde musí být splněna nejen pro zpětnovazební část regulátoru, ale i pro přímovazební část regulátoru, takže platí:

$$\deg q(s) \leq \deg p(s) \quad (28)$$

$$\deg r(s) \leq \deg p(s) \quad (29)$$

Obrazy obou vstupních signálů (referenčního signálu a poruchy) můžeme rovněž chápat jako podíly polynomů ve tvaru (6).

Pro obrazy řízeného výstupu a akčního vstupu platí:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot [U_0(s) + V(s)] = \frac{b(s)}{a(s)} \cdot U_0(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot V(s) \quad (30)$$

$$U(s) = R(s) \cdot W(s) - Q(s) \cdot Y(s) + V(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \cdot W(s) - \frac{q(s)}{p(s)} \cdot Y(s) + V(s) \quad (31)$$

Pro základní signály v regulačním obvodu nyní platí:

$$Y(s) = \frac{b}{d} \cdot [rW(s) + pV(s)] \quad (32)$$

$$E(s) = \frac{1}{d} \cdot [(d - br)W(s) - bpV(s)] \quad (33)$$

$$U_0(s) = \frac{1}{d} \cdot [arW(s) + qbV(s)] \quad (34)$$

kde  $d$  představuje charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu:

$$d = ap + bq \quad (35)$$

Do obrazu regulační odchylky (33) dosadíme obrazy vstupních signálů (6) a dostaneme:

$$E(s) = \frac{1}{d} \cdot \left[ (d - br) \frac{h_w(s)}{f_w(s)} - bp \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \right] \quad (36)$$

Postačující podmínkou asymptotického sledování je, aby polynom  $f_w$  dělil polynom  $(d - br)$ , což bude splněno, jestliže bude platit:

$$(d - br) = tf_w \quad (37)$$

kde  $t$  představuje prozatím neznámý polynom.

Postačující podmínkou pro úplnou kompenzaci poruchy je, aby polynom  $f_v$  dělil polynom  $p$ , který tak musí být ve tvaru:

$$p(s) = f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (38)$$

Výsledný regulátor je tedy dán řešením dvojice polynomiálních rovnic, které získáme dosazením (38) do (35) a úpravou (37):

$$a(s) \cdot f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (39)$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s) \quad (40)$$

Polynom  $t$  je nutný pro řešení rovnice (40), do přenosu regulátoru však nevstupuje.

Neznámé stupně polynomů v rovnicích (39), (40) odvodíme podobně jako pro 1DOF konfiguraci systému řízení. Stupeň rovnice (39) a (40) je tedy roven:

$$\deg(d) = \deg(af_v \tilde{p}) = \deg(a) + \deg(f_v) + \deg(\tilde{p}) \quad (41)$$

Počet neznámých koeficientů v rovnici (39) je:

$$PN1 = \deg(\tilde{p}) + \deg(q) + 2 \quad (42)$$

Počet rovnic pro porovnání koeficientů na levé a pravé straně polynomiální rovnice (39) je:

$$PR1 = \deg(d) + 1 = \deg(a) + \deg(f_v) + \deg(\tilde{p}) + 1 \quad (43)$$

Protože musí platit, že  $PN1=PR1$ , můžeme úpravou vztahů (42) a (43) určit stupeň polynomu  $q(s)$ :

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f_v) - 1 \quad (44)$$

Z nerovnosti (28), po dosazení (38) a úpravě získáme  $\deg(\tilde{p}) \geq \deg(a) - 1$ . Tento vztah můžeme dále upravit tak, že zavedeme  $k=0,1,2,\dots$  a vztah přepíšeme do tvaru:

$$\deg(\tilde{p}) = \deg(a) - 1 + k \quad (45)$$

Pro stupeň pravé strany (tj. pro stupeň obou polynomiálních rovnic) pak bude platit:

$$\deg(d) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - 1 + k \quad (46)$$

Při uvažování podmínek ryzosti v rovnici (40) vždy platí  $\deg(br) \leq \deg(d)$  a stupeň polynomu  $d(s)$  tedy musí odpovídat stupni prvního členu levé strany. Můžeme tedy psát:

$$\deg(d) = \deg(t) + \deg(f_w) \quad (47)$$

Neznámé jsou všechny koeficienty polynomů  $t(s)$  a  $r(s)$ . Počet těchto neznámých koeficientů v rovnici (40) je tedy:

$$PN2 = \deg(t) + \deg(r) + 2 \quad (48)$$

Počet rovnic nutných pro jejich výpočet je tedy:

$$PR2 = \deg(d) + 1 = \deg(t) + \deg(r) + 1 \quad (49)$$

Z rovnosti  $PN2=PR2$  můžeme tedy určit, že stupeň  $r(s)$  je roven:

$$\deg(r) = \deg(f_w) - 1 \quad (50)$$

Pro určení čísla  $k$ , které se vyskytuje ve vztazích (45) a (46), použijeme podmínku ryzosti (28), do které dosadíme (50), (39) a (45). Následnou úpravou získáme vztah:

$$k \geq \deg(f_w) - \deg(f_v) - \deg(a) \quad (51)$$

Při návrhu regulátoru musí vždy platit  $k \geq 0$ . Můžeme tedy postupovat tak, že vypočítáme číslo  $k_0$  jako:

$$k_0 = \deg(f_w) - \deg(f_v) - \deg(a) \quad (52)$$

Pro číslo  $k$  dosazované do vztahů (45) a (46) pak platí:

$$k \geq 0 \text{ pro } k_0 \leq 0 \quad (53)$$

$$k \geq k_0 \text{ pro } k_0 > 0 \quad (54)$$

Nakonec určíme stupeň polynomu  $t(s)$  jako:

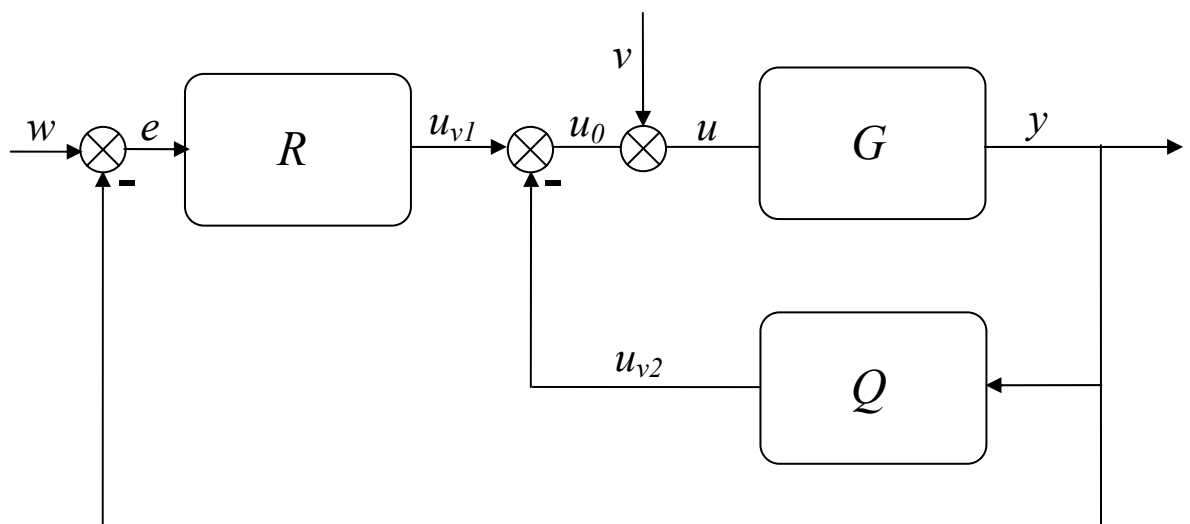
$$\deg(t) = \deg(d) - \deg(f_w) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - \deg(f_w) - 1 + k \quad (55)$$

Opět vidíme, že odvozené vztahy pro výpočet stupňů polynomů v přenosech regulátorů umožňují velmi rychlé určení jeho struktury. Nestriktní nebo striktní ryzost regulátoru závisí na rovnosti nebo ostré nerovnosti v rovnicích (53) a (54).

Pozn.: Při návrhu regulátoru 2DOF je třeba věnovat značnou pozornost stabilitě regulátoru. Zatímco u konfigurace 1DOF platí, že i nestabilní regulátor může regulační pochod stabilizovat, u konfigurace 2DOF toto možné není a nestabilní regulátor vede vždy k nestabilnímu regulačnímu pochodu.

## 2.4 Konfigurace se dvěma zpětnovazebními regulátory (TFC)

Tato konfigurace obsahuje dva zpětnovazební regulátory, ve vnitřní smyčce regulátor  $Q$  a ve vnější smyčce regulátor  $R$ .



Obr. 3 – Regulační obvod se dvěma zpětnovazebními regulátory

Signály působící v regulačním obvodu

$u_{v1}$  – akční zásah regulátoru R

$u_{v2}$  – akční zásah regulátoru Q

Význam ostatních symbolů v regulačním obvodu znázorněném na Obr. 3 odpovídá značení použitému v kapitole 2.2.

Přenosové funkce obou zpětnovazebních regulátorů uvažujeme ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{\tilde{q}(s)}{\tilde{p}(s)} \quad (56)$$

$$R(s) = \frac{r(s)}{\tilde{p}(s)} \quad (57)$$

kde  $\tilde{q}(s)$ ,  $r(s)$  a  $\tilde{p}(s)$  představují nesoudělné polynomy vyjádřené pomocí komplexní proměnné  $s$ .

V tomto případě jsou oba vstupní signály  $w$  a  $v$  (žádaná hodnota a porucha) uvažovány pouze jako skokové funkce s obrazy:

$$W(s) = \frac{w_0}{s} \quad (58)$$

$$V(s) = \frac{v_0}{s} \quad (59)$$

Pro výstupní signál a poruchu lze odvodit (argument  $s$  je u jednotlivých polynomů pro přehlednost vynechán):

$$Y(s) = \frac{b}{d} \cdot [rW(s) + \tilde{p}V(s)] \quad (60)$$

$$E(s) = \frac{1}{d} \cdot [(a\tilde{p} + b\tilde{q})W(s) - b\tilde{p}V(s)] \quad (61)$$

kde:

$$d(s) = a(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot (r(s) + \tilde{q}(s)) \quad (62)$$

kde  $d(s)$  představuje charakteristický polynom s kořeny, které představují póly uzavřeného regulačního obvodu.

Nyní zvolíme polynom  $t(s)$  tak, že bude platit:

$$t(s) = r(s) + \tilde{q}(s) \quad (63)$$



Polynom  $t(s)$  poté dosadíme do rovnice (62). Podmínka stability bude splněna, pokud polynomy  $\tilde{p}(s)$  a  $t(s)$  budou dány řešením diofantické rovnice:

$$a(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot t(s) = d(s) \quad (64)$$

se stabilním polynomem  $d(s)$  na pravé straně.

Pro skokové vstupní signály bude asymptotické sledování referenčního signálu a odstranění poruchy zaručeno, pokud budou obě podmínky  $a\tilde{p} + b\tilde{q}$  a  $\tilde{p}$  obsahovat  $s$ .

Tyto podmínky budou splněny, jestliže polynomy  $\tilde{p}$  a  $\tilde{q}$  budou ve tvaru:

$$\tilde{p} = s \cdot p(s) \quad (65)$$

$$\tilde{q} = s \cdot q(s) \quad (66)$$

Přenosové funkce regulátorů potom můžeme uvažovat ve tvaru :

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (67)$$

$$R(s) = \frac{r(s)}{s \cdot p(s)} \quad (68)$$

Stabilní polynom  $p(s)$  ve jmenovateli zajišťuje stabilitu regulátorů.

Aby byla splněna podmínka vnitřní ryzosti řídicího systému, musí stupně polynomů  $q(s)$  a  $r(s)$  splňovat následující nerovnosti:

$$\deg q \leq \deg p \quad (69)$$

$$\deg r \leq \deg p + 1 \quad (70)$$

Nyní polynom  $t(s)$  přepíšeme do tvaru:

$$t(s) = r(s) + s \cdot q(s) \quad (71)$$

Pokud vezmeme do úvahy řešitelnost (64) a podmínky (69) a (70), mohou být stupně jednotlivých polynomů jednoduše určeny jako:

$$\deg t = \deg r = \deg a \quad (72)$$

$$\deg q = \deg a - 1 \quad (73)$$

$$\deg p \geq \deg a - 1 \quad (74)$$

$$\deg d \geq 2 \deg a \quad (75)$$

Pokud označíme  $\deg a = n$ , potom polynomy  $t$ ,  $r$  a  $q$  jsou ve tvaru:

$$t(s) = \sum_{i=0}^n t_i s^i \quad (76)$$

$$r(s) = \sum_{i=0}^n r_i s^i \quad (77)$$

$$q(s) = \sum_{i=1}^n q_i s^{i-1} \quad (78)$$

kde koeficienty  $r_i$ ,  $q_i$  a  $t_i$  splňují podmínky:

$$r_0 = t_0 \quad (79)$$

$$r_i + q_i = t_i \text{ pro } i = 1, \dots, n \quad (80)$$

Neznámé koeficienty  $r_i$  a  $q_i$  mohou být získány pomocí volitelných koeficientů  $\beta_i \in \langle 0,1 \rangle$  tak, aby platilo:

$$r_i = \beta_i \cdot t_i \quad (81)$$

$$q_i = (1 - \beta_i) \cdot t_i \text{ pro } i = 1, \dots, n \quad (82)$$

Koeficienty  $\beta_i$  rozdělují váhu mezi čitateli přenosových funkcí  $Q$  a  $R$ . Na základě rozboru  $Y(s)$  lze předpokládat, že se zvyšující se hodnotou  $\beta_i$  se zrychluje reakce na skokovou změnu. [2]

Pozn. Pokud  $\beta_i = 1$  pro všechna  $i$ , degraduje se uvedené zapojení na 1DOF konfiguraci systému řízení.

Pokud  $\beta_i = 0$  pro všechna  $i$  a referenční signál i porucha jsou skokové funkce, potom řídicí systém odpovídá 2DOF konfiguraci systému řízení.

### 3 METODA PŘÍŘAZENÍ PÓLŮ

Jak bylo uvedeno v předcházejících kapitolách, hlavní podmínkou, kterou musíme při volbě charakteristického polynomu uzavřeného regulačního obvodu  $d(s)$  dodržet, je jeho stabilita. Ovšem vhodnou volbou pólů tohoto polynomu můžeme ovlivnit také průběh a kvalitu celého regulačního pochodu.

Obecně lze konstatovat, že volba polynomu  $d(s)$  představuje nejnáročnější část polynomiálního návrhu regulátoru. V následujících kapitolách budou uvedeny některé z nejpoužívanějších metod přiřazení pólů.

#### 3.1 Obecné požadavky na charakteristický polynom přenosu URO

Polynom  $d(s)$  můžeme obecně zapsat ve tvaru :

$$d(s) = \prod_{i=1}^{\deg d} (s - s_i) \quad (83)$$

kde  $s_i = \alpha_i + j\beta_i$ . Polynom  $d(s)$  je potom stabilní, jestliže reálné složky jsou záporné, tj. jestliže  $\text{Re}[s_i] = \alpha_i < 0$  pro  $i = 1, \dots, \deg d$ .

Pro volbu pólů potom budou platit následující obecné podmínky:

- Jestliže budou všechny póly reálné ( $\beta_i = 0$ ), bude výsledný pochod aperiodický
- Pokud bude mezi póly alespoň jedna dvojice pólů komplexně sdružených, bude výsledný pochod kmitavý.
- Rychlost regulačního pochodu ovlivňuje velikost reálných složek pólů. Čím budou vzdálenější od nuly (v záporném smyslu), tím bude regulační pochod rychlejší, ovšem s vyššími nároky na akční veličinu.

#### 3.2 Vybrané tvary charakteristického polynomu přenosu URO

Pravděpodobně nejjednodušším předpisem pro určení  $d(s)$  je volba vícenásobného reálného pólu ve tvaru:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} \quad (84)$$

kde:  $\alpha > 0$ .

Pokud volíme vícenásobné reálné kořeny polynomu  $d(s)$ , zjednoduší se nám sice výpočet regulátoru, ale získaný regulační pochod nemusí mít nejvhodnější průběh. Velmi častým problémem jsou neúměrně velké akční zásahy na počátku regulace.

Jako poměrně vhodná se jeví volba, kdy část pólů přenosu uzavřeného regulačního obvodu souvisí s parametry přenosu řízeného systému. Parametry regulátoru tak mohou být nastavovány pomocí jediného volitelného parametru.

Nejjednodušší metodou je rozdělení  $d(s)$  na dvojici polynomů podle předpisu:

$$d(s) = m(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg m} \quad (85)$$

kde  $m(s)$  představuje:

- Pro stabilní nekmitavý regulační pochod

$$m(s) = a(s) \quad (86)$$

- Pro nestabilní nekmitavý regulační pochod

$$m(s) = n(s) \quad (87)$$

kde  $n(s)$  je výsledkem spektrální faktorizace polynomu  $a(s)$ :

$$n^*(s)n(s) = a^*(s)a(s) \quad (88)$$

Např.: pro nestabilní polynom  $a(s) = s^2 + a_1s + a_0$  je postup při spektrální faktorizaci (88) následující:

$$a^*(s)a(s) = (s^2 - a_1s + a_0)(s^2 + a_1s + a_0) = s^4 - (a_1^2 - 2a_0)s^2 + a_0^2 \quad (89)$$

Po zavedení polynomu  $n(s) = s^2 + n_1s + n_0$  podobně získáme:

$$n^*(s)n(s) = (s^2 - n_1s + n_0)(s^2 + n_1s + n_0) = s^4 - (n_1^2 - 2n_0)s^2 + n_0^2 \quad (90)$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách  $s$  na pravých stranách (89) a (90) pak dostaneme:

$$n_0 = \sqrt{a_0^2} \quad (91)$$

$$n_1 = \sqrt{a_1^2 + 2n_0 - 2a_0} \quad (92)$$

Z uvedených vzorců (91) a (92) je patrné, že vždy platí  $n_0 > 0$  a  $n_1 > 0$  a polynom  $n(s)$  je tak za všech okolností stabilní.

Pozn.: Výše uvedené volby polynomu  $d(s)$  často vyhovují také pro kmitavé regulační pochody. Problémem je však to, že nelze předem říci, zda bude zvolený postup vyhovovat. Důvodem je, že pokud je  $a(s)$  kmitavý, je kmitavý také celý regulační pochod. V mnoha případech je toto kmitání prakticky nepostřehnutelné a regulační pochod se chová téměř stejně jako aperiodický. V dalších případech však můžeme získat i zcela nevhodný regulační pochod, kdy výstupní veličina netlumeně kmitá.

Pokud je tedy regulační pochod kmitavý, je vhodné přednostně používat jiné metody volby polynomu  $d(s)$ .

Další možností je volba polynomu  $d(s)$  využitím metod LQ řízení, která je blíže popsána v následující kapitole.

### 3.3 Aplikace techniky LQ řízení

Za předpokladu, že vstupní signál a porucha jsou skokové funkce, můžeme pro všechny typy systémů (stabilní i nestabilní, s minimální i neminimální fází) využít postupu známého z LQ řízení. Polynom  $d(s)$  pak volíme ve tvaru:

$$d(s) = g(s)m(s) \quad (93)$$

kde  $g(s)$  představuje stabilní polynom daný spektrální faktorizací:

$$[s \cdot a(s)]^* \cdot \varphi \cdot s \cdot a(s) + b^*(s) \cdot b(s) = g^*(s) \cdot g(s) \quad (94)$$

kde  $\varphi$  představuje volitelný koeficient.

Spektrální faktorizace (94) je známá z teorie LQ řízení (podrobněji např. v [8]), kde je použita při minimalizaci kvadratického funkcionálu:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \varphi \dot{u}^2(t)] dt \quad (95)$$

a  $\varphi$  představuje váhový koeficient u kvadrátu derivace akční veličiny.

Spektrální faktorizace bude provedena pro systém 2. řádu s přenosem akční veličiny  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$ . Levá strana rovnice (94) bude ve tvaru:

$$[s \cdot a(s)]^* \cdot \varphi \cdot s \cdot a(s) + b^*(s) \cdot b(s) = (-s) \cdot (s^2 - a_1s + a_0) \cdot \varphi \cdot s \cdot (s^2 + a_1s + a_0) + (-b_1s + b_0) \cdot (b_1s + b_0) = -\varphi \cdot s^6 + \varphi \cdot (a_1^2 - 2a_0) \cdot s^4 - (\varphi \cdot a_0^2 + b_1^2) \cdot s^2 + b_0^2 \quad (96)$$

Polynom  $g(s)$  potom musí být třetího stupně a volíme jej jako:

$$g(s) = g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0 \quad (97)$$

Pravá strana rovnice (94) bude ve tvaru:

$$g^*(s)g(s) = (-g_3s^3 + g_2s^2 - g_1s + g_0)(g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0) = -g_3^2s^6 + (g_2^2 - 2g_1g_3)s^4 - (g_1^2 - 2g_0g_2)s^2 + g_0^2 \quad (98)$$

Porovnáním koeficientů na pravých stranách vztahů (97) a (98) při stejných mocninách  $s$  dostaneme pro koeficienty polynomu  $g(s)$  následující vztahy:

$$g_3 = \sqrt{\varphi}, \quad g_2 = \sqrt{2g_1g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}, \quad g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + \varphi a_0^2 + b_1^2}, \quad g_0 = \sqrt{b_0^2} \quad (99)$$

Pro řešení koeficientů  $g_2$  a  $g_1$  je vhodné použít některou z numerických metod. V praktické části bude uveden postup řešení pomocí Newtonovy metody.

Polynom  $m(s)$  v rovnici (93) pak může být volen různým způsobem. Pro stabilní nekmitavý systém může být volen jako:

$$m(s) = a(s) \quad (100)$$

a pro nestabilní systém

$$m(s) = n(s) \quad (101)$$

kde  $n(s)$  je výsledkem spektrální faktorizace (88).

Volby polynomu (100) a (101) vedou pro skokové vstupní veličiny ke striktně ryzím regulátorům.

Pokud nám stačí pouze nestriktně ryzí regulátor, můžeme polynom  $m(s)$  volit například podle předpisu:

$$m(s) = (s + \alpha)^{\deg d - \deg g} \quad (102)$$

Další možností, jak zvolit polynom  $m(s)$ , je rozdělit nestabilní polynom  $a(s)$  na stabilní a nestabilní část:

$$a(s) = a^+(s)a^-(s) \quad (103)$$

kde  $a^+(s)$  představuje stabilní část. Potom, jestliže je splněna podmínka  $\deg a^+ = \deg a - 1$ , můžeme volit polynom  $m(s)$  ve tvaru:

$$m(s) = a^+(s) \quad (104)$$

Pokud bychom potřebovali polynom vyššího stupně než je  $\deg d > \deg g + \deg a^+$  můžeme za předpokladu, že  $\deg a^+ = 1$ , rovnici (104) modifikovat na tvar:

$$m(s) = [a^+(s)]^{\deg d - \deg g} \quad (105)$$

V případě, že  $\deg a^+ > 1$  můžeme podmínku (105) upravit, a to za předpokladu, že

- podíl  $\frac{\deg d - \deg g}{\deg a^+}$  je celé číslo, na tvar

$$m(s) = [a^+(s)]^{\frac{\deg d - \deg g}{\deg a^+}} \quad (106)$$

- v ostatních případech:

$$m(s) = a^+(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g - \deg a^+} \quad (107)$$

Volba (107) je samozřejmě použitelná i místo vztahu (106). Do podobných potíží se můžeme dostat i při volbě  $m(s) = n(s)$ . V takovém případě lze využít modifikovaných voleb (106) a (107).

Do poměrně značných potíží se můžeme dostat při volbě polynomu  $d(s)$  pro integrační soustavy. V takovém případě jsme obecně odkázáni pouze na volbu (84).

V případě, že se jedná o stabilní soustavu s integrační složkou, je možná také volba (103), protože polynom  $a(s)$  lze rozdělit na tvar:

$$a(s) = s^k a^+(s) \quad (108)$$

a následně využít jednu z voleb (104) až (107).

Pokud se však jedná o nestabilní soustavu s integrační složkou, je možné polynom  $a(s)$  rozepsat jako:

$$a(s) = s^k a^+(s) a^-(s) \quad (109)$$

$$a(s) = s^k a^-(s) \quad (110)$$

Potom v případě (109) můžeme opět využít jednu z voleb (104) až (107).

V případě (110) je využitelná modifikace volby (88), kdy provedeme spektrální faktorizaci polynomu  $a^-(s)$ :

$$n^*(s)n(s) = (a^-)^*(s)a^-(s) \quad (111)$$

Např.: pro nestabilní polynom  $a^-(s) = s + a_1$  je postup při spektrální faktorizaci (111) následující:

$$[a^-(s)]^* a(s) = (-s + a_1)(s + a_1) = -s^2 + a_1^2 \quad (112)$$

Po zavedení polynomu  $n(s) = s + n_0$  podobně získáme:

$$n^*(s)n(s) = (-s + n_0)(s + n_0) = -s^2 + n_0^2 \quad (113)$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách  $s$  na pravých stranách (112) a (113) pak dostaneme:

$$n_0 = \sqrt{a_1^2} \quad (114)$$

Pokud volíme polynom  $m(s)$  podle předpisu (100), (101), (104) a (106), nastavujeme parametry regulátoru pouze pomocí jediného váhového parametru  $\varphi$ . Jeho nastavením ovlivňujeme především rychlost regulačního pochodu.

Pozn.: Ani jeden z výše uvedených postupů při volbě polynomu  $d(s)$  nedokáže vyřešit problém s nestabilitou regulátorů. Tento problém se projevuje především u nestabilních soustav s neminimální fází, kdy pro koeficienty jmenovatele přenosu platí:  $a_1 < 0$  a  $a_0 < 0$ .



## 4 SYSTÉMY OBTÍŽNĚ ŘIDITELNÉ KONVENČNÍMI METODAMI

### 4.1 Systémy s dopravním zpožděním

Dopravní zpoždění představuje jev, který se v technické praxi projevuje u mnoha technologických procesů. Systémy s dopravním zpožděním se zpravidla obtížně regulují a navíc velmi často mohou mít některé další vlastnosti, které činí regulaci běžnými typy regulátorů téměř nemožnou. Může se jednat například o soustavy nestabilní nebo s integračními vlastnostmi. Typickými příklady takových procesů jsou například pumpy, nádrže na kapalinu, nebo některé typy chemických reaktorů. [5], [6]

Pod pojmem zpoždění obecně rozumíme časové posunutí mezi příčinou a jejím důsledkem. Řízení procesů vede na systémy se zpožděním, pokud přenos informace, energie nebo hmoty mezi funkčními částmi procesu či řízeného objektu anebo mezi objektem a řídicím automatem, potřebuje ke svému uskutečnění dobu, která se podstatně uplatňuje v dynamice procesu. Zpoždění obecně snižuje přípustné hodnoty parametrů regulace, dovoluje pouze pomalejší akční zásahy v řízení a především ohrožuje stabilitu řízení zpětnou vazbou.[1]

V technické praxi se ustálila zjednodušující představa, že vliv všech zpoždění v systému, včetně zpoždění ve zpětných vazbách, lze zahrnout do jediného bloku dopravního zpoždění, který je sériově spojen s modelem soustavy.

Chování takového systému potom lze popsat pomocí diferenciální rovnice:

$$y^n(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^j(t - \tau_d) \quad (115)$$

kde:

$a_i, b_i$  - konstantní koeficienty

$\tau_d$  - dopravní zpoždění

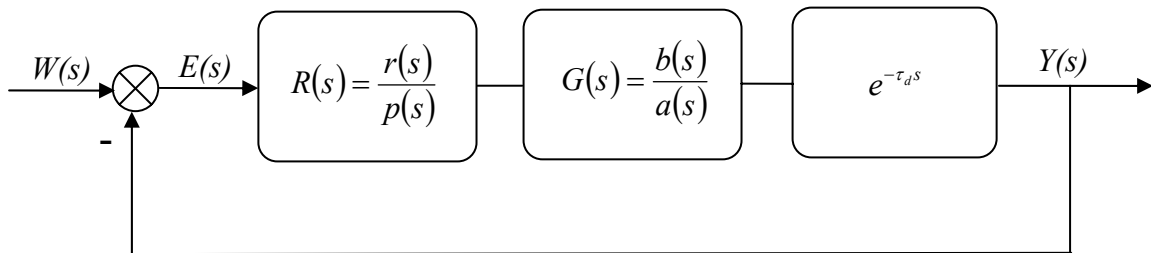
$u(t - \tau_d)$  - vstupní veličina

$y(t)$  - výstupní veličina

Pro systém popsaný rovnicí (115) navíc platí  $m < n$ . Přenos systému (115) má tvar:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} e^{-\tau_d s} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} e^{-\tau_d s} \quad (116)$$

Uzavřený regulační obvod pro systém s dopravním zpožděním potom můžeme znázornit podle Obr.4.



Obr. 4 – Regulační obvod se systémem s dopravním zpožděním

Přenos řízení pro regulační obvod znázorněný na Obr.4, na který nepůsobí žádné poruchové veličiny, potom bude mít tvar:

$$G_{W/Y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)R(s)e^{-\tau_d s}}{1 + G(s)R(s)e^{-\tau_d s}} \quad (117)$$

Ze vztahu (117) je patrné, že se člen dopravního zpoždění vyskytuje ve jmenovateli přenosu a tedy negativně ovlivňuje vlastnosti uzavřeného regulačního obvodu.

Metod, jak se s dopravním zpožděním vypořádat, existuje několik. Zjednodušeně si je můžeme rozdělit do následujících kategorií:

- Zanedbání dopravního zpoždění
- Smithův prediktor a jeho modifikace
- Aproximace dopravního zpoždění

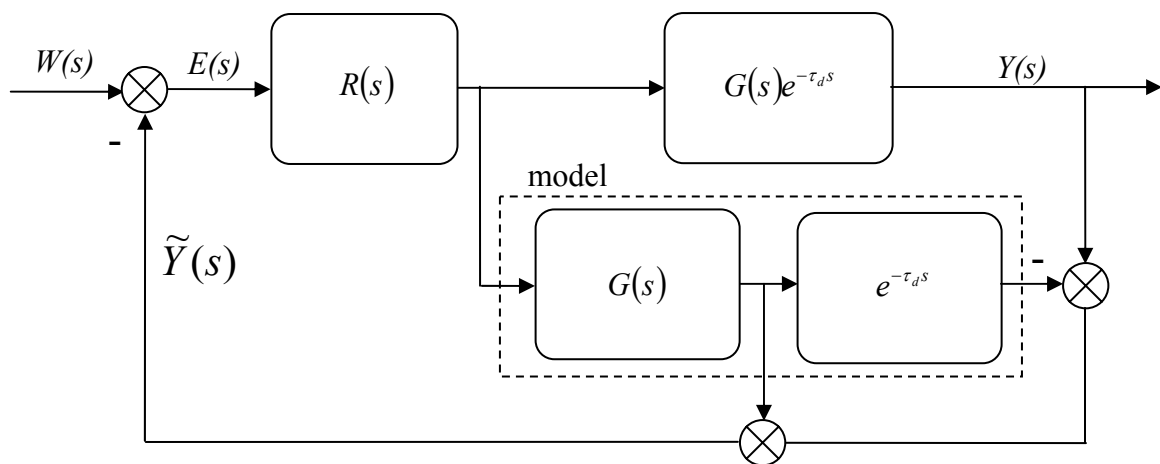
#### 4.1.1 Zanedbání dopravního zpoždění

Zanedbání představuje nejjednodušší metodu, jak vyřešit problém dopravního zpoždění. Jedná se však o metodu použitelnou tehdy, pokud je dopravní zpoždění výrazně kratší než časové konstanty (tj. doba náběhu a doba průtahu) regulované soustavy.

Určitou podvariantu představuje přičtení dopravního zpoždění k době průtahu. Tato metoda je však opět vhodná pouze pro malá dopravní zpoždění, kdy platí  $\tau_d \ll \tau_u$ .

#### 4.1.2 Smithův prediktor

Regulační obvod pro kompenzaci dopravního zpoždění, známý jako Smithův prediktor, byl navržen už v 50. letech 20. století. Jedná se o zapojení, které umožňuje řídit i systémy s velkým dopravním zpožděním – pro úspěch regulace je však nutné, aby se model ve vnitřní smyčce shodoval se skutečně řízeným systémem. [1]



Obr. 5 – Smithův prediktor

Obvod kompenzuje dopravní zpoždění  $\tau_d$ . Regulátor  $R(s)$  tedy produkuje akční zásah, jako by řídil přenos  $G(s)$  bez vlivu dopravního zpoždění. Tento fakt plyne z vyjádření:

$$\tilde{Y}(s) = G(s)U(s) + G(s)U(s)e^{-\tau_d s} - G(s)U(s)e^{-\tau_d s} = G(s)U(s) \quad (118)$$

Jestliže je předpokládán shodný přenos modelu a skutečně řízené soustavy, pro celkový přenos řízení platí:

$$G_{W/Y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)R(s)} e^{-\tau_d s} \quad (119)$$

Ze vztahu (119) plyne, že charakteristická rovnice:

$$1 + G(s)R(s) = 0 \quad (120)$$

je stejná jako u uzavřeného regulačního obvodu se soustavou bez dopravního zpoždění. V tomto případě se jedná o úplnou kompenzaci dopravního zpoždění.

Smithův prediktor má však také některá negativa. Jedná se především o nutnost celého modelu ve zpětné vazbě. V praktickém provozu je však úplná shoda modelu a reálného procesu prakticky nemožná. Největším problémem je především modelování dopravního zpoždění.

#### 4.1.3 Aproximace dopravního zpoždění

Pro aproximaci dopravního zpoždění se používají tři základní metody:

- Taylorův rozvoj prvního řádu v čitateli:

$$e^{-\tau_d s} \approx 1 - \tau_d s \quad (121)$$

- Taylorův rozvoj prvního řádu ve jmenovateli:

$$e^{-\tau_d s} = \frac{1}{e^{\tau_d s}} \approx \frac{1}{1 + \tau_d s} \quad (122)$$

- Padé aproximace prvního řádu

$$e^{-\tau_d s} = \frac{e^{-\frac{\tau_d}{2}s}}{e^{\frac{\tau_d}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s}{1 + \frac{\tau_d}{2}s} \quad (123)$$

Z uvedených aproximací se jako nejvýhodnější jeví Padé aproximace dopravního zpoždění (123), která ve většině vede k nejlepšímu přiblížení k originální soustavě a to jak v časové, tak také v frekvenční oblasti. Její další výhodou je, že nijak neovlivňuje relativní řád soustavy. Padé aproximaci lze použít pro většinu případů, i když pro soustavy integrační a nestabilní vyhovuje pouze pro malé hodnoty dopravního zpoždění. Podrobnější informace k systémům s dopravním zpožděním např. v: [1], [5], [6], [14].

## 4.2 Nestabilní systémy

Stabilita dynamického systému je schopnost vrátit se po vychýlení zpět do původního stavu. Toto vychýlení je vždy způsobeno nenulovými počátečními podmínkami, z tohoto důvodu platí, že Ljapunovská stabilita je vlastností pouze levé strany diferenciální rovnice (tedy jmenovatele přenosu).

Podle stability (pro ilustraci uvedena jako příklad hmotného bodu v gravitačním poli) rozlišujeme systémy na:

- *stabilní* – systém se po vychýlení vrátí do původní polohy
- *na hranici stability* - systém se po vychýlení nevrátí do původní polohy, ale ani neunikne
- *nestabilní* - systém po vychýlení unikne

Z hlediska řízení označujeme systém jako nestabilní, pokud jeden nebo více kořenů jmenovatele jeho přenosu leží v pravé části komplexní poloroviny.

Nestabilní systémy se v praxi velmi často vyskytují ve spojení s některými dalšími negativními vlastnostmi, jako je dopravní zpoždění, nestabilita čitatele (systémy neminimálně fázové), integrační vlastnosti. Takové systémy jsou pak klasickými typy regulátorů prakticky neřiditelné a i návrh regulátorů pomocí polynomiálních metod může činit značné potíže. Především se jedná o volbu vhodného stabilního polynomu  $d(s)$  a také použité struktury navrhovaného polynomiálního regulátoru (1DOF, 2DOF, TFC).

Pro některé typy nestabilních soustav je dokonce téměř nemožné nalézt stabilní regulátor. To ovšem znamená, že pro regulaci těchto soustav lze regulátory typu 1DOF použít pouze s omezeními a regulátory typu 2DOF a TFC nelze použít vůbec.

### 4.3 Systémy s neminimální fází

Systémy s neminimální fází jsou systémy, které mají nestabilní nuly v čitateli. Pokud tedy na vstup takovéto soustavy přivedeme skokovou změnu vstupní veličiny, mění se výstupní veličina nejprve opačným směrem, než je výsledný směr výstupní veličiny v čase  $t = \infty$ .

Systémy tohoto typu se běžnými regulátory regulují pouze obtížně, vyskytují se však poměrně často.

## II. PRAKTICKÁ ČÁST

## 5 PRAKTICKÁ UKÁZKA NÁVRHU REGULÁTORŮ POLYNOMIÁLNÍ METODOU

V teoretické části byly odvozeny vztahy pro návrh regulátorů pomocí polynomiální metody syntézy. V této části budou uvedeny konkrétní postupy a dále bude poukázáno na některé problémy, které mohou při návrhu nastat.

### 5.1 Návrh regulátoru 1DOF

Syntéza 1DOF regulátoru pomocí metody neurčitých koeficientů je poměrně jednoduchá, rychlá a ve většině případů podává velmi dobré výsledky.

Dá se však dokázat, že existují případy, kdy polynomiální metodu použít nemůžeme, protože pro zadaný přenos regulátor typu 1DOF neexistuje.

V následující části bude obecně odvozen regulátor 1DOF pro soustavu druhého řádu s relativním řádem přenosu 1 (jedná se tedy o soustavu, která má v čitateli přenosu polynom 1. stupně)

Přenos soustavy budeme uvažovat ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (124)$$

Žádanou hodnotu a poruchovou veličinu volíme pro jednoduchost jako skokové signály  $w(t) = w_0$  a  $v(t) = v_0$ , které můžeme vyjádřit pomocí následujících obrazů v  $s$ :

Obraz žádané hodnoty:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} = \frac{w_0}{s} \Rightarrow \deg(f_w) = 1 \quad (125)$$

Obraz poruchové veličiny:

$$V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} = \frac{v_0}{s} \Rightarrow \deg(f_v) = 1 \quad (126)$$

Nyní musíme určit nejmenší společný násobek polynomů  $f_w$  a  $f_v$  a dále také stupeň tohoto polynomu:

$$f(s) = s \Rightarrow \deg(f) = 1 \quad (127)$$

V dalším kroku sestavíme obecnou polynomiální rovnici uzavřeného regulačního obvodu:

$$a(s) \cdot f(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (128)$$

Pomocí vzorců odvozených v části 2.2 nyní určíme stupně neznámých polynomů  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$  a  $d(s)$ :

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \quad (129)$$

$$\deg(\tilde{p}) = \deg(a) - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (130)$$

$$\deg(d) = 2 \deg(a) + \deg(f) - 1 = 2 \cdot 2 + 1 - 1 = 4 \quad (131)$$

Polynomy  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$  a  $d(s)$  tedy můžeme předpokládat ve tvaru:

$$q(s) = q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (132)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \quad (133)$$

$$d(s) = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \quad (134)$$

Polynomy  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $q(s)$ ,  $\tilde{p}(s)$  a  $d(s)$  dosadíme do polynomiální rovnice (128):

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1 s + a_0) \cdot s \cdot (\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + (b_1 s + b_0) \cdot (q_2 s^2 + q_1 s + q_0) &= \\ = d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 & \end{aligned} \quad (135)$$

Úpravou rovnice (135) a převedením do společných mocnin  $s$  získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} s^4 : & \tilde{p}_1 & & & & = d_4 \\ s^3 : & a_1 \tilde{p}_1 & + \tilde{p}_0 & + b_1 q_2 & & = d_3 \\ s^2 : & a_0 \tilde{p}_1 & + a_1 \tilde{p}_0 & + b_0 q_2 & + b_1 q_1 & = d_2 \\ s^1 : & & a_0 \tilde{p}_0 & & + b_0 q_1 & + b_1 q_0 = d_1 \\ s^0 : & & & & & b_0 q_0 = d_0 \end{aligned} \quad (136)$$



Abychom soustavu rovnic (136) mohli vyřešit co nejjednodušším způsobem, je vhodné ji převést do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (137)$$

Maticovou rovnicí (137) pak můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (138)$$

a následně pomocí maticových operací převést na řešitelný tvar:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (139)$$

Maticová rovnice (139) je řešitelná, jestliže platí:

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (140)$$

Obecný výpočet determinantu matice  $\mathbf{A}$  vyžaduje množství poměrně obtížných maticových operací.

Pro určení podmínek řešitelnosti však lze soustavu rovnic (136) zjednodušit a to za předpokladu:

$$\tilde{p}_1 = d_4 \quad (141)$$

$$q_0 = \frac{d_0}{b_0} \quad (142)$$

Pro rovnice (141) a (142) však musí platit:

$$d_4 \neq 0 \quad (143)$$

$$b_0 \neq 0 \quad (144)$$

Po dosazení rovnic (143) a (144) do soustavy rovnic (136) získáme zjednodušenou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
s^3 : \quad & \tilde{p}_0 + b_1 q_2 = d_3 - a_1 d_4 \\
s^2 : \quad & a_1 \tilde{p}_0 + b_0 q_2 + b_1 q_1 = d_2 - a_0 d_4 \\
s^1 : \quad & a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_1 = d_1 - \frac{b_1}{b_0} d_0
\end{aligned} \tag{145}$$

kterou opět můžeme přepsat do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_3 - a_1 d_4 \\ d_2 - a_0 d_4 \\ d_1 - \frac{b_1}{b_0} d_0 \end{pmatrix} \tag{146}$$

a obecně vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}_1 \tag{147}$$

Maticová rovnice (147) je řešitelná, jestliže platí:

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = b_0^2 + a_0 b_1^2 - a_1 b_1 b_0 \neq 0 \tag{148}$$

Pokud jsou splněny podmínky (143) a (144), platí odvozený vztah (148) jako podmínka řešitelnosti i pro maticovou rovnici (137). Pokud není rovnice (148) splněna, nelze pro danou soustavu navrhnout regulátor 1DOF.

Splnění rovnice (148) však rozhoduje pouze o tom, zda regulátor pro danou soustavu existuje. O tom zda regulátor bude stabilní nebo nestabilní, popř. jaká bude kvalita regulačního pochodu, rozhoduje především umístění kořenů polynomu  $d(s)$ .

Pokud bychom provedli detailní rozbor, zjistili bychom, že podmínka (148) není splněna pro soustavy, které mají soudělné polynomy  $a(s)$  a  $b(s)$ . Při vlastním odvození vztahů pro regulátory 1DOF jsme sice podmínku nesoudělnosti předpokládali, avšak při praktickém návrhu regulátoru pro zadanou soustavu nemůžeme situaci, kdy podmínka nesoudělnosti nebude splněna, úplně vyloučit. Toto nebezpečí hrozí především při použití adaptivních metod, kdy se provádí identifikace soustavy samočinně. Proto je vhodné s takovou možností počítat a podmínku (148) při návrhu regulátoru uvažovat.

## 5.2 Návrh regulátoru 2DOF

Přenos soustavy budeme opět uvažovat ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (149)$$

Žádanou hodnotu a poruchovou veličinu volíme pro jednoduchost jako skokové signály  $w(t) = w_0$  a  $v(t) = v_0$ . Přenosy těchto signálů proto opět uvažujeme ve tvaru (125) a (126).

V dalším kroku sestavíme obecné polynomiální rovnice potřebné pro návrh zpětnovazební a přímovazební části regulátoru:

$$a(s) \cdot f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) + b(s) \cdot q(s) = d(s) \quad (150)$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s) \quad (151)$$

Pomocí vzorců odvozených v kapitole 2.3 nyní určíme stupně neznámých polynomů  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$  a  $d(s)$ :

$$\deg(q) = \deg(a) + \deg(f_v) - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \quad (152)$$

$$\deg(r) = \deg(f_w) - 1 = 1 - 1 = 0 \quad (153)$$

$$k_0 = \deg(f_w) - \deg(f_v) - \deg(a) = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow k = 0 \quad (154)$$

$$\deg(\tilde{p}) = \deg(a) - 1 + k = 2 - 1 + 0 = 1 \quad (155)$$

$$\deg(d) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - 1 + k = 2 \cdot 2 + 1 - 1 + 0 = 4 \quad (156)$$

$$\deg(t) = 2 \deg(a) + \deg(f_v) - \deg(f_w) - 1 + k = 2 \cdot 2 + 1 - 1 - 1 + 0 = 3 \quad (157)$$

Polynomy  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$  a  $d(s)$  tedy můžeme předpokládat ve tvaru:

$$q(s) = q_2s^2 + q_1s + q_0 \quad (158)$$

$$r(s) = r_0 \quad (159)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1s + \tilde{p}_0 \quad (160)$$

$$t(s) = t_3s^3 + t_2s^2 + t_1s + t_0 \quad (161)$$

$$d(s) = d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (162)$$

Polynomy  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $\tilde{p}(s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$ ,  $f_v(s)$ ,  $f_w(s)$  a  $d(s)$  dosadíme do polynomiálních rovnic (150) a (151):

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1s + a_0) \cdot s \cdot (\tilde{p}_1s + \tilde{p}_0) + (b_1s + b_0) \cdot (q_2s^2 + q_1s + q_0) &= \\ = d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 & \end{aligned} \quad (163)$$

$$(t_3s^3 + t_2s^2 + t_1s + t_0) \cdot s + (b_1s + b_0) \cdot (r_0) = d_4s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (164)$$

Úpravou rovnic (163) a (164) a jejich převedením do společných mocnin  $s$  získáme následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} s^4 : \quad & \tilde{p}_1 & & & & = d_4 \\ s^3 : \quad & a_1\tilde{p}_1 & + \tilde{p}_0 & + b_1q_2 & & = d_3 \\ s^2 : \quad & a_0\tilde{p}_1 & + a_1\tilde{p}_0 & + b_0q_2 & + b_1q_1 & = d_2 \\ s^1 : \quad & & + a_0\tilde{p}_0 & & + b_0q_1 & + b_1q_0 = d_1 \\ s^0 : \quad & & & & & b_0q_0 = d_0 \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} s^4 : \quad & \tilde{p}_1 & & & & = d_4 \\ s^3 : \quad & a_1\tilde{p}_1 & + \tilde{p}_0 & + b_1q_2 & & = d_3 \\ s^2 : \quad & a_0\tilde{p}_1 & + a_1\tilde{p}_0 & + b_0q_2 & + b_1q_1 & = d_2 \\ s^1 : \quad & & + a_0\tilde{p}_0 & & + b_0q_1 & + b_1q_0 = d_1 \\ s^0 : \quad & & & & & b_0q_0 = d_0 \end{aligned} \quad (166)$$

Soustavy rovnic (165) a (166) můžeme převést do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (167)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_3 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (168)$$

Pro výpočet parametrů regulátoru  $Q$  je třeba vyřešit maticovou rovnici (167). Při výpočtu parametrů regulátoru  $R$  stačí řešit pouze poslední řádek maticové rovnice (168). Pokud však rovnici (168) vyřešíme celou, můžeme polynom  $t(s)$  použít při výpočtu regulační odchylky.

Aby byla maticová rovnice (167) řešitelná, musí být splněna stejná podmínka jako v případě regulátoru 1DOF:

$$b_0^2 + a_0 b_1^2 - a_1 b_1 b_0 \neq 0 \quad (169)$$

### 5.3 Optimální řízení

Jak bylo uvedeno v kapitole 3.3, pro získání polynomu  $g(s)$  musíme vyřešit následující soustavu rovnic:

$$g_0 = \sqrt{b_0^2} \quad (170)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0 g_2 + \varphi a_0^2 + b_1^2} \quad (171)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1 g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} \quad (172)$$

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (173)$$

Rovnice (170) a (173) můžeme vyřešit přímo, ale abychom dokázali vyřešit rovnice (171) a (172), je vhodné využít některou z numerických metod.

V této části bude uveden způsob řešení pomocí Newtonovy metody.

#### NEWTONOVA METODA:

Při řešení rovnic pomocí Newtonovy metody postupujeme podle následujícího předpisu:

Mějme soustavu rovnic pro kterou platí:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad (174)$$

Potom pro i-tou rovnici platí:

$$f_i(x) \approx f_i(x^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \cdot (x_j^{k+1} - x_j^k) \quad (175)$$

Za předpokladu, že platí (174), můžeme rovnici (175) přepsat do tvaru:

$$f_i(x) = 0 \Rightarrow 0 = f_i(x^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \cdot (\delta_j^k) \quad (176)$$

kde:  $\delta_j^k = x_j^{k+1} - x_j^k$

Pro soustavu rovnic (174) potom můžeme psát:

$$0 = \vec{f}(\vec{x}^k) + \vec{f}'(\vec{x}^k) \cdot \vec{\delta}^k \quad (177)$$

Řešení vektoru  $\vec{x}$  se pak provádí iteračně a platí:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - [\vec{f}'(\vec{x}^k)]^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}^k) \quad (178)$$

kde:

$$\vec{f}'(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ a } \vec{f}(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} f_1(x^k) \\ f_2(x^k) \\ \vdots \\ f_n(x^k) \end{bmatrix} \quad (179)$$

Při výpočtu parametrů  $g_1$  a  $g_2$  tedy upravíme rovnice (171) a (172) na tvar:

$$\sqrt{2g_0g_2 + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1 = 0 \quad (180)$$

$$\sqrt{2g_1g_3 + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2 = 0 \quad (181)$$

Určíme matici  $\vec{f}'(\vec{x}^k)$ :

$$\vec{f}'(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \frac{\partial f_1}{\partial g_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial g_1} & \frac{\partial f_2}{\partial g_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{g_0}{\sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2}} \\ \frac{g_3}{\sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}} & -1 \end{bmatrix} \quad (182)$$

a dále matici  $\vec{f}(\vec{x}^k)$ :

$$\vec{f}(\vec{x}^k) = \begin{bmatrix} f_1(g_1^k, g_2^k) \\ f_2(g_1^k, g_2^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1^k \\ \sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2^k \end{bmatrix} \quad (183)$$

Potom pro řešení  $\begin{bmatrix} g_1^{k+1} \\ g_2^{k+1} \end{bmatrix}$  bude platit:

$$\begin{bmatrix} g_1^{k+1} \\ g_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^k \\ g_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \frac{g_0}{\sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2}} \\ \frac{g_3}{\sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)}} & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2g_0g_2^k + \varphi a_0^2 + b_1^2} - g_1^k \\ \sqrt{2g_3g_1^k + \varphi(a_1^2 - 2a_0)} - g_2^k \end{bmatrix} \quad (184)$$

Maticovou rovnicí (184) potom řešíme iteračním procesem. Aby byla rovnice vůbec řešitelná, musíme zvolit počáteční hodnoty  $\begin{bmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \end{bmatrix}$ . Jako vhodné se jeví například

počáteční hodnoty  $g_1^0 = g_2^0 = 1000$ .

## 6 UKÁZKY REGULAČNÍCH POCHODŮ

V této kapitole bude uvedeno několik příkladů regulačních pochodů jednak pro různé typy regulovaných soustav (integrační, nestabilní, neminimálně-fázové, apod.), dále pro různé konfigurace regulačních obvodů (1DOF, 2DOF, TFC) a také pro různé volby polynomu  $d(s)$ .

Vzhledem k obrovskému množství různých kombinací, které lze použít, a omezenému prostoru, bude zvláštní pozornost věnována především soustavám, které jsou běžnými způsoby pouze obtížně regulovatelné (tj. soustavy integrační, nestabilní, neminimálně fázové), dále volbě polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení a konfiguraci TFC. Volba konfigurace TFC je výhodná především proto, že pomocí volby parametru  $\beta$  můžeme v jediném grafu znázornit regulační pochod nejen pro konfiguraci TFC, ale i pro konfiguraci 1DOF a 2DOF.

Při vyhodnocování kvality regulace bylo přednostně použito upravené kvadratické kritérium podle předpisu:

$$J^2 = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n [w(i) - y(i)]^2 + \sum_{j=2}^n [u(j) - u(j-1)]^2 + u^2(1) \right) \quad (185)$$

kde:  $n$  je počet vzorků regulačního pochodu

Uvedené kritérium (185) neodpovídá zcela přesně standardnímu kvadratickému kritériu, které je definováno jako:

$$J^2 = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \cdot \left( \sum_{k=k_1}^{k_2} [w(k) - y(k)]^2 + \sum_{k=k_1}^{k_2} [u(k) - u(k-1)]^2 \right) \quad (186)$$

kde  $\langle k_1, k_2 \rangle$  je zvolený interval pro určení kvality regulace a platí, že  $k_1 > 0$

Kritérium (186) nerespektuje akční zásah v čase  $t=0$ . To je dáno tím, že matematicky je  $\frac{du}{dt}$  v čase  $t=0$  rovno  $\infty$ .

Bohužel, pro různé volby polynomu  $d(s)$  zpravidla platí, že největší rozdíl mezi nimi je právě v počátečním akčním zásahu  $u(t=0)$ . Pokud jej tedy neuvažujeme, jsou výsledky hodnotícího kritéria zkreslené a neumožňují zcela objektivně posoudit kvalitu regulace.



Z tohoto důvodu bylo navrženo poněkud upravené kritérium (185), kde se vychází z úvahy, že akční zásah  $u(t)$  v čase  $t < 0$  je roven  $u(t < 0) = 0$  a tedy  $\Delta u(t = 0) = u(t = 0)$ . Tato úvaha sice není matematicky zcela v pořádku, umožňuje však mnohem lépe posoudit výhody volby polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení.

Pro posouzení kvality regulace bylo použito také kritérium vycházející z absolutních hodnot ve tvaru:

$$|J| = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |w(i) - y(i)| + \sum_{j=2}^n |u(j) - u(j-1)| + |u(1)| \right) \quad (187)$$

kde:  $n$  je počet vzorků regulačního pochodu

Důvodem použití absolutního kritéria je skutečnost, že kvadratické kritérium znásobuje vliv velkých hodnot jak regulační odchylky, tak také změn akčního zásahu a vliv malých hodnot naopak potlačuje. Tím však může dojít ke zkreslení výsledků.

Absolutní kritérium je však uvedeno pouze u části výsledků, hlavním důvodem, proč nebylo uvedeno u všech je jednak omezený prostor a také snaha o přehlednost výsledků.

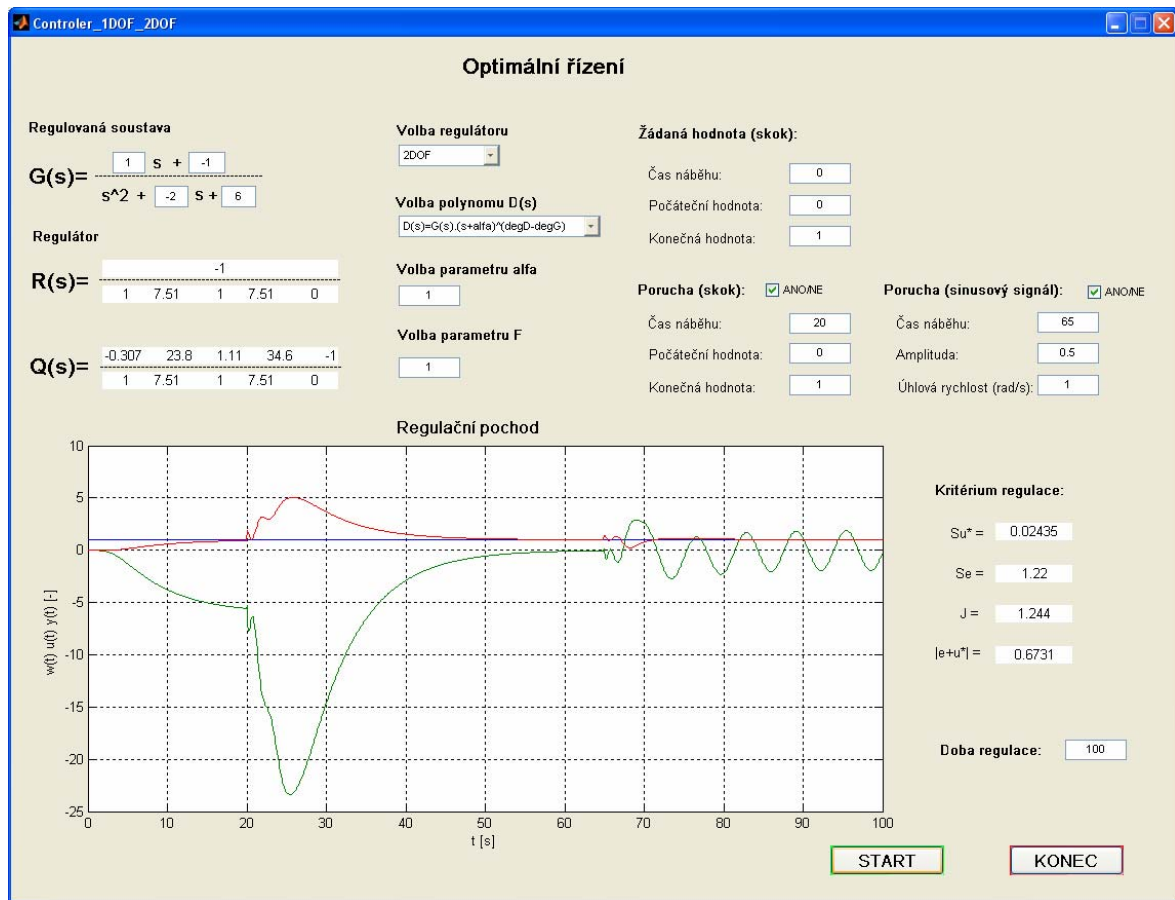
## 6.1 Použité programové vybavení

Pro účely této práce byla vytvořena dvojice programů v prostředí QUIDE programového balíku Matlab 7.0 od firmy MathWorks, Inc.. Jedná se o programy *TFControler.m* a *Controler\_1DOF\_2DOF.m*.

Oba tyto programy jsou si z hlediska ovládání velmi podobné a proto bude popsán pouze program *Controler\_1DOF\_2DOF.m*.

Oba programy k syntéze regulátorů využívají nadstavbovou knihovnu *polynomial toolbox* pro řešení polynomiálních diofantických rovnic. Důvodem je snaha o co nejvyšší univerzálnost. Pokud bychom postupovali přesně podle postupu uvedeného v teoretické části a pro každý typ regulátoru rovnice podrobně odvozovali, byl by program velmi složitý a nepřehledný. Použitím *polynomial toolboxu* se programování výrazně zjednodušilo a bylo tak možno vytvořit programy, které umožňují vypočítat regulátory typu 1DOF, 2DOF a TFC a dále také simulovat regulační pochody pro většinu regulovaných soustav 2. řádu.

Uvedený postup má však také své nevýhody. Protože bylo použito programování v rozhraní GUIDE, nelze zaručit kompatibilitu s jinými verzemi Matlabu, než je verze 7.0.



Obr. 6 – Program Controler\_1DOF\_2DOF.m

### 6.1.1 Popis jednotlivých částí programu

#### Regulovaná soustava:

- umožňuje zadat soustavu 2. řádu s relativním řádem 1 nebo 2.
- aby byl výpočet možný, musí být každý z koeficientů číslo. Navíc platí, že koeficient  $b_0$  musí být různý od nuly.

#### Regulátor

- zde je uveden výsledek řešení v obecném tvaru 
$$Q_R(s) = \frac{q_n s^n + \dots + q_1 s + q_0}{p_m s^m + \dots + p_1 s + p_0}$$

#### Volba regulátoru:

- umožňuje zvolit regulátor typu 1DOF nebo 2DOF.

**Volba polynomu  $d(s)$ :**

- zde je možné zvolit polynom  $d(s)$  podle pravidel, které byly blíže specifikovány v kapitole 3
- pro volby  $d(s) = g(s)n(s)$  a  $d(s) = g(s)a^+(s)$  platí, že pokud je požadovaný stupeň polynomu  $d(s)$  vyšší, než je maximální možný stupeň výše uvedených voleb, potom se použijí následující pravidla:

$$d(s) = g(s)n(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g - \deg n} \quad (188)$$

$$d(s) = n(s)(a^+)^{\deg d - \deg g} \quad (189)$$

**Volba parametru alfa:**

- umožňuje nastavit parametr  $\alpha$  nutný pro většinu voleb polynomu  $d(s)$ .

**Volba parametru F:**

- umožňuje nastavit váhový koeficient  $\varphi$  při volbě polynomu  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení.

**Žádaná hodnota (skok):**

- umožňuje nastavit parametry žádané hodnoty.

**Porucha (skok):**

- umožňuje nastavit parametry poruchy ve tvaru skoku.

**Porucha (sinusový signál):**

- umožňuje nastavit parametry harmonické poruchy, která je zde představována sinusovým signálem.

**Kritérium regulace:**

- udává hodnotu kvadratického a absolutního kritéria. Význam jednotlivých položek byl popsán na začátku této kapitoly.

**Doba regulace:**

- umožňuje nastavit délku trvání simulace regulačního pochodu.

## 6.2 Řízení integračních soustav

Regulovanou soustavu integračního typu předpokládáme v obecném tvaru:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s + a_1)} \quad (190)$$

Pro ukázkou řízení integračních soustav byly vybrány následující příklady:

- Stabilní integrační soustava s minimální fází

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s} \quad (191)$$

- Nestabilní integrační soustava s minimální fází

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 3s} \quad (192)$$

- Stabilní integrační soustava s neminimální fází

$$G(s) = \frac{s - 2}{s^2 + 3s} \quad (193)$$

- Nestabilní integrační soustava s neminimální fází

$$G(s) = \frac{s - 3}{s^2 - 2s} \quad (194)$$

Pro řízení všech čtyř typů integračních soustav byl použit regulátor TFC. Důvodem je skutečnost, že změnou parametru  $\beta$  v intervalu  $\langle 0,1 \rangle$  jsme schopni simulovat regulační pochod jak pro konfiguraci TFC, tak také pro konfiguraci 1DOF ( $\beta = 1$ ) a 2DOF ( $\beta = 0$ ).

Aby bylo možno objektivně posoudit vliv parametru  $\beta$  na průběh regulace, byl pro všechny regulované soustavy zvolen stejný polynom  $d(s)$ , a to ve tvaru:

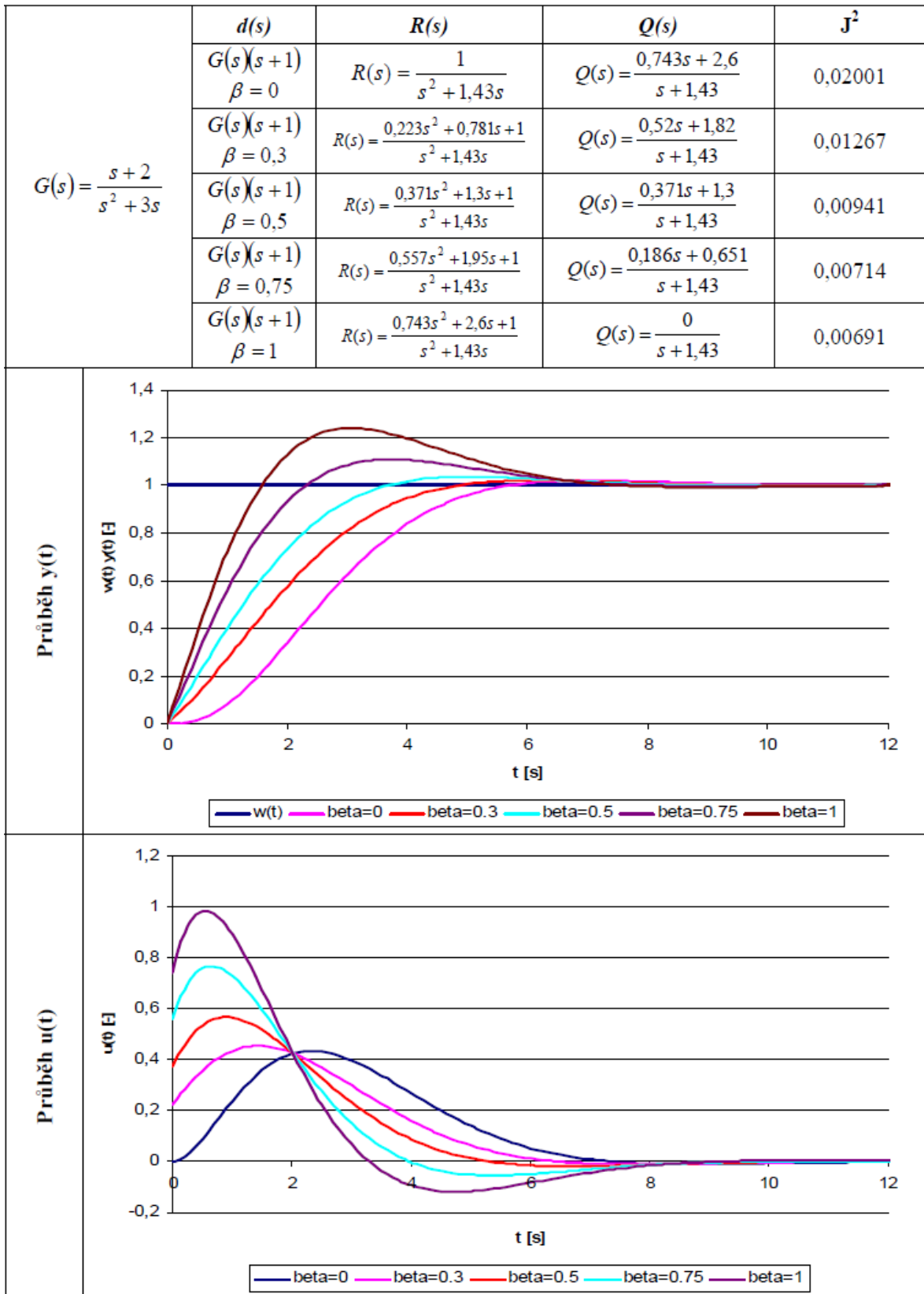
$$d(s) = g(s)(s + 1) \quad (195)$$

V druhé sérii příkladů potom byl polynom  $d(s)$  volen ve tvaru:

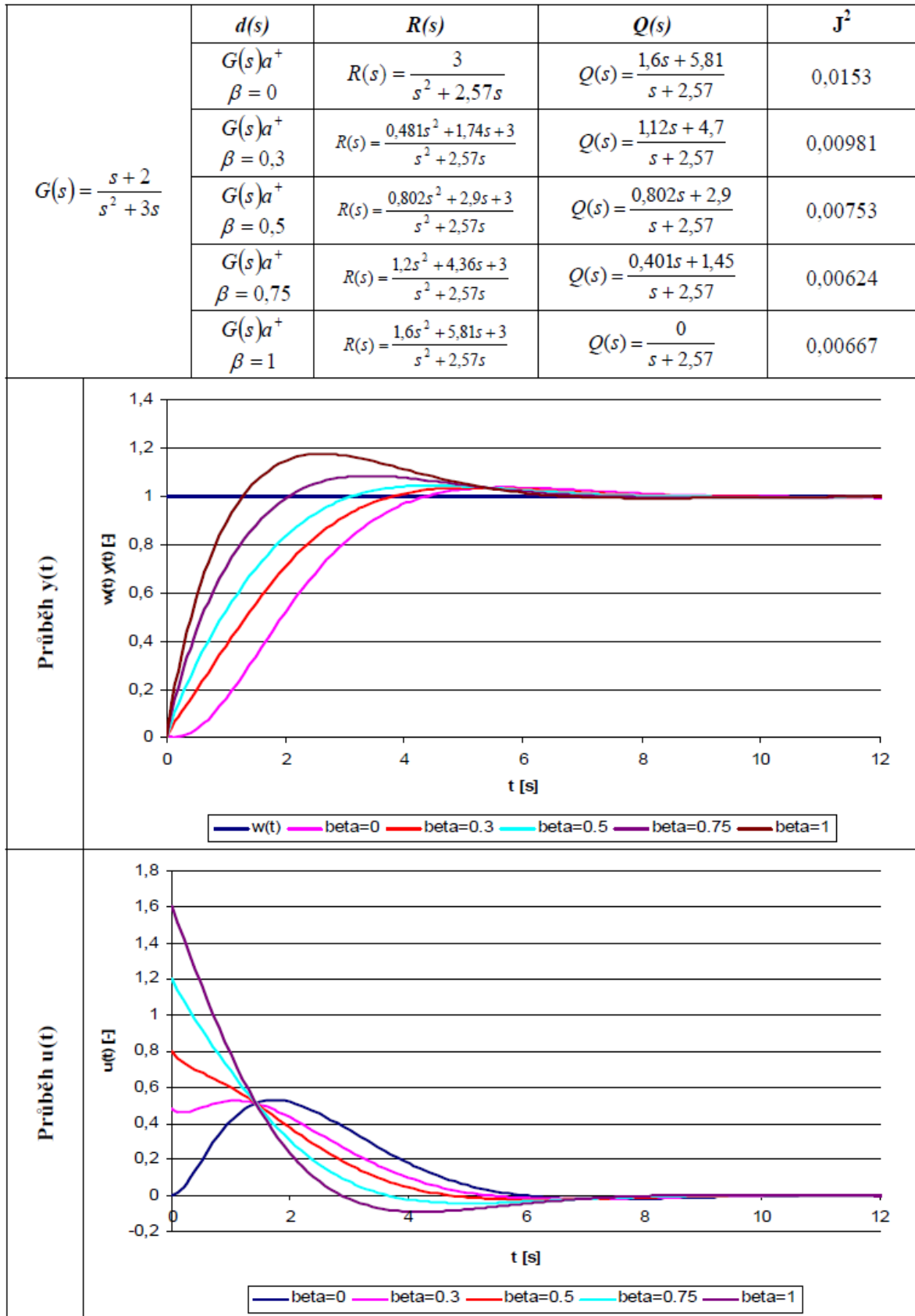
$$d(s) = g(s)a^+ \quad \text{pro stabilní soustavy} \quad (196)$$

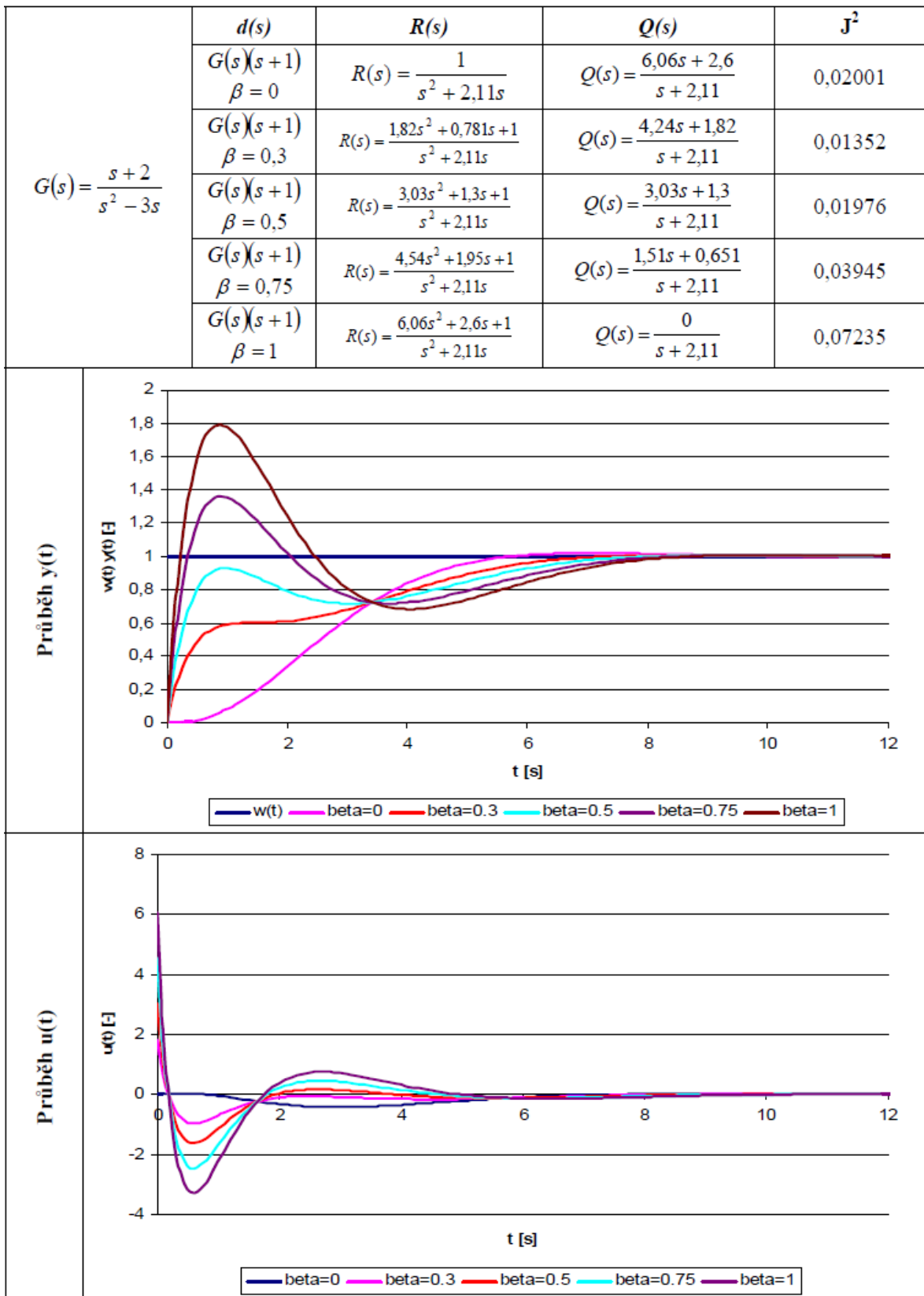
$$d(s) = g(s)n^*(s) \quad \text{pro nestabilní soustavy} \quad (197)$$

kde  $n^*(s)$  byl získán spektrální faktorizací nestabilní části polynomu  $a^-(s)$

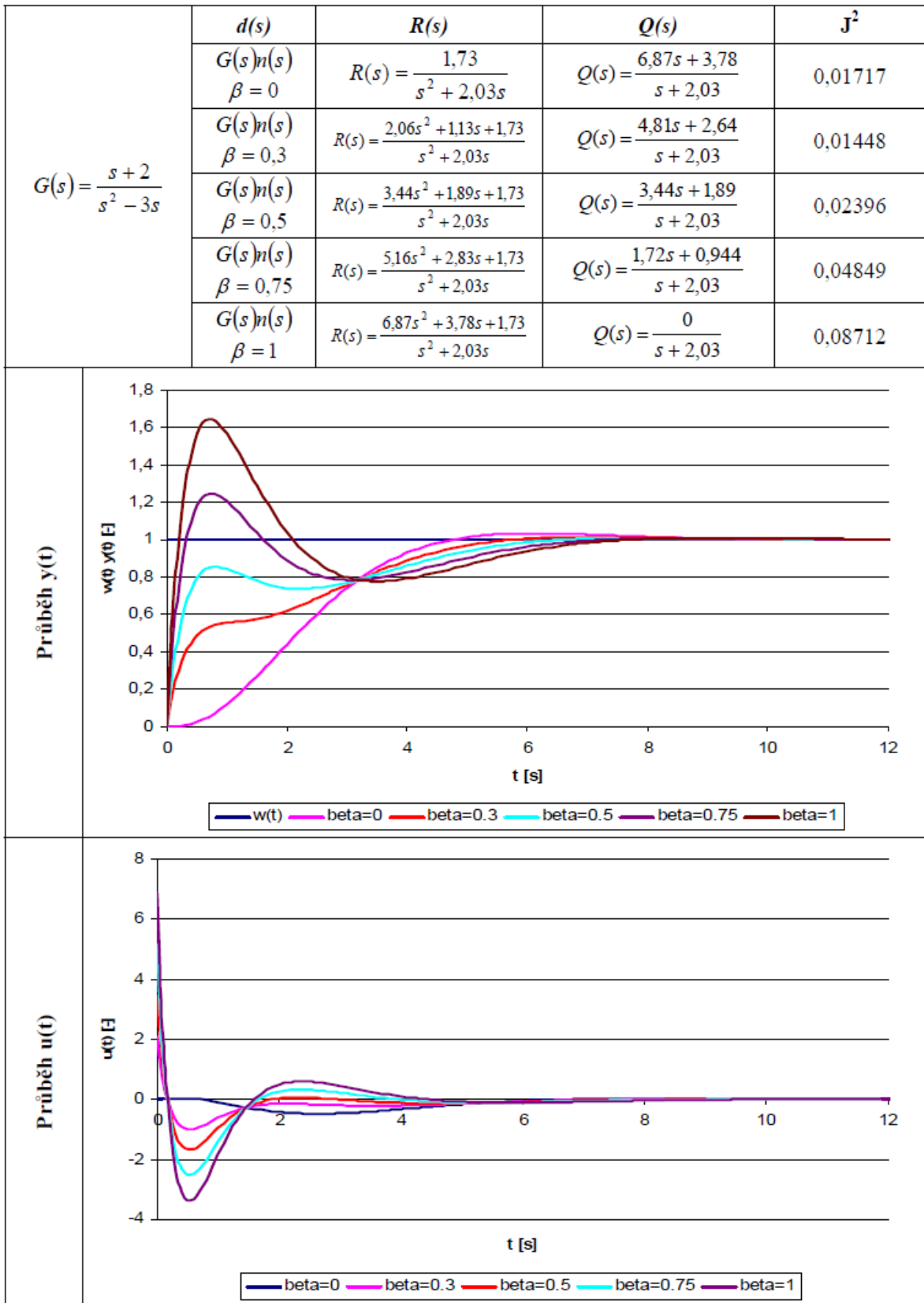


Obr. 7 – Stabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)(s+1)$


 Obr. 8 – Stabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)a^+$

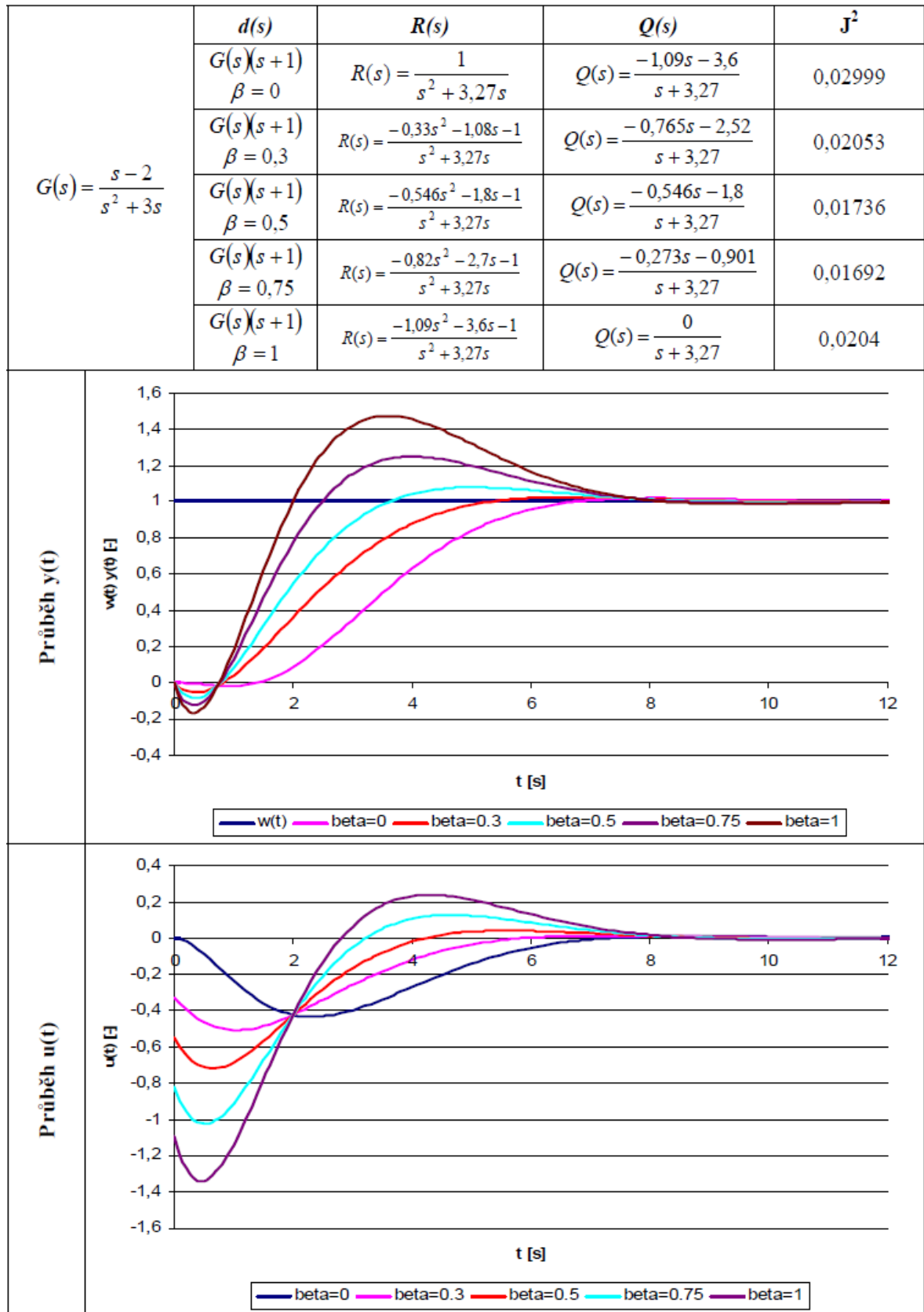


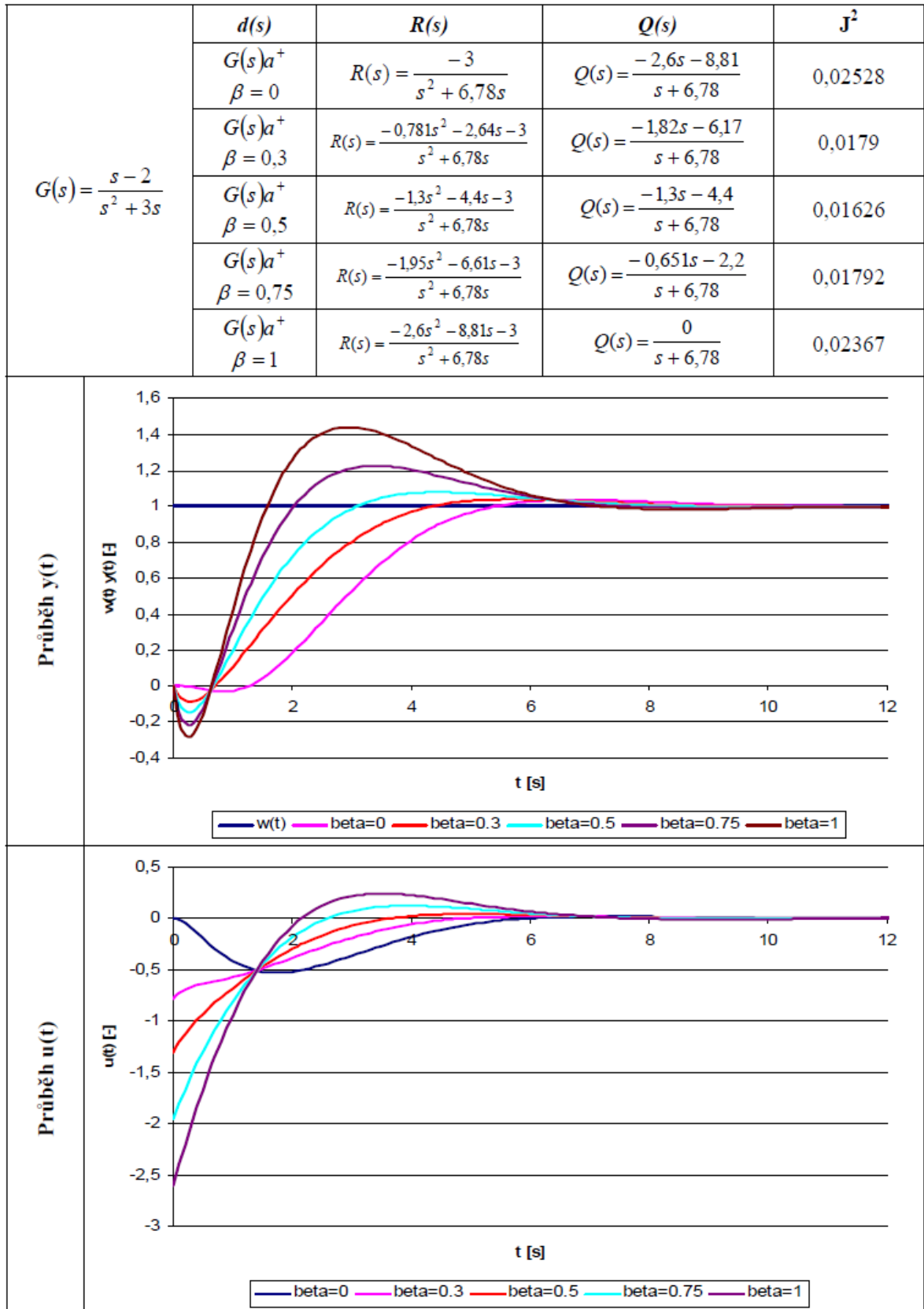
Obr. 9 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)(s + 1)$



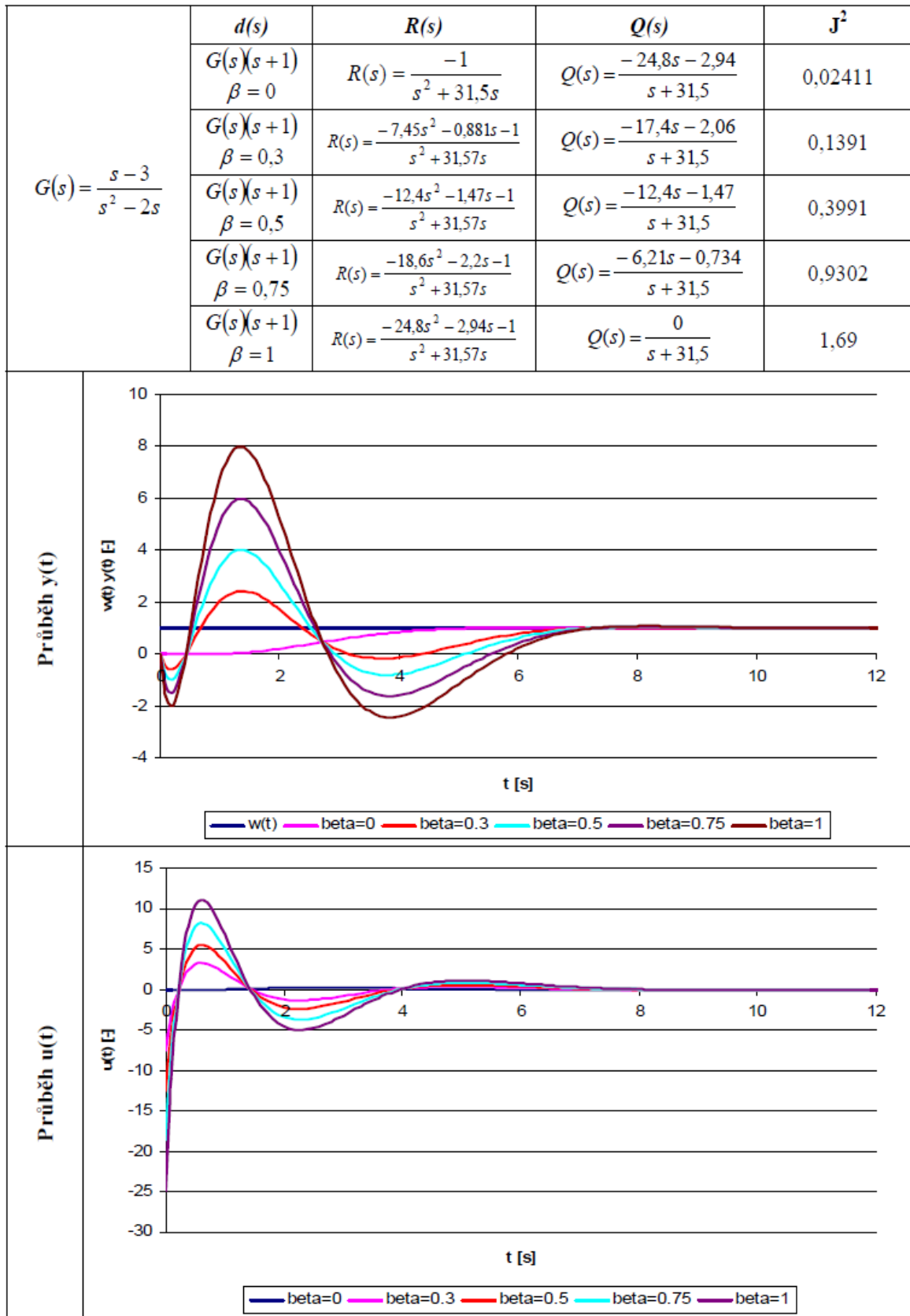
Obr. 10 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází  $d(s) = g(s)n(s)$



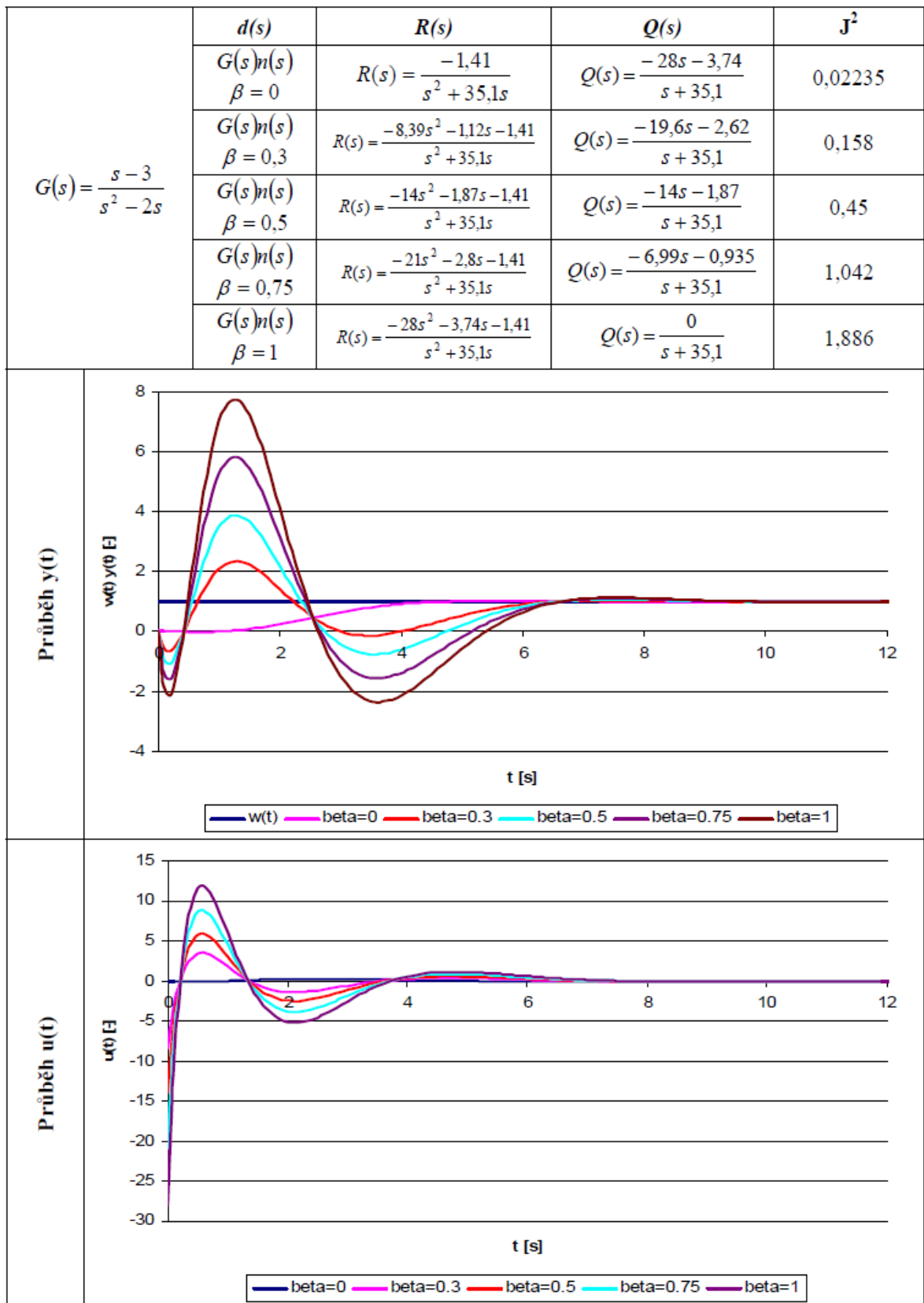

 Obr. 11 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)(s+1)$



Obr. 12 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)a^+$



Obr. 13 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)(s + 1)$



Obr. 14 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází  $d(s) = g(s)n(s)$

### 6.3 Vliv přiřazení pólů na průběh regulačního pochodu

Regulovanou soustavu předpokládáme v obecném tvaru:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (198)$$

Pro ukázkou vlivu přiřazení pólů na průběh regulačního pochodu volíme soustavu, kterou lze obecně považovat za jednu z nejobtížněji říditelných – jedná se o kmitavou nestabilní soustavu s neminimální fází:

$$G(s) = \frac{-s + 2}{s^2 - 2s + 6} \quad (199)$$

K regulaci soustavy (199) bude použit regulátor 2DOF.

V prvním případě je demonstrován vliv tvaru polynomu  $d(s)$  na průběh regulačního pochodu. Polynomy  $d(s)$  volíme jako:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} = (s + 1)^4 \quad (200)$$

$$d(s) = n(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg n} = n(s)(s + 1) \quad (201)$$

$$d(s) = g(s)(s + \alpha)^{\deg d - \deg g} = g(s)(s + 1) \quad (202)$$

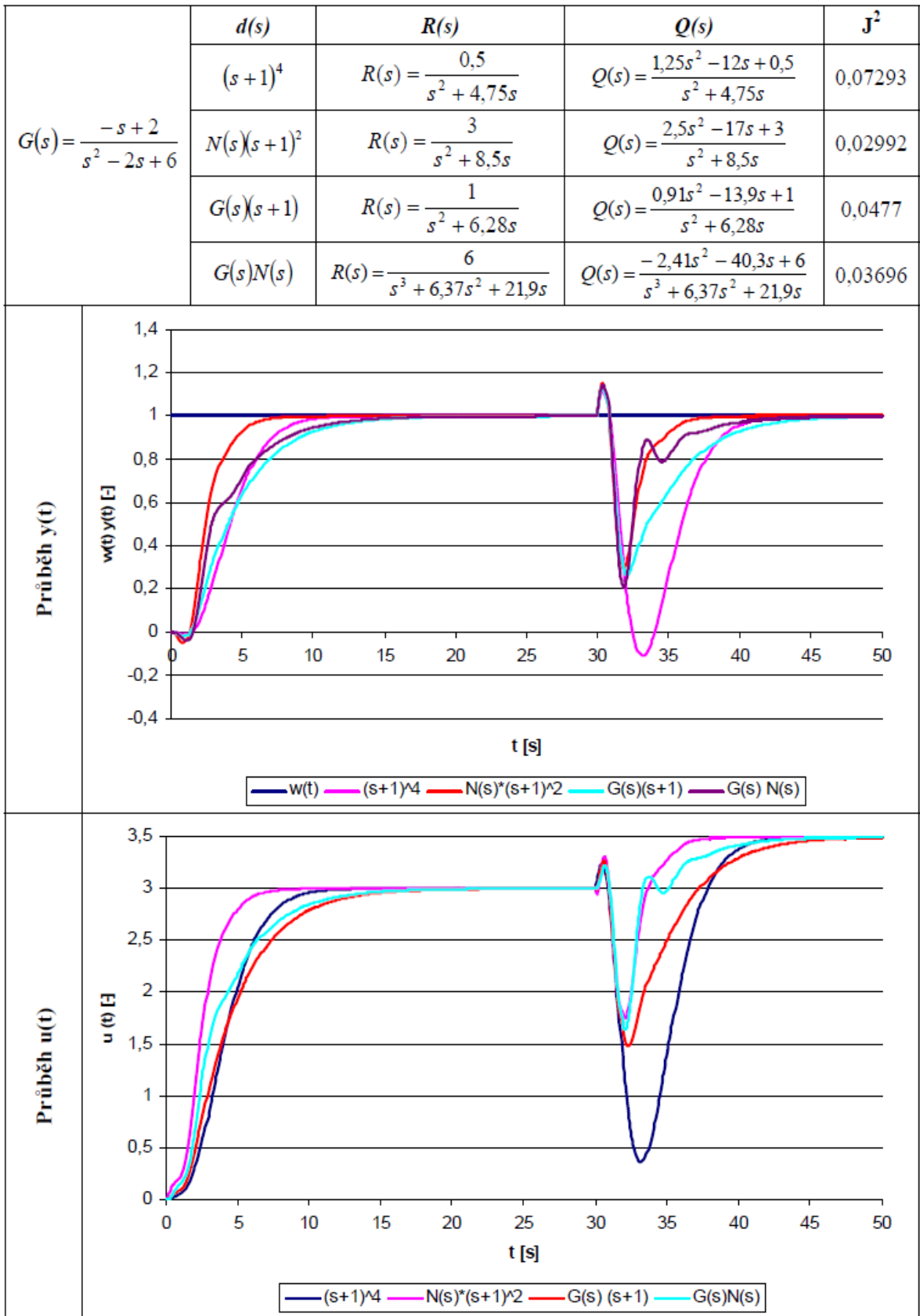
$$d(s) = g(s)n(s) \quad (203)$$

V dalším případě je pak zkoumán vliv váhového koeficientu  $\varphi$  na průběh regulačního pochodu. Polynom  $d(s)$  uvažujeme ve tvaru (202) a hodnoty koeficientu  $\varphi$  volíme jako  $\varphi = 0.2, 1, 5, 10$ .

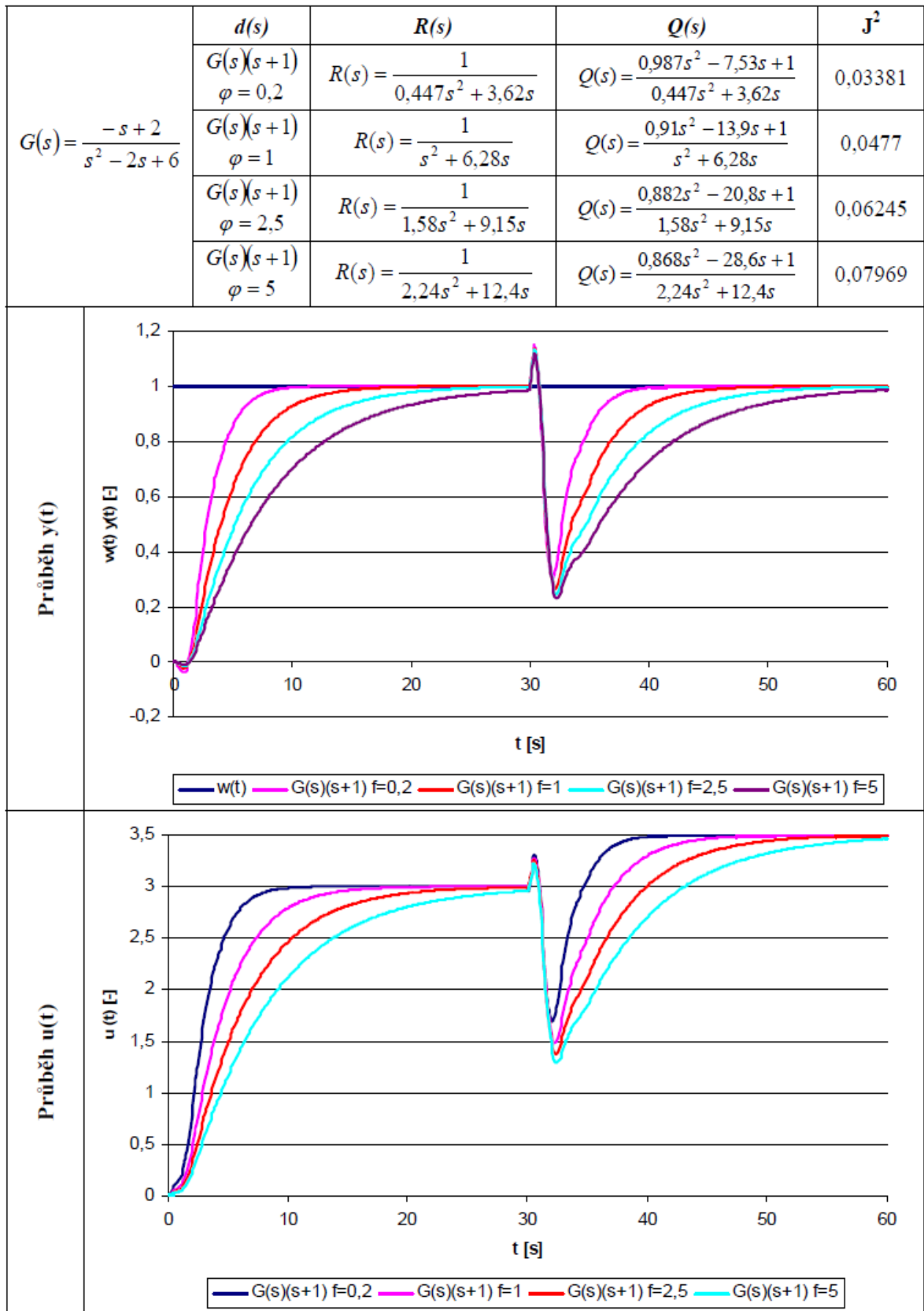
V simulovaném regulačním pochodu je dále ukázán vliv poruchové veličiny ve tvaru skokové funkce. Parametry poruchového signálu:

$$v(t) = 0 \quad \text{pro } t < 30 \quad (204)$$

$$v(t) = -0.5 \quad \text{pro } t \geq 30 \quad (205)$$



Obr. 15 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází



Obr. 16 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází – vliv parametru  $\varphi$

## 6.4 Řízení procesů s dopravním zpožděním

Pro ukázkou regulace soustav s dopravním zpožděním byly zvoleny tři následující typy:

- Integrační systém s dopravním zpožděním (ITDS)
- Stabilní systém 1. řádu s dopravním zpožděním (SFOTDS)
- Nestabilní systém 1. řádu s dopravním zpožděním (UFOTDS)

Přenosové funkce systémů ITDS, SFOTDS, UFOTDS uvažujeme ve tvaru:

$$G_1(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau_d s} \quad (206)$$

$$G_{2,3}(s) = \frac{K}{\tau s \pm 1} e^{-\tau_d s} \quad (207)$$

Člen dopravního zpoždění  $e^{-\tau_d s}$  aproximujeme pomocí Padé aproximace na tvar:

$$e^{-\tau_d s} \approx \frac{2 - \tau_d s}{2 + \tau_d s} \quad (208)$$

Člen (208) dosadíme do (206) a aproximovanou přenosovou funkci upravíme do tvaru:

$$G_{A1}(s) = \frac{K(2 - \tau_d s)}{s(2 + \tau_d s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s} \quad (209)$$

kde:  $b_1 = -K$ ,  $b_0 = \frac{2K}{\tau_d}$ ,  $a_1 = \frac{2}{\tau_d}$

Obdobný postup uplatníme také pro přenosovou funkci (207):

$$G_{A2,3}(s) = \frac{K(2 - \tau_d s)}{(\tau s \pm 1)(2 + \tau_d s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (210)$$

kde:  $b_1 = -\frac{K}{\tau}$ ,  $b_0 = \frac{2K}{\tau \tau_d}$ ,  $a_1 = \frac{2\tau \pm \tau_d}{\tau \tau_d}$ ,  $a_0 = \pm \frac{2}{\tau \tau_d}$

Pokud se jedná o nestabilní soustavu UFOTDS je vhodné, aby byla splněna podmínka  $\tau_d < 2\tau$ . Pokud tato podmínka splněna není, je velmi pravděpodobné, že vypočítaný regulátor bude nestabilní.



V následujících simulacích bude použit regulátor konfigurace TFC a polynom  $d(s)$  bude přednostně volen pomocí metod LQ řízení. Dále zde bude ukázán vliv poruchového signálu ve tvaru skoku.

Pro výpočet koeficientů polynomu  $g(s)$  a parametrů regulátoru můžeme obecně použít stejné vztahy, jaké byly odvozeny v předcházejících kapitolách. V takovém případě si vypočítáme parametry soustavy  $a_1, a_0, b_1, b_0$  zvlášť podle výše uvedených vztahů a poté s nimi pracujeme stejně jako ve všech předchozích příkladech.

Pokud však navrhujeme aplikaci pro jeden konkrétní typ soustavy, může být výhodné provést následující úpravy:

### SOUSTAVA IDTS:

Výpočet koeficientů polynomu  $g(s)$ :

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (211)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1g_3 + \frac{4\varphi}{\tau_d^2}} \quad (212)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + K^2} \quad (213)$$

$$g_0 = \frac{2K}{\tau_d} \quad (214)$$

Pro soustavu ITDS můžeme polynom  $n(s)$  volit pouze jako  $n(s) = (s + \alpha)^{\deg d - \deg g}$

nebo  $n(s) = a^+ = \left( s + \frac{2}{\tau_d} \right)$ .

V následujícím odstavci bude ukázán výpočet obecného regulátoru TFC. Vztahy pro výpočet stupňů jednotlivých polynomů v regulačním obvodu byly uvedeny v kapitole 2.4.

Obě vstupní veličiny (žádaná hodnota i porucha) budou voleny jako skokový signál.

Polynom  $d(s)$  bude volen ve tvaru:

$$d(s) = (g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0) \left( s + \frac{2}{\tau_d} \right) \quad (215)$$

Přenosy regulátorů předpokládáme obecně ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_2 s + q_1}{p_1 s + p_0} \quad (216)$$

$$R(s) = \frac{r(s)}{sp(s)} = \frac{r_2 s^2 + r_1 s + r_0}{s(p_1 s + p_0)} \quad (217)$$

Pomocný polynom  $t(s)$  předpokládáme ve tvaru:

$$t(s) = t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \quad (218)$$

Hodnoty koeficientů jmenovatele jednotlivých regulátorů  $Q(s)$ ,  $R(s)$  a neznámého polynomu  $t(s)$  získáme řešením charakteristické rovnice:

$$a(s) \cdot s \cdot p(s) + b(s) \cdot t(s) = d(s) \quad (219)$$

Řešení můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\tau_d} & 1 & -K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\tau_d} & \frac{2K}{\tau_d} & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau_d} & -K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau_d} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_3 \\ \frac{2g_3}{\tau_d} + g_2 \\ \frac{2g_2}{\tau_d} + g_1 \\ \frac{2g_1}{\tau_d} + g_0 \\ \frac{2g_0}{\tau_d} \end{pmatrix} \quad (220)$$

Pro výpočet koeficientů čitatele jednotlivých regulátorů použijeme následující vztahy:

$$r_0 = t_0, \quad r_1 = \beta_1 t_1, \quad r_2 = \beta_2 t_2 \quad (221)$$

$$q_1 = (1 - \beta_1) t_1, \quad q_2 = (1 - \beta_2) t_2 \quad (222)$$

## SOUSTAVA SFOTDS A UFOTDS:

Výpočet koeficientů polynomu  $g(s)$ :

$$g_3 = \sqrt{\varphi} \quad (223)$$

$$g_2 = \sqrt{2g_1 g_3 + \frac{\varphi}{\tau \tau_d} \left[ \frac{(2\tau \pm \tau_d)^2}{\tau \tau_d} \mp 4 \right]} \quad (224)$$

$$g_1 = \sqrt{2g_0g_2 + \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{4\varphi}{\tau_d} + K^2 \right)} \quad (225)$$

$$g_0 = \frac{2K}{\tau\tau_d} \quad (226)$$

Při volbě polynomu  $d(s)$  pro systémy SFOTDS a UFOTDS lze využít prakticky jakoukoliv z možností uvedených v kapitole 3.3. V následující části bude ukázán návrh regulátorů TFC pro polynom  $d(s)$  zvolený ve tvaru:

$$d(s) = (g_3s^3 + g_2s^2 + g_1s + g_0)(s + \alpha) \quad (227)$$

Pro volbu (227) jsou stupně polynomu  $p(s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$  a  $t(s)$  stejné jako při návrhu pro soustavu ITDS. Proto zde bude uvedena pouze výsledná maticová rovnice:

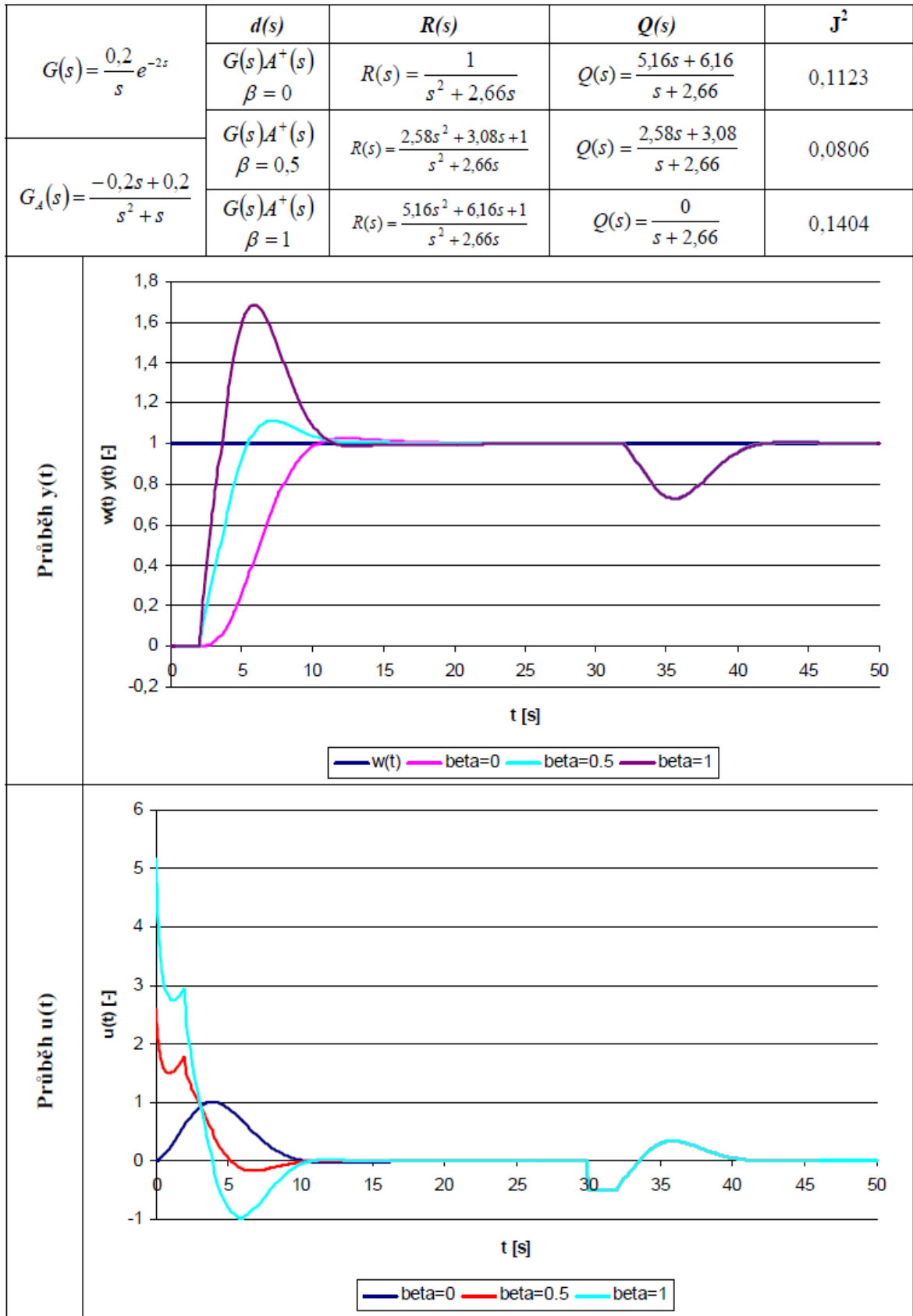
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\tau \pm \tau_d & 1 & -\frac{K}{\tau} & 0 & 0 \\ \tau\tau_d & & \frac{2K}{\tau} & -\frac{K}{\tau} & 0 \\ \pm \frac{2}{\tau\tau_d} & \frac{2\tau \pm \tau_d}{\tau\tau_d} & \frac{2K}{\tau\tau_d} & -\frac{K}{\tau} & 0 \\ 0 & \pm \frac{2}{\tau\tau_d} & 0 & \frac{2K}{\tau\tau_d} & -\frac{K}{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K}{\tau\tau_d} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_3 \\ \alpha g_3 + g_2 \\ \alpha g_2 + g_1 \\ \alpha g_1 + g_0 \\ \alpha g_0 \end{pmatrix} \quad (228)$$

Pro výpočet koeficientů čitatele jednotlivých regulátorů použijeme následující vztahy:

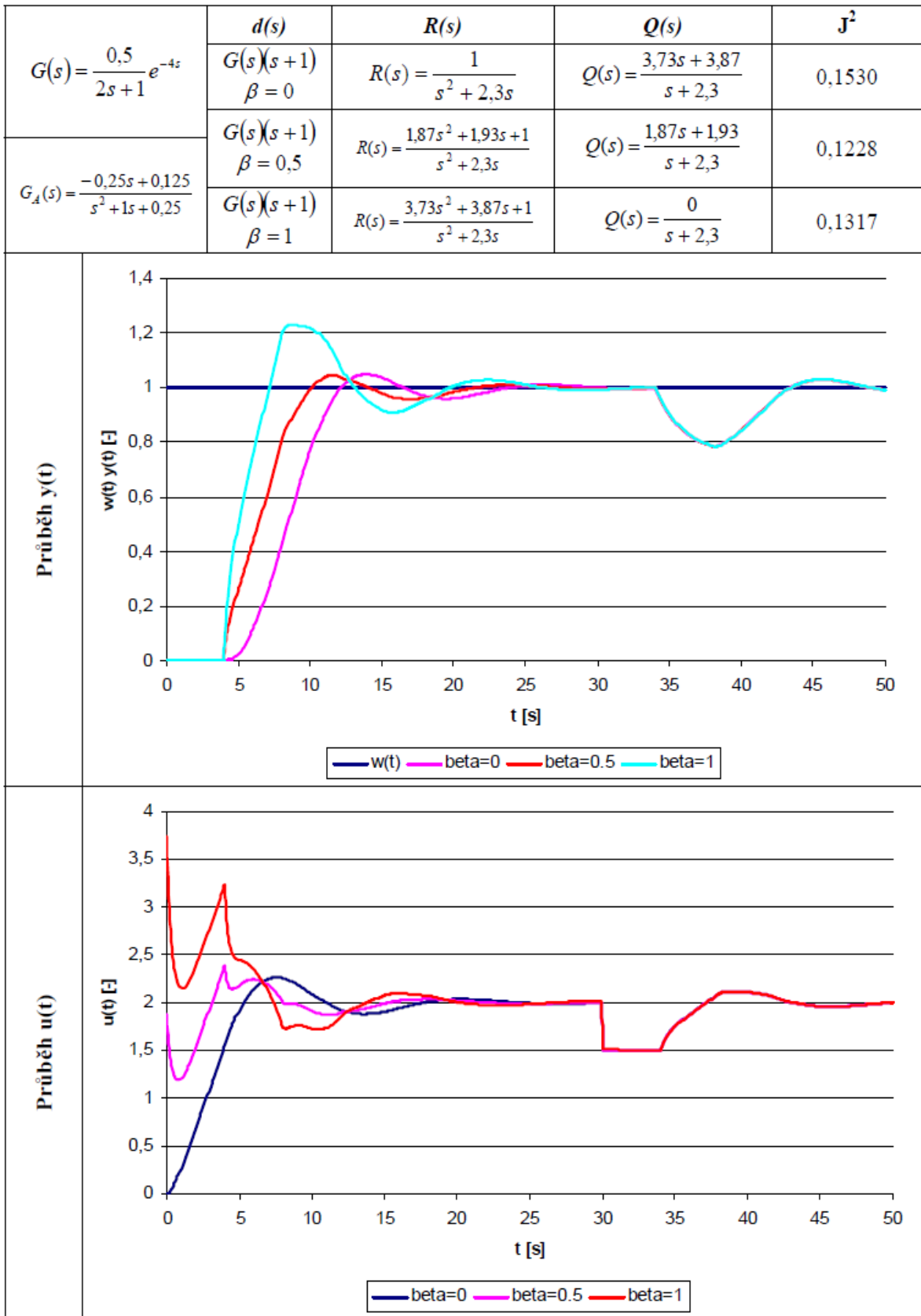
$$r_0 = t_0, \quad r_1 = \beta_1 t_1, \quad r_2 = \beta_2 t_2 \quad (229)$$

$$q_1 = (1 - \beta_1)t_1, \quad q_2 = (1 - \beta_2)t_2 \quad (230)$$

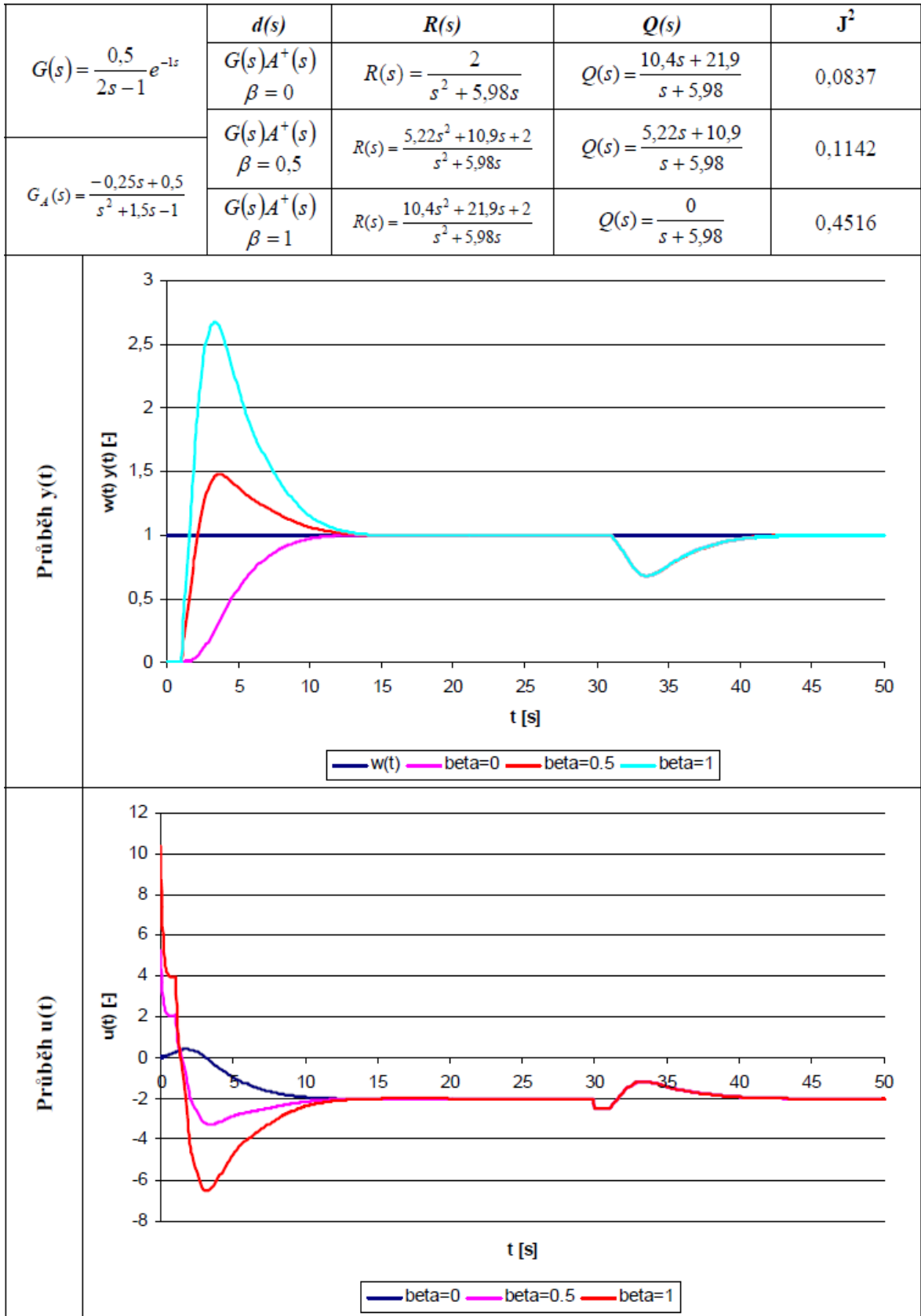
Pozn.: V této kapitole byl ukázán postup při aproximaci dopravního zpoždění pouze pro tři typy vybraných soustav, u kterých je řád aproximovaného přenosu roven dvěma. Aproximace dopravního zpoždění u všech dalších typů soustav totiž vede na přenosy vyšších řádů, pro které je odvození vztahů pro výpočet parametrů regulátoru již poměrně obtížné a přesahuje rozsah zadání této práce.



Obr. 17 - Integrovní soustava s dopravním zpožděním



Obr. 18 – Stabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním



Obr. 19 – Nestabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním

## 6.5 Regulační pochody pro nestandardní vstupní signály

V této kapitole je ukázán regulační pochod pro nestandardní vstupní signály. Žádanou hodnotu i poruchu uvažujeme jako harmonické funkce ve tvaru:

$$w(t) = A_w \cdot \sin(\omega_w t), \quad v(t) = A_v \cdot \sin(\omega_v t) \quad (231)$$

Přenosy vstupních signálů potom předpokládáme ve tvaru:

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} = \frac{A_w}{s^2 + \omega_w^2}, \quad V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} = \frac{A_v}{s^2 + \omega_v^2} \quad (232)$$

kde:  $A_x$  - amplituda vstupního signálu

$\omega_x$  - úhlová rychlost vstupního signálu

Pro ukázkou regulačního pochodu pro harmonické vstupní signály volíme regulovanou soustavu jako:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 - s - 2} \quad (233)$$

Vstupní signály volíme jako:

$$w(t) = A_w \cdot \sin(\omega_w t) = 2 \cdot \sin(0,3t) \quad (234)$$

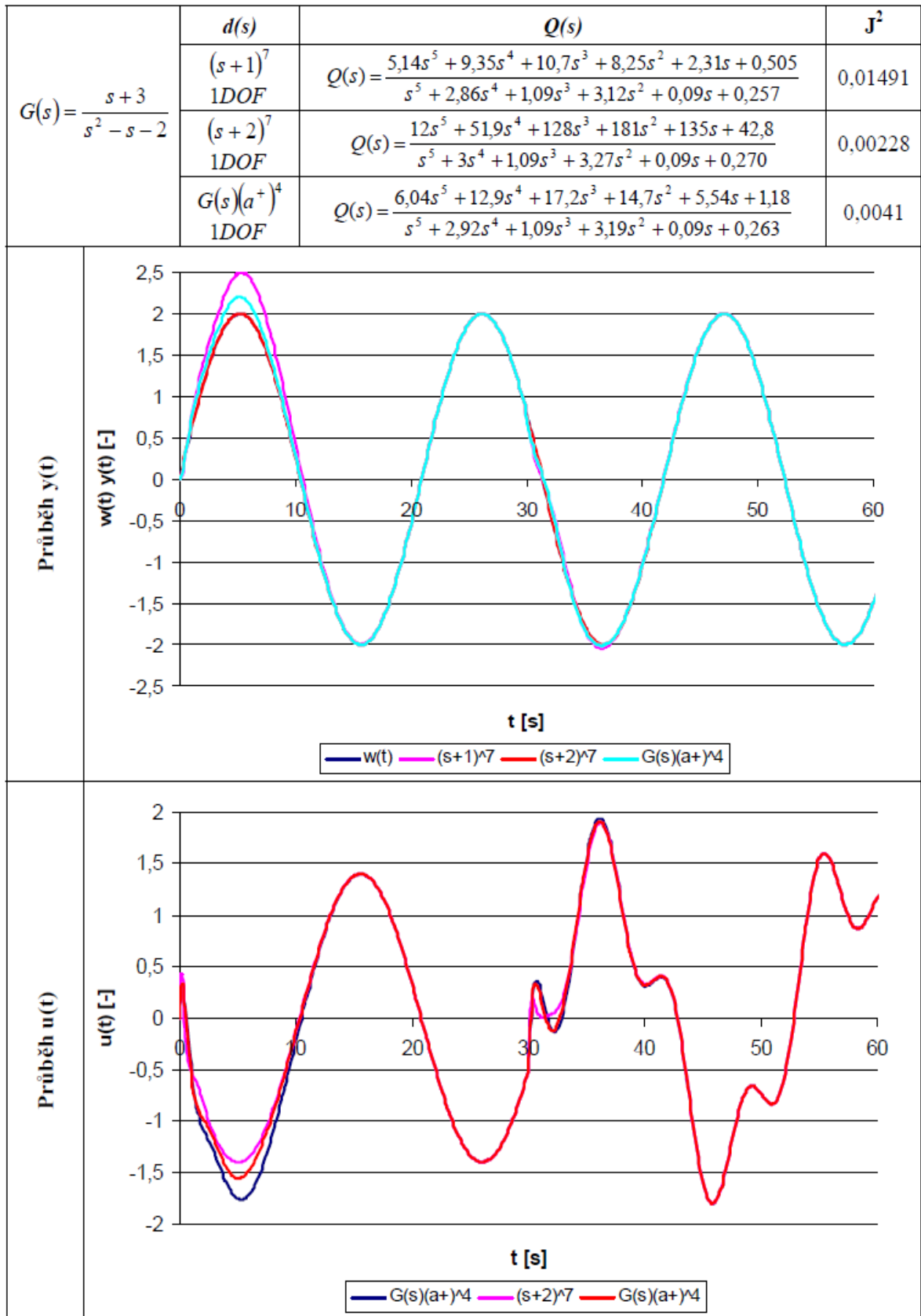
$$v(t) = A_v \cdot \sin(\omega_v t) = 0,5 \cdot \sin(t) \quad \text{pro } t \geq 30 \quad (235)$$

K regulaci soustavy (233) bude použit regulátor 1DOF a polynom  $d(s)$  bude volen jako:

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} = (s + 1)^7 \quad (236)$$

$$d(s) = (s + \alpha)^{\deg d} = (s + 2)^7 \quad (237)$$

$$d(s) = g(s)(a^+)^{\deg d - \deg g} = g(s)(a^+)^4 \quad (238)$$



Obr. 20 – Regulační pochod pro harmonické vstupní signály



## 7 ADAPTIVNÍ METODY PŘI ŘÍZENÍ NELINEÁRNÍCH PROCESŮ

Většina technologických procesů patří mezi nelineární systémy, u kterých je ustálený stav i dynamické chování nelineární. To způsobuje značné problémy při regulaci těchto procesů pomocí klasických regulátorů s neproměnnými parametry. Jednou z možností, jak tento problém vyřešit, je využití adaptivní strategie založené na vhodném vstupně-výstupním lineárním modelu (ELM), u kterého průběžně nastavujeme parametry. Tyto parametry jsou následně využity při výpočtu parametrů regulátoru, který se provádí paralelně s procesem identifikace.

Regulátor sám může být buď spojitý nebo diskrétní. Pro návrh spojitého regulátoru musíme znát spojitý ELM a jeho charakteristiky, naopak pro návrh diskrétního regulátoru musíme použít diskrétní ELM regulovaného procesu. Obecně lze říci, že spojitý systém řízení je vhodnější pro regulaci silně nelineárních systémů. Pokud bychom chtěli pro řízení takového systému použít diskrétní regulátor, museli bychom pro zvládnutí nelinearity vzorkovat s velmi vysokou frekvencí. V takové případě by však mohl nastat problém, protože při použití Z-transformace nesmí být vzorkovací perioda příliš krátká.

V praxi existují dvě základní metody jak získat spojitý ELM. První metoda je založena na filtrování vstupních a výstupních signálů, kde mají filtrované proměnné stejné vlastnosti (v proměnné  $s$ ) jako jejich nefiltrované protipóly. Derivace filtrovaných signálů, které jsou nezbytné pro odhad spojitého ELM, jsou získány pomocí diferenciálního filtru. Tato metoda má ale také některé nevýhody – jedná se především o řešení dalších diferenciálních rovnic, které reprezentují filtry a dále také o nutnost odhadovat časové konstanty těchto filtrů.

Druhá metoda je založena na použití vnějšího delta modelu řízeného procesu se stejnou strukturou jakou má spojitý model. Přestože delta modely patří mezi diskrétní modely, neprojevují se u nich při zkracování periody vzorkování nepříznivé vlastnosti jako u Z-modelů. Naopak platí, že pro malé periody vzorkování (vzhledem k dynamice procesu) parametry delta modelu konvergují k parametrům spojitého modelu. Navíc parametry delta modelů mohou být odhadnuty přímo ze vzorkovaných signálů bez nutnosti je filtrovat.

V této části se budeme dále zabývat nelineárním SISO systémem, pro který bude navrhován regulátor pomocí polynomiální metody syntézy. [2]

## 7.1 Externí lineární $\delta$ -model řízeného procesu

Spojité externí lineární model (ELM) byl zvolen na základě předběžné znalosti dynamického chování řízeného nelineárního procesu. Tento model je popsán v časové oblasti diferenciální rovnicí ve tvaru:

$$a(\sigma)y(t) = b(\sigma)u(t) \quad (239)$$

a v komplexní oblasti přenosem

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (240)$$

s podmínkou ryzosti  $\deg(b) \leq \deg(a)$ .

## 7.2 Delta model procesu

Zavedeme delta operátor definovaný jako:

$$\delta = \frac{q-1}{T_0} \quad (241)$$

kde  $q$  představuje operátor posuvu a  $T_0$  periodu vzorkování. Když se perioda vzorkování zkracuje, potom delta operátor aproximuje operátor derivace  $\sigma$  tak, že platí:

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} \delta = \sigma \quad (242)$$

a delta model

$$a'(\delta) \cdot y(t') = b'(\delta) \cdot u(t') \quad (243)$$

aproximuje spojitý model. Ve vztahu (243) představuje  $t'$  diskrétní čas a  $a'$ ,  $b'$  jsou polynomy v  $\delta$ .

### ODHADY PARAMETRŮ DELTA-MODELU.

Substitucí  $t' = k - n$ , kde  $k \geq n$ , můžeme rovnici (243) přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned} \delta^n y(k-n) = & b'_m \delta^m u(k-n) + \dots + b'_1 \delta u(k-n) + b'_0 u(k-n) - a'_{n-1} \delta^{n-1} y(k-n) - \dots \\ & \dots - a'_1 \delta y(k-n) - a'_0 y(k-n) \end{aligned} \quad (244)$$

Podmínky v rovnici (244) můžeme zapsat jako:

$$\delta^i y(k-n) = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j}{T_0^i} \binom{i}{j} y(k-n+i-j) \quad (245)$$

pro  $i=0,1,\dots,n$ , a:

$$\delta^l u(k-n) = \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j}{T_0^l} \binom{l}{j} u(k-n+l-j) \quad (246)$$

pro  $l=0,1,\dots,m$ .

Okamžitá hodnota řízeného výstupu  $y(k)$  je obsažena pouze v levé části výrazu (244), pro  $i=n$  v (245). Nyní označme:

$$\begin{aligned} \varphi_y(k) &= \delta^n y(k-n), \varphi_y(k-1) = \delta^{n-1} y(k-n), \dots, \varphi_y(k-n+1) = \delta y(k-n), \\ \varphi_y(k-n) &= y(k-n), \varphi_u(k-n+m) = \delta^m u(k-n), \dots, \varphi_u(k-n+1) = \delta u(k-n), \\ \varphi_u(k-n) &= u(k-n) \end{aligned} \quad (247)$$

a regresní vektor:

$$\begin{aligned} \Phi_\delta^T(k-1) &= [-\varphi_y(k-n) \quad -\varphi_y(k-n+1) \quad \dots \quad -\varphi_y(k-1) \\ &\quad \varphi_u(k-n) \quad \varphi_u(k-n+1) \quad \dots \quad \varphi_u(k-n+m)] \end{aligned} \quad (248)$$

Potom vektor parametrů:

$$\Theta_\delta^T = [a'_0 \quad a'_1 \quad \dots \quad a'_{n-1} \quad b'_0 \quad b'_1 \quad \dots \quad b'_m] \quad (249)$$

může být odhadnut rekurzivně regresí modelu ARX.

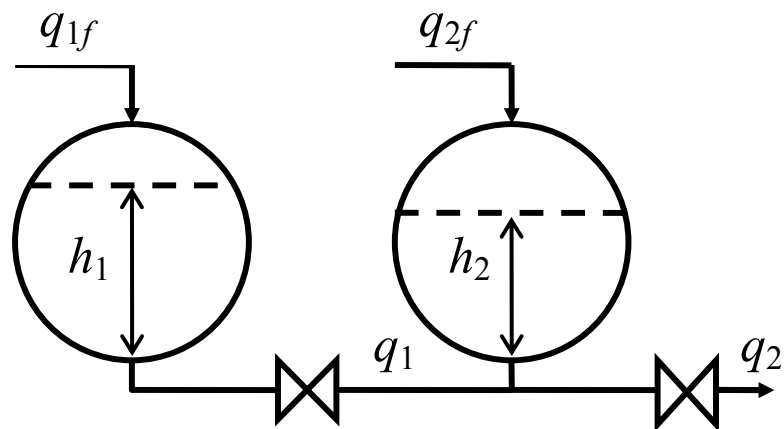
$$\varphi_y(k) = \Theta_\delta^T(k) \Phi_\delta(k-1) + \varepsilon(k) \quad (250)$$

kde  $\varepsilon(k)$  je neměřitelný náhodný člen.

Pro malé hodnoty vzorkovací periody  $T_0$  se odhadované parametry blíží parametrům spojitého modelu tak, že platí:

$$b'_j \rightarrow b_j, \quad j = 0,1,\dots,m \quad a'_i \rightarrow a_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1 \quad (251)$$

### 7.3 Nelineární proces – dvojice kulových zásobníků



Obr. 21 – Dvojice sériově spojených kulových zásobníků

Po zavedení zjednodušení může být model regulované soustavy znázorněn na Obr. 21 popsán pomocí dvojice nelineárních diferenciálních rovnic:

$$\pi h_1 (d_1 - h_1) \frac{dh_1}{dt} + q_1 = q_{1f} \quad (252)$$

$$\pi h_2 (d_2 - h_2) \frac{dh_2}{dt} - q_1 + q_2 = q_{2f} \quad (253)$$

kde:  $d_i$  je průměr zásobníků (pro  $i=1,2$ ),  $h_j$  je výška hladiny kapaliny v nádržích,  $q_j$  představuje odtok kapaliny z nádrží a  $q_{jf}$  označuje přítok kapaliny do jednotlivých nádrží (pro  $j=1,2$ ).

Rychlost odtoku kapaliny závisí na výšce hladiny v nádržích podle vztahů:

$$q_1 = K_1 \sqrt{|h_1 - h_2|} \text{ pokud } h_1 - h_2 < 0 \text{ potom } q_1 = -q_1 \quad (254)$$

$$q_2 = K_2 \sqrt{h_2} \quad (255)$$

kde:  $K_1, K_2$  jsou konstanty ventilu

Počáteční podmínky pro (252) a (253) jsou ustálené výšky hladiny  $h_1(0) = h_1^s$ ,  $h_2(0) = h_2^s$ . Parametry modelu a hodnoty proměnných v pracovním bodě použitým pro simulaci jsou:

$$K_1 = 0.85 \text{ m}^{2.5}/\text{min}, \quad K_2 = 0.5 \text{ m}^{2.5}/\text{min}, \quad D = d_1 = d_2 = 2 \text{ m}, \quad h_1^s = 1.5 \text{ m}, \quad h_2^s = 1.3 \text{ m}, \\ q_{1f}^s = 0.38 \text{ m}^3/\text{min} \text{ a } q_{2f}^s = 0.19 \text{ m}^3/\text{min}$$

Obě proměnné (akční veličina i řízená veličina) jsou uvažovány jako odchylky od ustálených hodnot v pracovním bodě:

$$u(t) = q_{1f}(t) - q_{1f}^s \quad (256)$$

$$y(t) = h_2(t) - h_2^s \quad (257)$$

Spojité ELM 2. řádu byl zvolen jako:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (258)$$

Delta model odpovídající (258) má tvar:

$$\delta^2 y(t') + a'_1 \delta y(t') + a'_0 y(t') = b'_0 u(t') \quad (259)$$

Regresní vektor má tvar:

$$\Phi_{\delta}^T(k-1) = (-\varphi_y(k-2) - \varphi_y(k-1) \varphi_u(k-2)) \quad (260)$$

kde:

$$\varphi_y(k-2) = y(k-2) \quad (261)$$

$$\varphi_y(k-1) = \frac{y(k-1) - y(k-2)}{T_0} \quad (262)$$

$$\varphi_u(k-2) = u(k-2) \quad (263)$$

Vektor parametrů delta modelu:

$$\Theta_{\delta}^T(k) = [a'_0 \ a'_1 \ b'_0] \quad (264)$$

je rekurzivně odhadován z rovnice:

$$\varphi_y(k) = \Theta_{\delta}^T(k) \Phi_{\delta}(k-1) + \varepsilon(k) \quad (265)$$

kde:

$$\varphi_y(k) = \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_0^2} \quad (266)$$

Rekurzivní odhad parametrů delta modelu byl prováděn s periodou vzorkování  $T_0 = 0,2$  min. Pro vlastní identifikaci byla použita rekurzivní identifikační metoda se směrovým zapomináním prováděná podle předpisu [4]:

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\mathbf{C}(k-1)\Phi(k)}{1 + \xi(k-1)} \hat{e}(k-1) \quad (267)$$

kde:

$$\xi(k-1) = \Phi^T(k)\mathbf{C}(k-1)\Phi(k) \quad (268)$$

je pomocný skalár a:

$$\hat{e}(k-1) = \varphi_y(k) - \Theta^T(k-1)\Phi(k) \quad (269)$$

je chyba predikce.

Jestliže platí  $\xi(k-1) > 0$ , je čtvercová kovarianční matice aktualizována podle vztahu:

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) - \frac{\mathbf{C}(k-1)\Phi(k)\Phi^T(k)\mathbf{C}(k-1)}{\varepsilon^{-1}(k) + \xi(k-1)} \quad (270)$$

kde:

$$\varepsilon(k) = \varphi(k) - \frac{1 - \varphi(k)}{\xi(k-1)} \quad (271)$$

Jestliže  $\xi(k-1) = 0$ , potom:

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) \quad (272)$$

Hodnotu adaptivního směrového zapominání  $\varphi(k)$  potom počítáme v každé periodě vzorkování podle vztahu:

$$\varphi(k) = \left\{ 1 + (1 + \rho) \cdot \left\{ \ln(1 + \xi(k-1)) + \left[ \frac{(\nu(k)+1)\eta(k)}{1 + \xi(k) + \eta(k)} - 1 \right] \frac{\xi(k)}{1 + \xi(k)} \right\} \right\}^{-1} \quad (273)$$

kde:

$$\eta(k) = \frac{\hat{e}^2(k)}{\lambda(k)}, \quad \nu(k) = \varphi(k-1)[\nu(k-1) + 1], \quad \lambda(k) = \varphi(k-1) \left[ \lambda(k-1) + \frac{\hat{e}^2(k)}{1 + \xi(k)} \right] \quad (274)$$

Pro start algoritmu je vhodné volit následující podmínky:

Prvky hlavní diagonály matice  $C_{ii} = 1000$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\lambda(0) = 0,001$ ,  $\nu(0) = 10^{-6}$ ,  $\rho = 0,99$ . Parametr  $\rho$  je třeba volit velmi opatrně, protože doporučená hodnota je často příliš progresivní a může způsobovat značné problémy se stabilitou simulačního procesu.

Odhady počátečních parametrů  $\hat{\Theta}(0)$  se volí na základě apriorní informace o identifikované soustavě, popř. na základě zkušeností.

Odhady parametrů získané řešením (267) potom aproximují parametry modelu (259).

Pozn.: Při regulaci soustav, u kterých provádíme identifikaci, je vhodné pro prvních několik kroků regulace (cca 10-20 kroků) použít pouze proporcionální regulátor a teprve poté zapojit do obvodu regulátor navržený polynomiální metodou podle parametrů soustavy zjištěných identifikací. Výsledný regulační pochod je díky tomu kvalitnější, než kdybychom použili regulátor navržený pro odhady parametrů na počátku identifikace, kdy se tyto velmi rychle mění. Hodnotu zesílení proporcionálního regulátoru je problematické stanovit obecně. Pro zde uvedený příklad kulových zásobníků velmi dobře vyhovuje rozsah  $r_0 \in \langle 0.35 - 1 \rangle$ .

K vlastní regulaci dvojice sériově spojených zásobníků byl použit regulátor TFC. Z předchozího textu je zřejmé, že se jedná o kombinaci diskrétního a spojitého systému, což při simulaci způsobuje značné problémy. Je třeba si uvědomit, že parametry regulátoru jsou počítány pouze v okamžicích vzorkování, ale akční zásah regulátoru a chování regulované soustavy je třeba počítat spojitě. Abychom toto mohli provádět, je třeba převést jak model soustavy, tak také vlastní regulátor na soustavu diferenciálních rovnic a ty následně vyřešit vhodnou numerickou metodou. V uvedeném příkladu byla použita 4-kroková metoda Runge-Kutta .

## METODA RUNGE-KUTTA

Abychom mohli řešit diferenciální rovnici, musíme ji upravit do následujícího tvaru:

$$\dot{y}(t) = f(x; y(x)) \quad (275)$$

Rovnici ve tvaru (275) potom řešíme vhodnou iterační metodou. Mezi velmi často používané patří metody Runge-Kutta (2-kroková, 4-kroková) (podrobněji např. [10]).

V této práci použitá 4-kroková varianta se provádí podle následujícího předpisu:

$$y(k+1) = y(k) + \frac{1}{6} \cdot (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \quad (276)$$

kde:

$$g_1 = hf(x_n, y(x_n)) \quad (277)$$

$$g_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y(x_n) + \frac{g_1}{2}\right) \quad (278)$$

$$g_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y(x_n) + \frac{g_2}{2}\right) \quad (279)$$

$$g_4 = hf\left(x_n + h; y(x_n) + g_3\right) \quad (280)$$

kde  $h$  je integrační krok

## VÝPOČET AKČNÍHO ZÁSAHU

Přenos jednotlivých částí regulátoru předpokládáme ve tvaru:

$$Q(s) = \frac{U_{v2}(s)}{Y(s)} = \frac{q_2s + q_1}{p_1s + p_0} \quad (281)$$

$$R(s) = \frac{U_{v1}(s)}{E(s)} = \frac{r_2s^2 + r_1s + r_0}{s(p_1s + p_0)} \quad (282)$$

Abychom získali řešitelnou soustavu diferenciálních rovnic, zavedeme pomocnou proměnnou  $z$  a vztahy (281) a (282) upravíme do tvaru:

$$Q(s) = \frac{U_{v2}(s)}{Z(s)} \cdot \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{q_2s + q_1}{1} \cdot \frac{1}{p_1s + p_0} \quad (283)$$

$$R(s) = \frac{U_{v1}(s)}{Z(s)} \cdot \frac{Z(s)}{E(s)} = \frac{r_2s^2 + r_1s + r_0}{1} \cdot \frac{1}{p_1s^2 + p_0s} \quad (284)$$

Úpravou (281) na tvar (283) získáme dva samostatné přenosy, které převedeme do časové oblasti. Získáme tak dvojici diferenciálních rovnic:

$$u_{v2}(t) = q_2\dot{z}(t) + q_1z(t) \quad (285)$$



$$y(t) = p_1 \dot{z}(t) + p_0 z(t) \quad (286)$$

Při řešení rovnic (285) a (286) využijeme postup známý ze stavového popisu systému a zavedeme pomocnou proměnnou  $x_1$ , pro kterou platí:

$$z = x_1 \quad (287)$$

$$\dot{z} = \dot{x}_1 \quad (288)$$

Dosazením (287) a (288) do (286) a následnou úpravou získáme první diferenciální rovnici pro výpočet pomocných proměnných nezbytných pro výpočet akčního zásahu:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{p_1} y(t) - \frac{p_0}{p_1} x_1(t) \quad (289)$$

Vztah (289) dosadíme do (285). Následnou úpravou získáme první rovnici pro výpočet akčního zásahu regulátoru:

$$u_{v2}(t) = \frac{q_2}{p_1} y(t) + \left( q_1 - \frac{p_0 \cdot q_2}{p_1} \right) x_1(t) \quad (290)$$

Zcela analogický postup použijeme také na (284). Získáme opět dvojici diferenciálních rovnic:

$$u_{v1}(t) = r_2 \ddot{z}(t) + r_1 \dot{z}(t) + r_0 z(t) \quad (291)$$

$$e(t) = p_1 \ddot{z}(t) + p_0 \dot{z}(t) \quad (292)$$

Opět zavedeme dvojici pomocných proměnných  $x_2$  a  $x_3$ , pro které platí:

$$z = x_2 \quad (293)$$

$$\dot{z} = \dot{x}_2 = x_3 \quad (294)$$

$$\ddot{z} = \dot{x}_3 \quad (295)$$

Dosazením (295) a (294) do (292) získáme druhou diferenciální rovnici:

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{p_1} e(t) - \frac{p_0}{p_1} x_3 \quad (296)$$

Poslední diferenciální rovnici potom získáme ze vztahu (294):

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (297)$$

Vztahy (296) a (297) dosadíme do (291). Následnou úpravou získáme druhou rovnici nutnou pro výpočet akčního zásahu regulátoru:

$$u_{v1}(t) = \frac{r_2}{p_1} e(t) + \left( r_1 - \frac{p_0 r_2}{p_1} \right) x_3 + r_0 x_2 \quad (298)$$

Akční zásah regulátoru vypočítáme dosazením rovnic (290) a (298) do vztahu:

$$u(t) = u_{v1}(t) - u_{v2}(t) \quad (299)$$

Výpočet pomocných proměnných  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  provedeme pomocí 4-krokové metody Runge-Kutta.

Pozn.: Pro kvalitnější průběh regulace je vhodné na začátku regulace nepoužívat žádanou hodnotu přímo ve tvaru skoku, ale použít výstupní signál filtru 1. řádu, na jehož vstupu působí skokový signál s požadovanými parametry. Soustavu potom můžeme volit ve tvaru:

$$G_w(s) = \frac{W_0(s)}{W(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (300)$$

přičemž platí:  $\tau \approx 0,1 \cdot (T_p + T_n)$

Pro účely simulace můžeme s přijatelnou přesností upravený průběh žádané veličiny  $w_0(t)$  vypočítat podle vztahu:

$$W_0(k) = W_0(k-1) + [W(k) - W_0(k-1)] \frac{T_0}{\tau} \quad (301)$$

## 7.4 Průběhy regulace pro model dvojice kulových zásobníků

### OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ:

Polynom:  $d(s) = g(s)(s + 0,5)$  pro  $\varphi_1 = 5$ ,  $\varphi_2 = 50$ ,  $\varphi_3 = 100$

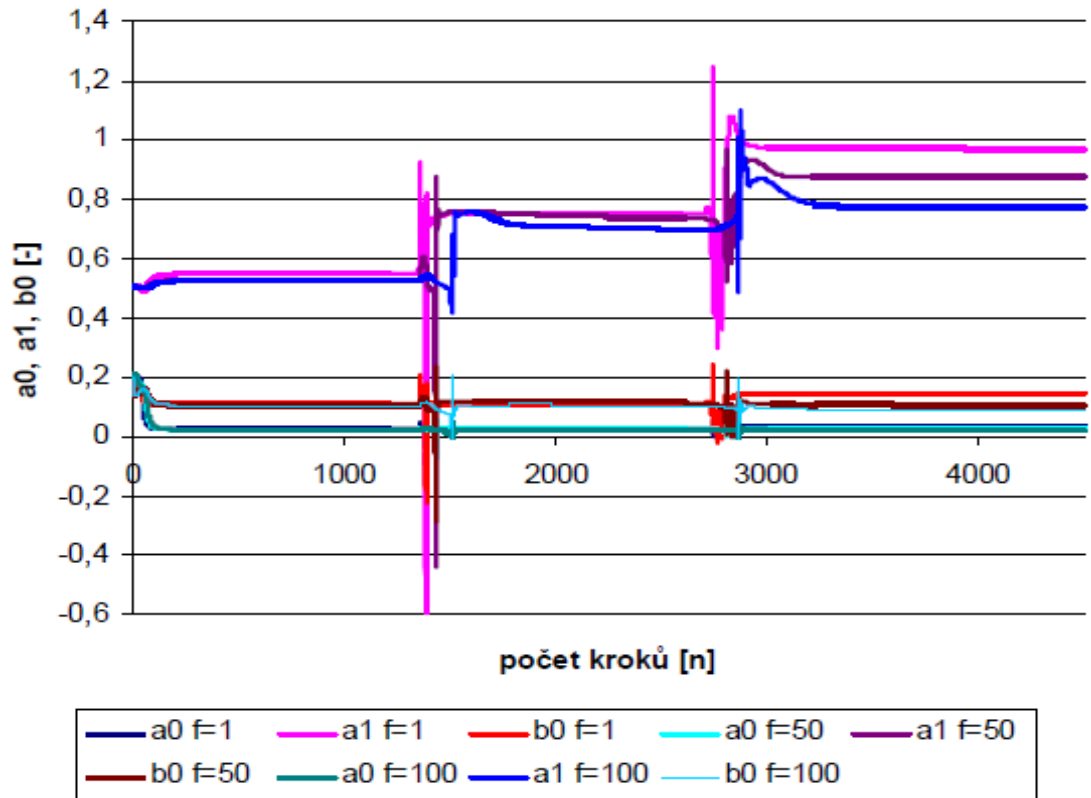
Nastavení regulátoru:  $\beta = 0$

Perioda vzorkování:  $T_0 = 0,2$  min

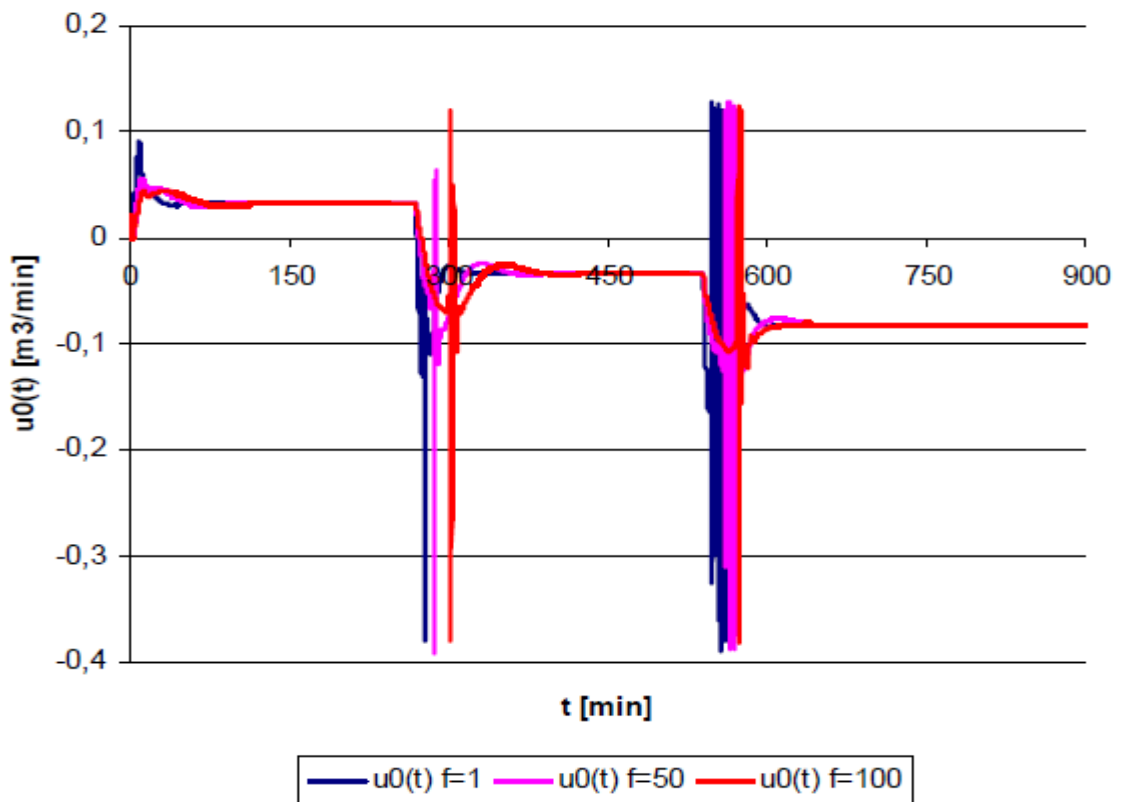
Doba trvání regulačního pochodu:  $t = 900$  min

Nastavení identifikačního procesu:  $C_{ii} = 1000$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\lambda(0) = 0,001$ ,

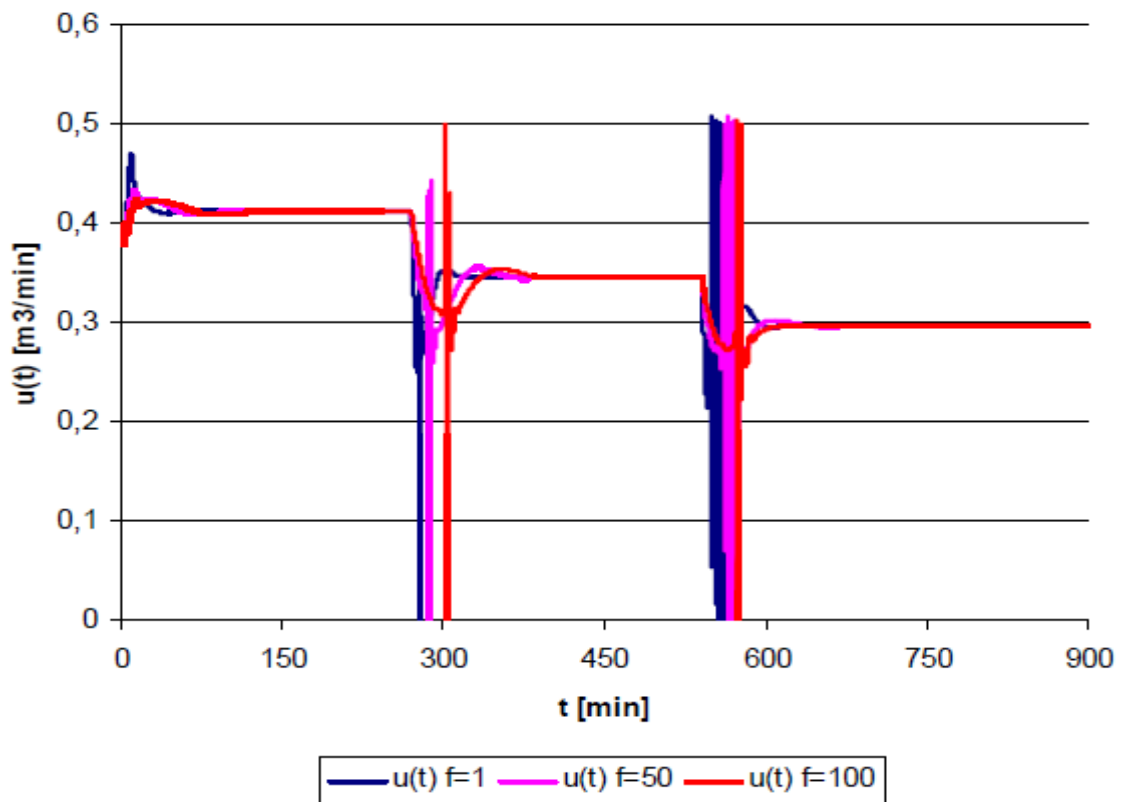
$\nu(0) = 10^{-6}$ ,  $\rho = 0,99$



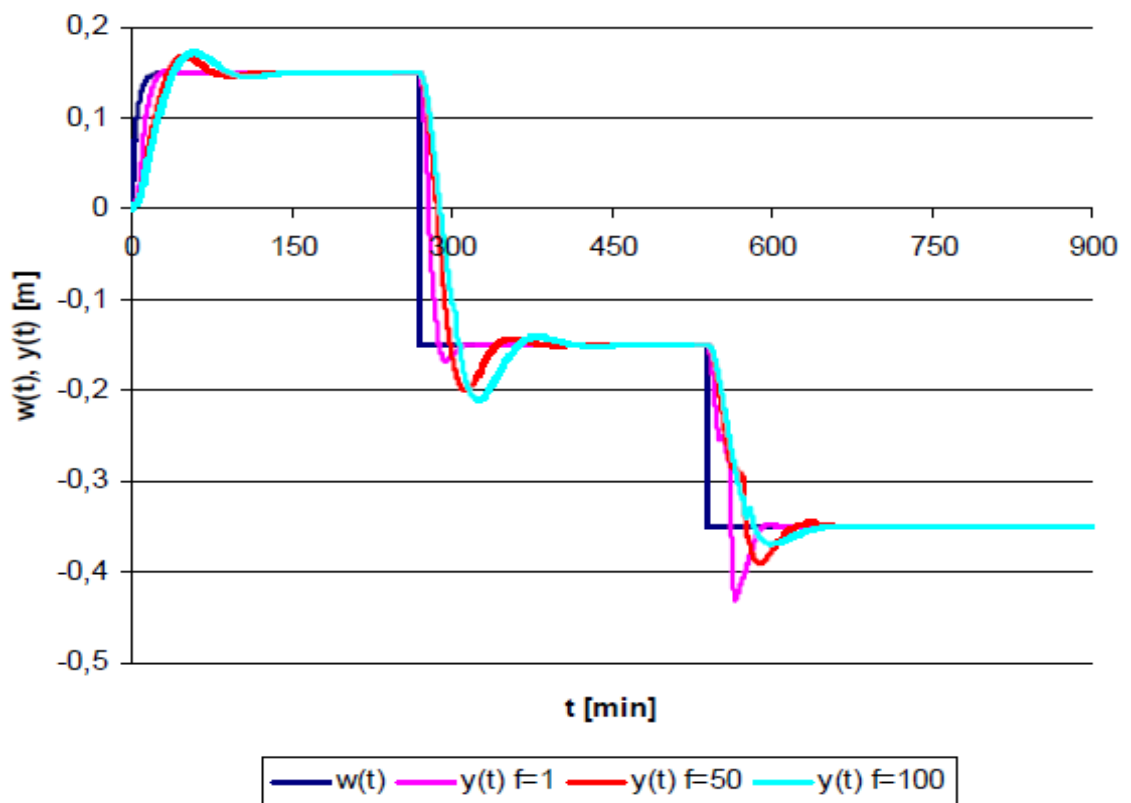
Obr. 22 – Odhad parametrů pro různé hodnoty  $\mu$



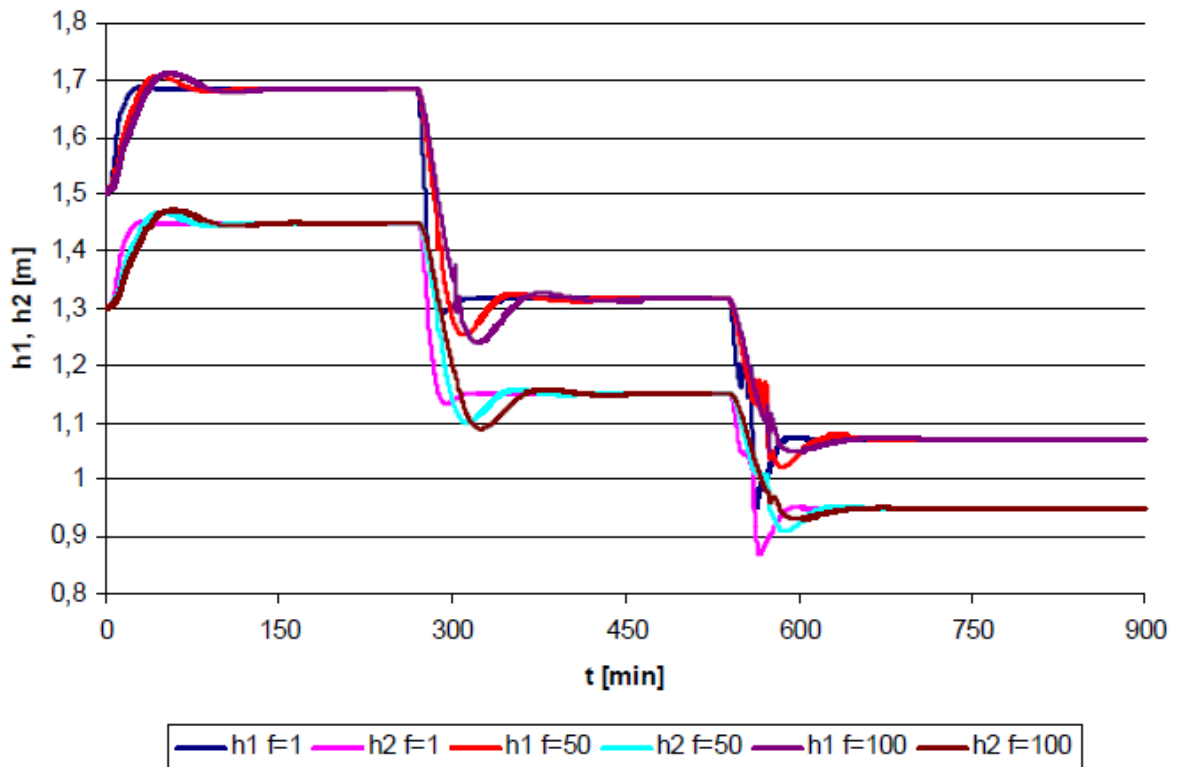
Obr. 23 – Akční zásah  $u_0(t)$  pro různé hodnoty  $\mu$



Obr. 24 – Akční zásah vstupující do soustavy pro různé hodnoty  $\mu$



Obr. 25 – Regulační pochod pro různé hodnoty  $\mu$

Obr. 26 – Výška hladiny pro různé hodnoty  $\mu$ **Hodnota kritéria J**

$$J = 0,0024 \text{ pro } \varphi = 1$$

$$J = 0,0032 \text{ pro } \varphi = 50$$

$$J = 0,0028 \text{ pro } \varphi = 100$$

**VÝCENÁSOBNÝ REÁLNÝ PÓL:**

$$\text{Polynom: } d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$$

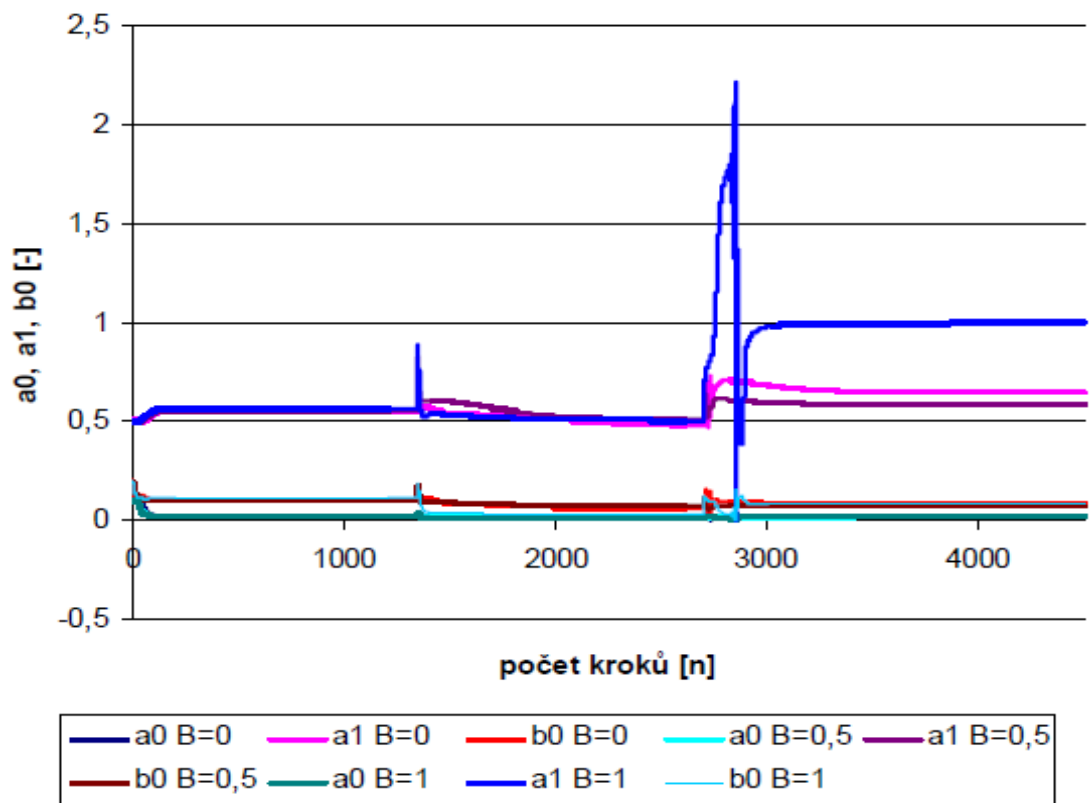
$$\text{Nastavení regulátoru: } \beta = 0, \beta = 0,5, \beta = 1$$

$$\text{Perioda vzorkování: } T_0 = 0,2 \text{ min}$$

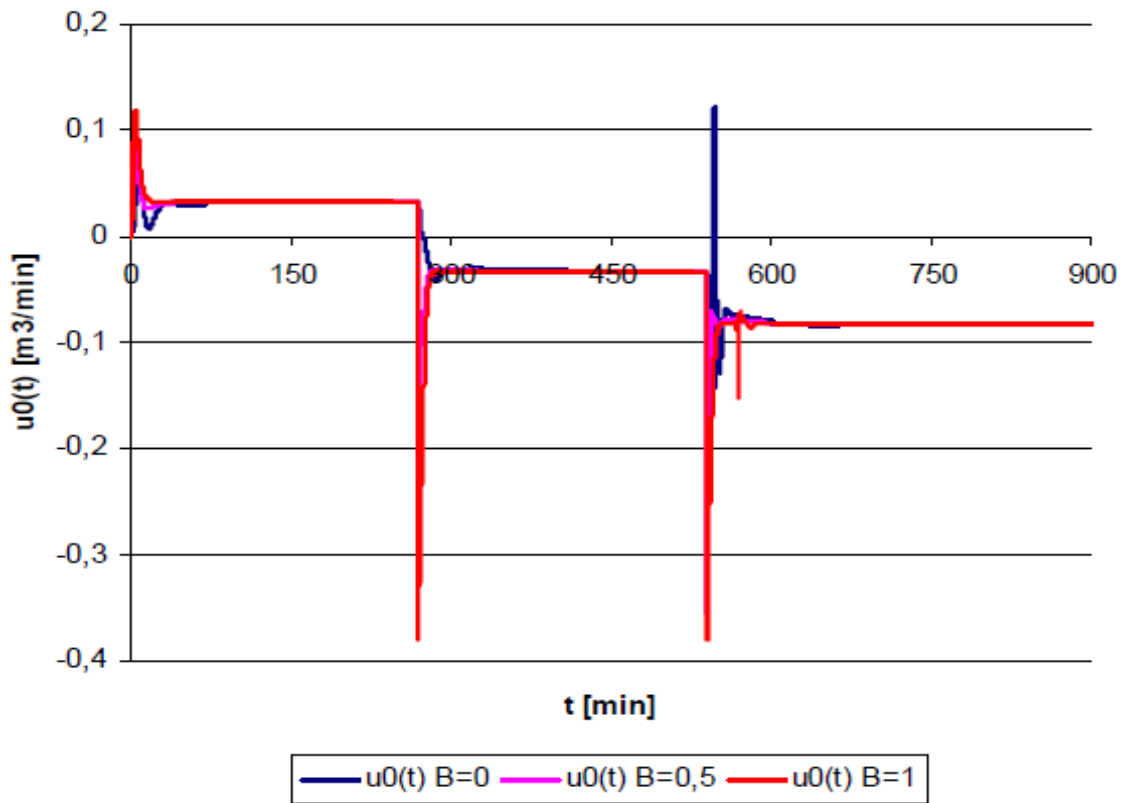
$$\text{Doba trvání regulačního pochodu: } t = 900 \text{ min}$$

$$\text{Nastavení identifikačního procesu: } C_{ii} = 1000, \varphi(0) = 1, \lambda(0) = 0,001,$$

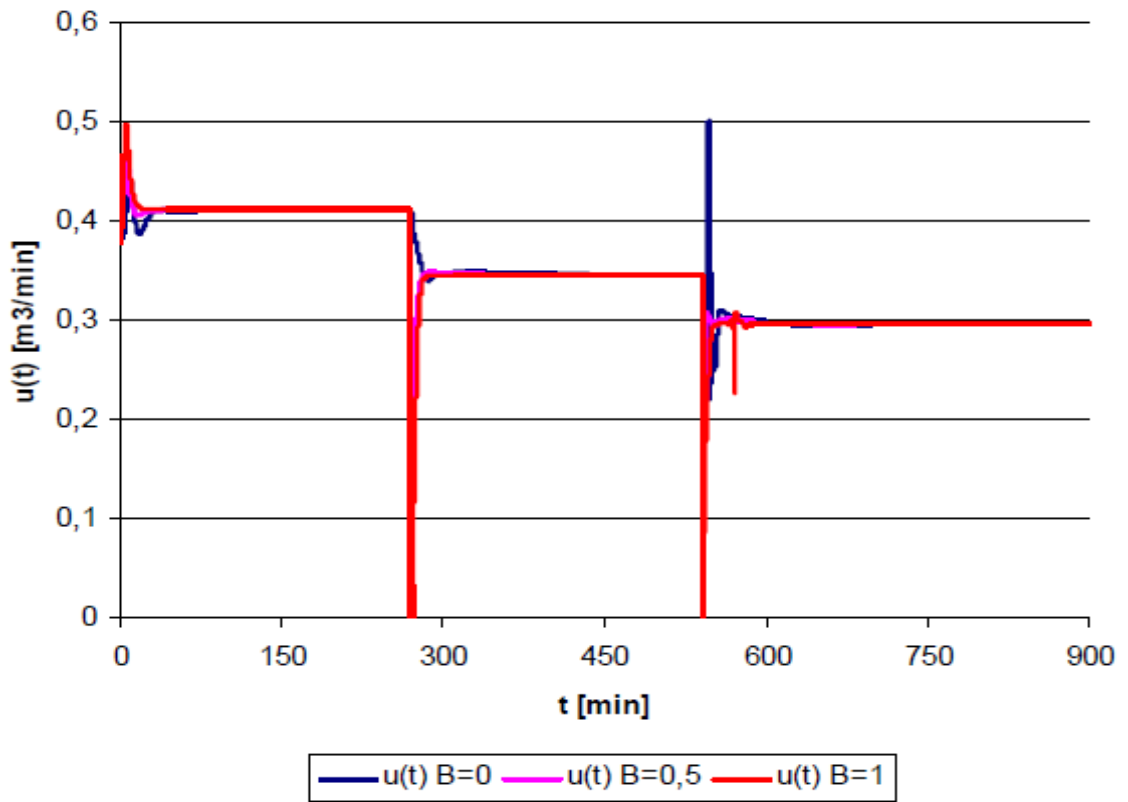
$$v(0) = 10^{-6}, \rho = 0,99$$



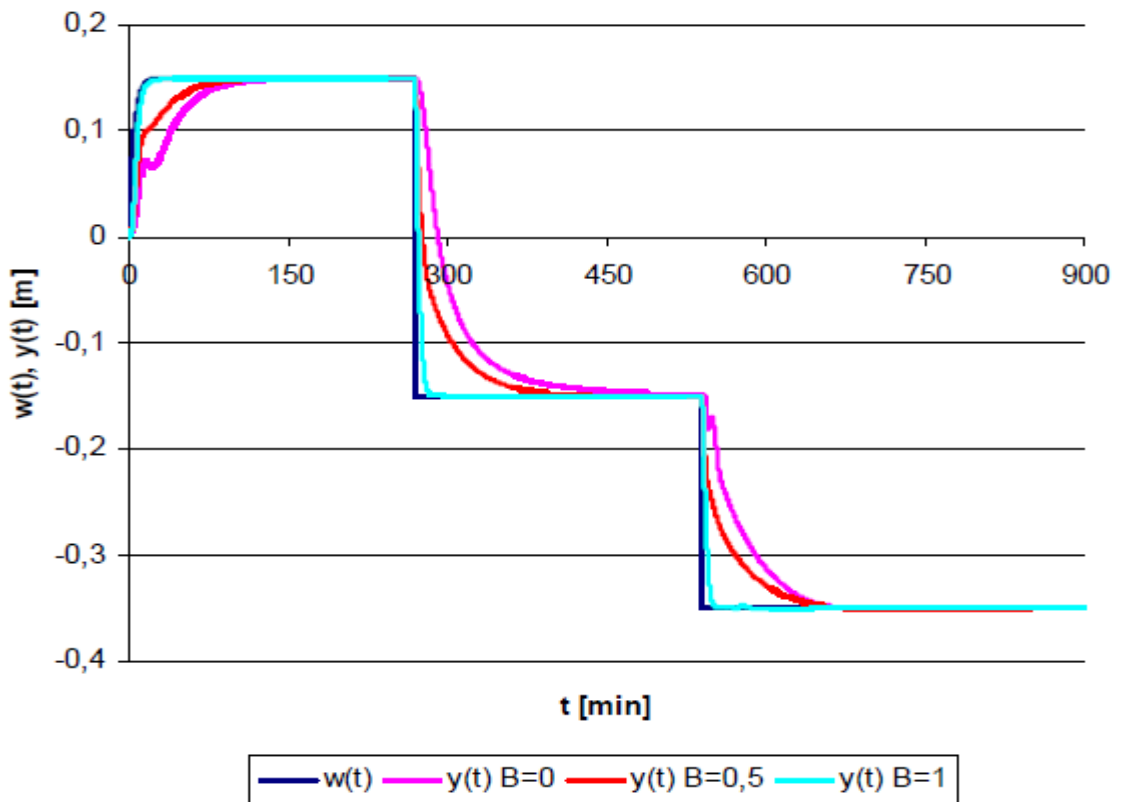
Obr. 27 – Odhad parametrů pro  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$



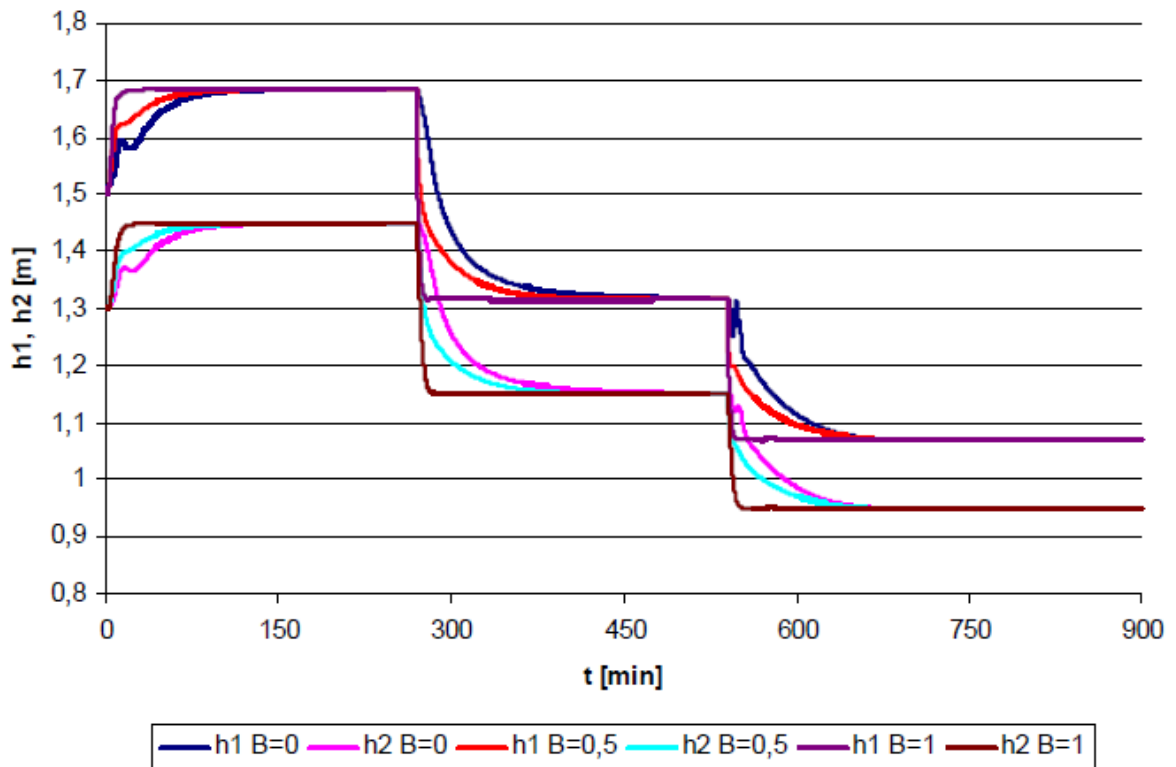
Obr. 28 – Akční zásah  $u_0(t)$  pro  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$



Obr. 29 – Akční zásah vstupující do soustavy pro  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$



Obr. 30 – Regulační pochod pro  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$



Obr. 31 – Výška hladiny pro  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$

### Hodnota kritéria J

$$J = 0,0031 \text{ pro } \beta = 0$$

$$J = 0,0013 \text{ pro } \beta = 0,5$$

$$J = 0,0005 \text{ pro } \beta = 1$$

### ZHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Z provedených simulací je patrné, že při použití rekurzivního identifikačního algoritmu se směrovým zapomínáním dochází při skokové změně žádané hodnoty k prudkým změnám odhadu parametrů soustavy, což má za následek kolísání akčního zásahu. Ze simulací je také zřejmé, že na výše uvedený jev je citlivá především regulace, kdy volíme charakteristický polynom  $d(s)$  pomocí metod LQ řízení, u které navíc trvá identifikace parametrů soustavy podstatně delší dobu než když polynom  $d(s)$  volíme jako  $d(s) = n(s)(s + 0,5)^2$ .



## ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo ukázat některé postupy při aplikaci metody přiřazení pólů jako logické součásti polynomiální metody při řízení spojitých SISO systémů.

Jsou zde uvedeny základní principy obou metod, včetně vztahů umožňujících návrh regulátorů v konfiguracích 1DOF, 2DOF a TFC. Dále jsou zde uvedeny některé postupy a doporučení při určování pólů přenosu uzavřeného regulačního obvodu.

V praktické části jsou pak uvedeny příklady regulačních pochodů pro některé typy regulovaných soustav, různé konfigurace systému řízení a různé volby přiřazení pólů.

Výsledky práce dokazují, že uvedené postupy umožňují relativně snadno navrhnout regulátory i pro soustavy nestabilní, integrační, neminimálně-fázové, soustavy s dopravním zpožděním, apod., tedy pro soustavy, které jsou konvenčními typy regulátorů obtížně říditelné.

Významnou předností uvedených postupů je, že požadovaná kvalita regulačního pochodu je dosahována vždy volbou jediného volitelného parametru (pouze v jednom případě dvěma) – buď explicitně přiřazeného pólu, nebo váhového koeficientu v kvadratickém funkcionálu. Další předností je skutečnost, že vztahy pro výpočet parametrů výsledných regulátorů jsou naprogramovatelné na počítači a metoda je tudíž výhodně použitelná např. při adaptivním řízení.

I když také metoda přiřazení pólů spolu s polynomiálním přístupem má svá omezení, rozhodně představuje silný nástroj pro návrh řízení široké třídy procesů. Její výhodou je i možná kombinace s dalšími moderními metodami řízení, jakými jsou například adaptivní a prediktivní řízení, metody umělé inteligence, atd..

## ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The main aim of this diploma work was to demonstrate some principles of the pole assignment (PA) method as a logical part of the polynomial approach in control of continuous-time SISO systems.

The basics of both methods are introduced inclusive of procedures enabling the controller design in the 1DOF, 2DOF and TFC configurations. In addition, some scope and recommendations for determination of the closed-loop poles are presented.

In the practical section, control examples are shown for some types of controlled systems, various control system structures and various closed-loop selection

Great advantage of the method is that it leads to a solution of linear equations and, subsequently, to derivation of easily programmable explicit formulas for the controller parameters computation. This fact enables very effective applications in varied areas as for example in adaptive control.

The other advantage lies in achievement of a required control performance quality by only one adjustable parameter (in one case by two parameters) – by an assigned pole or by a weighting coefficient in the quadratic cost function.

Even if also the pole assignment method with the polynomial approach has some limitations, it certainly represented a strong tool for control design of a wide class of processes. The benefits of the PA method are more perceptible when we combine them with principles of adaptive and predictive control, artificial intelligence, etc.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] PROKOP, R., MATUŠŮ R., PROKOPOVÁ Z., *Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy*. 1. vydání, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky, 2006, ISBN 80-7318-369-2
- [2] DOSTÁL, P., BOBÁL V., GAZDOŠ F., *Adaptive control of a nonlinear process by two feedback controllers*. In: 13<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, Limassol, Cyprus, 2005, 946-951 ISBN 0-7803-8937-9.
- [3] DOSTÁL, P., *Učební texty pro předmět Stavová a algebraická teorie řízení, část 2.*, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky, 2006.
- [4] BOBÁL, V., *Adaptivní a prediktivní řízení*. 1. vydání, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky, 2008, ISBN 80-7318-662-3
- [5] DOSTÁL, P., GAZDOŠ F., BOBÁL V., *Design of controllers for processes with time delay by polynomial method*. In: European Control Conference ECC'2007, Kos, Greece, 2007, 4540-4545.
- [6] DOSTÁL, P., GAZDOŠ F., BOBÁL V., *Design of controllers for time delay systems Part II: Integrating and unstable systems*. Journal of Electrical Engineering, Vol. 59, No 1, 2008, 3-8 ISSN 1335-3632.
- [7] VOJTĚŠEK J., *Simulation and control of a nonlinear system – continuous stirred tank reactor (CSTR)*. Research study, Zlín: Univerzita Tomáše Bati, Fakulta technologická, 2003
- [8] HUNT K. J., ŠEBEK M., KUČERA, V., *"H<sub>2</sub> control problems," in Polynomial methods in optimal control and filtering*. K.J. Hunt, Ed. London: Peter Peregrinus Ltd., (1993).
- [9] KUČERA, V., *Diophantine equations in control – a survey*. Automatica 29, 1361-1375, (1993), ISSN: 0005-1098.
- [10] QUARTERONI A., SALERI, F., *Scientific computing with MATLAB*. Springer-Verlag, Berlin, (2001), ISBN: .
- [11] KUČERA, V., *Discrete linear control: The polynomial equation approach*. Wiley, New York, (1980). ISBN 0471997269.

- [12] KAILATH, T., *Linear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, (1980), ISBN 0-13-536961-4.
- [13] BROGAN, W. L., *Modern Control Theory*. Prentice Hall, New Jersey, (1991), ISBN 0-13-589763-7.
- [14] CORRIOU, J-P., *Process Control. Theory and Applications*. Springer, London, (2004), ISBN 1-85233-776-1.
- [15] ANTSAKLIS, P. J., MICHEL, A. N., *Linear Systems*. Birghäuser, Boston, (2006), ISBN 0-8176-4434-2.
- [16] DOSTÁL, P., GAZDOŠ F., BOBÁL V., VOJTĚŠEK, J., *Adaptive control of a continuous stirred tank reactor by two feedback controllers*. In: 9th IFAC Workshop Adaptation and Learning in Control and Signal Processing ALCOSP'2007, Saint Petersburg, Russia, 2007, P5-1 – P5-6.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

1DOF	One Degree of Freedom
2DOF	Two Degree of Freedom
ARX	Auto Regressive with eXogenous input
ELM	External Linear Model
ITDS	The Integrating Time Delay System
LQ	Linear quadratic
PAM	Pole Assignment Method
PMS	Polynomiální metody syntézy
PPM	Pole Placement Method
SFOTDS	The Stable First Order Time Delay System
TFC	Two Feedback Controllers
UFOTDS	The Unstable First Order Time Delay System
URO	Uzavřený Regulační Obvod

## SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obr. 1 – 1DOF konfigurace systému řízení</i> .....	15
<i>Obr. 2 – 2DOF konfigurace systému řízení</i> .....	19
<i>Obr. 3 – Regulační obvod se dvěma zpětnovazebními regulátory</i> .....	23
<i>Obr. 4 – Regulační obvod se systémem s dopravním zpožděním</i> .....	34
<i>Obr. 5 – Smithův prediktor</i> .....	35
<i>Obr. 6 – Program Controler_1DOF_2DOF.m</i> .....	50
<i>Obr. 7 – Stabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)(s + 1)</math></i> .....	53
<i>Obr. 8 – Stabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)a^+</math></i> .....	54
<i>Obr. 9 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)(s + 1)</math></i> .....	55
<i>Obr. 10 – Nestabilní integrační soustava s minimální fází <math>d(s) = g(s)n(s)</math></i> .....	56
<i>Obr. 11 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)(s + 1)</math></i> .....	57
<i>Obr. 12 – Stabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)a^+</math></i> .....	58
<i>Obr. 13 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)(s + 1)</math></i> .....	59
<i>Obr. 14 – Nestabilní integrační soustava s neminimální fází <math>d(s) = g(s)n(s)</math></i> .....	60
<i>Obr. 15 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází</i> .....	62
<i>Obr. 16 – Nestabilní kmitavá soustava s neminimální fází – vliv parametru <math>\varphi</math></i> .....	63
<i>Obr. 17 - Integrační soustava s dopravním zpožděním</i> .....	68
<i>Obr. 18 – Stabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním</i> .....	69
<i>Obr. 19 – Nestabilní soustava 1. řádu s dopravním zpožděním</i> .....	70
<i>Obr. 20 – Regulační pochod pro harmonické vstupní signály</i> .....	72
<i>Obr. 21 – Dvojice sériově spojených kulových zásobníků</i> .....	76
<i>Obr. 22 – Odhad parametrů pro různé hodnoty <math>\mu</math></i> .....	83
<i>Obr. 23 – Akční zásah <math>u_0(t)</math> pro různé hodnoty <math>\mu</math></i> .....	83
<i>Obr. 24 – Akční zásah vstupující do soustavy pro různé hodnoty <math>\mu</math></i> .....	84
<i>Obr. 25 – Regulační pochod pro různé hodnoty <math>\mu</math></i> .....	84
<i>Obr. 26 – Výška hladiny pro různé hodnoty <math>\mu</math></i> .....	85
<i>Obr. 27 – Odhad parametrů pro <math>d(s) = n(s)(s + 0,5)^2</math></i> .....	86
<i>Obr. 28 – Akční zásah <math>u_0(t)</math> pro <math>d(s) = n(s)(s + 0,5)^2</math></i> .....	86
<i>Obr. 29 – Akční zásah vstupující do soustavy pro <math>d(s) = n(s)(s + 0,5)^2</math></i> .....	87

---

<i>Obr. 30 – Regulační pochod pro <math>d(s) = n(s)(s + 0,5)^2</math></i> .....	87
<i>Obr. 31 – Výška hladiny pro <math>d(s) = n(s)(s + 0,5)^2</math></i> .....	88

## SEZNAM PŘÍLOH

- P I Zdrojové kódy programu pro simulaci řízení nelineárního procesu pomocí metody PPM
- P II Elektronické přílohy, programové vybavení a verze diplomové práce na CD



## PŘÍLOHA P I: ZDROJOVÉ KÓDY PROGRAMU PRO SIMULACI ŘÍZENÍ NELINEÁRNÍHO PROCESU POMOCÍ METODY PPM

*%Funkce pro výpočet akčního zásahu*

```
function [Uv, X1, X2, X3]=akcnizasah(T0, p0, p1, q1, q2, r2, r1, r0, Yv, Ev, X1, X2, X3)
```

```
n=100; h=T0/n;
```

```
X1z=X1; X3z=X3; X2z=X2;
```

```
for i=1:n
```

```
g11=h*(Yv/p1-(p0/p1)*X1z); g21=h*(Yv/p1-(p0/p1)*X1z+g11/2);  
g31=h*(Yv/p1-(p0/p1)*X1z+g21/2); g41=h*(Yv/p1-(p0/p1)*X1z+g31);  
X1=X1z+(g11+2*g21+2*g31+g41)/6; X1z=X1;
```

```
g13=h*(Ev/p1-(p0/p1)*X3z); g23=h*(Ev/p1-(p0/p1)*X3z+g13/2);  
g33=h*(Ev/p1-(p0/p1)*X3z+g23/2); g43=h*(Ev/p1-(p0/p1)*X3z+g33);  
X3=X3z+(g13+2*g23+2*g33+g43)/6; X3z=X3;
```

```
g12=h*(X3z); g22=h*(X3z+g12/2);  
g32=h*(X3z+g22/2); g42=h*(X3z+g32);  
X2=X2z+(g12+2*g22+2*g32+g42)/6; X2z=X2;
```

```
end
```

```
Uv1=r2*(Ev)+(r1-r2*p0)*X3+r0*X2; Uv2=q2*Yv+(q1-p0*q2)*X1; Uv=Uv1-Uv2;
```

*%Model zásobníků*

```
function [H]=zasobniky(T0, Hp, K1, K2, D, q1f, q2f)
```

```
n=100; h=T0/n;
```

```
for i=1:n
```

```
q1=K1*sqrt(abs(Hp(1)-Hp(2))); q2=K2*sqrt(Hp(2));
```

```
if Hp(1)-Hp(2)<0
```

```
q1=-q1;
```

```
end
```

```
g11=h*((q1f-q1)/(pi*Hp(1)*(D-Hp(1)))); g21=h*((q1f-q1)/(pi*Hp(1)*(D-Hp(1)))+g11/2);  
g31=h*((q1f-q1)/(pi*Hp(1)*(D-Hp(1)))+g21/2); g41=h*((q1f-q1)/(pi*Hp(1)*(D-Hp(1)))+g31);
```

```
g12=h*((q2f+q1-q2)/(pi*Hp(2)*(D-Hp(2)))); g22=h*((q2f+q1-q2)/(pi*Hp(2)*(D-Hp(2)))+g12/2);  
g32=h*((q2f+q1-q2)/(pi*Hp(2)*(D-Hp(2)))+g22/2);  
g42=h*((q2f+q1-q2)/(pi*Hp(2)*(D-Hp(2)))+g32);
```

```
H(1)=Hp(1)+(g11+2*g21+2*g31+g41)/6;
```

```
H(2)=Hp(2)+(g12+2*g22+2*g32+g42)/6;
```

```
Hp=H;
```

```
end
```

```
H=Hp;
```

%Výpočet koeficientů polynomu  $g(s)$  – LQ řízení

**function [g]=faktorizace\_opt(a0, a1, b0, b1, F)**

**Fi=F;**

**reseni\_puv=1000\*ones(2,1); reseni=zeros(2,1);**

**g0=sqrt(b0^2); g3=sqrt(Fi);**

**for i=1:1000**

**Fd\_xk=[-1, g0/(sqrt(2\*g0\*reseni\_puv(2,1)+Fi\*a0^2+b1^2));...**

**g3/(sqrt(2\*reseni\_puv(1,1)\*g3+Fi\*(a1^2-2\*a0))), -1];**

**F\_xk=[sqrt(2\*g0\*reseni\_puv(2,1)+Fi\*a0^2+b1^2)-reseni\_puv(1,1);...**

**sqrt(2\*g3\*reseni\_puv(1,1)+Fi\*(a1^2-2\*a0))-reseni\_puv(2,1)];**

**reseni=reseni\_puv-Fd\_xk^-1\*F\_xk;**

**reseni\_puv=reseni;**

**if F\_xk==0**

**break**

**end**

**end**

**g1=reseni(1,1); g2=reseni(2,1);**

**g(1,4)=g0; g(1,3)=g1;**

**g(1,2)=g2; g(1,1)=g3;**

%Hlavní program pro simulaci regulačního pochodu při řízení nelineárního procesu pomocí metody PPM

**clc**

**clear all**

**K1=0.85;** %konstanta výtoku z 1. zásobníku

**K2=0.5;** %konstanta výtoku z 2. zásobníku

**F=5;**

**D=2;** %průměr zásobníků

**X1=0; X2=0; X3=0;** %pomocné proměnné pro výpočet akčního zásahu

**Ppoc=0.35;** %proporcionální složka na začátku regulace

**h1s=1.5; h2s=1.3; Hp=[h1s, h2s];** %počáteční výška hladiny v zásobnících

**q1fs=0.38; q2fs=0.19;** %ustálený přítok do jednotlivých zásobníků

**delkaregulace=900;**

**T0=0.2;** %perioda vzorkování

**alfa=0.5;        beta=0;** %parametry regulátoru TFC

**Uv=0;   Yv=0;   Wv=0;   Ev=0;** %pomocné proměnné

**H=zeros(delkaregulace/T0,2); T=zeros(delkaregulace/T0,1); W=zeros(delkaregulace/T0,1);**  
**U=zeros(delkaregulace/T0,1); U0=zeros(delkaregulace/T0,1); Y=zeros(delkaregulace/T0,1);**  
**E=zeros(delkaregulace/T0,1); Konst=zeros(delkaregulace/T0,1);**

**tau=5;**

**for i=1:delkaregulace/T0**

**if i<round((delkaregulace\*0.3)/T0)**

**W(1,1)=0; Wk=0.15;**

**if i>1**

**W(i)=W(i-1)+(Wk/tau-W(i-1)/tau)\*T0;**

**end**

**end**

**if (i>=round((delkaregulace\*0.3)/T0))&(i<round((delkaregulace\*0.6)/T0))**

**W(i)=-0.15;**

**end**

**if (i>=round((delkaregulace\*0.6)/T0))**

**W(i)=-0.35;**

**end**

**end**

**for i=1:length(H)**

**T(i,1)=(i-1)\*T0;**

**end**

%počáteční parametry pro identifikaci

**n=3;** %počet parametrů

**Fi=0;**

**C0=zeros(n,n);** % kovarianční matice

**for i=1:n**

**C0(i,i)=1000;**

**end**

**C1=zeros(n,n);** %kovarianční matice

**FIK=1; lambda=0.001; v=0.000001;    ro=0.99;**

**odhady(1,1)=0.2;        odhady(2,1)=0.5;        odhady(3,1)=0.2;**

**odhadyN=zeros(delkaregulace/T0,3);**

**for i=1:2**

**odhadyN(i,1)=odhady(1,1); odhadyN(i,2)=odhady(2,1);    odhadyN(i,3)=odhady(3,1);**

**end**

**for j=1:delkaregulace/T0-1**

**E(j)=W(j)-Y(j);**

```

if j<15
    U0(j)=E(j)*Ppoc;
end

a0=odhady(1,1); a1=odhady(2,1); b0=odhady(3,1);

g=faktorizace_opt(a0, a1, b0, 0, F); %výpočet koeficientů polynomu g(s)

g3=g(1,1); g2=g(1,2); g1=g(1,3); g0=g(1,4);

A=[1, 0, 0, 0, 0; a1, 1, 0, 0, 0; a0, a1, b0, 0, 0; 0, a0, 0, b0, 0; 0, 0, 0, 0, b0];
B=[g3; g3*alfa+g2;g2*alfa+g1;g1*alfa+g0;alfa*g0];
X=inv(A)*B;

%výpočet parametrů regulátorů

P=[X(1,1) X(2,1)];
Pc=[X(1,1) X(2,1) 0];
Q=[(1-beta)*X(3,1), (1-beta)*X(4,1)];
R=[beta*X(3,1), beta*X(4,1), X(5,1)];

p0=P(2); p1=P(1); q1=Q(2); q2=Q(1); r2=R(1); r1=R(2); r0=R(3);

Yv=Y(j); Ev=E(j);

if j==15
    U0(j)=Uv;
end

[Uv, X1, X2, X3]=akcnizasah(T0, p0, p1, q1, q2, r2, r1, r0, Yv, Ev, X1, X2, X3);

if j>=15
    U0(j+1)=Uv;
end

q1f=U0(j)+q1fs;

if q1f<0
    q1f=0;
    U0(j)=q1f-q1fs;
end

if q1f>0.5
    q1f=0.5;
    U0(j)=q1f-q1fs;
end

U(j)=q1f; q2f=q2fs;

Hp=zasobniky(T0, Hp, K1, K2, D, q1f, q2f);
H(j,1)=Hp(1); H(j,2)=Hp(2);
Y(j+1)=Hp(2)-h2s;

%identifikace parametrů δ-modelu soustavy
if j>2
    Qk0=[-Y(j-2); -(Y(j-1)-Y(j-2))/T0; U0(j-2)];
    C1=C0;

```

```

pom=Qk0*C1*Qk0;
Fi=(Y(j)-2*Y(j-1)+Y(j-2))/T0^2;
odchylka=Fi-odhady'*Qk0;
odhady=odhady+C1*Qk0/(1+pom)*odchylka;

if pom==0
    C0=C1
else
    NY=odchylka^2/lambda;
    FIK=1/(1+(1+ro)*(log(1+pom)+(((v+1)*NY)/(1+pom+NY)-1)*(pom/(1+pom))));
    EK=FIK-(1-FIK)/pom;
    C0=C1-C1*Qk0*Qk0*C1/(EK^-1+pom);
    lambda=FIK*(lambda+odchylka^2/(1+pom));
    v=FIK*(v+1);
end
odhadyN(j,1)=odhady(1,1); odhadyN(j,2)=odhady(2,1); odhadyN(j,3)=odhady(3,1);
end
end

%výpočet hodnotícího kritéria
Su=0; Sy=U(1,1)^2; J=0;

for i=1:length(Y)
    Sy=Sy+(W(i,1)-Y(i,1))^2;
    if i>1
        Su=Su+(U(i,1)-U(i-1,1))^2;
    end
end

Su=Su/(length(U)+1);
Sy=Sy/(length(Y)+1);
J=Su+Sy

```

Pozn.: V příloze I jsou uvedeny zdrojové kódy pouze pro příklad regulace nelineárního procesu, kdy je k odhadu parametrů  $\delta$ -modelu použit rekurzivní identifikační algoritmus se směrovým zapomínáním a volba kořenů URO je prováděna pomocí metod LQ řízení. Všechny ostatní programy, které byly vytvořeny v rámci této práce, jsou potom k dispozici v elektronické podobě na přiloženém CD.