

Možnosti využití metod síťové analýzy při modelování rizik komplexních systémů

Ing. Jiří Fabin

Diplomová práce
2025



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta logistiky a krizového řízení

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta logistiky a krizového řízení
Ústav krizového řízení

Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	Ing. Jiří Fabin
Osobní číslo:	L23019
Studijní program:	N1032A020002 Bezpečnost společnosti
Specializace:	Rizikové inženýrství
Forma studia:	Kombinovaná
Téma práce:	Možnosti využití metod síťové analýzy při modelování rizik komplexních systémů

Zásady pro vypracování

- Na základě odborné literatury zpracujte literární rešerši týkající se dané problematiky.
- Popište modely komplexních sítí a nástroje pro charakterizaci jejich prvků a vztahů mezi nimi.
- Navrhněte způsob, jak popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu.
- Posuďte, které metriky centrality je vhodné doporučit pro hodnocení domino efektu v komplexním systému.
- Navrhněte postup pro řešení optimalizace prioritizace hrozeb při domino efektu.

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. HE, Zhichao a WENG, Wenguo. *A dynamic and simulation-based method for quantitative risk assessment of the domino accident in chemical industry*. Online. Process Safety and Environmental Protection, vol. 144 (2020), s. 79-92. ISSN 0957-5820. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2020.07.014>.
2. KHAKZAD, Nima; LANDUCCI, Gabriele a RENIERS, Genserik. *Application of Graph Theory to Cost-Effective Fire Protection of Chemical Plants During Domino Effects*. Online. Risk Analysis, vol. 37 (2017), no. 9, s. 1652-1667. ISSN 0272-4332. Dostupné z: <https://doi.org/10.1111/risa.12712>.
3. KOVÁŘ, Petr. Úvod do Teorie grafů. Online. In: *Úvod do Teorie grafů*. Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, 2021, s. 167. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/kov16/files/uvod_do_theorie_grafu.pdf.
4. LATORA, Vito; NICOSIA, Vincenzo a RUSSO, Giovanni. *Complex Networks Principles, Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN 978-1-107-10318-4.
5. ZHANG, Muchen; LI, Zelin; HOU, Shuya; DENG, Siyu; RENIERS, Genserik et al. *Optimizing safety barrier allocation to prevent domino effects in large-scale chemical clusters using graph theory and optimization algorithms*. Online. Process Safety and Environmental Protection, vol. 184 (2024), s. 1192-1205. ISSN 0957-5820. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2024.02.057>.

Další odborná literatura dle doporučení vedoucího diplomové práce.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Mgr. Tomáš Zeman, Ph.D. et Ph.D.**
Ústav krizového řízení

Datum zadání diplomové práce: **2. prosince 2024**
Termín odevzdání diplomové práce: **25. dubna 2025**

L.S.

prof. Ing. Zuzana Tučková, Ph.D.
děkanka

Ing. et Ing. Jiří Konečný, Ph.D.
ředitel ústavu

V Uherském Hradišti dne 2. prosince 2024

PROHLÁŠENÍ AUTORA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Beru na vědomí, že

- odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění bez ohledu na výsledek obhajoby;
- diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému a bude dostupná k nahlédnutí;
- jedno vyhotovení diplomové práce v listinné podobě bude ponecháno Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně k uložení;
- na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- podle § 60 odst. 1 autorského zákona má Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- podle § 60 odst. 2 a 3 mohu užít své dílo – diplomovou práci – nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tj. k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá; neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

- jsem na diplomové práci pracoval(a) samostatně a použitou literaturu jsem řádně citoval(a); v případě publikace výsledků budu uveden(a) jako spoluautor;
- odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou obsahově totožné.

V Uherském Hradišti, dne

25.4.2025

.....
podpis autora

ABSTRAKT

Diplomová práce se zaměřuje na problematiku využití sítí jako modelovacího nástroje pro popis domino efektu v komplexních situacích. Práce je rozdělena do dvou částí. V teoretické části jsou popsány modely a vlastnosti náhodných a komplexních sítí, zejména s těžištěm v metrikách centralit. Současně je provedena rešerše jejich aplikací pro modelování rizika. V praktické části je těchto teoretických konceptů využito pro kvalitativní a kvantitativní analýzu uměle generovaných sítí. Součástí je zavedení nové metriky pro popis domino efektu na sítích MENL a stanovení meze její platnosti, dále doporučení využívat betweenness centralitu pro hodnocení rizika jednotlivých uzlů a formulace postupů prioritizace rizik komplexního systému založených na MCMC a genetických algoritmech.

Klíčová slova: domino efekt, genetický algoritmus, komplexní síť, riziko

ABSTRACT

The thesis focuses on the use of networks as a modelling tool to describe the domino effect in complex situations. The thesis is divided into two parts. The theoretical part describes models and properties of random and complex networks, in particular with a centre of gravity in centrality metrics. At the same time, a survey of their applications to risk modelling is carried out. In the practical part, these theoretical concepts are used for qualitative and quantitative analysis of artificially generated networks. This includes the introduction of a new metric for describing the domino effect on MENL networks and the determination of the limit of its validity, as well as the recommendation to use betweenness centrality to assess the risk of individual nodes and the formulation of risk prioritization procedures for complex systems based on MCMC and genetic algorithms.

Translated with DeepL.com (free version)

Keywords: domino effect, genetic algorithm, complex network, risk

Rád bych poděkoval vedoucímu své diplomové práce doc. Mgr. Tomáši Zemanovi, Ph.D. et. Ph.D. za jeho čas věnovaný odbornému vedení, cenné rady, inspirativní připomínky a trpělivost. Dále bych chtěl poděkovat své manželce za neutuchající podporu a pochopení, které s láskou projevuje nejen během mého studia.

OBSAH

ÚVOD.....	11
CÍLE A METODY ZPRACOVÁNÍ.....	13
I TEORETICKÁ ČÁST	15
1 MODELOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH SÍTÍ PŘI ANALÝZE RIZIK	16
1.1 VZTAH MEZI RIZIKEM, DOMINO EFEKTEM A SÍTĚMI	16
1.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI KOMPLEXNÍCH SÍTÍ	19
1.2.1 Fenomén malého světa	21
1.2.2 Shlukování.....	22
1.2.3 Bezškálovitost	24
1.2.4 Interagující síť.....	26
1.3 GRAFY.....	28
1.4 MODEL Y KOMPLEXNÍCH SÍTÍ A JEJICH VLASTNOSTI	31
1.4.1 Erdős-Rényiho model náhodného grafu (ER).....	31
1.4.2 Barabási-Albertův model bezškálového grafu (BA).....	33
1.4.3 Watts-Strogatzovův model grafu malého světa (WS).....	34
1.5 CENTRALITY UZLŮ	35
1.5.1 Degree centrality	36
1.5.2 Closeness centrality	38
1.5.3 Betweenness centrality	39
1.5.4 Eigenvector centrality	40
1.5.5 Katz centrality	41
1.5.6 Pagerank	42
1.5.7 Varianty reach centrality	42
1.6 VYBRANÉ VÝZNAMNÉ TOPOLOGICKÉ PRVKY	45
1.6.1 Most.....	45
1.6.2 Hub.....	46
1.6.3 K-core.....	46
1.7 APLIKACE KOMPLEXNÍCH SÍTÍ V MODELOVÁNÍ RIZIK.....	48
1.8 GENETICKÉ ALGORITMY JAKO NÁSTROJ OPTIMALIZACE KOMPLEXNÍCH SÍTÍ.....	53
1.9 MONTE CARLO MARKOV CHAIN.....	56
1.10 SOFTWAREVÉ NÁSTROJE PRO ANALÝZU SÍTÍ.....	59
2 DÍLČÍ ZÁVĚRY TEORETICKÉ ČÁSTI	60
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	62
3 ZAVEDENÍ A TESTOVÁNÍ METRIKY MENL.....	63
3.1 ZAVEDENÍ MENL PRO KVALITATIVNÍ ANALÝZU	63
3.2 ZAVEDENÍ MENL PRO KVANTITATIVNÍ ANALÝZU	70
3.3 TESTOVÁNÍ VLIVU PERKOLACE NA POUŽITELNOST MENL.....	72

3.3.1	Třídy ekvivalence MENL.....	75
3.3.2	Analýza pro Erdős-Rényiho model náhodného grafu	76
3.3.3	Analýza pro Barabási-Albertův model bezškálového grafu.....	77
3.3.4	Analýza pro Watts-Strogatzův modelu grafu malého světa	79
3.4	DOPORUČENÝ POSTUP VYUŽITÍ METRIKY MENL V PRAXI	81
4	POSOUZENÍ VHODNOSTI CENTRALIT UZLŮ SÍTĚ JAKO PREDIKTORU RIZIKA	82
5	OPTIMALIZACE PRIORITIZACE HROZEB V KOMPLEXNÍM SYSTÉMU	89
5.1	VYUŽITÍ GENETICKÝCH ALGORITMŮ PŘI KVALITATIVNÍ ANALÝZE.....	95
5.2	VYUŽITÍ GENETICKÝCH ALGORITMŮ PŘI KVANTITATIVNÍ ANALÝZE	97
6	DISKUSE.....	108
	ZÁVĚR.....	111
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	115
	SEZNAM OBRÁZKŮ	125
	SEZNAM TABULEK.....	127
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	128
	SEZNAM PŘÍLOH.....	130

ÚVOD

Základním úkolem rizikového inženýrství je přispívat svými metodami ke snižování rizika a zvyšování bezpečnosti společnosti. Společnost ve všech svých aktivitách, od výrobních přes distribuční až k uživatelským se stává stále komplexnější a propojenější. Slova complexity a connectivity patří mezi základní charakteristiky současné doby. Na tuto skutečnost reaguje i rizikové inženýrství (RI). Dnes již nevystačí s pouhým stanovením rizika jednotlivé události. V čím dál větší míře se uplatňují metody schopné zachytit komplexitu vztahů. Mezi základní pojmy z oblasti modelování rizik v této oblasti patří domino efekt. Havárie spojené s domino efektem disponují většinou větším potenciálem způsobit škodu na životech, zdraví a majetku než izolované události. Domino efekt je také přirozeným způsobem, jak mohou, často i paralelně, působit jednotlivé události až vyústí v nežádoucí účinek na chráněná aktiva. Věnovat pozornost rozvoji metod, které umožní analyzovat a mitigovat domino efekt je tak v celospolečenském zájmu a autora jako výzkumné téma oslovilo.

Rozvoj metod pracujících s komplexitou v modelování rizik je odrazem širších posunů v aplikovaném výzkumu, mezi něž lze zařadit i výsledky v oblasti komplexních sítí. Sítě jsou přirozeným modelovacím prostředkem pro zachycení vztahů přítomných v realitě. Vyskytují se bez nadsázky prakticky všude. V každé doméně výzkumu, resp. reálném systému je možné identifikovat prvky, kterými je systém tvořen a popsat vztahy mezi nimi. Pokud tyto prvky budou označeny jako uzly a vztahy jako hrany, tak byla vybudována síť. Může jít o logistické řetězce, distribuční sítě vody, plynu, elektřiny, potravní řetězce, řetězce mezilidských vztahů, informační přenosové trasy až k propojení hardwarové nebo softwarové infrastruktury.

V posledních přibližně deseti letech je možné pozorovat transfer znalostí z aplikované informatiky týkajících se komplexních sítí do rizikového inženýrství, zejména do oblasti modelování rizik. Dochází k němu s určitým zpožděním oproti oblastem jako například bioinformatika, která je motorem výzkumu. Rostoucí počet článků na téma domino efekt ale svědčí o jasném trendu.

Protože se jedná o práci v oblasti rizikového inženýrství, tak převládající pohled v práci je, že uzly představují zdroje rizika a hrany kauzální vztahy mezi nimi. Takováto síť potom umožňuje sledovat šíření domino efektu. Část práce, zejména v teoretické části, má více abstraktní charakter, kdy se obecně zabývá sítěmi a jejich analýzou, protože se jedná o nezbytný pojmový aparát sloužící k pochopení analyticko-empirické a aplikační části. Tyto

obecně formulované poznatky platí pro jakoukoli síť, tedy i sítě použité pro modelování rizika v rizikovém inženýrství.

CÍLE A METODY ZPRACOVÁNÍ

Většina probíhajícího výzkumu v oblasti komplexních sítí se orientuje na to, jakým způsobem udržet síť v chodu, zabránit jejich zhroucení, protože u sítí typu logistických řetězců, distribučních sítí vody, plynu, elektřiny apod. je cílem využívat je ve funkčním stavu. Při hledání opatření k redukci celkového rizika na síti popisující domino efekt je naopak nezbytné najít takovou kombinaci ošetření rizik, která má potenciální síť co nejvíce efektivně rozbít. Současně to udělat tak, aby náklady na snížení rizika byly obhajitelné ve vztahu k principu as low as reasonably practicable (ALARP). Takto je možné nahlížet cíl rizikového inženýrství v této oblasti. Z něho potom lze v obecné rovině odvodit cíl této diplomové práce jako formulování takových výzkumných otázek, které posouvají poznání v oblasti využití komplexních sítí pro popis a ošetření rizik v komplexních systémech a jejich vyřešení. V konkrétní podobě potom je **cílem diplomové práce** navázat na výzkumné práce zejména z oblasti chemického průmyslu, používající topologický přístup k popisu zdrojů rizik a jejich vazeb **a stanovit doporučení pro využití metod síťové analýzy při modelování rizik komplexních systémů**, která jsou doménově neutrální. Takto formulovaný cíl je naplněn řešením následujících tří výzkumných otázek:

VO1: Jakým způsobem lze popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu?

VO2: Které metriky centrality uzlů poskytují nejlepší výsledky pro hodnocení významnosti hrozeb v komplexních systémech?

VO3: Jakým způsobem jde optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů?

Hlavní pracovní metodou je simulace a modelování. Jsou využity pro analýzu uměle generovaných sítí, které jsou založeny na Erdős-Rényiho modelu náhodného grafu, Barabási-Albertově modelu bezškálového grafu a Watts-Strogatzově modelu grafu malého světa. Data získaná modelováním a simulací jsou statisticky zpracována. Analýzy jsou jak kvalitativního, tak kvantitativního charakteru. Při práci s jednotlivými síťovými modely je použita teorie fázového přechodu, perkolace. Při modelování a simulaci jsou využity různé techniky a algoritmy například Monte Carlo simulace, výpočty různých typů centralit, optimalizace genetickými algoritmy, Monte Carlo Markov Chain (MCMC). Za účelem jejich využití je vytvořeno odpovídající softwarové vybavení. Další použitou metodou je komparace, která je využita například pro srovnání různých definic účelových funkcí

genetických algoritmů a různých způsobů kódování jedinců v populaci v genetických algoritmech. Při zpracovávání teoretické části je použita metoda literární rešerše. Pro formulování závěrů práce je použita analýza a syntéza zjištěných faktů.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MODELOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH SÍTÍ PŘI ANALÝZE RIZIK

Komplexní sítě jsou v rámci diplomové práce (DP) použity jako základní nástroj pro modelování složitých vztahů mezi riziky, které mohou zahrnovat tvorbu domino efektu.

Rozvoj teoretických metod v oblasti informatiky a zejména nárůst výpočetního výkonu od 90. let minulého století, umožnil v řadě oborů od sociologie přes epidemiologii a bioinformatiku až po ryze technické obory, začít řešit problémy ne pouze s izolovanými entitami, ale v jejich komplexnosti, která se liší podle problémové domény. Zatímco v některých oborech, jako bioinformatika nebo informatika, jde už o dobře etablované způsoby práce, do jiných, mezi něž patří i rizikologie, tento způsob analýzy pozvolna proniká.

Jak uvádí Mones et al. (2012) v poslední době nebývale vzrostl zájem výzkumníků o možnosti, které poskytují komplexní sítě pro popis systémů ve všech myslitelných oblastech od přírodních, přes technické až po sociální. Komplexita povstává buď z množství interakcí jednotek stejného nebo podobného druhu nebo z toho, že jednotky a vazby mezi nimi mají specifické vlastnosti (Mones et al., 2012).

Komplexní sítě nemají jednotnou matematickou definici. Jejich nejobecnější definice zní, že se jedná o sítě, jejichž propojení prvků není ani naprosto pravidelné ani zcela náhodné (Barabási, 2005). V této zóně mezi pravidelností a naprostou náhodou se nachází široký prostor, který zaplňují sítě s netriviálními topologickými rysy. Většina zkoumaných reálných sítí v různých oblastech od humanitních jako sociologie, psychologie přes přírodní vědy jako fyzika, biologie, medicína, epidemiologie až po technické obory např. aplikovaná informatika vykazuje některé znaky těchto sítí. Není nutné, aby reálná síť vykazovalo všechny dále probírané znaky. Stejně tak různé informatické modely komplexních sítí, snažící se být nástrojem pro modelování reálných sítí, vykazují pouze některé charakteristiky (Pelánek, 2011).

1.1 Vztah mezi rizikem, domino efektem a sítěmi

Jednou z definic rizika R je, že se jedná o množinu uspořádaných trojic tvořených pravděpodobností uskutečnění scénáře p_i , scénářem s_i a náklady na ztrátu, kterou si scénář vyžádá c_i , jak vyjadřuje vzorec (1) (Rausand a Haugen, 2020).

$$R = \{(s_1, p_1, c_1), (s_2, p_2, c_2), \dots, (s_n, p_n, c_n)\} = \{(s_i, p_i, c_i)\}_{i=1}^n \quad (1)$$

Domino efekt je definován v zákoně č. 224/2015 Sb., o prevenci závažných havárií, ve znění pozdějších předpisů („dále jen zákon o prevenci závažných havárií“), jako možnost zvýšení pravděpodobnosti vzniku a velikosti dopadů závažné havárie v důsledku umístění podniku nebo skupiny podniků a jejich nebezpečných látek (Česko, 2015). Podle Abdolhamidzadeha et al. (2010) někteří autoři používají domino efekt pouze pro situaci, kdy se havárie stane příčinou jiné havárie v jiném odvětví. A řetězové havárie v různých technologických jednotkách téhož odvětví označují termínem vnitřní domino efekt. Nejnovější definice Centre of Chemical Process Safety definuje domino efekt jako událost, která začíná v jedné položce a může ovlivnit okolní položky tepelným nárazem, výbuchem nebo úlomkem, což způsobí zvýšení závažnosti následků nebo četnosti poruch (Abdolhamidzadeh et al., 2010).

Řetězová reakce je definována jako reakce, která iniciuje své vlastní opakování (United States Nuclear Regulatory Commission, 2021). Řetězová reakce a domino efekt jsou dva pojmy, které jsou často zaměňovány i když se nejedná o synonyma. Způsob šíření řetězové reakce může být často exponenciální. Příkladem je štěpná řetězová reakce (United States Nuclear Regulatory Commission, 2021). Oproti tomu u domino efektu je častěji šíření lineární. Typickým příkladem domino efektu je série padajících dominových kostek. Důležitým fenoménem, který může být u domino efektu přítomen, je efekt motýlích křídel, který znamená, že malá změna podmínek na počátku způsobí zcela jiný výsledek na konci (Rauch, 2025). Pro praktické potřeby DP nejsou oba pojmy rozlišovány, protože navržené metody jsou vhodné pro řešení obojího. Dále je používán pouze pojem domino efekt ve smyslu, že jde o proces, který postupuje mezi prvky systému, kdy prvek předcházející působí svou činností jako kauzální příčina události na prvku nebo prvcích následujících. Kvantitativní hodnocení rizik domino havárií naráží na několik obtíží způsobených jejich složitostí, nepředvídatelností a synergickými účinky (He a Weng, 2020).

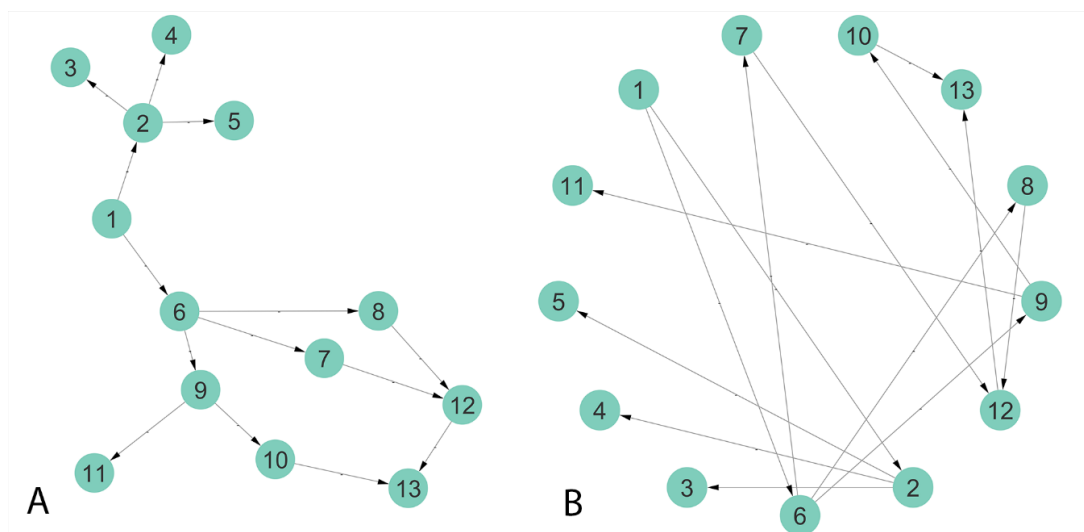
Existuje řada metod hodnocení rizik pro havárie způsobené jednou příčinou. V poslední době se však stále více uznává, že havárie, ve kterých se spojuje více druhů nebezpečí způsobují v chemickém průmyslu závažnější následky a mají vyšší společenský dopad, než havárie způsobené jednou příčinou (Khan et al., 2015; Khakzad et al., 2018).

Abdolhamidzadeh et al. (2010) v roce 2010 uváděl, že zatímco došlo k významným pokrokům v prevenci, předvídání, hodnocení následků a kontrole samostatných událostí, tak mnohem méně pozornosti bylo věnováno řetězovým haváriím a domino efektu. Přitom se však nejedná o ojedinělý jev, ale v důsledku domino efektu došlo k velkému počtu

závažných havárií, velkým ztrátám na životech a majetku (Abdolhamidzadeh et al., 2010). Od této doby postoupilo rizikové inženýrství v modelování domino efektu a dnes již toto hodnocení neodpovídá stavu možností, jak bude doloženo v literární rešerši. Lze však jednoznačně souhlasit s jeho hodnocením závažnosti takových havárií a důležitosti věnovat se výzkumu na tomto poli.

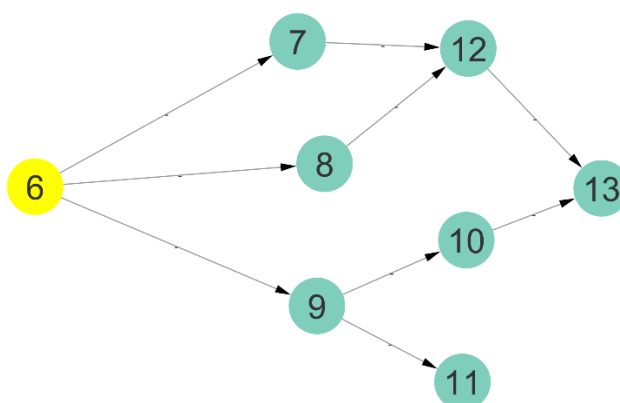
Pro definici sítě je využita definice orientovaného grafu G jako uspořádané dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran, tedy množina některých dvouprvkových podmnožin množiny V (Kovář, 2021). V takto definované síti budiž prvky množiny V , uzly, rizika schopná samovolné aktivace s pravděpodobností P_i a mající potenciál působit při své aktivaci škodu. Prvky množiny E jsou orientované hrany, tedy kauzální příčinné vztahy vyjadřující pravděpodobnost $P_{i,j}$, že uzel i při své aktivaci způsobí aktivaci uzlu j . Takto definovaná síť je ideálním modelem pro řetězové události i domino efekt. Na Obrázku 1.1 je předveden jeden takový model. Síť může být zobrazena v různých rozloženích (layouts) a každé z nich poskytuje vizualizaci jiných vlastností.

Iniciační událostí se může stát každé riziko, které má nenulovou hodnotu samovolné aktivace P_i . Tuto pravděpodobnost je možné určit například pomocí analýzy stromu událostí (event tree analysis, ETA) (Abdolhamidzadeh et al., 2010). Metoda ETA je popsána v ČSN EN 62502 Techniky analýzy spolehlivosti - Analýza stromu událostí (ETA) (ČSN EN 62502, 2011). Pojmem samovolná aktivace je míněno, že není vyvoláno působením jiného rizika, tedy přechodem po hraně z jiného uzlu. Následkem této iniciační události se spustí s nenulovou pravděpodobností eskalace. Tu je možné zakreslit v podobě podgrafu, původního grafu. Na Obrázku 1.2 je příklad takového podgrafu aktivovaného rizika.



Obrázek 1.1 – Dvoji zobrazení topologicky identické sítě využívá isomorfismus grafů. A – spring layout B – circular degree sorted layout. Každý typ rozvržení má svoje výhody pro vizualizaci a pochopení vztahů mezi uzly.

(zdroj: vlastní)



Obrázek 1.2 - Indukovaný podgraf aktivovaného rizika pro uzel 6, které je iniciační rizikem. Každá možná cesta v grafu představuje jeden scénář, přičemž scénáře mohou probíhat paralelně navzájem nezávisle na sobě.

(zdroj: vlastní)

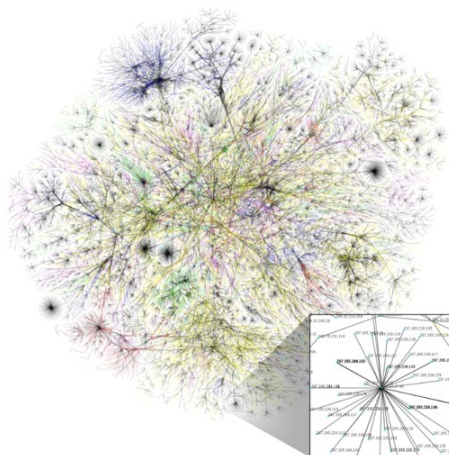
1.2 Základní vlastnosti komplexních sítí

Matematika se v teorii grafů dlouho orientovala na výzkum pravidelných grafů typu různých mřížek. Z této pravidelnosti ji vyvedli v roce 1959 Erdős a Rényi, kteří vytvořili teorii náhodných grafů (Erdős a Rényi, 1959). Položili rovnítko mezi komplexitou a náhodností. A na dlouhou dobu se jejich model náhodného grafu stal jediným abstraktním modelem pro komplexní sítě. I když v dnešní době je tato představa překonaná, tak jim není možné upřít

zásluhu, že vyvedli matematiku ze světa pravidelnosti a otevřeli ji reálnému světu (Barabási, 2005).

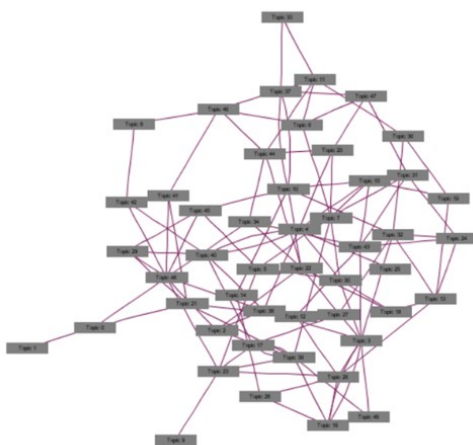
Bez využití výpočetní techniky nešlo dlouho odlišit náhodné a komplexní struktury (Obrázek 1.3 a 1.4). Při zkoumání reálných sítí, zejména díky novým možnostem výpočetní techniky, se postupně začaly vyjevovat nové, nečekané vlastnosti, které tyto sítě mají. Bylo potřeba vytvořit nové modelovací přístupy, které by je dokázaly napodobit. Tyto vlastnosti se objevovaly bez ohledu na oblast zkoumání od sociologie, přes fyziku po technické obory.

Dle Pelánka (2011) můžeme najít následující 3 vlastnosti u komplexních sítí: **fenomén malého světa, shlukování, bezškálovitost** (Pelánek, 2011).



Obrázek 1.3 - Reálná komplexní síť zobrazující část Internetu. Uzly jsou jednotlivé servery navzájem propojené do sítě.

(zdroj: Kovář, 2021)

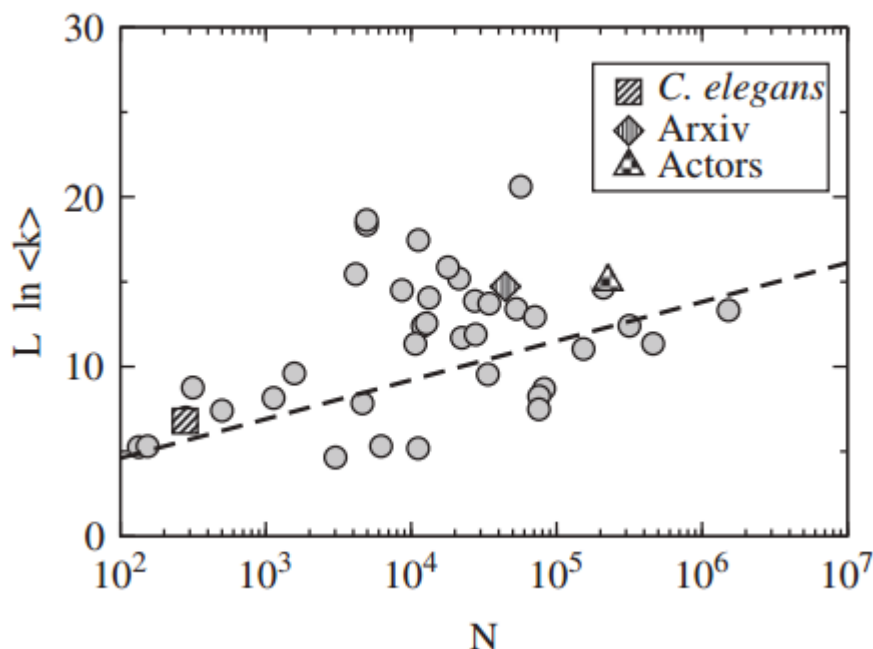


Obrázek 1.4 Náhodný graf. Dlouhou dobu bylo obtížné odlišit náhodné a komplexní sítě.

(zdroj: Wandora, 2012)

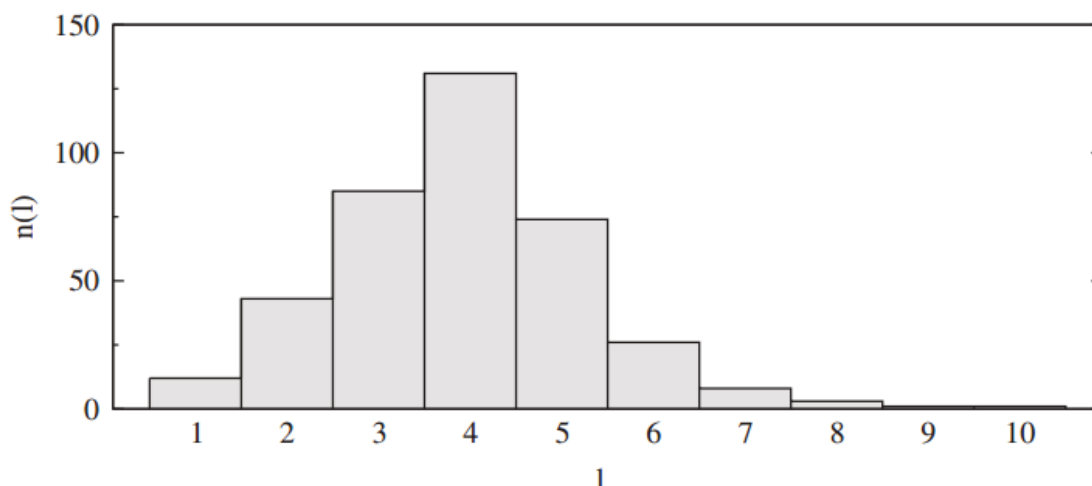
1.2.1 Fenomén malého světa

Fenomén malého světa je vlastnost komplexních sítí, která vyjadřuje, že mezi skoro všemi uzly existuje krátká cesta, přičemž termín krátká cesta znamená cesta řádově menší než velikost sítě (Pelánek, 2011). Alternativně je také možné se setkat s termínem "šest stupňů odloučení", který odkazuje na sociální experiment, který provedl Milgram (1967) v roce 1967. Na jednom konci USA rozdál balíčky s instrukcí, že je možné je předat pouze osobě, která toho, u koho balíček je osobně zná. Balíčky byly směřovány na druhý konec USA. Balíčky dorazily průměrně na 6 skoků. Vznikla tak hypotéza, že každý člověk je od libovolného člověka na světě oddělen v průměru přes 6 lidí (Milgram, 1967). Ve skutečnosti pro různé sítě platí různá čísla, ale řádově menší, než počet uzlů v síti (Obrázek 1.6) (Latora et al., 2017). Tato vlastnost je pozorovaná nejenom u komplexních sítí, ale i u náhodných sítí, takže ji nelze použít pro rozlišení těchto dvou typů sítí (Obrázek 1.5) (Pelánek, 2011). Latora et al. definují síť, která má chování malého světa tak, že její charakteristická délka cesty L roste úměrně logaritmu počtu uzlů N v síti (Latora et al., 2017).



Obrázek 1.5 – Srovnání průměrné délky cesty v grafu pro reálné sítě a náhodný graf podle Erdős a Rényiho modelu. Čárkovaná čára představuje predikci pro Erdős-Rényiho model náhodného grafu. Symboly představují průměrnou délku cesty reálných sítí neuronů *C. elegans* a vědeckých prací na Arxiv. Z grafu je vidět, že průměrná délka neumožňuje rozlišení obou typů. N značí velikost sítě. Osa y je aproximace průměrné cesty.

(zdroj: Latora et al., 2017)



Obrázek 1.6 – Délka cesty při opakování small world experimentu v roce 2003.

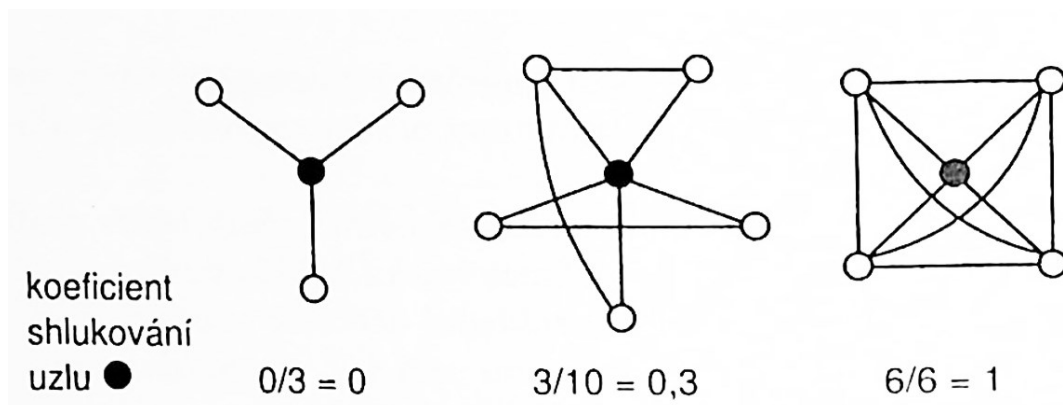
V experimentu byly rozeslány emaily s cílem doručit je adresátům přeposíláním pouze mezi osobami, které se znají. (Blíže v textu na str. 21) Typická délka cesty v experimentu je 4.05. Tato hodnota je však podhodnocením reality, protože kratší řetězce měly větší pravděpodobnost dokončení. Autoři experimentu poskytli argumenty pro korekci průměrné délky na hodnotu mezi 5 až 7, což odpovídá původnímu Milgremovu experimentu z 1967.

Proměnná l na ose x značí délku řetězce a na ose y je počet dokončených řetězců dané délky.

(zdroj: Latora et al., 2017)

1.2.2 Shlukování

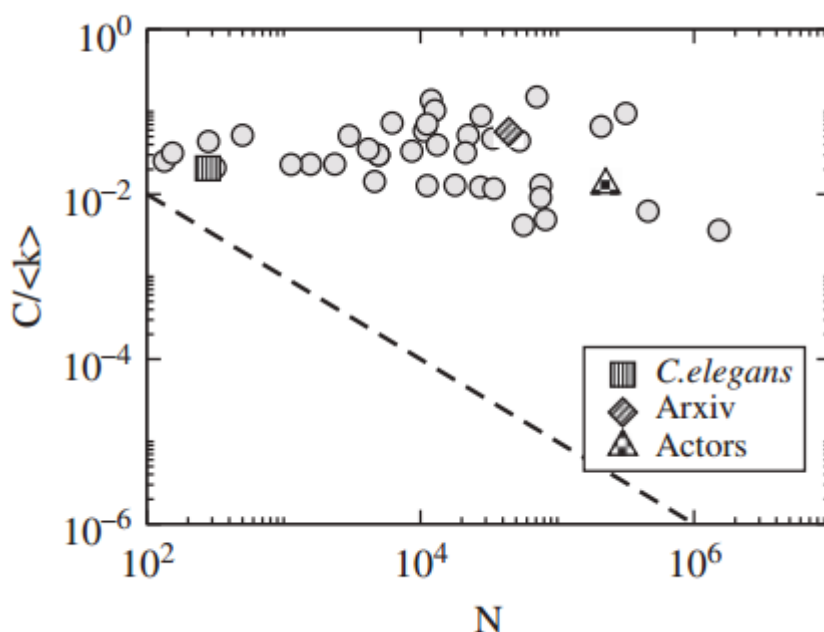
Shlukování vypovídá o skutečnosti, že objekty, které spolu souvisí mají tendenci vytvářet shluky. Pokud osoba A zná osobu B a osobu C, tak je vysoká pravděpodobnost, že se budou vzájemně znát i B a C. Opět tato skutečnost platí v různých oborech. Pro vyjádření míry shlukování se používá koeficient shlukování. Ten je definovaný jako poměr realizovaných propojení sousedů, ke všem možným propojením mezi sousedy (Pelánek, 2011). Z Obrázku 1.7 je patrný princip výpočtu.



Obrázek 1.7 - Příklad výpočtu shlukovacího koeficientu pro různé topologie sítě. Plný černý uzel je uzel, pro který je shlukovací koeficient počítán. Prázdné uzly jsou sousední uzly.

(zdroj: Pelánek, 2011)

Pro síť jako celek se počítá průměrný shlukovací koeficient. Ten dokáže rozlišit mezi komplexní sítí, která ho má výrazně vyšší, a náhodnou sítí, kde se pohybuje kolem nuly (Obrázek 1.8) (Pelánek, 2011).

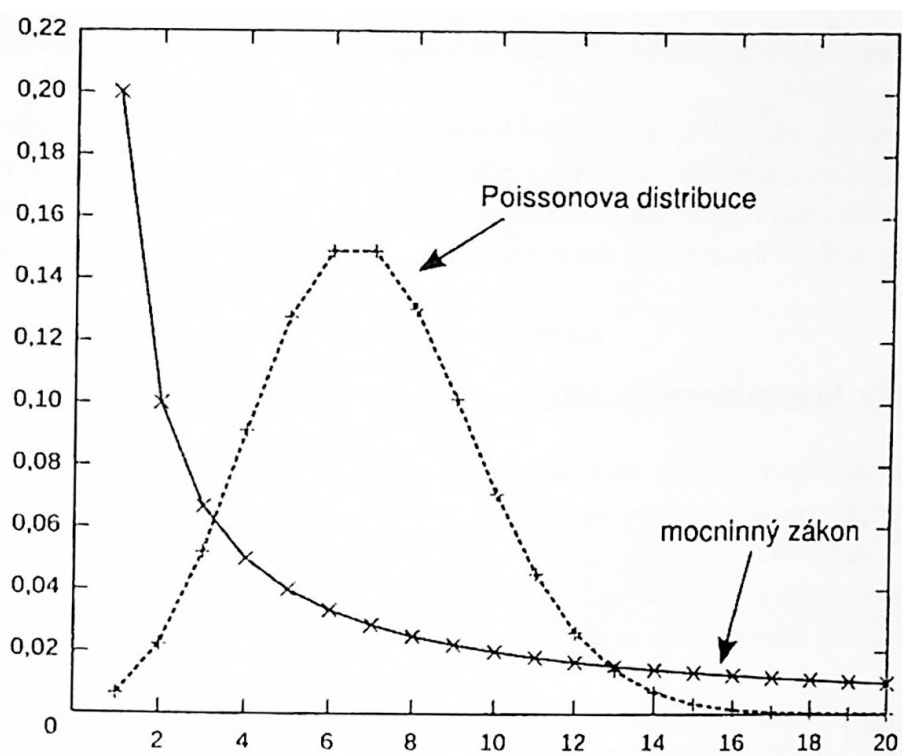


Obrázek 1.8 - Srovnání shlukovacího koeficientu. Čárkovaná čára představuje predikci pro Erdős-Rényiho model náhodného grafu. Symboly představují poměr shlukovacího koeficientu a průměrného stupně uzlu pro reálné sítě neuronů *C. elegans* a vědeckých prací na Arxiv. Z grafu je vidět, že shlukovací koeficient umožňuje rozlišení obou typů sítě. N značí velikost sítě. Osa y je poměr shlukovacího koeficientu a průměrného stupně uzlu.

(zdroj: Latora et al., 2017)

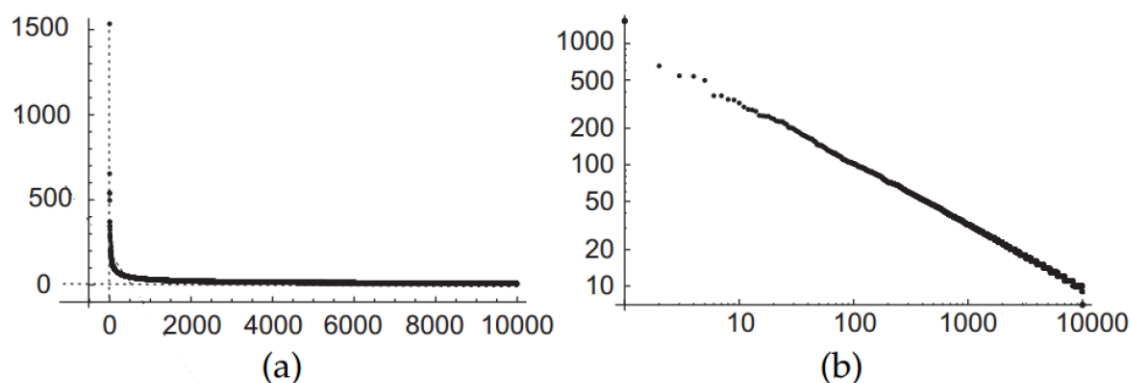
1.2.3 Bezškálovitost

Pro každý uzel je možné stanovit počet hran, které do něho vchází a z něho vychází. Toto číslo bude označeno jako stupeň uzlu. Pro celou síť je potom charakteristická distribuce stupňů uzlů. Pro náhodné sítě se distribuce stupňů uzlů řídí Poissonovým rozdělením, u kterého je možné určit charakteristickou hodnotu. Narozdíl od nich většina komplexních sítí má distribuci stupňů uzlů podle mocninného zákona. Mocninné rozdělení nemá typické hodnoty, ale postupně klesá frekvence výskytu. Řídí se jím například velikost meteoritů, záplavy, požáry a zemětřesení. Nelze tedy najít žádný typický uzel, ale je několik málo uzlů s vysokým stupněm a postupně klesá stupeň s rostoucím počtem až na opačné straně je vysoký počet uzlů s nízkým stupněm (Obrázek 1.9, 1.10 a 1.11) (Pelánek, 2011).



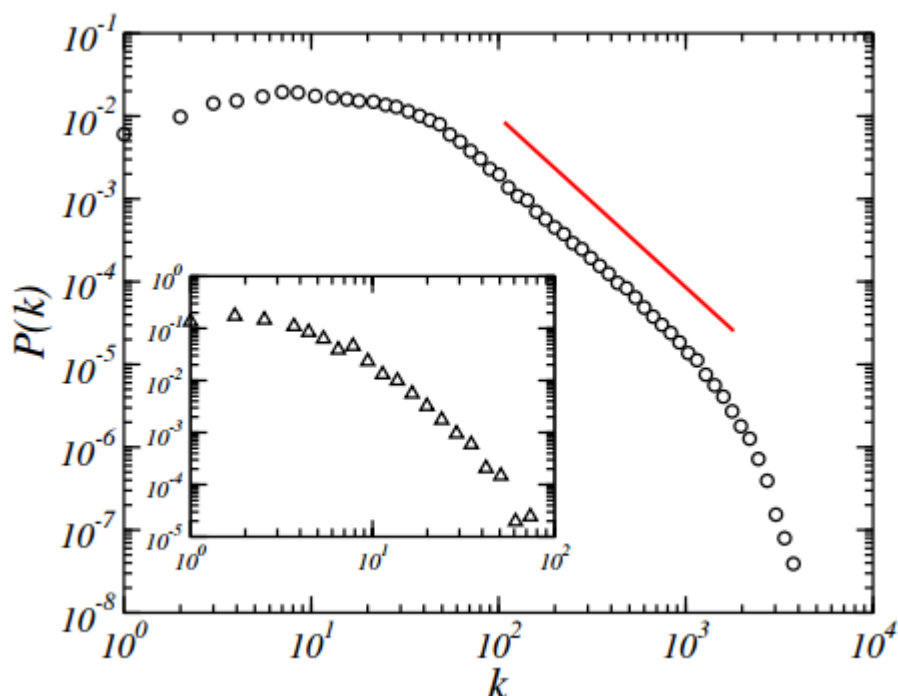
Obrázek 1.9 - Srovnání Poissonova a mocninného rozložení. Komplexní sítě vykazují rozložení stupňů uzlů podle mocninného zákona, náhodné grafy podle Poissonovy distribuce. Z grafu je patrné, že rozložení stupňů uzlů lze použít pro jejich rozlišení. Na ose x je stupeň uzlu, osa y je procento uzlů v síti.

(zdroj: Pelánek, 2011)



Obrázek 1.10 - Distribuci stupně uzlů je možné zobrazovat v normálních souřadnicích (a), ale častěji se zobrazuje v logaritmických souřadnicích (b), protože vynikne její přímka. Na obrázku je distribuce stupňů uzlů pro komplexní síť řídící se mocninným zákonem. Na ose x je stupeň uzlu a na ose y počet uzlů.

(zdroj: Van Steen, 2010)

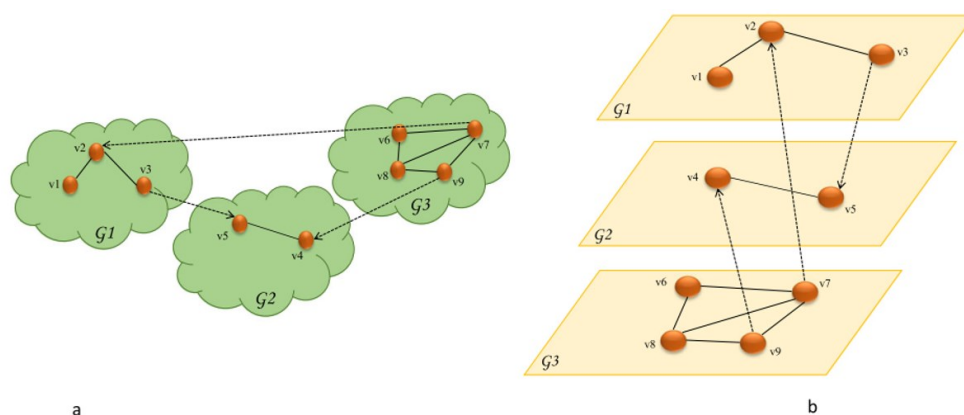


Obrázek 1.11 – Distribuce stupňů uzlů na reálné bezškálové síti (logaritmické měřítko). Na hlavním obrázku je analyzována síť spolupráce mezi umělci. Na vnořeném obrázku je distribuce pro síť spolupráce mezi vědci. Na ose x je parametr k stupeň uzlu a na ose y počet uzlů daného stupně.

(zdroj: Caldarelli, 2007)

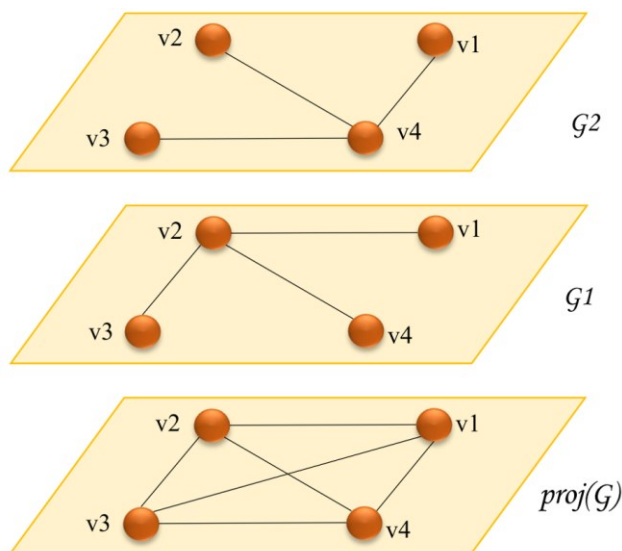
1.2.4 Interagující síť

Interagující síť (Interacting/interconnected/interdependent networks) definují Hammoud a Kramer (2020) jako síť sítí, které mezi sebou mohou interagovat (Obrázek 1.12). Jsou formovány propojením monoplex sítí. Typickým příkladem jsou doprava, telekomunikace, sociální síť, elektrické rozvodné síť. Je potřeba je odlišit od vícevrstevných sítí (multilayer network), které v každé vrstvě obsahují stejnou skupinu uzlů, ale propojenou jinými hranami podle účelu vrstvy (Obrázek 1.13) (Hammoud a Kramer, 2020).



Obrázek 1.12 – Interagující síť. A-Síť zobrazena jako monoplex pohled. B-Stejná informace zobrazená jako multilayer pohled. Uzly, které patří ke stejnému systému jsou umístěny do stejné vrstvy. Dále jsou vyznačeny inter a intra hrany.

(zdroj: Hammoud a Kramer, 2020)



Obrázek 1.13 – Vysvětlení vícevrstevných sítí (multiplex graph). Uzly sítě jsou replikovány do každé vrstvy a hrany reprezentují konkrétní aspekt spojení mezi uzly, který odpovídá dané vrstvě.

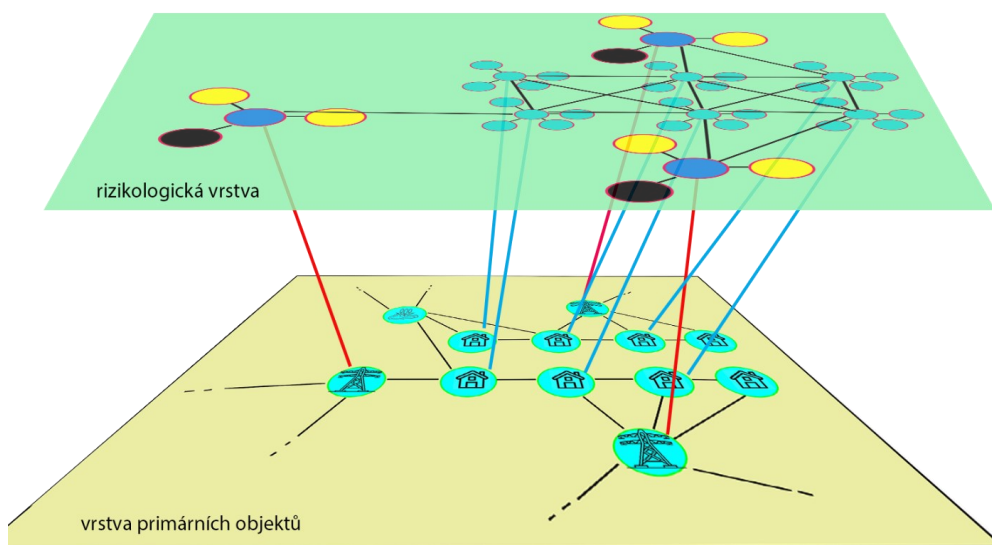
(zdroj: Hammoud a Kramer, 2020)

Pro vysvětlení pojmu interagující sítě a vícevrstevné sítě je možné použít příklad systému hardware ve firmě. Uzly budou všechny HW části – servery, pc, routery, kabeláž, UPS, senzory apod.

Vícevrstevná síť se použije pro zobrazení různých kategorií vztahů. Pro síťového správce je například důležité, které systémy spolu navzájem komunikují a vytvoří si síť zobrazující tyto vztahy, to bude 1. vrstva. Pro pracovníka ekonomického oddělení bude důležité, které systémy jsou v majetku, které divize a v rámci další vrstvy pospojuje stejné uzly podle vlastnictví. Třetí pohled potom může mít pracovník bezpečnosti, kterého bude zajímat, jak výpadek jednoho uzlu nebo jiná nežádoucí událost, může narušit práci jiných uzlů. Tento jeho pohled, sám o sobě vyjádřený monoplex sítí, začlení jako další vrstvu do vícevrstevného grafu. Výsledkem je vícevrstevná síť.

V účetním oddělení by ovšem mohla vzniknout potřeba zachytit ve formě sítě i vztahy mezi dodavateli, výrobcí, servisem. V takovém případě by vytvořili novou síť s uzly pro tyto entity a zařadili ji jako samostatnou vrstvu, která by umožňovala spojení s objekty ve vrstvě hardware. V tom případě by se už jednalo o interagující síť. Z pohledu bezpečnostního pracovníka nebo rizikologa by tak každému uzlu níže položené sítě HW mohlo odpovídat více uzlů v "rizikologické vrstvě". Každý takový uzel by byl považován za jedno riziko např. přehřátí serveru, výpadek el. proudu pro server, havárie diskového pole, zavirování apod. Hrany mezi uzly by potom představovaly kauzální příčinu, kdy aktivace jednoho rizika způsobí aktivaci dalšího. Proces na síti, tedy procházení přes jednotlivé orientované hrany, je potom šíření domino efektu systémem.

Uvedený příklad je samozřejmě velmi zjednodušující. Pro účely DP má způsob vzniku interagující sítě význam v tom, že struktura nižších vrstev se často nějakým způsobem zrcadlí i ve vyšších vrstvách. Pokud nižší vrstva, zejména v technických systémech, vykazuje přítomnost zvláštních topologických prvků jako hubů, mostů nebo k-core, tak se to může projevit i ve vrstvě vyšší například "rizikologické", popisující šíření domino efektu (Obrázek 1.14). Příkladem mohou být sítě popisující architekturu síťových prvků jako routerů, serverů a koncových stanic v IT. V DP již dále nejsou vícevrstvé/interagující sítě zmiňovány a všechny výpočty v praktické části jsou realizovány na jednovrstevných modelech tedy monoplex sítích reprezentujících "rizikologickou" vrstvu.



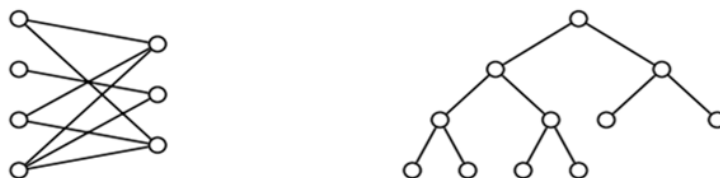
Obrázek 1.14 - Představa, jak povstává komplexní rizikologická vrstva v interagujícím grafu. Ve spodní vrstvě uzly reprezentují hmotné objekty, procesy a další entity, které mezi sebou mají vztahy. V rizikologické vrstvě uzly reprezentují různé hrozby, které jsou s daným objektem asociovány. Mezi hrozbami existují příčinné vztahy, které způsobují eskalaci, domino efekt, synergické působení. Tyto vztahy jsou vyjádřeny hranami.

(zdroj: vlastní)

1.3 Grafy

Z teorie grafů jsou zahrnuty pouze pojmy, které mají bezprostřední využití v DP.

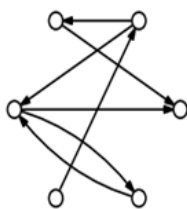
Graf G je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran, tedy množina některých dvouprvkových podmnožin množiny V (Obrázek 1.15) (Kovář, 2021).



Obrázek 1.15 - Ukázka grafů

(zdroj: Kovář, 2021)

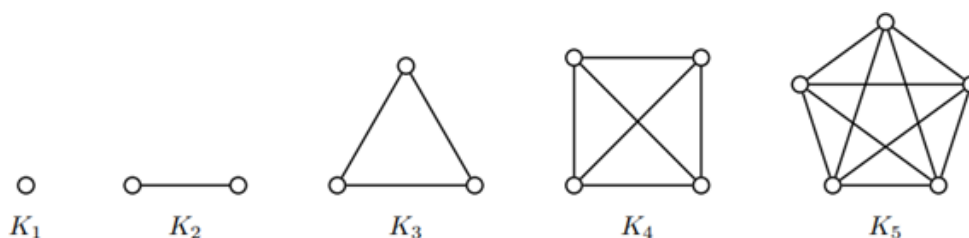
Orientovaný graf (Obrázek 1.16) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů, E je množina orientovaných hran $E \subseteq V \times V$ (Kovář, 2021).



Obrázek 1.16 – Orientovaný graf

(zdroj: Kovář, 2021)

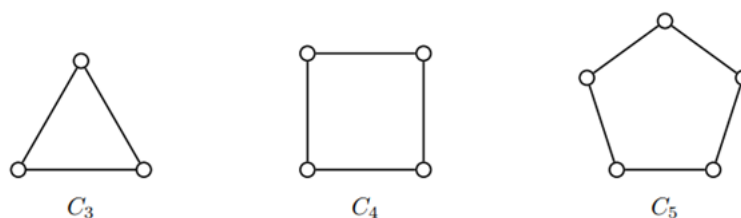
Kompletní (úplný) graf (Obrázek 1.17) je graf na n vrcholech, $n \in \mathbb{N}$, který obsahuje $\binom{n}{2}$ hran a značí se K_n . (Kovář, 2021).



Obrázek 1.17 – Triviální graf a kompletní grafy

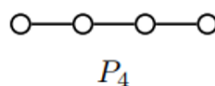
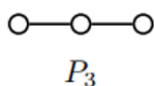
(zdroj: Kovář, 2021)

Graf na n vrcholech (kde $n \geq 3$), které jsou spojeny po řadě n hranami tak, že každý vrchol je spojen s následujícím vrcholem a poslední vrchol je navíc spojen s prvním vrcholem, se nazývá cyklus na n vrcholech a značí se C_n . Číslo n je délka cyklu C_n (Obrázek 1.18) (Kovář, 2021).

Obrázek 1.18 – Cykly C_3 , C_4 , C_5

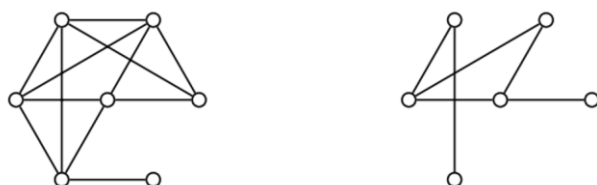
(zdroj: Kovář, 2021)

Graf na n vrcholech, které jsou spojeny po řadě $n-1$ hranami se nazývá cesta a značí se P_n . (Obrázek 1.19)

Obrázek 1.19 – Cesty P_3 a P_4

(zdroj: Kovář, 2021)

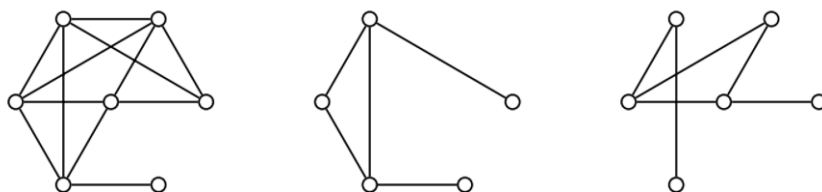
Graf H se nazývá podgrafem grafu G , jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Potom podgraf označujeme jako $H \subseteq G$ (Obrázek 1.20) (Kovář, 2021).



Obrázek 1.20 – Vznik podgrafu z grafu

(zdroj: Kovář, 2021)

Indukovaný podgraf I grafu G (Obrázek 1.21) je takový graf, který splňuje, že $E(I)$ obsahuje všechny hrany grafu G , které jsou incidentní s vrcholy z $V(I)$. Jinými slovy jsou vynechané pouze hrany, které byly incidentní s vynechanými vrcholy (Kovář, 2021).

Obrázek 1.21 – Graf G , jeho indukovaný podgraf I a podgraf H , který není indukovaný.
(pořadí zleva doprava)

(zdroj: Kovář, 2021)

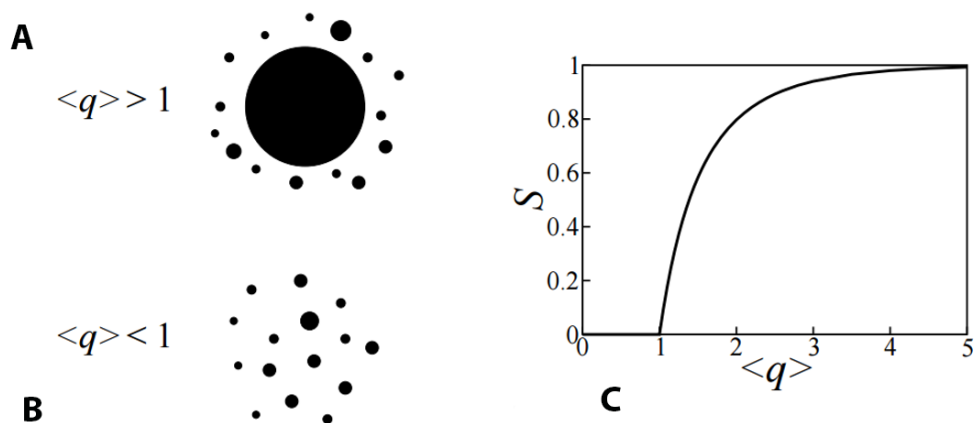
1.4 Modely komplexních sítí a jejich vlastnosti

Pro potřeby analýzy sítí byla vymyšlena celá řada modelů. Tři z nich je možné považovat za základ. Jedná se o Erdős-Rényiho model náhodného grafu, Barabási-Albertův model bezškálového grafu a Watts-Strogatzův model grafu malého světa. Erdős-Rényiho model je dnes pro komplexní sítě již považovaný za překonaný a je uváděn zejména kvůli historické kontinuitě, protože do devadesátých let to byl jediný model pro zkoumání grafů, které nebyly pravidelné. Některé sítě reálného světa mohou ale mít náhodný, nikoli komplexní charakter.

1.4.1 Erdős-Rényiho model náhodného grafu (ER)

Erdős-Rényiho model lze definovat tak, že se vezme počet vrcholů V a stanoví se pravděpodobnost p . Potom každá z hran mezi dvěma vrcholy je vložena s pravděpodobností p (Pelánek, 2011).

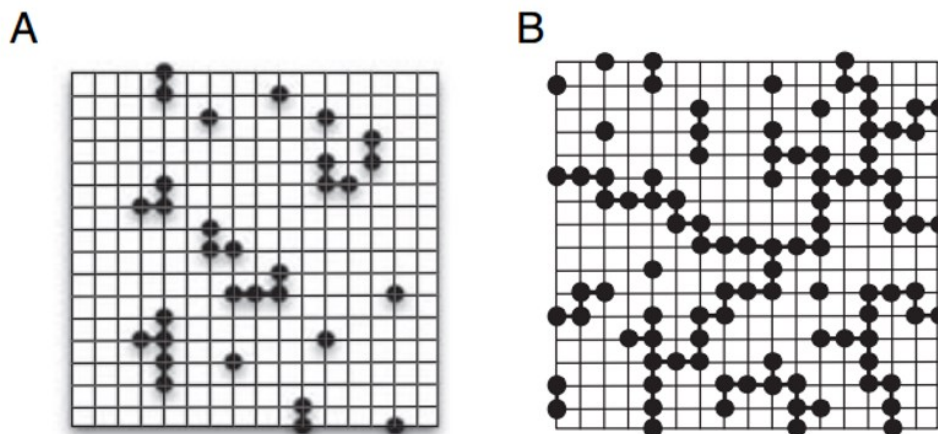
Náhodné grafy vykazují fázový přechod, perkolaci. Jedná se o jev, kdy při dosažení dostatečného propojení vrcholů dojde k přechodu z množství rozdrobených, vzájemně separovaných shluků k vytvoření tzv. gigantické komponenty, ve které je většina uzlů vzájemně propojena. Vývoj tohoto jevu je patrný na Obrázcích 1.22 a 1.23. Další obrazová dokumentace popisující závislost vzniku gigantické komponenty na průměrném stupni uzlu je v Příloze P I Obrázek 1.



Obrázek 1.22 - Vysvětlení vzniku perkolace v závislosti na průměrném stupni uzlů. Organizace klasického náhodného grafu. Plné kruhy ukazují propojené komponenty.

- A- Situace pro průměrný stupeň uzlu > 1 je formována gigantická komponenta.
- B- Pro průměrný stupeň uzlu ještě nedošlo k fázovému přechodu a formování gigantické propojené komponenty.
- C- Závislost relativní velikosti gigantické komponenty na průměrném stupni uzlů. Parametr q průměrný stupeň uzlů.

(zdroj: Dorogovtsev, 2010)



Obrázek 1.23 - Ukázka vzniku gigantické komponenty ve 2D jako analogie procesu fázového přechodu na náhodné síti. Každý bod mřížky je zaplněn kruhem s pravděpodobností p . A- Při malém p vznikají pouze malé klastry. B- Při velkém p dochází k perkolaci a formuje se gigantická komponenta.

(zdroj: Barrat et al., 2008)

Li et al. uvádí, že pro typickou náhodnou neorientovanou síť, která má distribuci stupňů řídící se Poissonovým rozložením platí

$$p(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2)$$

kde $p(k)$ značí distribuci stupňů uzlu a symbol $\langle \rangle$ znamená průměrný stupeň uzlu přes všechny uzly. Pro tuto třídu sítí potom platí, že pro $k < 1$ skoro všechny klastry mají velikost $\log N$. Při $\langle k \rangle = 1$, má největší klastř hodnotu $N^{2/3}$. A teprve po překročení hranice $k=1$ nastává perkolace spojená se vznikem gigantické komponenty (Li et al., 2021).

Všechny informace o perkolaci v předchozích odstavcích se týkají neorientovaných grafů. Pro orientované grafy je situace mnohem složitější a je předmětem zatím neukončeného vědeckého výzkumu. Za prokázané je možné považovat, že tento jev existuje i na orientovaných grafech, ale stanovení kritické meze je vzhledem k povaze problému mnohem složitější. Bližší informace je možné nalézt například v (Bienvenu, 2019). Analytické řešení perkolace na orientovaných grafech přesahuje možnosti autora DP, z tohoto důvodu v praktické části DP, všude tam, kde je potřeba pracovat s perkolací je používán statistický přístup. Když se provede obecné zamyšlení nad problémem, tak je patrné, že vnesení orientace hran způsobí, že i uzly, které by na neorientovaném grafu byly spojeny, se nevhodně orientovanou hranou stanou pro určitou gigantickou komponentu nespojenými. Z toho plyne, že pro dosažení kritické meze bude potřeba většího množství hran. Pokud se tedy vezme jako kritická mez střední hodnota stupně $k=1$, z neorientovaných

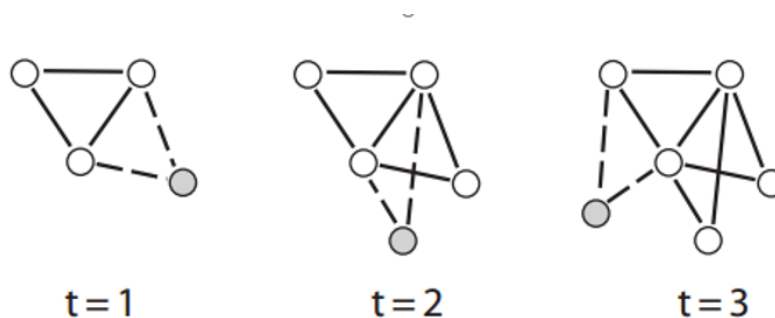
grafů, tak dojde vlastně k předdimenzování. V takovém zjednodušení by byla předpokládána perkolace u grafů, v okamžiku, kdy ještě nenastane. Šlo by tedy o kvantitativní nepřesnost ve smyslu, že je uvažováno příliš malé p , nikoli kvalitativní nepřesnost ve smyslu, že by takový jev vůbec nenastával. Tato skutečnost je důležitá pro stanovení omezení metody MENL v praktické části DP při řešení druhé výzkumné otázky.

Z vlastností, které se většinou nachází u komplexních sítí splňuje Erdős-Rényiho model pouze průměrnou délku v síti, která odpovídá logaritmu počtu uzlů. Distribuce stupňů uzlů splňuje Poissonovo rozložení, což je způsob, jak ji odlišit od bezškálových sítí. Shlukovací koeficient je výrazně nižší než u reálných komplexních sítí (Pelánek, 2011).

1.4.2 Barabási-Albertův model bezškálového grafu (BA)

Za nejvíce využívaný model v komplexních sítích lze považovat Barabási-Albertův model, protože nejlépe vystihuje požadované vlastnosti. Pravidla pro jeho vytvoření jsou následující:

1. Začne se s malým počtem vrcholů a hran.
2. Přidávají se nové vrcholy a každý nový vrchol je spojen k hranami s již existujícími vrcholy. Spojení ale není zcela náhodné, ale upřednostňují se vrcholy, které již mají hodně připojení. Pravděpodobnost připojení uzlu je přímo úměrná jeho aktuálnímu stupni. Tím je dosažena tvorba hubů (Obrázek 1.24) (Pelánek, 2011).



Obrázek 1.24 - Způsob tvorby bezškálového grafu podle Barabási-Albertova modelu pro $n_0=3$, $m=2$. V čase t_0 se začne s kompletním grafem 3 uzlů. V každém časovém kroku je přidán nový uzel, který se spojení se 2 dalšími uzly, přičemž jsou preferovány uzly s vyšším stupněm. Nově přidáný uzel je vyznačený vždy šedě a nové hrany čárkovaně.

(zdroj: Latora et al., 2017)

Barabási-Albertův model má krátké cesty $\log N$, distribuci stupně uzlů podle mocninného zákona a koeficient shlukování vyšší než u náhodných sítí, ale nižší než u sítí reálných (Pelánek, 2011).

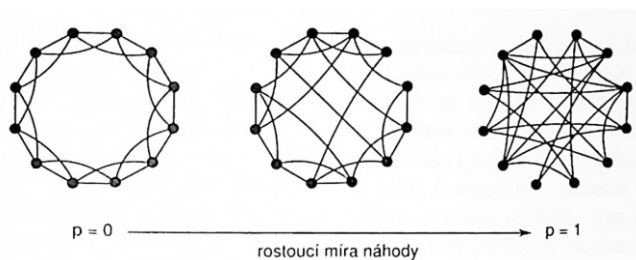
1.4.3 Watts-Strogatzovův model grafu malého světa (WS)

Je to jeden z prvních modelů, které se snažily zachytit vlastnosti reálných sítí. Budování sítě je možné rozdělit do dvou kroků. Nejprve se vytvoří pravidelné uspořádání, a to se následně procesem náhodné změny hran přetvoří na komplexní. Proces tvorby sítě je zobrazen na Obrázek 1.25.

1. Vezme se N vrcholů. Uspořádají se do kruhu. Každý vrchol se spojí s K sousedy, polovina na jedné straně, polovina na druhé straně.

2. S pravděpodobností p se existující hrana nahradí jinou náhodnou hranou.

V závislosti na velikosti p se tak síť mění od zcela pravidelné ($p=0$) až po zcela náhodnou ($p=1$). Mezi těmito extrémy se nachází model, který se v některých vlastnostech blíží komplexním sítím. Konkrétně má krátké cesty a shlukování. Chybí bezškalová distribuce stupňů uzlů (Pelánek, 2011).



Obrázek 1.25 - Vznik Watts-Strogatzova modelu grafu malého světa pro různé parametry p . Parametr p určuje pravděpodobnost, že hrana bude nahrazena jinou hranou.
(zdroj: Pelánek, 2011)

Pro jednotlivé modely je možné shrnout jak dokáží reprodukovat vlastnosti reálných komplexních sítí v Tabulce 1.1.

Tabulka 1.1 - Schopnost jednotlivých modelů zachytit vlastnosti reálných komplexních sítí

	průměrná délka cesty	mocninné rozdělení distribuce uzlů	shlukovací koeficient	závěr – zachycení reál. komplex. sítí
náhodné grafy Erdős-Rényiho model	ANO (log N)	NE (Poissonovo rozdělení)	NE (< reálné sítě)	NE
graf malého světa Watts-Strogatzův model	ANO (při vhodném p)	NE	ANO (při vhodném p)	částečně ANO
bezškálové sítě Barabási-Albertův model	ANO (log N)	ANO ($\gamma=3$)	částečně ANO (ER < BA < reálné)	ANO nejlépe

Poznámka: Erdős-Rényiho model (ER), Barabási-Albertův model (BA), N je velikost sítě

(zdroj: vlastní na základě Pelánek, 2011; Latora et al., 2017)

1.5 Centrality uzlů

Předchozí část byla zaměřena více na pohled na síť z určitého nadhledu. Předmětem zájmu byl celek. Jestli je síť komplexní nebo náhodná, jakými parametry ji lze odlišit od jiných sítí nebo naopak seskupit sítě z různých aplikačních domén do společné skupiny, aby šlo využít znalostí o sítích získaných v jednom oboru jejich transferem do jiného. V této části práce je hlavním předmětem zájmu základní jednotka sítě – uzel. Komplexní i náhodná síť se skládá z řady uzlů, které mají v síti různý vliv. To, jaký konkrétní význam má uzel v síti je důležité pro pochopení procesů, které v síti probíhají. Pro konkrétní představu je možné si představit skupinu lidí. Pracovník bude uzel. Hrana bude přátelství s jinou osobou. V normální skupině budou zastoupeni introverti, kteří se spojí s několika málo uzly, průměrně sociálně interagující lidé, jejichž počet hran bude vyšší a několik extrovertů, kteří budou maximálně propojeni na své okolí. Jiný příklad může být funkce v software, která je volána skoro neustále jako `print()` a naproti tomu vysoce specializovaná funkce, která je volána minimálně. Intuitivně lze cítit, že pokud v nové verzi udělají programátoři chybu v `print()`, tak tím způsobí problém mnohem většímu počtu programů, než když udělají chybu ve funkci používané minimálně. Posledním ilustračním příkladem může být síť, v níž budou uzly jednotlivé objekty infrastruktury a orientované hrany budou závislosti mezi nimi. Úlohou k řešení potom bude modelování situace, kdy některý prvek infrastruktury selže a je potřeba se připravit na možné dopady, tedy znát co a jak bude výpadkem ovlivněno. Znalost toho, jestli jsou na tomto prvku závislé pouze okolní budovy nebo se jedná o kritickou

infrastrukturu nebo dokonce evropskou kritickou infrastrukturu je potom zcela zásadní. Všechny výše uvedené ilustrace je možné abstrahovat na uzel, hranu, topologii a metriky pro měření významu uzlu bez ohledu na aplikační oblast. Na význam uzlu pro síť je možné se dívat z řady hledisek a tomu odpovídá i řada definovaných metrik. Metriky dále uváděné pocházejí z různých zdrojů. Některé jsou používány pravidelně jako degree centrality nebo closeness centrality. Některé lze najít pouze ve specializovaných zdrojích např. prestige. (Názvy jsou uváděny v angličtině, protože v českém jazyce prakticky neexistuje referenční literatura a i například přednáškové materiály používají anglické názvy. Působilo by roztržštěně uvádět některé termíny v češtině a další anglicky.)

V DP jsou definovány a následně v praktické části použity: degree centrality, closeness centrality, betweenness centrality, eigenvector centrality, katz centrality, pagerank, k-Step Reach Centrality, in-reachable centrality, out-reachable centrality, sum-reachable centrality.

1.5.1 Degree centrality

Jedná se o základní centralitu, která je uváděna v každé literatuře. Barrat et al. (2008) ji definuje na neorientovaném grafu jako součet hran, které přicházejí do uzlu (Obrázek 1.26) (Barrat et al., 2008). Jinými slovy jde o počet bezprostředních sousedů uzlu. Výpočet lze provést na matici souvztažnosti jako

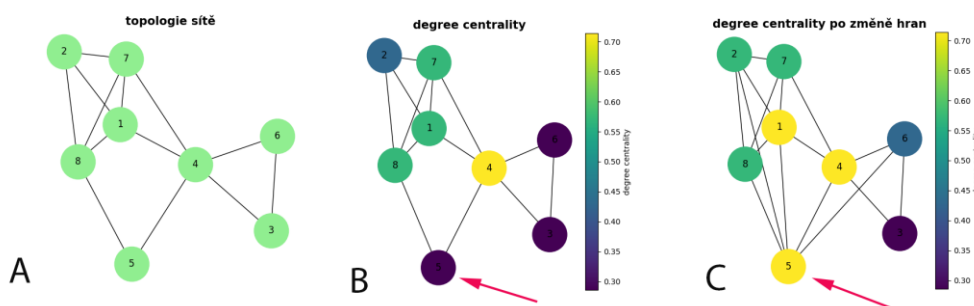
$$C_{DG}(i) = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (3)$$

kde $C_{DG}(i)$ značí stupeň uzlu neboli degree centrality uzlu i na neorientovaném grafu a A_{ij} prvky matice souvztažnosti.

Aby bylo možné provádět srovnání mezi různými sítěmi, tak se často provádí normování degree centrality (NetworkX, 2024a) Jde tedy o poměr skutečných vazeb ke všem možným, které může uzel v síti vytvořit.

$$C_{DGN}(i) = \frac{C_{DG}(i)}{N-1}, \quad (4)$$

kde $C_{DGN}(i)$ značí normovanou degree centralitu uzlu i a N počet uzlů sítě.



Obrázek 1.26 – Demonstrace degree centrality a její změny. A – topologie sítě, B – degree centrality, C – degree centrality po přidání hran k uzlu 5. Je patrné, že po přidání hran došlo nejvíce ke zvýšení u uzlu, kterému byly přidány 3 hrany. Neorientovaný graf.

(zdroj: vlastní)

Na orientovaném grafu je nutné vzít v úvahu orientaci hran. Mata (2020) ji definuje jako in-degree a out-degree (Obrázek 1.27) (Mata, 2020).

$$C_{DG}^{in}(i) = \sum_{j=1}^N A_{ji}, \quad (5)$$

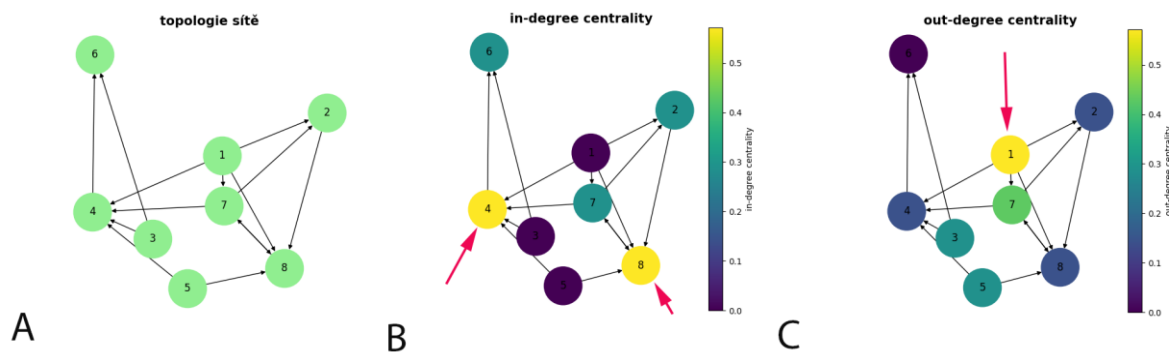
$$C_{DG}^{out}(i) = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (6)$$

Pro celkový počet spojů potom platí

$$C_{DG}^{ori}(i) = C_{DG}^{in}(i) + C_{DG}^{out}(i), \quad (7)$$

kde $C_{DG}^{ori}(i)$ značí celkovou degree centralitu uzlu i na orientovaném grafu, $C_{DG}^{in}(i)$ in-degree centralitu uzlu i a $C_{DG}^{out}(i)$ out-degree centralita uzlu i . Přičemž C_{DG} a C_{DG}^{ori} jsou různé hodnoty, protože na neorientovaném grafu je hrana započtena pouze jedenkrát, ale pokud je tatáž hrana na orientovaném grafu a je v obou směrech, tak je započtena dvakrát, jednou jako příchozí a jednou jako odchozí. Toho lze využít a každý neorientovaný graf lze převést na orientovaný nahrazením hrany dvěma hranami v obou směrech.

Motivace pro takto zavedenou degree centrality je v úvaze, že uzly s vysokou degree centrality jsou centrální nebo silně propojené se sítí a mohou takto více působit na síť. Naopak uzly s nízkou hodnotou mohou být okrajové. Je vhodné podtrhnout slovo mohou, protože například uzel typu most bude mít jednu z nejnižších hodnot degree centrality v síti, ale současně bude mimořádně významný. Je tedy vhodné nevycházet pouze z numerické hodnoty vrácené analytickým programem, ale výsledek i vizuálně posoudit.



Obrázek 1.27 - Demonstrace rozdílu mezi in-degree a out-degree centralitou A-topologie sítě, B-in-degree centrality, C-out-degree centrality. Šipkou označené uzly s vysokým stupněm daného typu centrality.

(zdroj: vlastní)

1.5.2 Closeness centrality

Za zavedením closeness centrality stojí úvaha, že o rychlosti komunikace uzlu se zbytkem sítě rozhoduje vzdálenost, kterou má k dalším uzlům. Mezi dvěma uzly může být celá řada cest, ale nejdůležitější je ta nejkratší. Suma nejkratších cest k ostatním uzlům tedy charakterizuje polohu uzlu v síti jako celku. Zatímco degree centralita vypovídá o poloze uzlu jenom ve vztahu k nejbližšímu okolí a zbytek sítě zůstává nezachycený, tak closeness centrality do sebe zanesou vztah ke každému uzlu sítě, tedy její informační hodnota by měla být hlubší. Matematicky ji Barrat et al. (2008) definuje jako převrácenou hodnotu součtu všech nejkratších cest z daného uzlu ke všem ostatním uzlům.

$$C_c(i) = \frac{1}{\sum_{j \neq i} d(i, j)}, \quad (8)$$

kde $C_c(i)$ značí closeness centralitu uzlu i , $d(i, j)$ nejkratší cestu mezi uzly i, j , a $\sum_{j \neq i} d(i, j)$ součet všech vzdáleností z uzlu i ke všem ostatním uzlům.

Největší hodnota closeness centrality tedy bude vycházet uzlům, které mají nejkratší cesty (Barrat et al., 2008).

Někdy se closeness centrality normuje velikostí sítě:

$$C_c(i) = \frac{N-1}{\sum_{j \neq i} d(i, j)}, \quad (9)$$

kde N značí počet uzlů sítě a ostatní symboly jsou ve stejném významu jako u vzorce (8).

Uzly s vysokou closeness centralitou budou důležité pro šíření informace v síti, protože ji dokáží rychle distribuovat. Také z pohledu robustnosti sítě budou důležité, protože jejich odstranění může značně zvýšit průměrnou délku sítě a tedy její schopnost reagovat. Tyto

vlastnosti jsou důležité v kontextu modelování rizika. Nemusí jít pouze o šíření informace, ale může se šířit i virus, nemoc nebo následky nebezpečné události.

Na orientovaném grafu je definována normovaná out-closeness centrality obdobně jako

$$C_C^{\text{out}}(i) = \frac{N_{\text{reachable}} - 1}{\sum_{j \neq i} d(i, j)}, \quad (10)$$

kde $C_C^{\text{out}}(i)$ značí out-closeness centralitu uzlu i , $N_{\text{reachable}}$ počet uzlů dosažitelných z uzlu i a $\sum_{j \neq i} d(i, j)$ součet všech vzdáleností z uzlu i ke všem ostatním dosažitelným uzlům.

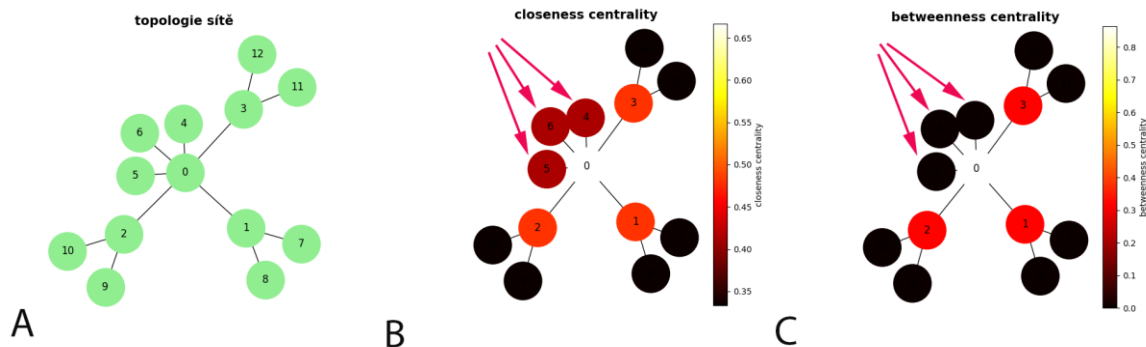
1.5.3 Betweenness centrality

Barrat et al. (2008) u pojmu betweenness centrality vysvětluje, že výše jmenované, tedy degree centrality a closeness centrality se zaměřují na uzly, jejichž vlastnost je dobré propojení buď se svým bezprostředním okolím nebo se sítí jako celkem. Přehlíží, ale topologicky důležité hrany, které propojují různé oddělené oblasti sítě (Barrat et al., 2008). V reálném životě by se jednalo například o lidi, kteří jsou členy různých sociálních skupin a zprostředkují mezi nimi komunikaci; města, která jsou dopravními uzly propojujícími různé oblasti nebo v IT servery nebo routery spojující oddělené sítě. Tato centra jsou kritická, protože jejich výpadek naruší komunikaci ne na úrovni jedinců, ale na úrovni celých částí sítě. Často takové uzly fungují v pozici mostu.

Matematicky tuto vlastnost uchopili Freeman a Newman (Freeman, 1977; Newman, 2001) zavedením betweenness centrality. U Barrata et al. (2008) ji najdeme definovanou jako procento nejkratších cest vedoucích skrz uzel k počtu všech nejkratších cest (Barrat et al., 2008).

$$C_B(i) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}, \quad (11)$$

kde $\sigma_{st}(i)$ značí počet nejkratších cest mezi uzly s a t , které probíhají uzlem v , dále σ_{st} je počet nejkratších cest mezi uzly s a t . Je to dobře patrné u mostu, že všechny nejkratší cesty z jedné části do druhé části sítě musí vést právě přes most, a tudíž u tohoto uzlu prudce vzroste jeho betweenness centrality (Obrázek 1.28).



Obrázek 1.28 - Demonstrace rozdílu mezi closeness a betweenness centrality. Uzly 5,6,7 se účastní krátkých vazeb, ale nic nezprostředkovávají, proto mají vyšší closeness, ale minimální betweenness centrality. A – topologie sítě, B-closeness centrality, C-betweenness centrality

(zdroj: vlastní)

1.5.4 Eigenvector centrality

Za eigenvector centrality (Obrázek 1.29) stojí myšlenka, že není hrana, jako hrana. Pro ilustraci je opět uveden příklad. Bude analyzována lobbistická síť. Uzly jsou lidé a hrany vyjadřují schopnost ovlivnit smýšlení druhého uzlu. Bude existovat člověk 1, který má hranu na 20 kolegů a člověk 2, který je sice introvert, má pouze 2 hrany, jednu na svého kolegu, ale druhou na bývalého spolužáka, který se stal ministrem. Je jasné, že není hrana jako hrana. Eigenvector centrality je mírou, která odráží důležitost uzlu v síti tím, že bere v úvahu nejen počet sousedů daného uzlu, ale také důležitost těchto sousedů.

Výpočet eigenvector centrality je založený na matici souvztažnosti:

$$C_{eig}(i) = \frac{1}{\lambda_{max}} \sum_j A_{ij} C_{eig}(j), \quad (12)$$

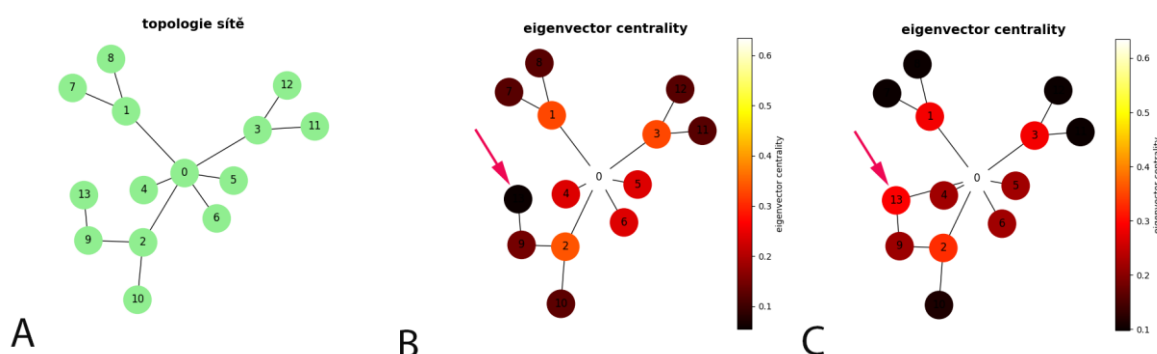
kde $C_{eig}(i)$ značí eigenvector centralitu uzlu i , $C_{eig}(j)$ eigenvector centralitu uzlu j ,

λ_{max} největší vlastní hodnotu matice souvztažnosti A , A_{ij} prvek matice souvztažnosti A .

Eigenvector centrality tedy přiřazuje skóre každému uzlu v síti tak, že skóre každého uzlu je úměrné součtu skóre jeho sousedů. K tomu využívá vlastního vektoru matice souvztažnosti sítě (Mojtaba et al., 2019).

Jedním z příkladů, kde je tato metrika použita je Google PageRank algoritmus pro hodnocení webových stránek. Hodnotí stránku nejenom podle množství odkazů, co na

stránku vedou, ale také podle důležitosti těchto stránek, ze kterých vede odkaz (Suvarna et al., 2022).



Obrázek 1.29 - Demonstrace eigenvector centrality. A-topologie sítě, B-počáteční eigenvector centrality, C-eigenvector centrality po přidání hrany mezi 13 a 0. Šipkou označený uzel 13 po přidání hrany na "bohatý" sousední uzel 0 prudce zvýší eigenvector centrality.

(zdroj: vlastní)

1.5.5 Katz centrality

Katz centrality je rozšířením myšlenky, která stála za vznikem eigenvector centrality, že není hrana jako hrana, ale posunuta o krok dál. Když bude použit příklad uvedený u eigenvector centrality, kde někdo je spojen s hranou s ministrem, tak u katz centrality by byl modifikovaný, že dotyčný zná manželku ministra nebo bratra manželky ministra. V akademické sféře by jako příklad mohly sloužit práce, které sice nejsou často citovány přímo, ale jsou důležité, protože přes několik kroků souvisí s často citovanými pracemi. Obecně tedy je možné tuto katz centrality metriku charakterizovat jako variantu eigenvector centrality, která zohledňuje nejen přímé spojení uzlu, ale i nepřímé spojení s ostatními uzly, přičemž vzdálenější uzly mají menší váhu. V NetworkX je definována následujícím způsobem (NetworkX, 2024b)

$$C_{katz}(i) = \alpha \sum_j A_{ij} C_{katz}(j) + \beta, \quad (13)$$

$$\alpha < \frac{1}{\lambda_{max}}, \quad (14)$$

kde $C_{katz}(i)$ značí katz centralitu uzlu i , $C_{katz}(j)$ katz centralitu uzlu j , A matici souvztažnosti grafu G s vlastními čísly λ . Parametr α je tlumící faktor určující váhu

vzdálených uzlů (obvykle malá konstanta, např. 0.1). Parametr β určuje počáteční vliv, který dává základní nenulovou hodnotu i izolovaným uzlům.

Porovnáním vztahů (12) a (13) je vidět, že pokud je $\beta = 0$, a současně se α bude blížit $\frac{1}{\lambda_{max}}$ pak bude eigenvector centrality a katz centrality konvergovat.

1.5.6 Pagerank

Pagerank je algoritmus, který byl původně vyvinut pro hodnocení důležitosti web stránek zakladateli společnosti Google, Larry Page a Sergey Brinem. PageRank předpokládá, že důležitost webové stránky je určena počtem a kvalitou odkazů, které na ni vedou. Hlavní myšlenka je, že odkazy fungují jako hlasy, ale ne všechny hlasy mají stejnou váhu. Hejlová (2015) ve své práci popisuje pagerank následujícím způsobem (Hejlová, 2015)

$$r(P_k) = \sum_{P_j \in \mathcal{B}_{P_k}} \frac{r(P_j)}{|P_j|}, \quad (15)$$

kde $r(P_k)$ značí pagerank web stránky P_k , $r(P_j)$ pagerank stránky P_j , která odkazuje na stránku P_k . $|P_j|$ je počet odkazů na stránce P_j . $\mathcal{B}_{P_k}$ je množina všech stránek, které odkazují na stránku P_k .

1.5.7 Varianty reach centrality

Borgatti et al. (2018) zmiňuje **k-Step Reach Centrality** jako počet uzlů, které jsou dosažitelné z uzlu i během k -kroků (Borgatti et al., 2018; Sandoval et al., 2020)

$$C_{\text{reach}}^k(i) = \{j \in G - \{i\} : d(i, j) \leq k\}, \quad (16)$$

kde $C_{\text{reach}}^k(i)$ značí k -step reach centralitu uzlu i pro počet kroků k , tedy kardinalitu množiny uzlů, splňujících výše uvedený vztah. Dále $d(i, j)$ je nejkratší vzdálenost mezi uzly i a j .

Pokud uzly nejsou spojeny považuje se vzdálenost $d(i, j)$ za blížící se nekonečnu. Protože v knihovně NetworkX nelze počítat s nekonečnem, je vzdálenost nepropojených uzlů implementována jako 0.

Poprvé termín reach používá v dizertační práci Sevtsuk (Sevtsuk, 2010). Sandoval (Sandoval et al., 2020), který na jeho práci navazuje už používá termín reach centrality definovaný obdobně jako u Borgattiho et al. (Borgatti et al., 2018).

V obou případech, tedy u Borgatti et al. (2018) i Sandovala (2020), je ale využití pouze na neorientovaném grafu. V literatuře se nepodařilo dohledat definici pro orientovaný graf, proto je nyní zavedeno několik definic následujícím způsobem:

In-reachable centrality (Obrázek 1.30B) je definována následujícím způsobem

$$C_{\text{reach}}^{\text{in}}(i) = \frac{|\{j \in G - \{i\} : d(i, j) \neq \infty\}|}{N-1}, \quad (17)$$

kde je $C_{\text{reach}}^{\text{in}}(i)$ značí in-reachable centralitu uzlu i na orientovaném grafu, j , i jsou uzly grafu G . N je počet uzlů grafu G . Jde tedy o poměr počtu uzlů j , ze kterých je možné dosáhnout v orientovaném grafu do uzlu i , bez omezení délky cesty, k maximálnímu počtu uzlů

Podobně je možné definovat **out-reachable centrality** (Obrázek 1.30C) jako

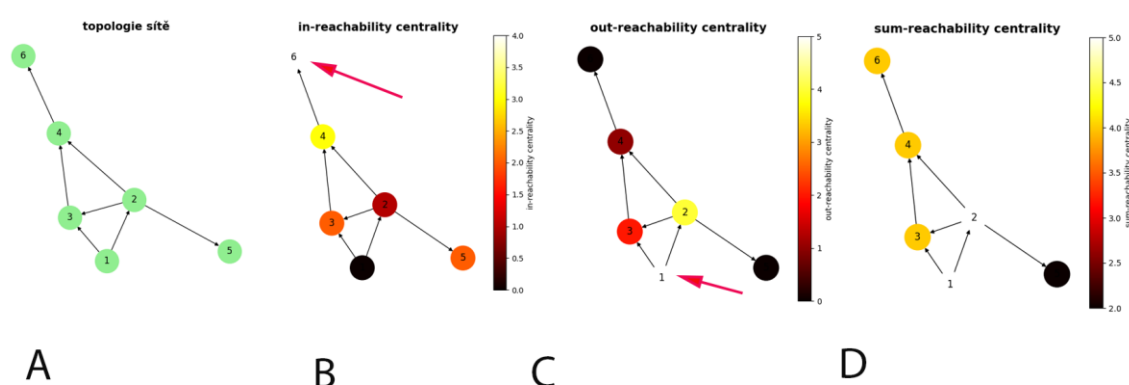
$$C_{\text{reach}}^{\text{out}}(i) = \frac{|\{j \in G - \{i\} : d(i, j) \neq \infty\}|}{N-1}, \quad (18)$$

kde $C_{\text{reach}}^{\text{out}}(i)$ značí out-reachable centralitu uzlu i na orientovaném grafu, j , i jsou uzly grafu G , N je počet uzlů grafu G . Jde o poměr počtu uzlů j , které je možné dosáhnout v orientovaném grafu z uzlu i bez omezení nejkratší cesty, k počtu teoreticky dosažitelných uzlů.

Sum-reachable centrality (Obrázek 1.30D) potom je vyjádřena

$$C_{\text{reach}}^{\text{sum}}(i) = C_{\text{reach}}^{\text{in}}(i) + C_{\text{reach}}^{\text{out}}(i), \quad (19)$$

kde $C_{\text{reach}}^{\text{sum}}(i)$ značí sum-reachable centralitu uzlu i na orientovaném grafu.



Obrázek 1.30 - Demonstrace in a out reachable centrality. A-topologie sítě, B- in-reachable centrality. Šipkou je vyznačen uzel, který by se dal nazvat akceptorem, v RI by se jednalo o koncovou událost jednoho z možných scénářů. C- out-reachable centrality. Šipkou je vyznačena událost, která by mohla být iniciační událostí nejdelších scénářů. Skutečný scénář ale nemusí začínat ani končit uzlem označeným šipkou, ale kterýmkoli uzlem.

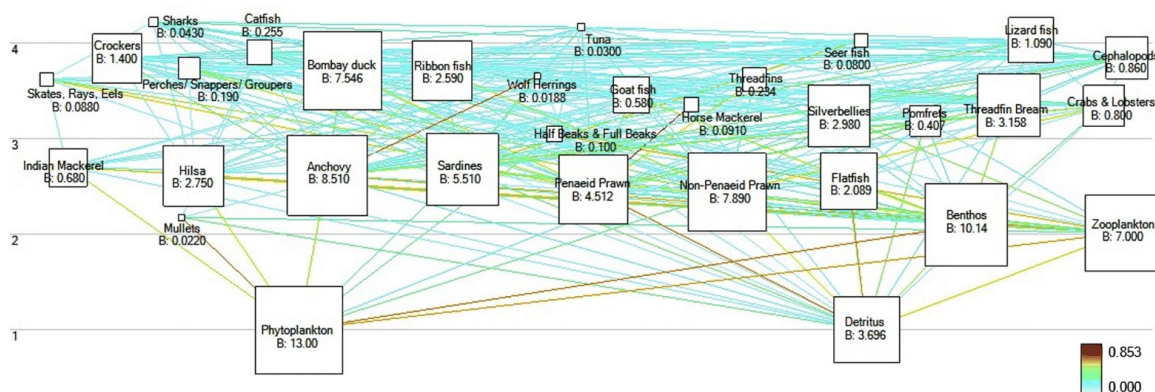
Metrika vypovídá o "převládajícím charakteru" daného uzlu.

(zdroj: vlastní)

Tyto metriky nejsou v literatuře dostupné. I v manuálu pro program NetworkX je prezentována pouze `local_reaching centrality` pro orientovaný graf, jako procento uzlů dosažitelných z tohoto uzlu (NetworkX, 2024c). Tedy odpovídá tomu, co je zde zaváděno jako `out-reachable centrality`. Zájem o opačnou stranu tedy dostupnost do uzlu i z ostatních uzlů nebyl v literatuře nalezen. `Reachability` jako taková v teorii grafů je známý a zavedený pojem, ale nevyskytuje se v literatuře týkající se centralit a není implementována v softwarech pro jejich analýzu.

Z pohledu modelování rizik je zajímavější než používat k -varianty různých typů `reachable centralit`, tak jejich varianty bez omezení délky cesty, tedy maximální, protože většinou si analytik bude klást otázku, zda něco může být příčinnou něčeho jiného, než pouze v kolika krocích. Není možné vyloučit ale ani druhou zmiňovanou možnost, zejména, když půjde o kvantitativní analýzu s výpočtem pravděpodobnosti události, kde počet kroků hraje roli. Protože dostupný software tyto funkce nenabízí, tak jsou při řešení aplikační části doprogramovány.

Otázka `reachability` úzce souvisí s pojmem trofická úroveň (`trophic level`). Pojem byl zaveden nejprve v ekologii Lindemanem (Lindeman, 1991) a vyjadřuje skutečnost, že některé organismy jsou v dolní části potravního řetězce, zatímco jiné organismy se jimi živí a jsou na vyšších stupních. Pojem se ujal v obecné analýze orientovaných sítí. V oblasti modelování rizik je možné si představit jeho využití v tom, že uzly, které se nachází v nízkých úrovních jsou primárně zdroji nebezpečí, zatímco uzly nacházející se zcela nahoře jsou akceptory nebo následky a uzly mezi nimi jsou více či méně v pozici obou dvou možností, podle své pozice. Pozice uzlu je potom počítána jako bezrozměrné číslo pomocí různých algoritmů, přičemž existuje více definicí např. `Mean trophic level`, `Fractional trophic level` (Obrázek 1.31) (Pauly a Palomeras, 2005).



Obrázek 1.31 - Pozice druhu zobrazená v potravním řetězci na základě fractional trophic level. Hrany mezi uzly vyjadřují vztah kořist – potrava. Osa y znázorňuje úroveň trophic level.

(zdroj: Isha et al., 2018)

Výpočet trofické úrovně byl definičně omezen na acyklické grafy, což v ekologii nedělalo problémy, protože u biologických druhů je jasné vymezeno, kdo je potravou a kdo lovcem. Jinak je tomu ale v dalších oborech včetně RI, kde se naopak zpětnovazební smyčky vyskytují běžně. Tento nedostatek odstranil Moutsinas, který zavedl pojmy generalised trophic levels a graph hierarchy, kterými umožnil použití na orientovaných grafech bez omezení (Moutsinas, 2019). To otevřelo cestu i k několika aplikacím v modelování rizik, jak je ukázáno v literární rešerši v kapitole 1.7 na str. 51. Souvislost s reachability centrality je v tom, že oba přístupy hodnotí počet uzlů, ze kterých se lze do daného uzlu dostat a počet uzlů, které naopak lze navštívit z daného uzlu a tím popisují význam uzlu v rámci dané sítě. Liší se však způsobem výpočtu, kdy výpočet generalised trophic levels je nepoměrně složitější. V této práci z prostorových důvodů není nijak rozebírán.

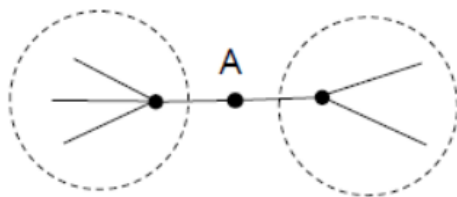
1.6 Vybrané významné topologické prvky

Mezi významné topologické prvky na síti je možné zařadit most, hub a K-core. Ve specializované literatuře zabývající se komplexními sítěmi nebo teorií grafů je možné najít i další.

1.6.1 Most

Jako most (bridge) (Obrázek 1.32) se označuje uzel, který propojuje dvě jinak oddělené části sítě. Horák (2024) uvádí, že se jedná o uzel, který má nejvyšší betweenness centralitu, a přes který prochází cesty mezi všemi dvojicemi uzlů z obou částí. Působí tak jako závora,

propojení nebo zprostředkovatel rolí (Horák, 2024). Ukázka mostu na reálném příkladu je v Příloze P I Obrázek 2.

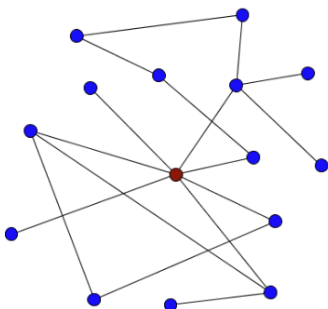


Obrázek 1.32 - Ukázka mostu. Kruhy znázorňují 2 segmenty sítě, které jsou propojeny pomocí mostu A.

(zdroj: Horák, 2024)

1.6.2 Hub

Hub (Obrázek 1.33) vzniká jako typický prvek v bezškálových sítích, protože už z jejich definice obsahují velmi malé množství uzlů, které mají mimořádně vysoký stupeň. Tyto uzly se potom označují jako hub.



Obrázek 1.33 - Ukázka hubu. Červeně označený uzel představuje hub, tj. uzel s vysokým stupněm konektivity na své okolí reprezentované modrými kruhy.

(zdroj: University of Minnesota, 2024)

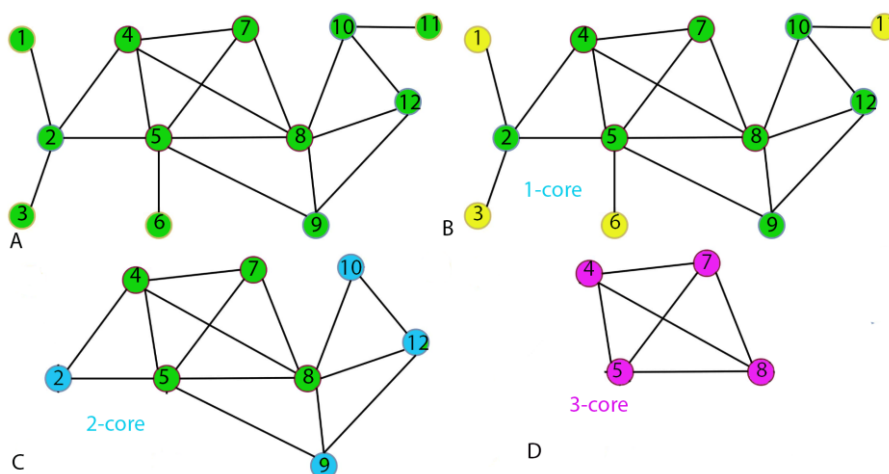
1.6.3 K-core

V teorii grafů je jako K-core grafu označen takový maximální podgraf, ve kterém má každý vrchol alespoň stupeň K. Jinými slovy každý uzel patřící do k-core musí být spojen minimálně s k jinými uzly, které rovněž patří do k-core (Malliaros et al., 2020).

Nejsnáze se to vysvětlí na příkladu Obrázek 1.34. Na Obrázku 1.34 - A je zadaná topologie sítě, jejíž k-core je cílem určit. Existuje více algoritmů, které lze užít. Zde je předveden pruning algoritmus. Určit 1-core je snadné, jsou to žluté se stupněm 1 (Obrázek 1.34B). Ty se odstraní. Uzly 2 a 10 jsou jednoznačně v 2-core, protože nemohou udělat víc než 2 hrany

a 1-core je již odstraněné. Uzel 12 má sice stupeň 3, ale jedna z hran vede k uzlu 10, takže také nemůže patřit do 3-core. Uzel 9 má také 3 hrany, ale nedokáže vytvořit 3 spoje s 3-core, protože jedna vede k 12. Takže je rovněž v 2-core. Průběžný výsledek je na Obrázek 1.34C. Další uzly už nejde tímto způsobem zařadit do 2-core. 2-core se odstraní. Zbývá potenciálně 3-core. Při kontrole je vidět, že každý uzel má 3 hrany spojující ho s ostatními uzly v 3-core, takže splňuje definici (Obrázek 1.34D) (Orakzai, 2023).

Velikost K-core je potom definovaná jako největší k , pro které ještě K-core v grafu existuje (Orakzai, 2023). V příkladu na Obrázku 1.34 je to 3.



Obrázek 1.34 - Způsob nalezení k-core pomocí pruning algoritmu. A- původní síť pro analýzu. B-vyznačení uzlů 1-core. C- vyznačení uzlů 2-core. D-výsledné 3-core jádro.

(upraveno podle Orakzai, 2023)

K-core má několik vlastností, které jsou zajímavé pro síťové analytiky. K-core identifikuje nejvíce propojený podgraf v rámci většího grafu, od toho je ostatně odvozený jeho název. Přirozeně tak identifikuje nejvíce propojené centrální uzly, které mají největší význam v síti. Velikost K-core je rovněž ve vztahu k počtu hran, které je potřeba odstranit, aby se jádro sítě rozpadlo do menších částí (Orakzai, 2023). Schopnost efektivně přerušovat vazby je výhodná pro přerušení domino efektu v rizikologické vrstvě.

1.7 Aplikace komplexních sítí v modelování rizik

Využití komplexních sítí pro modelování rizik se objevuje v období posledních 20 let, přičemž postupně tento přístup nabývá na síle v souvislosti s transferem výsledků výzkumu z oblasti teoretické informatiky.

V roce 2022 publikovali Han et al. (2022) zprávu o vytvoření nového systému hodnocení rizik týkajících se městských podzemních prostor. Tyto prostory se s rozvojem urbanizace stávají gigantickým komplexním systémem. Nová metoda E-CN-TOPSIS zaplňuje mezeru v metodách, kdy dosavadní metody se zaměřovaly na posuzování objektu jako celku a chyběla metoda pro posuzování objektů s komplexní vnitřní strukturou. Součástí vývoje metody byla mimo jiné konstrukce sítě rizikových řetězců podzemních prostor obsahující 201 rizikových uzlů na základě skutečných případů. Nově vyvinutá metoda byla použita pro analýzu 16 hlavních měst ve třech hlavních ekonomických okruzích Číny (Han et al., 2022). Příklad podzemních prostor a získanou síť zobrazující rizikové řetězce pro takové prostory je možné si prohlédnout v Příloze P II Obrázky 1 a 2.

Zhixin et al. (2021) na konferenci IAEAC referovali o vypracování systému opatření pro snižování rizika havárií na odkalištích. Na příkladu havárie protržení hráze odkaliště vytvořili komplexní síť vývoje rizik. Tuto následně analyzovali za pomoci metrik centrality sítě a interference sítě. Výsledky studie ukázaly, že klíčovými nebezpečími v procesu vývoje rizik v odkalištích jsou některé uzly s vysokou betweenness centrality (Zhixin et al., 2021). Síť rizik na odkalištích je v Příloze P II Obrázek 3.

Tao et al. (2018) zkoumali zranitelnost mimořádně rozsáhlého městského dopravního systému založeného na komplexní síti a topologickém potenciálu. Narůstající dopravní zácpy a nehody jsou klíčovým problémem dopravního průmyslu. Podle nich stávající metody neposkytovaly dostatečnou shodu mezi předpovědí a reálným monitoringem, protože byly založeny pouze na statistických charakteristikách. V nově navrženém modelu integrují komplexní síť a topologický potenciál. Abstrahovali silniční síť do topologie komplexní sítě. Abstrahování dopravní sítě do komplexní sítě se ukázalo jako vysoce efektivní metodou zpracování, která poskytla nový pohled a metodu pro studium zranitelnosti dopravní sítě (Tao et al., 2018). Příklad dostupnosti důležitých dopravních prvků jako tunelů a mostů je na Obrázku 4 v Příloze P II.

Ve své práci *Exploring Network Analysis for Urban Planning and Disaster Risk Reduction in Informal Settlements: Cases From Honduras, Jamaica, and Peru* Sandoval et al. (2020) provádí analýzu uličních sítí pomocí grafové analýzy. Používají index Reach centrality. Pomocí něhož identifikují klíčové uzly nebo cesty, které mohou být kritické pro obyvatele po katastrofách, protože jsou strategicky umístěné z hlediska dostupnosti. Navržená metodika má potenciál zlepšit rozhodování v oblasti územního plánování ve vztahu ke snižování rizika katastrof (Sandoval et al., 2020). Jedná se o jednu z mála prací, která používá reach centrality. Příklad výstupu je na Obrázku 5 v Příloze P II.

V roce 2018 využili Huaфу a Youhong (2018) teorii komplexních sítí pro modelování systému evakuace osob. Konkrétně modelovali proces kaskádového selhání. Výsledkem bylo zjištění, že při interakci lidí řídících proces evakuace se subjekty evakuace, stačí na počátku drobné selhání, které se domino efektem šíří po celém systému. Modelování posloužilo k prověření a korekci dřívějších pokynů, týkajících se alokace zdrojů. Dalším výsledkem bylo konstatování, že lze domino efekt účinně přerušit a zlepšit proces evakuace cílenými zásahy do obou subsystémů (Huaфу a Youhong, 2018).

Velmi zajímavý je přístup Buldyreva et al. (2010), který narozdíl od většiny prací, se nezaměřil na bezpečnost v jedné komplexní síti, ale zabývá se vzájemnou interakcí dvou sítí. Práce je založena na datech o výpadku elektrické sítě v Itálii v roce 2003. Rozsáhlý blackout byl způsobený interakcí elektrické rozvodné sítě a Internetu. Na počátku byl výpadek elektrárny, který způsobil výpadek řídících center závislých na Internetu a to zase způsobilo výpadek dalších elektráren. Každá z těchto sítí sama o sobě je komplexní síť (Buldyrev et al., 2010). Zobrazení modelu blackoutu v Itálii v roce 2003 jako interakce mezi elektrickou rozvodnou sítí a Internetem je na Obrázku 6 v Příloze P II.

Jednou z ranných prací na téma stability a bezpečnosti provozu bezškálových sítí je Cohenovo a Erezovo (2000) studium závislosti odolnosti Internetu proti náhodným výpadkům v roce 2000. Pracovali s teorií perkolace, pro převod sítě z funkčního do dezintegrovaného stavu (Cohen a Erez, 2000).

Motter a Lai (2002) ve svém článku *Cascade-based attacks on complex networks* zkoumají citlivost komplexních sítí, ve kterých probíhá tok fyzikálních veličin, vůči útokům spočívajícím v přetížení některého z uzlů. Příkladem takových sítí může být Internet nebo energetické sítě. Pokud se zatížení může přelévat z jednoho uzlu do dalších, tak stačí ke spuštění kaskádového efektu přetížení jediného uzlu. Zjištění, že heterogenita těchto sítí je činí obzvláště zranitelnými vůči útokům (Motter a Lai, 2002) je pouze jedním z úhlů

pohledu. Motter a Lai (2002) předpokládají útok na takovouto přenosovou soustavu. V současné době, kdy je do sítě připojováno stále větší množství malých zdrojů energie s velmi kolísavým výkonem závislým na počasí, je potřeba se zamýšlet i nad důsledky neúmyslného přetížení některých částí sítě.

Za dnes klasickou práci v oboru komplexních sítí je možné považovat článek Reka et al. Error and attack tolerance of complex networks (Reka et al., 2000). Barabasi, který je spoluautor tohoto článku objevil v roce 1998 bezškálové sítě (Barabasi, 2024). Ve zmíněném článku se autoři zabývají bezškálovými sítěmi obecně, bez ohledu na oblast jejich původu. Dochází ke zjištění, že složité komunikační sítě vykazují překvapivý stupeň robustnosti, kdy klíčové komponenty pravidelně selhávají, lokální poruchy však jen zřídka vedou ke ztrátě globální schopnosti sítě přenášet informace. To však není zadarmo. Cenou, kterou taková síť platí za odolnost vůči chybám je extrémní zranitelnost vůči útokům. Přichází s poznáním, že vysoká tolerance chyb a současně zranitelnost vůči útokům je obecnou vlastností komunikačních sítí (Reka et al., 2000). Výsledky jsou v Příloze P II Obrázek 7. Z pohledu rizikologie se jedná o zásadní poznatek. Architekt návrhu nového systému musí pamatovat na vhodná opatření snižující možnosti útoku např. redundancí uzlů typů most nebo hub.

V rámci hodnocení sítě je jedním z používaných pojmů trofická koherence (trophic coherence), která slouží jako měřítko toho, jak dobře lze síť rozdělit na diskrétní úrovně. Pojem mimo jiné využil Pagani et al. (2019a) ve výzkumu odolnosti železniční sítě v Londýně a na vnitrostátních linkách v práci Resilience or robustness: identifying topological vulnerabilities in rail networks (Pagani et al., 2019a). Věnuje se předpokladu, že topologie sítě má zásadní vliv na kaskádové šíření po síti. Dochází k závěrům, že cestou ke zvýšení odolnosti sítě je omezení zpětnovazebních smyček. V jiném typu sítí tvořeném například distribuční sítí se bude šířit jiný efekt. Grafické znázornění pipeline analýzy a některé z výsledků této práce je v Příloze P II Obrázek 8 a Obrázek 9. Pagani et al. (2019a) zjistili, že řešení problémů pomocí modelování sítí je řádově časově i finančně méně náročné oproti jiným typům modelů např. modelům založených na agentech.

Pagani et al. (2019b) se věnují v Quantifying Resilience via Multi-Scale Feedback Loops in Water Distribution Networks (Pagani et al., 2019b) kritické infrastruktuře v podobě distribuční sítě vody. Narozdíl od většiny zmíněných prací, které jsou založené na různých centralitách, rozpracovává Pagani et al. (2019b) podobně jako v předchozí práci, vliv zpětnovazebních smyček. K analýze zpětnovazebních smyček používá trofickou koherenci. Jedním ze závěrů je, že přítomnost zpětnovazebních smyček zvyšuje riziko nestability

systému jako celku. Grafická dokumentace je v Příloze P II Obrázek 10 a Obrázek 11. Koncept trofické koherence se používá dále v celé řadě prací zaměřených na šíření epidemií, což je možné nahlížet rovněž jako téma blízké rizikovému inženýrství, i když jsou to práce z jiného oboru.

V práci Node-Level Resilience Loss in Dynamic Complex Networks Moutsinas a Guo (Moutsinas a Guo, 2020) hledají přístup, jak na základě statistických dat o topologii sítě odhadnout odolnost jednotlivých uzlů. Výsledkem je algoritmus, který s 98 % pravděpodobností dokáže identifikovat zranitelné uzly. Práce je zmíněna i v přehledovém review Multiplex networks in resilience modeling of critical infrastructure systems: A systematic review z roku 2024, kde Wang et al. (2024) podávají souhrnný přehled o současném stavu poznání při využití vícevrstvých sítí pro modelování odolnosti kritické infrastruktury (Wang et al., 2024). Obrazová dokumentace je v Příloze P II Obrázek 12. Dochází k závěru, že vzhledem k tomu, že kritická infrastruktura tvoří přirozeně sítě, které jsou na sobě vzájemně závislé, tak jsou vícevrstevné sítě ideálním modelovacím nástrojem. Přesněji využívají multiplex network, které jsou charakteristické tím, že v každé vrstvě mají stejnou množinu uzlů, ale liší se hranami. Rozdělují systém do 4 vrstev, 1. kde je fyzické propojení, 2. kde je závislost typu zásobování, 3. zachycující abstraktní vztahy jako je lidská spolupráce a nakonec 4. vrstvu syntetickou založenou buď na Erdős–Rényiho modelu náhodné sítě nebo Barabási-Albertově modelu. V době psaní DP se jedná pravděpodobně o jeden z nejpokročilejších přístupů pro modelování rizik ve spojitosti s využitím sítí.

Jak je vidět z přehledu prací, které obsahují domino efekt a komplexní sítě, tak naprostá většina z nich se zaměřuje na udržení nějakého typu sítě v chodu nalezením prvků, které mají na síť významný vliv a analýzou procesů na síti. Pouze jedna práce se zabývá interakcí mezi sítěmi dvou druhů a dvě práce, obě vzniklé až v posledních letech, se zabývají kombinací rizik více typů tak, jak to odpovídá dříve vysvětlené představě vrstvy "rizikologické" sítě.

Z českých autorů je možné odkázat na Pacindovu metodu KARS (Pacinda, 2007). I když Pacinda (2007) nikde neuvádí pojem komplexní síť, tak jím zavedené metriky odpovídají pojmům in-/out-degree centrality, které se ve výzkumu sítí používají. Současně se zabývá nikoli jedním typem rizika, ale jeho síť je popisem vztahů mezi riziky, které hrozí systému. Hodnocení je potom prováděno na kvalitativní úrovni. Pacinda (2007) se snaží svou metodou KARS, poskytnout managerům nástroj pro prioritizaci rizik, posouzením jejich významu pro síť jako celek.

Zvláštní postavení v tomto výčtu výzkumných prací přísluší dvěma navrženým postupům pro umístění mitigačních bariér v chemickém průmyslu, které využívají topologickou analýzu grafu. Jedná se o text Khakzada a Renierse (2015) Using graph theory to analyze the vulnerability of process plants in the context of cascading effects (Khakzad a Reniers, 2015) a na ně navazující práci Zhanga et al. (2024) Optimizing safety barrier allocation to prevent domino effects in large-scale chemical clusters using graph theory and optimization algorithms (Zhang et al., 2024).

Práce Zhang et. al. (2024) se dotýká všech tří výzkumných otázek. Řeší problematiku umístění bezpečnostních bariér s cílem snížit pravděpodobnost vzniku domino efektu požáru mezi zásobníky v petrochemickém průmyslu (Příloha P II Obrázek 13A). Za tímto účelem Zhang et al. (2024) vytvořili vícestupňový model, který v prvním stupni provádí rizikovou analýzu založenou na vytvoření komplexní sítě tvořené zásobníky jako uzly a hranami určujícími možnost šíření požáru (Příloha P II Obrázek 1.3B). Pro ohodnocení jednotlivých uzlů využívají metriku closeness out centrality C_C^{out} . Ve druhém stupni modelu využívají genetický algoritmus k hledání optimální polohy mitigačních bariér. Kromě polohy je možné měnit i formu bariér (různé formy sprinklerů apod.). Jedná se o mnohorozměrný optimalizační problém. Kromě účelové funkce obsahující hodnotu snížení rizika zavádí i ekonomické kritérium. Takové kritérium by měl obsahovat každý v praxi upotřebitelný model, protože organizace vždy řeší riziko ve vztahu k nákladům. Zhang et al. (2024) kvantifikují riziko soustavy jako celku, aby mohli posoudit jednotlivé varianty řešení. Zavádí proměnnou risk reduction R_{red} , definovanou jako

$$R_{\text{red}} = \sum_{i \in T} E_i \cdot \left(C_C^{\text{out}0}(i) - C_C^{\text{out}}(i) \right), \quad (20)$$

kde R_{red} značí snížení rizika, $C_C^{\text{out}0}(i)$ out-closeness centralitu uzlu i před zavedením mitigačního opatření, $C_C^{\text{out}}(i)$ out-closeness centralitu uzlu i po zavedení mitigačního opatření a E_i ztrátu na zásobníku i .

Závorka potom určuje pokles degree out-closeness centrality pro zásobník i zavedením bariéry (Zhang et. al., 2024). Z definice je patrné, že takto stanovené riziko bere v úvahu každý zásobník pouze jedenkrát a nedostatečně zohledňuje dvě klíčové vlastnosti související s domino efektem. První je stupeň zapojení každého uzlu do všech možných cest. Druhá vlastnost je, kam až šíření může sahat. Metrika C_C^{out} sice v sobě obsahuje informaci o tom, jak rychle lze z uzlu i dosáhnout ostatní uzly, ale nejedná se o explicitní vyjádření. Informace o tom, na jakých cestách potom stojí uzel i absentuje zcela, protože místo closeness je

použita out-closeness. V modelu Zhanga et al. (2024) není tedy explicitně zachycen rozdíl mezi situací, kdy uzel zásobník i spustí požár přímo na několika dalších zásobnících a tím situace končí a případem, kdy z těchto zásobníků se požár šíří na dalších a další zásobníky. Tato informace je zachycena pouze nepřímo v implicitní formě skrze centralitu. Řešení první výzkumné otázky VO1 této DP je zaměřeno mimo jiné právě na odstranění tohoto nedostatku. V jejich přístupu je však patrné vylepšení oproti přístupu Khakzada a Renierse (2015), na které navazují. Khakzad a Reniers (2015) nepoužívají žádnou syntetizující proměnnou a pouze srovnávají hodnoty jednotlivých centralit v tabulce (Khakzad a Reniers, 2015). Je jasné, že u Zhanga et al. (2024) byla změna v přístupu vynucena tím, že použití genetických algoritmů vyžadovalo transformaci této skupiny hodnot do jediného parametru, aby šlo definovat účelovou funkci.

Práci Khakzada a Renierse (2015) je možné považovat za průkopnickou ve využití teorie grafů a metrik komplexních sítí pro modelování domino efektu. Vytvořili model, v němž zásobníky pro skladování paliva modeluje jako uzly a pro nalezení zranitelností v rámci šíření domino efektu v jeho modelu používá ohodnocení pomocí closeness a betweenness centrality (Khakzad a Reniers, 2015).

1.8 Genetické algoritmy jako nástroj optimalizace komplexních sítí

Jak název napovídá je princip genetických algoritmů (GA) založený na inspiraci z genetiky. GA jsou součástí evolučních heuristických metod optimalizace. Je možné je zařadit jako třídu algoritmů umělé inteligence. Aplikace GA je všude tam, kde je obtížné nebo nemožné získat řešení analytickým způsobem. GA jsou ideální volbou na prohledávání rozsáhlých stavových prostorů v nichž nachází suboptimální řešení. Pokud vezmeme stavové prostory čítající 10^n řešení, kde n bude nabývat hodnot v řádech desítek, tak není v možnostech současné vědy nalézt optimální řešení. Řešitel má tedy pouze dvě možnosti, buď rezignovat na řešení problému nebo se spokojit s nejlepším řešením dosažitelným v přijatelném čase (Gridin, 2021).

Pro získání alespoň základní představy, tak odhad počtu atomů ve vesmíru je 10^{89} (Knihovna Matematicko-fyzikální fakulty UK, 2012). Počet cest v Problému obchodního cestujícího je určen faktoriálem počtu měst (Hoos a Stutzle, 2005), takže pro $n=70$ měst je řádově 10^{100} , tedy toto číslo o mnoho řádů přesahuje. Při stáří vesmíru 13,8 miliardy let, což odpovídá $\sim 4,35 \times 10^{17}$ sekund je vidět, že hledání optimálního řešení hrubou silou by

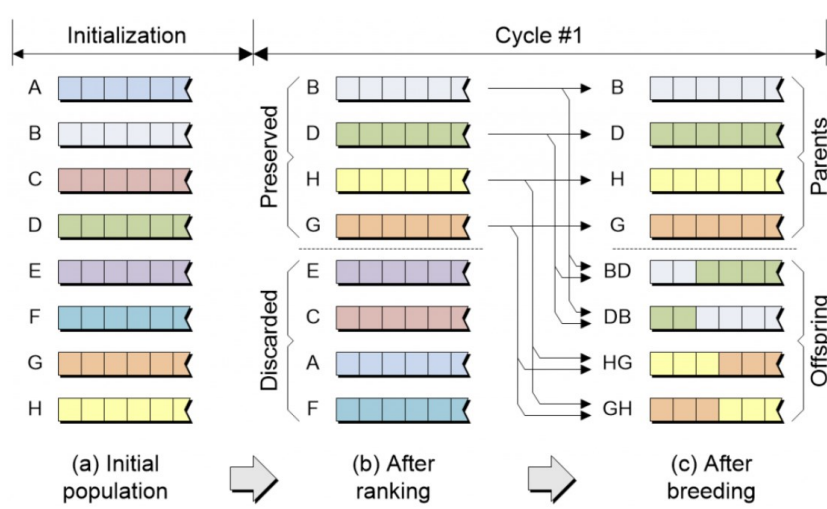
přesáhlo dobu existence vesmíru. Z práce Stránské (2012) je patrné, že přesto GA poskytují přijatelně dobré řešení v rozumném čase (Stránská, 2012).

Princip GA je relativně jednoduchý. Základní pojmy jsou jedinec, populace, křížení, mutace, účelová funkce. Gridin (2021) popisuje princip GA následujícím způsobem. Jedinec představuje jedno řešení, jehož parametry jsou vhodným způsobem zakódovány do chromozomu. Chromozom je možné si představit jako vektor hodnot. Podle toho, jestli jsou parametry typu float nebo z množiny $\{0, 1\}$ je možné rozlišit reálné nebo binární GA. Případně je možné mít smíšený typ parametrů.

Jednotlivá řešení se tedy liší konkrétními hodnotami parametrů. Množina řešení v jednom cyklu se nazývá populace. U každého řešení je nutnou podmínkou, aby šlo jednoznačně určit, jak je dobré. Je tu tedy požadavek na možnost seřadit řešení podle kvality. K tomu slouží účelová funkce (fitness), která přiřadí každému řešení reálné číslo jako ohodnocení.

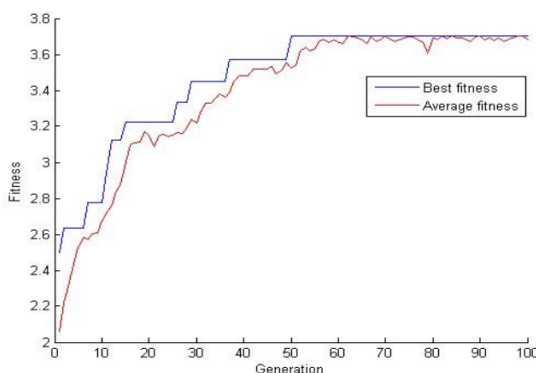
V každém cyklu řešení se ohodnotí všechna řešení. Existuje celá škála možných způsobů, jak postupovat dál. Obecné, nejjednodušší řešení vypadá následovně. Předem se zvolí určité procento nejlepších řešení. Ty se vezmou a provede se křížení. To spočívá v tom, že ze 2 řešení, která se označí jako rodičovská se vezme část řešení a vzájemně se zkombinují. Tím vznikne nový jedinec do další populace. Křížení se provádí s určitou pravděpodobností, proto se do další populace dostanou z předchozí populace i jedinci neupravení. Kromě křížení se ještě s předem stanovenou pravděpodobností provádí nad jednotlivými parametry náhodná změna hodnoty. Toto se nazývá mutace. Mutace je hlavním zdrojem variability pro populaci. Celkově záleží na nastavení všech pravděpodobnostních parametrů, jak rychle bude řešení konvergovat. V případě potřeby je možné omezit mutace pouze na určité lokusy (Obrázek 1.35). Řešení probíhá tak dlouho, než je nalezeno vhodné řešení podle vstupních omezení nebo křivka fitness už nevykazuje žádné zlepšení nebo je dosažen vymezený čas (Obrázek 1.36) (Gridin, 2021).

Implementací pro použití v python programu existuje celá řada. Jedna z dobrých možností je PyGAD, která se vyznačuje rychlou křivkou učení, takže je vhodným řešením i pro uživatele, který se nespécializuje na GA. PyGAD je open-source knihovna jazyka Python pro tvorbu genetického algoritmu a optimalizaci algoritmů strojového učení. (PyGAD, 2024)



Obrázek 1.35 - Vizualizace počátku běhu GA. A – Vygenerování počáteční populace. Každý barevný chromozom reprezentuje jedno řešení, tj. jedince populace. B- Jedinci jsou seřazeni podle hodnoty účelové funkce a do dalšího kroku postupují pouze ti s dostatečně vysokým fitness. C- Část jedinců postupuje beze změny a část vznikne procesem křížení z rodičovských jedinců. Není zakreslena mutace.

(zdroj: Maxfield, 2020)

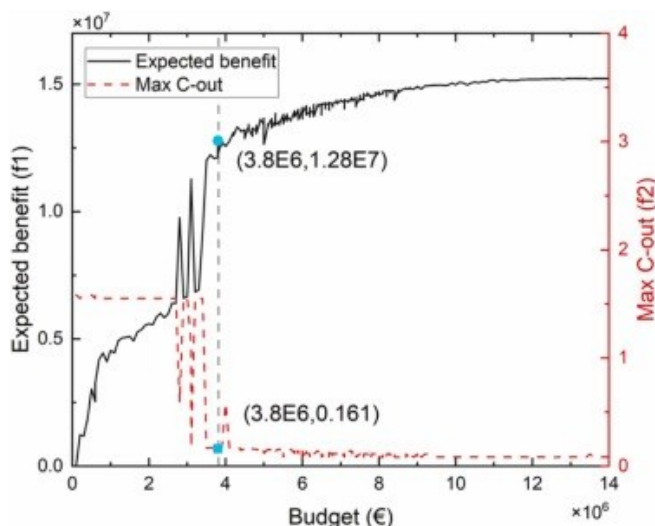


Obrázek 1.36 - Typický průběh fitness křivky při použití GA. Se zvyšujícím se počtem generací se zpomaluje nárůst fitness. Zastavení algoritmu je při dostatečně malé změně fitness nebo při dosažení maximálního času výpočtu.

(zdroj: Odeh et al., 2006)

Využití evolučních algoritmů implementovaných například jako genetické algoritmy je sice zavedenou optimalizační metodou, ale do oblasti modelování v rizikovém inženýrství se dostává se značným zpožděním. Jak uvádí Yuan et al. (2023) je v rámci komplexních systémů složité stanovit rozmístění bezpečnostních bariér vzhledem k velkému rozsahu stavového prostoru všech řešení. Z tohoto důvodu namísto úplného prohledávání stavového prostoru řešení přichází s hledáním suboptimální strategie pomocí genetických algoritmů (Yuan et al., 2023). Zhang et al. (2024) využívají tohoto přístupu jako druhého stupně svého

modelu, kdy propojují využití grafového přístupu k rizikové analýze s využitím genetických algoritmů, které jsou umístěny nad ním. Potom optimalizují umístění bezpečnostních bariér tak, aby maximalizovali redukci rizika při zachování podmínek ekonomické efektivity (Obrázek 1.37) (Zhang et. al., 2024).



Obrázek 1.37– Černá křivka zobrazuje nárůst benefitu R_{red} snížení rizika popsaného vzorcem (20) (odpovídá funkci f_1) v závislosti na velikosti rozpočtu. Červená křivka popisuje závislost mezi snížením C_{out} centrality a velikostí rozpočtu. Funkce f_1 je maximalizační a je použita jako fitness funkce. Optimalizace topologie umístění bariér byla provedena pomocí genetických algoritmů

(zdroj: Zhang et. al., 2024)

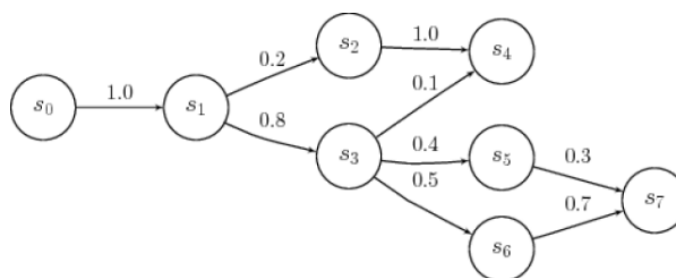
Na tyto příklady z oblasti chemického průmyslu je možné nahlížet jako na speciální aplikační případy. V obecnosti lze formulovat otázku, jak využít evoluční techniky pro prioritizaci řešení, tedy kolik a které zdroje rizika upřednostnit při snižování rizika systému jako celku. Publikované práce se zaměřují na chemický průmysl z důvodu závažnosti havárií, které v něm mohou nastat. Ale uplatnitelnost tohoto přístupu je obecná od strojírenství, elektrotechniku až po vývoj software.

1.9 Monte Carlo Markov Chain

V případě, že je potřeba se zabývat spojitou náhodnou veličinou lze použít její distribuční funkci a spočítat příslušný integrál pro určení pravděpodobnosti, že hledaná veličina se bude nacházet v určitém intervalu. Situace se začíná značně komplikovat, pokud je řešen domino efekt, protože každý uzel sítě představuje sám o sobě jednu náhodnou veličinu. Určení střední hodnoty ztráty na takovéto síti je potom vícerozměrný problém, který je možné popsat tak, že každému uzlu odpovídá jedna osa nezávisle proměnné určující distribuci

pravděpodobnosti, že se uzel dostane do jednoho z možných stavů a závisle proměnná bude představovat ztrátu, kterou utrží síť jako celek. Pro výpočet střední hodnoty této ztráty je tedy potřeba spočítat hyperprostor pod touto "plochou". A to lze pouze numericky. Zde je možné využít Monte Carlo Markov Chain (MCMC), které byly vyvinuty právě pro výpočet vícerozměrných integrálů.

Markovův řetězec je matematický proces, který přechází z jednoho stavu do druhého. Klíčovými vlastnostmi Markovova procesu jsou jeho náhodnost a to, že každý krok procesu je "bez paměti". Jinými slovy, budoucí stav závisí pouze na aktuálním stavu procesu, nikoli na minulosti. Princip MCMC tedy spočívá v náhodné procházce po větvích v acyklickém orientovaném grafu, kde hrany mají vlastnost vyjadřující pravděpodobnost průchodu danou větví. Graficky je to možné vyjádřit jako na Obrázku 1.38 (Columbia University, 2022).



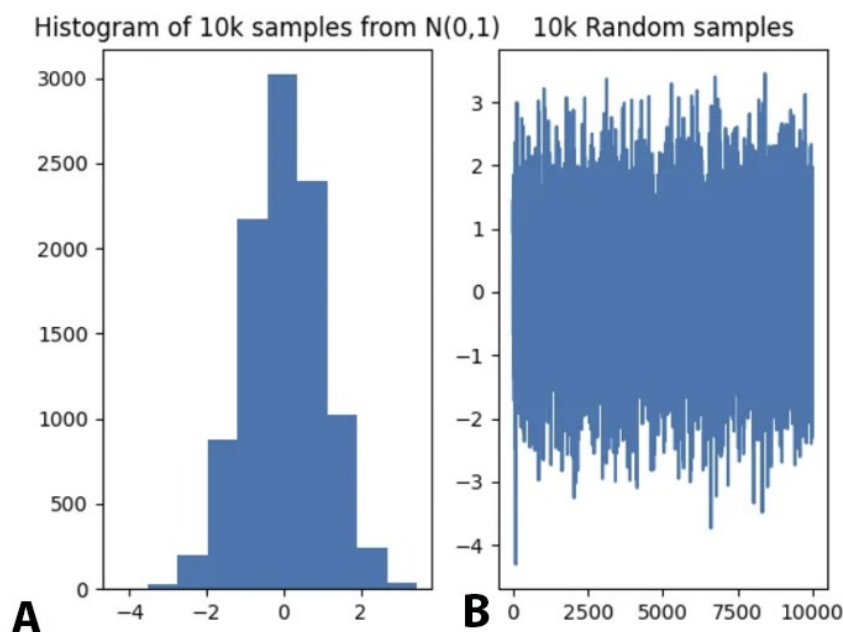
Obrázek 1.38 - Přejít mezi stavy si při MCMC. Kroužky reprezentují uzly. Hrany mají pravděpodobnost přechodu do dalšího uzlu. Na obrázku je implementace umožňující náhodnou procházku vždy do právě jednoho dalšího uzlu, proto je součet pravděpodobností 1.

(zdroj: Columbia University, 2022)

Zatímco při MCMC se přechod z uzlu s_i do uzlu s_j řídí pravděpodobností umožňující výběr jediné hrany, tak v případě domino efektu je předpokládána, při kvalitativním řešení, ta nejhorší varianta, že aktivovaný uzel, tj. aktivovaná hrozba spouští další uzly na všech výstupních hranách. To se projevuje jako paralelní běh jednotlivých scénářů. V DP je implementován software tak, že v kvalitativních analýzách je počítána střední hodnota ze scénářů s použitím všech výstupních hran uzlu, resp. při kvantitativním řešení podle pravděpodobnosti každé hrany. K tomuto rozhodnutí vedla implementační jednoduchost a přirozeně odráží modelovanou realitu.

Při vlastním výpočtu MCMC s náhodnou procházkou, které se nazývá vzorkování, potom existuje řada konkrétních implementací např. Metropolis-Hastings algoritmus, Gibbsovo vzorkování atd. (Karras et al., 2022; Chen, 2023).

MCMC se často používá pro výpočet integrálu u Bayesovské inference, vícerozměrných integrálů ve fyzice a technických aplikacích. Použitím MCMC je možné získat graf pravděpodobnostního rozdělení složitých náhodných funkcí (Obrázek 1.39). Pro použití v programu psaném v Pythonu je možné použít balíček PyMC (Davidson-Pilon, 2015).



Obrázek 1.39 - Ukázka získání histogramu pro pravděpodobnostní rozdělení na základě MCMC vzorkování. A- výsledný histogram. Na ose x hodnota náhodné x veličiny a na ose y počet pokusů, pro které $X=x$. B- průběh vzorkování MCMC. 10000 pokusů zobrazeno na ose x. Na ose y hodnota náhodné proměnné.

(zdroj: Chen, 2023)

Využití Monte Carlo simulace pro analýzu rizika domino efektu zavedl Abdolhamidzadeh (2010). Jak uvádí, odhad domino efektu využitím analytických metod sebou nese nutnost zavedení řady nejistých vstupních parametrů a složité výpočty. Tomuto se vyhne tím, že každému zařízení přiřadí 2 typy pravděpodobnosti. První, který popisuje pravděpodobnost, že zařízení se stane iniciátorem v řetězci nehod. Tuto pravděpodobnost je možné vypočítat řadou standardních metod například analýzou stromu událostí ETA. Druhý typ pravděpodobnosti potom popisuje pravděpodobnost eskalace. Tyto pravděpodobnosti lze zjistit z probit modelů. Na takto postaveném modelu lze potom pomocí Monte Carlo simulace získat pravděpodobnostní funkce, včetně jejich parametrů např. střední hodnoty, bez složitých analytických výpočtů. Jako jednu z výhod oproti analytickému přístupu uvádí,

že zatímco analytické metody jsou obvykle zjednodušením složitých systémů, tak MC simulace jsou nezávislé na tom, jak složitý systém je (Abdolhamidzadeh et al., 2010).

He a Weng (2020) ve své práci využívají Monte Carlo simulaci jako nástroj pro zohlednění všech scénářů havárií a k výpočtu průměrného rozdělení rizika při šíření domino efektu. V modelu je Monte Carlo simulace pouze jednou částí mnohem většího modelu. Zbylé části modelu jsou příliš spjaty s oblastí chemického průmyslu, které se věnuje a z pohledu výzkumných otázek DP nepříliš podstatné. Přesněji pro oblast modelování rizik komplexních systémů jsou důležité i části založené na teorii pole, ale tento přístup není předmětem DP. Jak He a Weng (2020) uvádí, tak použitím Monte Carlo simulace se lze vyhnout složitým pravděpodobnostním výpočtům a proto ji vidí jako velmi vhodnou pro komplexní scénáře nehod, které se vyskytují v domino efektech (He a Weng, 2020).

1.10 Softwarové nástroje pro analýzu sítí

Pro analýzu sítí existuje řada softwarových nástrojů, některé jako samostatné programy, jiné jako packages, knihovny nebo jiné formy kódu připojitelné k vlastnímu zdrojovému kódu. Protože praktická část DP je realizována v jazyce Python, jsou i použité packages orientovány pouze na tento jazyk.

Pro vizualizaci sítí jsou jedny z nejčastěji využívaných samostatně použitelných programů Cytoscape (Shannon et al., 2003) a Gephi (Gephi, 2022). Pro vývoj je možné použít knihovnu matplotlib, která je nejčastěji používaný způsob vizualizace vědeckých dat. Aktuálně ve verzi 3.9.1 (Matplotlib, 2024).

Pro programování a analýzu sítí jsou nejčastěji užívané packages NetworkX. NetworkX je balík v jazyce Python pro vytváření, manipulaci a studium struktury, dynamiky a funkcí komplexních sítí (NetworkX, 2024g). Alternativou je a graph-tool. Výhodou graph-tool je, že jádro a základní struktury má implementované v C++, takže dosahuje lepšího výkonu (Graph-tool, 2024). Nevýhodou je zase složitější kódování. V DP jsou použity oba, ale většina kódu je založena na NetworkX. Pro tvorbu programů pro analýzu sítí byla intenzivně využívána dokumentace z knihy Complex Network Analysis in Python: Recognize - Construct - Visualize - Analyze – Interpret (Zinoviev, 2018).

2 DÍLČÍ ZÁVĚRY TEORETICKÉ ČÁSTI

K modelování domino efektu v posledních dvou desetiletích byla využita řada přístupů např. analýza stromu událostí ETA, bayesovské sítě, Petriho sítě, Monte Carlo simulace a grafové metriky. S rozvojem znalostí se zvyšuje důraz na dynamický vývoj ve zkoumaném systému, synergický efekt a možnosti řízení rizik (Zhang et al., 2024).

V modelování rizik komplexních systémů v chemickém průmyslu založeném na grafech je velmi málo publikovaných prací. Za základní je možné považovat práci Khakzada a Renierse (2015) a na něho navazujícího Zhanga et al. (2024). Khakzad a Reniers (2015), stejně tak i další práce zmíněné v teoretické části, se při hodnocení rizika jednotlivých uzlů omezují na srovnání parametrů jednotlivých centralit pro uzly. Nezavádí explicitní parametr, který by tyto hodnoty sloučil do jediné globální proměnné, která by umožnila srovnání dvou nebo více konfigurací sítě. Výjimkou je Zhang et al. (2024) s parametrem R_{red} . Publikované práce jsou zaměřeny na srovnání rizikovosti jednotlivých uzlů pro identifikaci největších zdrojů ohrožení. Absentuje jednoduchá metrika, která by srovnala různé situace před a po aplikaci mitigačních opatření pro síť jako celek. Toto se jeví jako nedostatek a z toho důvodu byla formulována první výzkumná otázka **"Jakým způsobem lze popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu?"**

V dostupné literatuře autoři využívají pro modelování rizika různých centralit bez hlubšího zdůvodnění, proč právě daná centralita byla zvolena a jaká je její výhoda oproti jiným. Například Khakzad a Reniers (2015) využívají pro kvantifikaci rizika zásobníku closeness a betweenness centrality. Zhang et al. (2024) používají rovněž betweenness, out-closeness a out-degree. Další příklady byly uvedeny v řešerši v kapitole 1.7 na str. 48 a dále. Obecně jsou sice známy vlastnosti jednotlivých centralit a byly již dříve prezentovány v rámci teoretické části DP, ale mohou vznikat pochybnosti, jestli zvolené centrality jsou skutečně vhodné pro modelování rizika. Proto se jeví jako přínosné provést bližší posouzení vhodnosti jednotlivých centralit právě pro modelování domino efektu v rámci výzkumné otázky číslo dva **"Které metriky centrality uzlů poskytují nejlepší výsledky pro hodnocení významnosti hrozeb v komplexních systémech?"**

V rámci literární řešerše bylo nalezeno využití optimalizace sítě, v tomto případě konkrétně umístění mitigačních bariér, využitím evolučních algoritmů v práci Zhanga et al. (2024). Toto řešení je však úzce zaměřeno použitím v modelu souvisejícím s modelováním přenosu tepla. Možnosti využití genetických algoritmů jsou však mnohem širší a proto je

vhodné problematiku řešit bez vazby na konkrétní model, ale doménově neutrálně. Na takto postavený problém z teoretické části bude navázáno třetí výzkumnou otázkou "**Jakým způsobem jde optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů?**".

V rámci teoretické části práce byla provedena literární rešerše, která zevrubně analyzovala metody vhodné pro modelování rizika v komplexních systémech, přičemž se specificky zaměřila na metody založené na využití grafů, zejména různě definovaných parametrů centralit. Byl vysvětlen teoretický rámec moderního výzkumu grafů, zejména komplexních sítí pomocí různých modelů a jejich vlastností. Současně byl na základě literatury vybudován znalostní základ související s dále využitými pojmy z oblasti grafů a jednotlivých centralit a jejich vlastnostmi.

Na základě provedené rešerše je patrné, že vývoj v modelování rizika dospěl po ose od kvalitativního modelování jednoho rizika přes kvantitativní modelování jednotlivého rizika k hodnocení rizika komplexního systému. Pro tento účel je možné využívat řadu výše zmíněných metod, z nichž jedna z perspektivních cest je založena na využití grafů.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

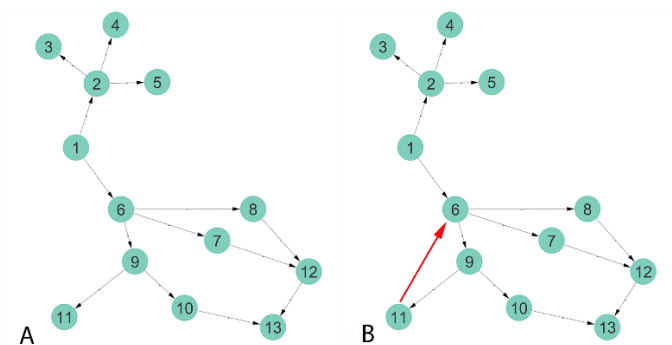
3 ZAVEDENÍ A TESTOVÁNÍ METRIKY MENL

Jak bylo dříve konstatováno autoři zabývající se domino efektem se zaměřují buď pouze na charakterizaci významu jednotlivých uzlů jako Khakzad a Reniers (Khakzad a Reniers, 2015) nebo informaci o vlastnostech cest ponechávají pouze v implicitním tvaru jako Zhang et al. (2024). Z tohoto důvodu je řešena VO1 – jak popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu. Nejprve je vyřešena na kvalitativním modelu, protože je jednodušší. Potom je řešení rozšířeno na kvantitativní analýzu. Nakonec jsou stanoveny omezení řešení plynoucí přímo z podstaty komplexních sítí, perkolačního jevu, který na nich nastává.

3.1 Zavedení MENL pro kvalitativní analýzu

V kapitole 1.1 na str. 18 bylo ukázáno, jakým způsobem je možné část grafu, která začíná v uzlu, který je iniciační událostí a zobrazuje všechny možné cesty domino efektu, zobrazit jako podgraf. Definice indukovaného podgrafu je v kapitole 1.3 na str. 30. Z matematického hlediska se jedná o běžný indukovaný podgraf, ale pro zdůraznění skutečnosti, že vznikl, aby zachytil možné cesty domino efektu z aktivovaného rizika je možné na něho dále odkazovat jako na indukovaný podgraf aktivovaného rizika. Uzel je místo, kde může dojít k paralelizaci scénářů, protože pokud má uzel více orientovaných výstupních hran, tak s nenulovou pravděpodobností spouští běh po každé z nich. Na takový souběh je možné se dívat jako na "multiscénář". V textu bude označován běžným pojmem scénář. Skládá se z řady atomických scénářů, reprezentovaných jednotlivými cestami v podgrafu. Domino efekt na síti rizik bude charakterizován vícedimenzionálním pravděpodobnostním stavovým prostorem, který bude popisovat pravděpodobnost aktivace jednotlivých iniciačních rizik a na ně navázaných podgrafů aktivovaného rizika. Z tohoto stavového prostoru potom existuje zobrazení, takové, že každému bodu pravděpodobnostního prostoru přiřadí parametr charakterizující ztrátu na celé síti. Tento parametr je možné použít pro optimalizaci topologie sítě s cílem snížit ztrátu sítě jako celku.

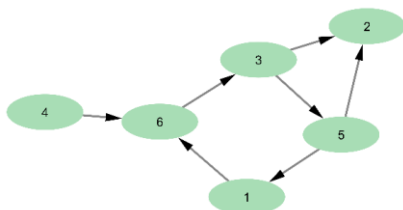
Na graf celé sítě ani indukovaný podgraf aktivovaného rizika nebyl uplatněn požadavek na acykličnost. Jedná se o poměrně velkou aplikační výhodu, protože podmínka acykličnosti by v řadě aplikací mohla způsobovat problémy. Umožnění cyklů nemusí být běžné. Například baysovské sítě vyžadují použití acyklických grafů (DAG - directed acyclic graph) (Friedman a Koller, 2003). Na Obrázku 3.1 je srovnání acyklického a cyklického grafu vzniklého doplněním jedné hrany.



Obrázek 3.1 - Zobrazení acyklického orientovaného grafu a vznik cyklu přidáním červené hrany. I grafy se zpětnovazebními cykly se v praxi běžně vyskytují např. v energetických distribučních sítích.

(zdroj: vlastní)

Nyní bude definičně zavedena nová metrika hodnocení sítě jako celku z pohledu rizika při šíření domino efektu při kvalitativní analýza. Necht' existuje jednoduchá síť popisující možné způsoby šíření rizika jako na Obrázku 3.2.



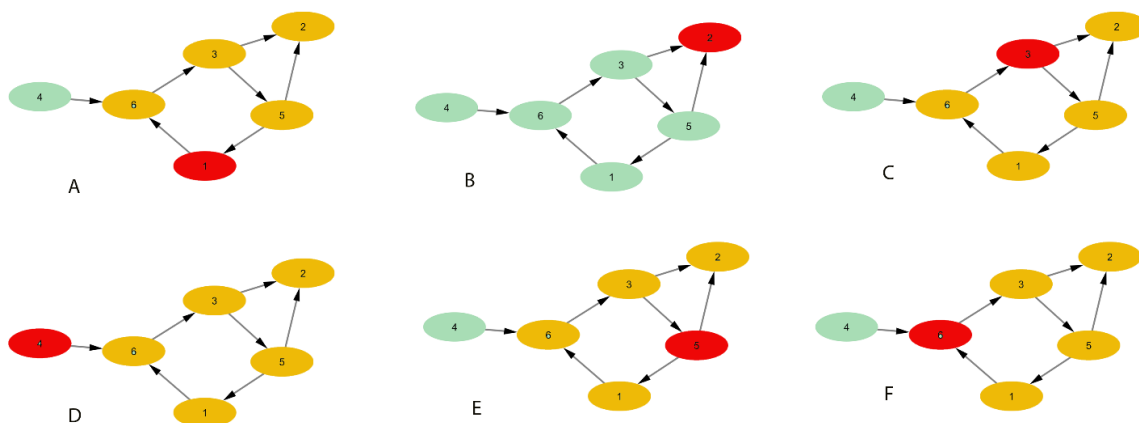
Obrázek 3.2 - Základní síť pro demonstraci výpočtu rizika sítě jako celku. Uzly reprezentují jednotlivé hrozby a hrany kauzální příčinné vztahy mezi nimi.

(zdroj: vlastní)

Na počátku je stanoveno několik předpokladů:

- 1.) Pravděpodobnost aktivace kterékoli z nežádoucích událostí je stejná.
- 2.) Pokud je možné, aby se nebezpečí při šíření aktivovalo, tak se aktivuje ve 100 % případech, tj. pokud existuje orientovaná hrana, tak se použije.

V demonstračním příkladu může být spouštěčem domino efektu kterýkoli ze 6 uzlů. Tomu odpovídá 6 různých scénářů zobrazených na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3 - Všechny varianty scénářů pro demonstrační příklad. Červený uzel je iniciační událost. Oranžové uzly jsou postupně zasažené domino efektem. Zelené uzly zasažené nejsou. Iniciační událostí se postupně stávají všechny uzly. Pravděpodobnost přechodu na další uzel je v kvalitativním modelu 100 %.

(zdroj: vlastní)

Pro kvalitativní model je zavedena metrika MENL (maximum expected network loss) jako suma všech aktivovaných uzlů při všech možných scénářích.

$$MENL_{start} = (N) + \sum_{a=1}^N | \{j \in G - \{a\}\} |, \quad (21)$$

přičemž musí platit $d(a, j) \neq \infty$, kde $MENL_{start}$ značí hodnotu metriky MENL pro celou originální síť G bez úprav, a značí uzel, který odpovídá iniciační události, G je síť bez úprav.

$$MENL_i = (N - 1) + \sum_{a=1}^{N-1} | \{j \in G_{(-i)} - \{a\}\} |, \quad (22)$$

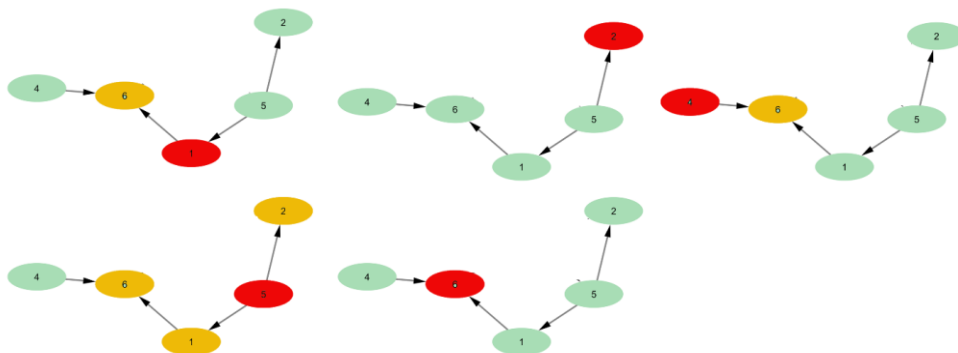
přičemž musí platit $d(a, j) \neq \infty$, $MENL_i$ značí hodnotu metriky MENL pro síť s odstraněným uzlem i . $G_{(-i)}$ je síť s odstraněným uzlem i . Uzel a je iniciační událost.

Výraz, přes který je sumováno, vyjadřuje kardinalitu množiny všech uzlů, do kterých se lze dostat po orientovaných hranách z uzlu a . Uzel a je uzel, který je aktivované nebezpečí, tedy iniciační uzel. Protože každý z uzlů sítě může stát na počátku řetězce událostí, tak se sumuje přes všechny uzly sítě. Adice N resp. $N-1$ vyjadřuje, že do celkové ztráty se započítává i samotný iniciační uzel. Definičně budiž zavedeno, že vzdálenost mezi dvěma uzly, mezi nimiž neexistuje cesta je rovna nekonečnu. Čím nižší $MENL_i$, tím závažnější je nebezpečí pro celou síť způsobované uzlem i . Nejedná se o pouhý součet cest, protože pokud uzel může být aktivován vícero cestami, tak se započítá pouze jednou. To odpovídá přirozené logice, jak by se scénář vyvíjel, kdy v naprosté většině případů nelze stejnou věc poškodit opakovaně (existují samozřejmě výjimky, kdy po regeneraci lze znovu uzel aktivovat, ale tento případ je záměrně opomenut).

V případě demonstračním příkladu:

$$MENL_{start} = 5 + 1 + 5 + 6 + 5 + 5 = 27$$

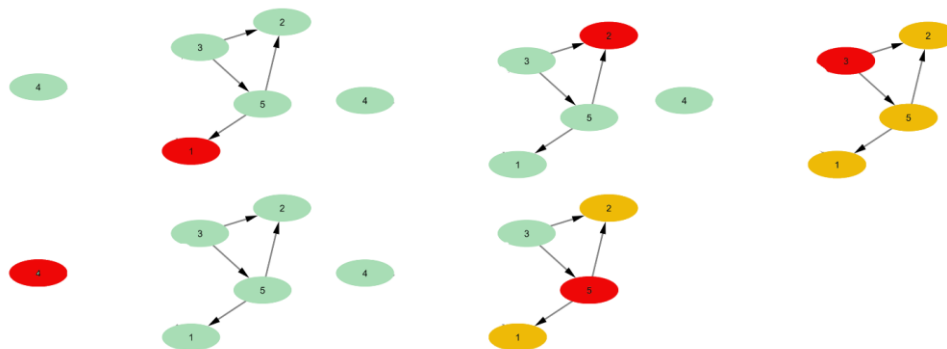
Nyní je postupně odstraňován vždy právě jeden uzel ze sítě a vypočteno $MENL_i$, kde i značí uzel, který je odstraněn. Pro ilustraci je proveden výpočet pro uzly 3 a 6, $MENL_3$ a $MENL_6$, viz. Obrázek 3.4 resp. 3.5.



Obrázek 3.4 – Všechny možné scénáře po odstranění uzlu 3 v demonstračním příkladu. Červený uzel je iniciační událost. Oranžové uzly jsou postupně zasažené domino efektem. Zelené uzly zasažené nejsou. Iniciační událostí se postupně stávají všechny uzly. Pravděpodobnost přechodu na další uzel je v kvalitativním modelu 100 %.

(zdroj: vlastní)

$$MENL_3 = 2 + 1 + 2 + 4 + 1 = 10$$



Obrázek 3.5 - Scénáře po odstranění uzlu 6 v demonstračním příkladu. Červený uzel je iniciační událost. Oranžové uzly jsou postupně zasažené domino efektem. Zelené uzly zasažené nejsou. Iniciační událostí se postupně stávají všechny uzly. Pravděpodobnost přechodu na další uzel je v kvalitativním modelu 100 %.

(zdroj: vlastní)

$$MENL_6 = 1 + 1 + 4 + 1 + 3 = 10$$

Odstranění uzlu odpovídá situaci, kdy se pomocí aplikace nějakého opatření eliminuje možnost jeho aktivace. Je tedy známé riziko pro síť jako celek před aplikací opatření $MENL_{start}$ a riziko po jeho aplikaci $MENL_i$. Vliv daného uzlu na celkové riziko je možné kvantifikovat pomocí rozdílu těchto charakteristik $\Delta MENL_i$. Čím vyšší je $\Delta MENL_i$, tím vyšší je riziko spojené s aktivací tohoto uzlu, a tudíž vyšší význam uzlu pro síť. Jeho odstraněním se nejvíce zlepší systém jako celek. Protože $MENL_{start}$ je konstanta, tak je v principu jedno, jestli význam uzlu je posuzován podle jeho $MENL_i$ nebo $\Delta MENL_i$.

$$\Delta MENL_i = MENL_{start} - MENL_i, \quad (23)$$

kde $\Delta MENL_i$ značí změnu metriky $MENL$ odstraněním uzlu i ze sítě, $MENL_{start}$ metriku pro neupravenou síť a $MENL_i$ metriku pro síť s odstraněným uzlem i .

To umožní objektivně měřit vliv jednotlivých uzlů na síť a vzájemně porovnávat uzly, respektive celé sítě a prioritizovat jejich řešení. V předvedeném případě se srovnává síť lišící se o jeden uzel, ale uvedený postup lze rozšířit a srovnávat tak síť bez mitigačních opatření a síť po odstranění obecně n -tice uzlů, což vyjadřuje aplikaci bezpečnostních bariér na n rizik. Tento přístup pro n -tici je použit ve třetí výzkumné otázce.

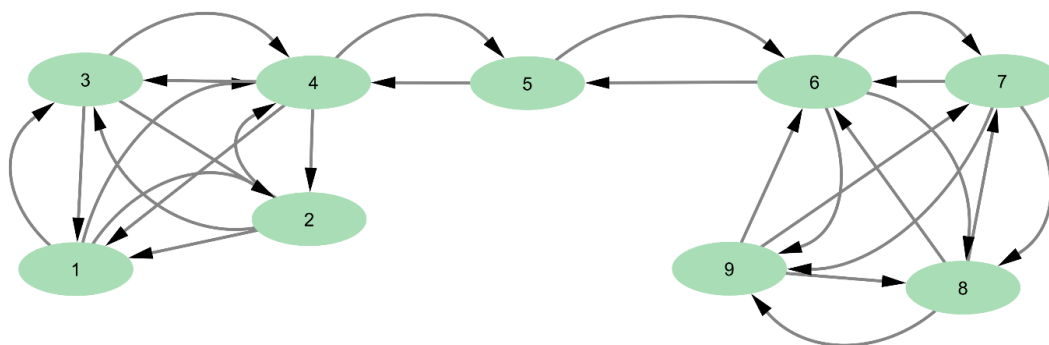
O tom, do jaké míry existuje vztah mezi hodnotou $\Delta MENL_i$ a jinými snadněji měřitelnými metrikami uzlů, jako jsou například různé centrality, zatím není možné vyvozovat žádné závěry. Je to předmětem dalšího textu.

Při použití výše uvedeného přístupu se určí, které riziko je nejvyšší pro síť jako celek, tedy jeho odstraněním by si síť nejvíce polepšila. Pokud je potřeba určit těchto rizik více, např. protože analytik není spokojený s dosaženým výsledkem a existují finanční zdroje na eliminaci dalších rizik, tak se postupuje iteračně dál. To, že se určí vždy jedno riziko je výhodou, protože se tak vlastně přirozeným procesem provede rozhodovací postup, v jakém pořadí implementovat opatření do praxe. (Za předpokladu, že hlavním kritériem je bezpečnost. Pro finanční hodnocení nejsou v kvalitativním modelu žádné podklady.) Iterační postup je přesnější, než použít vypočtené hodnoty a pouze je seřadit, protože odstraněním prvního rizika dojde ke změně topologie sítě, která může mít zásadní vliv na síť. Využitím dalších hodnot, bez jejich přepočítání, by se tato skutečnost vědomě nebo nevědomě opomněla.

Na první pohled se může jevit jako nevýznamné hledat nějaké snadnější výpočetní řešení, když je možné určit $\Delta MENL_i$. To je ovšem chybný předpoklad vycházející z toho, že se nejčastěji řeší úlohy s nižšími desítkami uzlů. V takovém případě lze projít všechny

scénáře a kvantifikovat $\Delta MENL_i$. Je ale zjevné, že úloha má exponenciální složitost, takže pro velké N roste výpočetní čas. Vyhledání všech uzlů dostupných z daného uzlu sice není NP složitá úloha (Nondeterministic Polynomial time), protože prohledávání do šířky i prohledávání do hloubky lze implementovat jako algoritmy pracující v polynomiálním čase. I tak ale v případě posuzování rizika v prostředí větších celků nebo třeba v oblasti softwarového inženýrství, lze běžně počítat řádově s tisíci nebo desetitisíci uzlů. Proto výpočetně snadnější řešení by byl přínos pro praxi.

Druhá poznámka se týká toho, že spojovat automaticky $\Delta MENL_i$ s vysokým stupněm uzlu může být zavádějící. Příkladem mohou být 2 rozsáhlé grafy s vysokým stupněm propojení nebo dokonce se může jednat o silně souvislé grafy. Ty budou potom propojeny přes jeden uzel, který nebude mít žádný jiný význam než zajistit toto propojení. Takový uzel se nazývá most (Obrázek 3.6). Stupeň uzlu bude tedy minimální, ale $\Delta MENL_i$ bude mnohem vyšší než u ostatních uzlů, protože bude propojovat obě sítě mezi sebou. Při analýze sítě je nutné vzít v úvahu přítomnost takovýchto specifických uzlů. V uměle generovaných sítích je výskyt takového prvku statisticky nevýznamný, proto se neprojeví na vztazích mezi centralitou a $\Delta MENL_i$, to ale neznamená, že lze opominout jeho vliv.



Obrázek 3.6 - Ilustrace mostu. Uzel 5 má nejnižší stupeň, ale přesto největší vliv na síť, protože leží na jediné spojnici mezi oběma segmenty sítě.

(zdroj: vlastní)

V oblasti modelování domino efektu je často používanou metodou Monte Carlo simulace, protože není složité takový model naprogramovat. Schopnost nové metriky $MENL$ poskytovat konzistentně správné výsledky bude ověřena srovnáním s výsledky MC simulace.

MENL přístup by měl být teoreticky limitou výsledků získaných pomocí simulace MC. V rámci DP je vytvořen software pro toto ověření. Řešení je na uměle generovaných sítích Erdős-Rényiho modelu náhodného grafu, Barabási-Albertova modelu bezškálového grafu a Watts-Strogatzova modelu grafu malého světa. U dvou posledně jmenovaných modelů je použita upravená třída generující orientované grafy, protože dostupné package obsahovaly pouze neorientované grafy.

Při generování jednotlivých modelů grafu byly nastaveny parametry dle dokumentace (Tabulka 3.1, 3.2 a 3.3). Simulace byla provedena s parametry v Tabulce 3.4 (Networkx, 2024d; Networkx, 2024e; Networkx, 2024f).

Tabulka 3.1 - Parametry syntetické sítě pro Erdős-Rényiho model

parametr	význam	zvolené hodnoty
n	počet uzlů sítě	<10, 100>
p	pravděpodobnost vytvoření hrany	0,005 až $\ln n / n$
directed	jestli jde o orientovaný graf	True

(zdroj: vlastní)

Tabulka 3.2 - Parametry syntetické sítě pro Barabási-Albertův model

parametr	význam	zvolené hodnoty
n	počet uzlů sítě	<10, 100>
m	počet přidávaných hran	1 až 5
directed	jestli jde o orientovaný graf	True

(zdroj: vlastní)

Tabulka 3.3 - Parametry syntetické sítě pro Watts-Strogatzův model

parametr	význam	zvolené hodnoty
n	počet uzlů sítě	<10, 100>
k	počet spojených sousedů	2 až 6
p	pravděpodobnost přepojení hrany	0,1 až 0,5
directed	jestli jde o orientovaný graf	True

(zdroj: vlastní)

Tabulka 3.4 - Parametry simulace

počet sítí pro každý model	500
počet cyklů MC simulace pro každou síť a odstraněný uzel	20000

(zdroj: vlastní)

Výsledky získané simulacemi jsou souhrnně shrnuty v tabulce 3.5.

Tabulka 3.5 – Výsledky simulací

model	dosažené body	maximálně dosažitelné body	% shody
Erdős-Rényi	457.2	500	91,4
Barabási-Albert	457.3	500	91,5
Watts-Strogatz	452.9	500	90,5

(zdroj: vlastní)

Při nastaveném počtu cyklů simulace MC 20 000 je shoda mezi výsledky poskytnutými MC simulací a metodou MENL vyšší než 90 %. Oba způsoby je možné zaměnitelně použít pro zjištění vlivu jednotlivých uzlů na rozvoj domino efektu v síti. Pro běžně velké sítě s desítkami uzlů je vhodnější použít MENL. Naopak u velmi velkých sítí s tisícovkami uzlů je doporučeno použít MC. Rozhodnutí je závislé na dostupných výpočetních kapacitách.

3.2 Zavedení MENL pro kvantitativní analýzu

Při kvantitativní analýze je každý uzel sítě popsán pravděpodobností P_{inic_i} , která určuje schopnost rizika být aktivováno, cenou uzlu, resp. velikostí ztráty L_i , která nastane při jeho aktivaci, a dvěma vektory, které popisují ohodnocení vstupních a výstupních hran, tedy jednotlivé pravděpodobnosti, že uzel i svým působením vyvolá aktivaci uzlu j .

Metoda MENL pro kvantitativní model vychází ze stejného principu jak v kvalitativní analýze, ale vyžaduje přizpůsobení novým parametrům uzlů. Je zachován stejný název parametru, protože je z kontextu vždy jednoznačné, o který případ se jedná, podle toho, jestli je prováděna kvalitativní nebo kvantitativní analýza a nemůže tedy dojít k jejich záměně.

$$MENL_{start} = \sum_{i=1}^N \left(P_{inic_i} L_i + \sum_{j=1}^N \max\{p_{kj}\} L_j \right), \quad (24)$$

přičemž musí platit $(i \neq j) \wedge d[i, j] \neq \infty \wedge d[i, k] \neq \infty \wedge d[k, j] \neq \infty$, kde P_{inic_i} značí pravděpodobnost, že uzel i bude na počátku domino efektu, L_i je ztráta způsobená aktivací rizika uzlu i , $\max\{p_{kj}\}$ je nejvyšší pravděpodobnost z množiny všech dostupných vstupních hran vedoucích do uzlu j (bližší vysvětlení v textu) a L_j je ztráta způsobená aktivací rizika uzlu j (uzel j je následný uzel domino efektu).

Vzorec je možné interpretovat následujícím způsobem: vnější suma je vedena přes všechny uzly, protože každý uzel se může stát iniciační událostí, která spustí domino efekt. Riziko z tohoto iniciačního uzlu je potom první člen sumy. Vnitřní suma potom odráží přírůstky ze všech uzlů, do kterých je možné se dostat po libovolné cestě. Podobně jako v kvalitativním modelu byl započítán každý dosažitelný uzel pouze jednou, protože nelze ani zde jednoduše sečíst součiny pravděpodobností hran a cen uzlů. Důvod lze jednoduše vysvětlit na příkladu, kde by jeden uzel byl dosažitelný po třech různých cestách, na nichž by byly hrany ohodnoceny jedničkou. Kdyby se pouze sčítaly součiny hran a cen uzlů, tak by takový uzel přinesl ztrátu $3L$ při své hodnotě L , což je zjevně nelogické. Situace je vyřešena tím, že ze všech možných hran, po kterých se lze dostat do daného uzlu z počáteční události, se vybere ta vstupní hrana, která má nejvyšší hodnotu. Výběr nejvyšší hrany je realizovaný funkcí $\max$ nad všemi vstupními hranami do uzlu j . Současně je formulovanými podmínkami zajištěno, že jsou zařazeny pouze ty vstupní hrany do uzlu j , které leží na cestách nějak dostupných z iniciační události. Za přírůstek rizika se potom bere součin této hrany a ceny uzlu j .

Pro síť, ze které je odstraněn uzel m potom platí

$$MENL_m = \sum_{i=1}^{N-1} \left(P_{inic_i} L_i + \sum_{j=1}^{N-1} \max\{p_{kj}\} L_j \right), \quad (25)$$

přičemž musí platit $(i \neq j) \wedge d[i, j] \neq \infty \wedge d[i, k] \neq \infty \wedge d[k, j] \neq \infty$,

$i, j, k \in G - \{m\}$, kde $MENL_m$ značí hodnotu $MENL$ pro síť s odstraněným uzlem m a ostatní symboly mají stejný význam jako v vzorci (24).

Pro určení $MENL_m$, které popisuje síť s odstraněným uzlem m , se použije zcela analogický vzorec jako pro $MENL_{start}$, pouze se doplní podmínka, která popisuje, že množina uzlů sítě se zmenšila o uzel m .

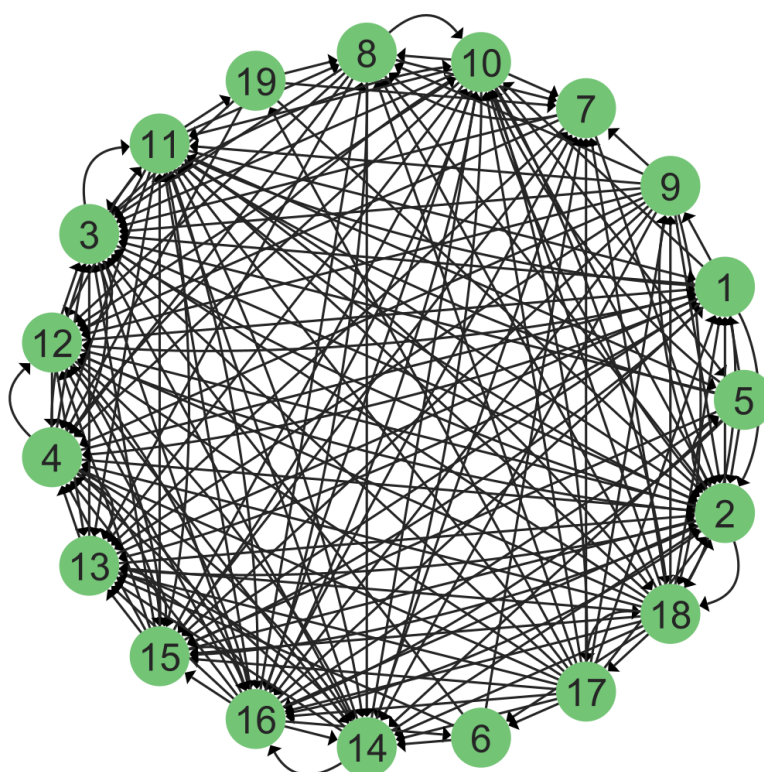
3.3 Testování vlivu perkolace na použitelnost MENL

V kapitole 1.4.1 na str. 31 až 32 byl vysvětlen perkolační jev, který je inherentní vlastností komplexních sítí. Tato skutečnost má zásadní vliv na meze použitelnosti metriky MENL pro srovnání dvou sítí lišících se o jediný uzel. Po překročení fázového přechodu nelze metodu použít. Nejde o chybu metody MENL, ale o vlastnost spojenou se sítí. Ani jakákoli jiná metoda nedokáže po překročení perkolace stanovit rozdíl mezi příspěvkem k riziku sítě jako celku, který přináší jeden uzel a jiný uzel, protože mezi uzly přestane existovat rozdíl sám o sobě. Velmi jednoduše to lze vysvětlit následujícím způsobem. Před perkolací je významný uzel významný proto, že leží na cestě k jiným uzlům a je nutné právě přes něho přejít, protože jiná cesta nevede. Nevýznamný uzel takové postavení nemá. Po perkolaci je v síti již dostupných tolik cest, že po odstranění jednoho uzlu se stejně zachovávají náhradní cesty do všech ostatních uzlů, takže úbytek je pouze o ten odstraněný uzel. Žádný uzel pak není důležitější než jiné uzly a nelze postupovat iteračním způsobem při hledání prioritního rizika, ale pouze hledat odstranění n -tice uzlů, aby se síť dostala opět před fázový přechod.

V teoretické části byl jev perkolace pro vznik gigantické komponenty vysvětlen na náhodných sítích. Na jiných, než náhodných sítích, jsou sice jiné limity, kdy nastává, ale princip zůstává platný. Stejně tak to, jestli je graf orientovaný nebo není, mění pouze okamžik, kdy k přechodu dojde, ale nemění skutečnost, že jednou k němu dojde.

Pro demonstraci jevu budiž použita síť na Obrázku 3.7 a kvalitativní analýza. Za každý uzel, do kterého se lze dostat po orientované hraně je přidělen 1 bod. V souladu s dřívějším popisem metody MENL, byl pro každý z těchto uzlů spočítán MENL. Výsledek je následující (závorka obsahu vždy číslo uzlu a vypočtený MENL):

vector_menl=[(1, 324), (2, 324), (3, 324), (4, 324), (5, 324), (6, 324), (7, 324), (8, 324), (9, 324), (10, 324), (11, 324), (12, 324), (13, 324), (14, 324), (15, 324), (16, 324), (17, 324), (18, 324), (19, 324)]



Obrázek 3.7 – Síť pro demonstraci perkolace. Náhodně vygenerovaná síť se středním stupněm uzlů $\gg 1$, aby došlo ke zformování gigantické komponenty.

(zdroj: vlastní)

Interpretace tohoto výsledku je jednoznačná a odpovídá i simulaci MC. Odstranění kteréhokoli z uzlů bude mít na domino efekt v síti stejně malý efekt, jako kteréhokoli jiného uzlu. V síti v tomto okamžiku, tedy při daných uzlech a hranách, neexistuje žádné prioritní řešení. Odstranění například rizika 6 a rizika 16 bude mít na síť stejný vliv. Seřazení uzlů není možné, protože všechny uzly poskytují stejnou hodnotu ztráty sítě jako celku. Při provedení MC simulace střední hodnoty rizika této sítě jako celku zůstávají stejné při odstranění libovolného uzlu.

Aby se systém dostal do stavu, kdy má smysl srovnávat stav před změnou a po změně, tak bude nutné současně odstranit n -tici uzlů. Otázkou je, jak velká musí být tato n -tice a které konkrétní uzly má obsahovat. Na tuto otázku není snadné odpovědět, protože se jedná o složitý optimalizační problém. Možný návrh řešení je předmětem třetí výzkumné otázky, kde je řešení hledáno s využitím metod genetických algoritmů.

Hranice validního použití MENL přístupu a způsob, jak přistupovat k problémům, které leží mimo tuto oblast, je potřeba stanovit s ohledem na použití metody v praxi. Každá organizace má omezený rozpočet a pro efektivní ekonomické fungování musí prioritizovat,

kteřá rizika bude mitigovat. Otázka tedy zní, jaké n -tice tj. jak velké a s jakými hodnotami uzlů manager potřebuje odstranit, aby dosáhl předem stanovené hranice rizika celého systému. Je patrné, že po zformování gigantické komponenty, tedy fázovém přechodu sítě, přístup MENL tuto odpověď nedá.

S rostoucím počtem hran dochází ke změně organizace sítě a dříve izolované shluky uzlů se navzájem propojují. Tím vytvoří gigantickou komponentu, která zahrnuje většinu uzlů. Překročení této kritické hranice tedy mění vlastnosti sítě (Barabási, 2005). Přesněji, gigantická komponenta vzniká na neorientovaném grafu a na orientovaném grafu vzniká silně souvislá komponenta, kde každý uzel je dosažitelný z každého jiného uzlu v rámci komponenty. Kritickou hranicí, kdy k tomuto jevu dochází na náhodných neorientovaných grafech je, když střední hodnota stupňů uzlu je 1. N -tice odstraněných uzlů by měla být tak velká, aby snížila síť pod kritickou mez a tím dokázala efektivně rozbít domino efekt. Při zjišťování limitu MENL, tedy okamžiku perkolace jsou vzaty v úvahu tato zjištění:

1.) Popsaná perkolace je dobře zpracovaná pro neorientovaný Erdős-Rényiho model. V DP je ale nutné pracovat s orientovanými sítěmi, kvůli kauzalitě.

2.) U Barabási-Albertova modelu bezškálových sítí může být situace ještě komplikovanější. Na jednu stranu zde dochází k vytvoření hubů (uzlů s vysokým stupněm připojení), které by měly představovat ideální cíl na rozpojení domino efektu, a tedy snížení rizika. Na druhé straně s rostoucím koeficientem m roste propojenost sítě. Je tedy nutné i tomuto modelu věnovat pozornost a zjistit, zda obsahuje podobnou hranici jako Erdős-Rényiho model.

3.) U některých typů sítí, minimálně v tomto okamžiku Erdős-Rényiho modelu nad kritickou hranicí, je nutné opustit původní pracovní ideu, že riziko lze snižovat iteračně tím, že bude nalezen vždy nejvíce významný uzel, ten se odstraní a přikročí se k dalšímu opakování tak dlouho, až se riziko sníží na dostatečnou míru. Pro hustě propojené komponenty tento způsob nepovede k cíli, protože neexistuje žádný významnější uzel než jiné uzly. Samozřejmě je možné postupovat i tak, že se vybere náhodně kterýkoli z rovnocenných uzlů a pokračuje se tak dlouho, dokud se síť nedostane pod kritickou mez. I to je smysluplné řešení. Pro analytika ale v takovém postupu není moc práce a může ho provádět každý, kdo provede náhodnou volbu.

3.3.1 Třídy ekvivalence MENL

V předchozím odstavci bylo vysvětleno principiální omezení metody MENL plynoucí z perkolace. Nyní jsou kvantitativně stanoveny meze validity MENL pro všechny 3 modely sítí, tedy Erdős-Rényiho model náhodného grafu, Barabási-Albertův model bezškálového grafu a Watts-Strogatzova modelu grafu malého světa. Pro řešení je použito nově zavedených tříd ekvivalence podle parametru MENL. Všechny uzly sítě tvoří množinu V o kardinalitě n . Pro každý uzel je spočítána hodnota MENL. Všechny uzly se shodným MENL, necht' tvoří jednu třídu ekvivalence. Tento přístup je vhodný pro kvalitativní analýzu. V případě kvantitativní analýzy by definice tříd ekvivalence musela být adekvátně uzpůsobena, což zde není předvedeno.

Necht' máme následující vektor jako řešení nějaké hypotetické sítě:

$\text{vector_menl_i} = [(1, 45), (2, 41), (3, 39), (4, 45), (5, 51), (6, 51), (7, 45), (8, 50), (9, 45)]$

Potom existuje 5 tříd ekvivalence:

$N_{39}\{3\}$, $N_{41}\{2\}$, $N_{45}\{1, 4, 7, 9\}$, $N_{50}\{8\}$, $N_{51}\{5, 6\}$

Tyto třídy ekvivalence znamenají, že lze všechny uzly rozdělit do množin, které obsahují uzly, jejichž vliv na domino efekt v síti je shodný. Třídy je možné uspořádat podle MENL a prohlásit, že třída, která má nejmenší MENL obsahuje prvky, které tvoří skutečnou prioritu, protože když odstraníme prvek z této množiny, tak hodnota MENL sítě klesne na hodnotu odpovídající třídě ekvivalence. Čím více tříd ekvivalence síť má tím lépe je možné řešení škálovat. A současně čím méně hodnot bude ve třídě s nejnižším MENL, tím konkrétněji je určeno nejdůležitější riziko.

Při použití vektoru MENL z kapitoly 3.3 str. 72:

$\text{vector_menl} = [(1, 324), (2, 324), (3, 324), (4, 324), (5, 324), (6, 324), (7, 324), (8, 324), (9, 324), (10, 324), (11, 324), (12, 324), (13, 324), (14, 324), (15, 324), (16, 324), (17, 324), (18, 324), (19, 324)]$

je patrné, že všechny prvky tvoří jedinou třídu ekvivalence

$N_{324} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3.3.2 Analýza pro Erdős-Rényiho model náhodného grafu

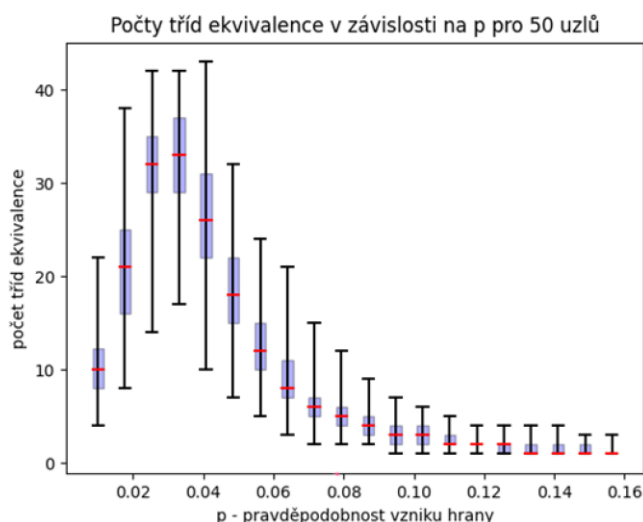
Pro stanovený konstantní počet uzlů je postupně navyšován parametr p sítě a vygenerováno vždy 100 sítí. V každé je proveden rozklad na třídy ekvivalence a je sledováno, jaký vliv má p na změnu počtu tříd ekvivalence. Parametry postupu jsou uvedeny v Tabulce 3.6.

Tabulka 3.6 - parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence a parametrem p

parametr	hodnoty
počty uzlů	{10, 20, 50, 100}
počty generovaných sítí pro jednu hodnotu p	100
interval p	0,01 až $2 * \ln n / n$
interval p bude rozdělen na počet hodnot	20
celkový počet sítí pro n =konst.	2000
model sítě	Erdős-Rényi

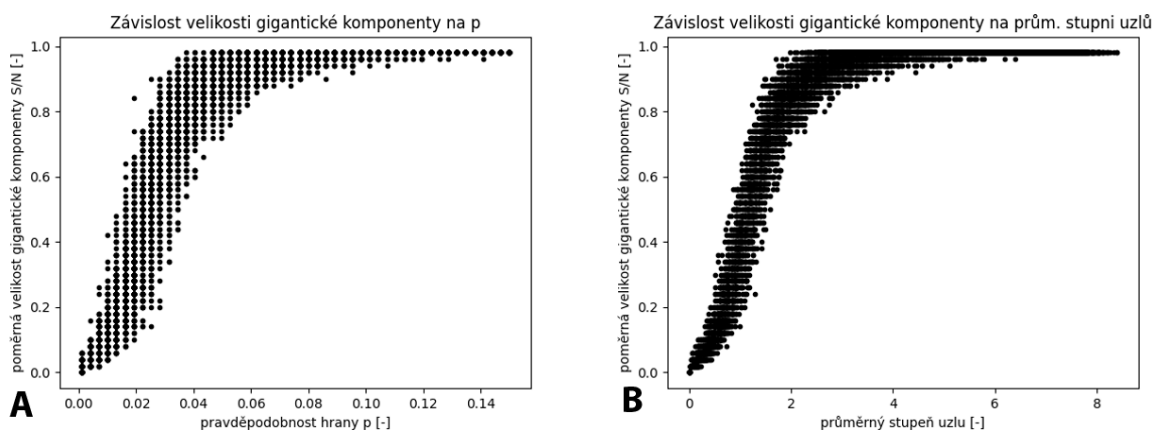
(zdroj: vlastní)

Byl vytvořen program a provedena simulace. Pro všechny počty uzlů jsou získané grafy v Příloze P III. Zde je provedena pouze vzorová interpretace jednoho z nich na Obrázku 3.8 a 3.9.



Obrázek 3.8 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a pravděpodobností p vzniku hrany v ER modelu náhodného grafu pro $n=50$ uzlů. Osa x odpovídá pravděpodobnosti p . Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max).

(zdroj: vlastní)



Obrázek 3.9 – A- Závislost velikosti gigantické komponenty (osa y) na pravděpodobnosti hrany p (osa x). B- Závislost velikosti gigantické komponenty (osa y) na průměrném stupni uzlů. (osa x). Velikost gigantické komponenty je vyjádřena jako poměr její velikosti k celé síti. V oblasti kolem průměrného stupně uzlu 1 dochází k formování gigantické komponenty.

(zdroj: vlastní)

Z Obrázku 3.9 je patrné, že s rostoucím p se snižuje počet tříd ekvivalence podle MENL. To, že na grafu nevznívá přechod nijak dramaticky je pouze optické zkreslení tím, že je zobrazený velmi malý úsek osy x , konkrétně po 0,16. Vzhledem k tomu, že pravděpodobnost může nabývat hodnotu z celého intervalu $<0;1>$, tak při zobrazení v celém rozsahu by byla pozorována dramatická změna na velmi úzkém intervalu, což odpovídá principu fázového přechodu. Při $p > 0.08$ již jednoznačně převažují případy kompletního propojení. Hrany jsou tvořeny s pravděpodobností p a může nastat vzácná varianta, kdy topologie sítě je taková, že umožní více tříd ekvivalence. Ještě lepší, než parametr p se jeví použít průměrný stupeň uzlu. Pro průměrný stupeň uzlů 1 je velikost gigantické komponenty cca 50% sítě (Obrázek 3.9). Z grafů plyne doporučení, že parametr MENL by se neměl používat za touto mezí. Mezní hodnota p je funkcí velikosti sítě. Není jasné, jak přesně stanovit její hodnotu, protože nelze jednoznačně odpovědět na otázku typu "Je například gigantická komponenta s relativní velikostí 0,7 již příliš velká?" S jistotou lze říci, že hodnoty menší než $1/n$ jsou bezpečné, protože pro ně je střední hodnota stupňů maximálně 1. Vše nad ně je v šedé zóně a hodnoty nad $\ln n / n$ jsou jednoznačně v zakázané zóně.

3.3.3 Analýza pro Barabási-Albertův model bezškálového grafu

Pro tento model se zadávají parametry n - počet uzlů sítě a m - počet hran, které se u nového uzlu přidávají k existujícím uzlům. Defaultně je tento model neorientovaný. Protože v modelování rizik jsou kauzální vztahy příčiny a následku, tak byl model přeprogramován

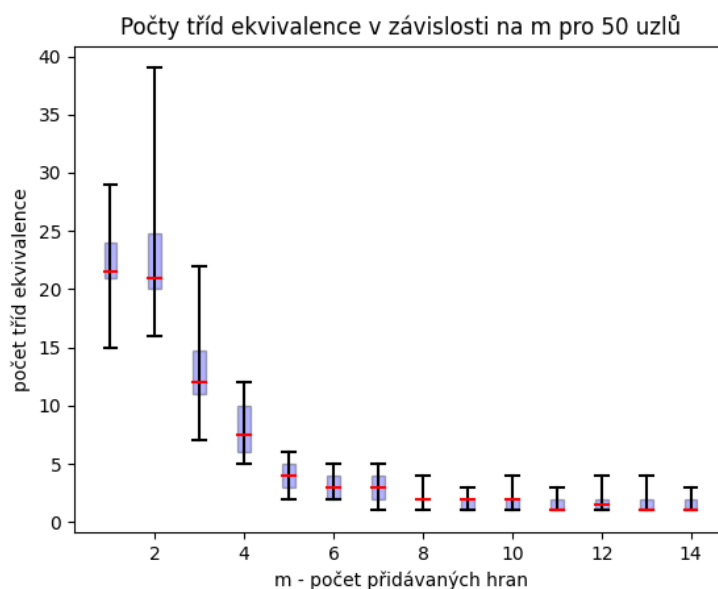
tak, aby neorientovaná hrana se stala orientovanou se stejnou pravděpodobností v obou směrech. Postup byl podobný jako v předchozím modelu, pouze rozsah a význam parametrů se změnil. Konkrétní hodnoty parametrů jsou uvedeny v Tabulce 3.7.

Tabulka 3.7 - parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence
a parametrem p

parametr	hodnoty
počty uzlů	{50, 100}
počty generovaných sítí pro jednu hodnotu m	30
interval m	1 až 15
intervalu p je rozdělen na počet hodnot	15
celkový počet sítí pro n=konz.	900
model sítě	Barabási-Albert

(zdroj: vlastní)

Všechny výsledky získané z programu jsou dohledatelné v Příloze P III. Z nich pro interpretaci je jeden graf na Obrázku 3.10.



Obrázek 3.10 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametrem m, který značí počet přidávaných hran. Barabási-Albertův model pro n=50 uzlů. Medián zobrazen červenou čárkou. Osa x odpovídá pravděpodobnosti p. Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max).

(zdroj: vlastní)

I zde je vidět klesající počet tříd ekvivalence s rostoucím m . Pro využití MENL bezpečným způsobem je jako hranice odhadnuta hodnota $m=5$

3.3.4 Analýza pro Watts-Strogatzův modelu grafu malého světa

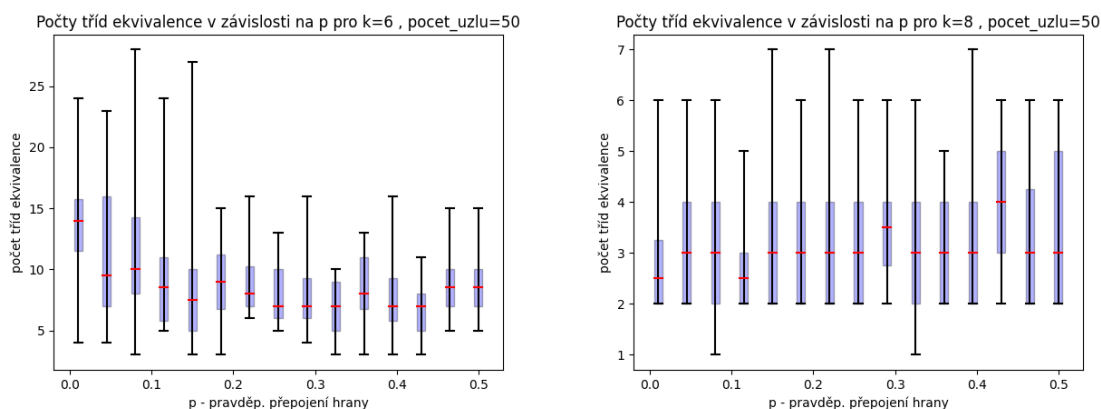
Ve Watts-Strogatzově modelu se kromě počtu uzlů ještě doplňují dva další parametry. Počet sousedů, se kterými uzel je propojen k , a pravděpodobnost přepojení hrany p . Bylo tedy nutné analyzovat vliv 2 nezávislých proměnných současně. Graf poskytovaný knihovnou NetworkX je neorientovaný. Byl způsobem popsaným v předchozím odstavci upraven na orientovaný. Opět byl podobný postup s rozsahy hodnot uvedenými v Tabulce 3.8. Všechny získané výsledky jsou v Příloze P III.

Tabulka 3.8 - parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence a parametry k a p

parametr	hodnoty
počty uzlů	{50}
počty generovaných sítí pro jednu hodnotu m	20
interval k	2 až 14
intervalu k je rozdělen na počet hodnot	9
interval p	0,1 až 0,5
intervalu p je rozdělen na počet hodnot	15
celkový počet sítí pro $n=\text{konst.}$	2700
model sítě	Watts-Strogatz

(zdroj: vlastní)

Význam parametrů k a p je takový, že pro k v nižším rozsahu vzniká síť spíše propojená lokálně (k mezi 2 až 4) a vyšší hodnoty vedou ke globálně propojeným grafům ($k > 6$). Parametr p s nižšími hodnotami opět přispívá k méně propojeným sítím a s jeho nárůstem roste propojení.



Obrázek 3.11 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametry k , p ve Watts-Strogatzově modelu pro $n=50$ uzlů. Medián zobrazen červenou čárkou. Osa x odpovídá pravděpodobnosti p přepojení hrany. Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max). Obrázek vlevo i vpravo je pro síť velikosti 50 uzlů. Vlevo parametr počtu propojených sousedů $k=6$, vpravo pro $k=8$

(zdroj: vlastní)

Na základě výsledků (Obrázek 3.11 a Příloha P III Obrázek 3) je bezpečná oblast pro MENL odhadnuta na $k \leq 6$ a $p < 0.1, 0.5$.

Orientované náhodné grafy i komplexní sítě obsahují jako svoji vlastnost kritickou mez, nad níž vzniká natolik husté propojení, že v ní postrádá smysl hledat prioritní řešení, ve skutečném významu toho slova, pomocí jakékoli metody včetně MENL. Takové řešení prostě neexistuje. MENL je doporučeno používat při parametrech v rozsahu uvedeném v Tabulce 3.9.

Tabulka 3.9 – Doporučené hodnoty modelů pro používá metod KARS nebo MENL

model	parametr	rozsah hodnot
Erdős-Rényi	p - pravděpodobnost vzniku hrany	$1/n$ (n je velikost sítě) příp. $\ln n/n$ (vysvětlení v textu)
Barabási-Albert	m - počet hran, které se u nového uzlu přidávají k existujícím uzlům	1 až 5
Watts-Strogatz	k - počet sousedů, se kterými je uzel propojen	2 až 6
	p - pravděpodobnost přepojení hrany	0,1 až 0,5

(zdroj: vlastní)

3.4 Doporučený postup využití metriky MENL v praxi

Po vytvoření matice souvztažnosti a sítě nejprve provést rozklad na třídy ekvivalence MENL. Zjistit, kolik procent sítě tvoří množina nejvýznamnějších uzlů. Pokud se jedná o přijatelně velké procento, tak postupovat dál iteračně a vytvořit kvalitativní řešení. Pokud se jedná o příliš velkou část sítě, tak opustit metodu MENL a přejít na řešení pomocí GA, jak je blíže specifikováno v kapitole 5.

Z výše uvedeného je možné konstatovat, že první výzkumná otázka, která se ptá po způsobu, jak popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu byla zodpovězena formulací metriky MENL a způsobu jejího praktického výpočtu, a to jak pro kvalitativní, tak kvantitativní analýzu. Současně byly formulovány bezpečné meze použití této metody pro jednotlivé modely komplexních sítí. Její využití v praxi umožní vzájemné srovnání stavu před zavedením mitigačních opatření a po jejich zavedení a současně i vzájemné srovnání různých variant mitigačních opatření, což vede k možnosti optimalizace.

4 POSOUZENÍ VHODNOSTI CENTRALIT UZLŮ SÍTĚ JAKO PREDIKTORU RIZIKA

Motivací k řešení druhé výzkumné otázky je značná výpočetní náročnost Monte Carlo simulací prováděných nad rozsáhlými systémy. Rozsáhlými je v tomto případě míněn systém s uzly v řádech tisíců. Ukázkový příklad Zhanga et al. (2024) je z tohoto pohledu triviální. Pokud budou předmětem analýzy vazby mezi jednotlivými domy ve městě nebo jednotlivé funkce v software, pak rozsahy v tisících uzlů jsou zcela realistické. Takovou výpočetně přijatelnou alternativou je hodnocení uzlů sítě pomocí centralit. Existuje široká škála různě definovaných centralit, přičemž každá z nich se vyznačuje jinými vlastnostmi a je vhodná pro popis jiných problémů. Výběr použitých centralit je u různých autorů různý. Často je použito více centralit bez odůvodnění, proč právě tato množina byla zvolena. V literatuře se nepodařilo dohledat srovnání vhodnosti různých centralit pro modelování domino efektu. Pokud by existovalo jasné doporučení založené na statistickém srovnání výsledků, tak by volba použité centrality přestala být závislá na intuici analytika, ale měla by solidní základ.

V předchozí výzkumné otázce bylo prezentováno, že MENL a MC simulace je vzájemně zaměnitelná a obě metody umožňují stanovit míru příspěvku jednotlivého uzlu k celkovému riziku sítě tím, že se vzájemně srovnají situace s daným uzlem a po jeho odstranění. Této vlastnosti lze nyní využít a takto stanovenou významnost jednotlivých uzlů srovnat s významností, kterou jim přisoudí jednotlivé centrality. Tímto způsobem je možné zjistit, do jaké míry každá z centralit skutečně popisuje chování uzlu v domino efektu. Vybraná centralita se tak stane aproximací výsledků z MENL nebo MC, pokud tyto nejsou dostupné.

Pro modelování domino efektu je vhodné se neomezovat pouze na komplexní sítě, ale pracovat i s náhodnými sítěmi. Pro řešení byly vybrány jako modely opět tři základní: Erdős-Rényiho model náhodného grafu, Barabási-Albertův model bezškálového grafu a Watts-Strogatzův model grafu malého světa.

Protože na grafy vzniklé odstraněním některého uzlu v iteračním přístupu je možné pohlížet i tak, že by mohly vzniknout samy o sobě vygenerováním dané topologie sítě, tak není potřeba postupovat iteračně, ale postačí vygenerovat graf, vypočítat MENL a centrality a přidělit body na základě srovnání množin nejdůležitějších uzlů. Je testována většina centralit vysvětlených v teoretické části.

Při posuzování výsledků získaných různými metodami může dojít k různým situacím. Ty jsou zde přesně popsány a je vysvětleno, jak jsou hodnoceny. Vychází se z toho, že prioritizace důležitosti uzlu v síti, resp. tomu odpovídajícího rizika má především praktické důvody, poskytnout managementu návod, co upřednostnit a co nechat na později. Čím nižší $MENL_i$ tím vyšší důležitost uzlu v domino efektu v síti. Pro bodování shody mezi výsledky MENL a výsledky centrality byl vymyšlen následující způsob:

(MENL je označen jako metoda A, daná centralita jako metodou B):

- metoda A i metoda B vrátí jednoprvkovou množinu nejdůležitějších uzlů. V takovém případě je provedeno posouzení na shodu. Při shodě je přidělen metodě B 1 bod a při rozdílnosti řešení 0 bodu.
- metoda A vrátí jednoprvkovou množinu nejdůležitějších uzlů a metoda B vrátí množinu s n prvky. Pokud prvek z metody A je v této množině, tak metoda B obdrží $1/n$ bodu, pokud není, tak 0 bodu.
- metoda A vrátí množinu s m prvky a metoda B s 1 prvkem. Pokud tento prvek je mezi m prvky, tak obdrží $1/m$ bodu, jinak 0 bodu.
- metoda A vrátí množinu M s m prvky a metoda B vrátí množinu N s n prvky. Potom metoda B obdrží počet bodů určený vzorcem 26.

$$b = \frac{M \cap N}{M \cup N}, \quad (26)$$

kde b značí počet přidělených bodů, M množinu nejdůležitějších řešení vrácených metodou MENL, N množinu nejdůležitějších řešení vrácených konkrétní centralitou. Je patrné, že první 3 odrážky jsou pouze speciální případy poslední varianty.

Jsou generovány pouze sítě pod kritickou mezí propojení, s parametry v rozsahu uvedeném v Tabulce 3.9, protože nemá smysl testovat shodu metod v oblastech, kde nefungují.

Kromě způsobu bodování popsaného výše (shoda nejdůležitější třídy ekvivalence MENL s nejdůležitějším výsledkem centrality), byly přidány ještě dva alternativní pohledy označené P5 a P10. Vyjadřují, jaká je pravděpodobnost, že všechny uzly v nejdůležitější MENL množině jsou nalezeny, když se vezme 5 nebo 10 percentil seřazených výsledků dané centrality.

Pro každý model bylo vygenerováno 1000 sítí. Maximálně tedy bylo možné dosáhnout 1000 bodů. Každá síť byla ohodnocena parametrem MENL a jednotlivými centralitami. Dosažené výsledky jsou prezentovány v Tabulkách 4.1 až 4.3.

Tabulka 4.1 – Dosažené výsledky při testování 1000 sítí ER

metrika	dosažené body	max. dosažitelné body	úspěšnost [%]	P5 [%]	P10 [%]
degree	222.1	1000	22.21	35.49	54.84
in_degree	104.0	1000	10.4	18.55	32.84
out_degree	102.8	1000	10.28	18.06	32.88
closeness	102.6	1000	10.26	20.95	36.64
betweenness	568.7	1000	56.87	70.99	86.65
katz	111.3	1000	11.13	20.37	36.01
pagerank	171.6	1000	17.16	30.91	49.59

(zdroj: vlastní)

Tabulka 4.2 – Dosažené výsledky při testování 1000 sítí BA

metrika	dosažené body	max. dosažitelné body	úspěšnost %	P5	P10
degree	411.1	1000	41.12	58.06	72.93
in_degree	343.4	1000	34.34	51.32	69.45
out_degree	355.7	1000	35.58	53.33	68.45
closeness	280.0	1000	28.01	44.71	59.22
betweenness	506.4	1000	50.65	65.48	81.97
katz	336.8	1000	33.69	50.17	66.66
pagerank	416.5	1000	41.66	58.65	75.71

(zdroj: vlastní)

Tabulka 4.3 – Dosažené výsledky při testování 1000 sítí WS

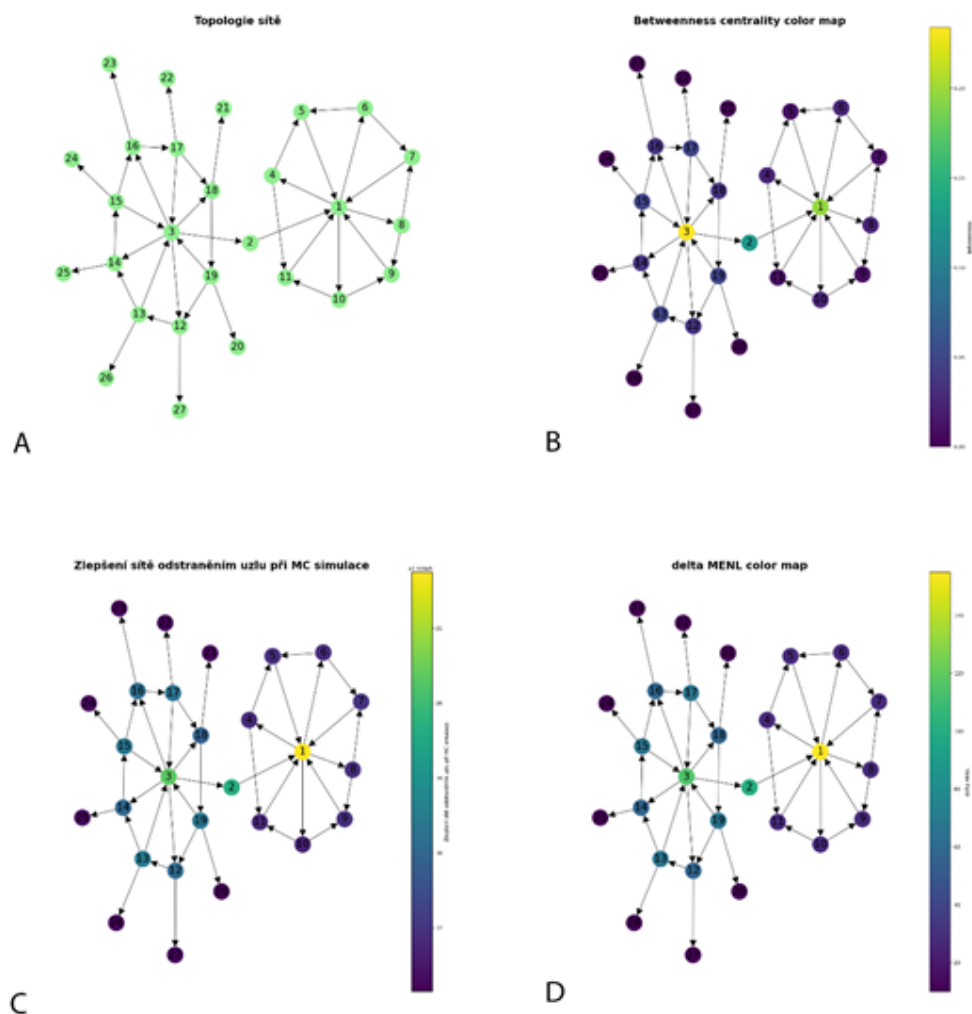
metrika	dosažené body	max. dosažitelné body	úspěšnost %	P5	P10
degree	170.1	1000	17.02	27.97	43.01
in_degree	53.3	1000	5.34	8.52	17.81
out_degree	42.0	1000	4.21	8.33	17.9
closeness	68.4	1000	6.85	15.04	27.91
betweenness	699.4	1000	69.94	81.87	92.17
katz	62.2	1000	6.23	12.02	24.03
pagerank	119.4	1000	11.95	21.62	38.42

(zdroj: vlastní)

Hodnocení tak, jak bylo nastavené jenom na nejdůležitější případy, bylo velmi přísné, protože testovalo shodu na nejvýznamnější prvek, resp. s třídou ekvivalence MENL nejvýznamnějších prvků. Rozšíření na P5, resp. P10 ukazuje ještě větší shodu. Například pokud se vezme u ER náhodných sítí 10% percentil betweenness centrality, tak je 86% pravděpodobnost, že se v něm nachází všechny uzly z nejdůležitější třídy MENL ekvivalence. Při velikosti sítě 100 uzlů je omezení na 10 uzlů zjevně volbou, která si stále zaslouží označit jako prioritizace. Také je vidět, že pokud graf není náhodný, ale obsahuje komplexitu (BA), tak i ostatní centrality zlepšují svůj výkon v hledání nejvýznamnějších uzlů, kvality betweenness ale nedosahují. Z výsledků je možné odhadnout i spolehlivost české metody KARS, která je založena na in_degree a out_degree centralitě. **Z tabulek 4.1 až 4.3 je možné doporučit pro praxi jako nejvhodnější metriku betweenness centrality.**

Kromě statistického vyhodnocení shody na uměle vygenerovaných sítích se jeví jako vhodné ověřit toto zjištění i na speciálně připravených těžkých situacích. První situace obsahuje dva huby, jeden most a řadu zpětnovazebních smyček. Druhá obsahuje strukturu k5-core. Na obou sítích je sledováno, jak se s nimi vypořádá betweenness centrality. Jako etalon pro srovnání je opět MC, resp. MENL.

Na Obrázku 4.1 je z color map patrné, že MC, MENL i betweenness centrality správně shodně označily jako nejdůležitější uzly oba huby a most.

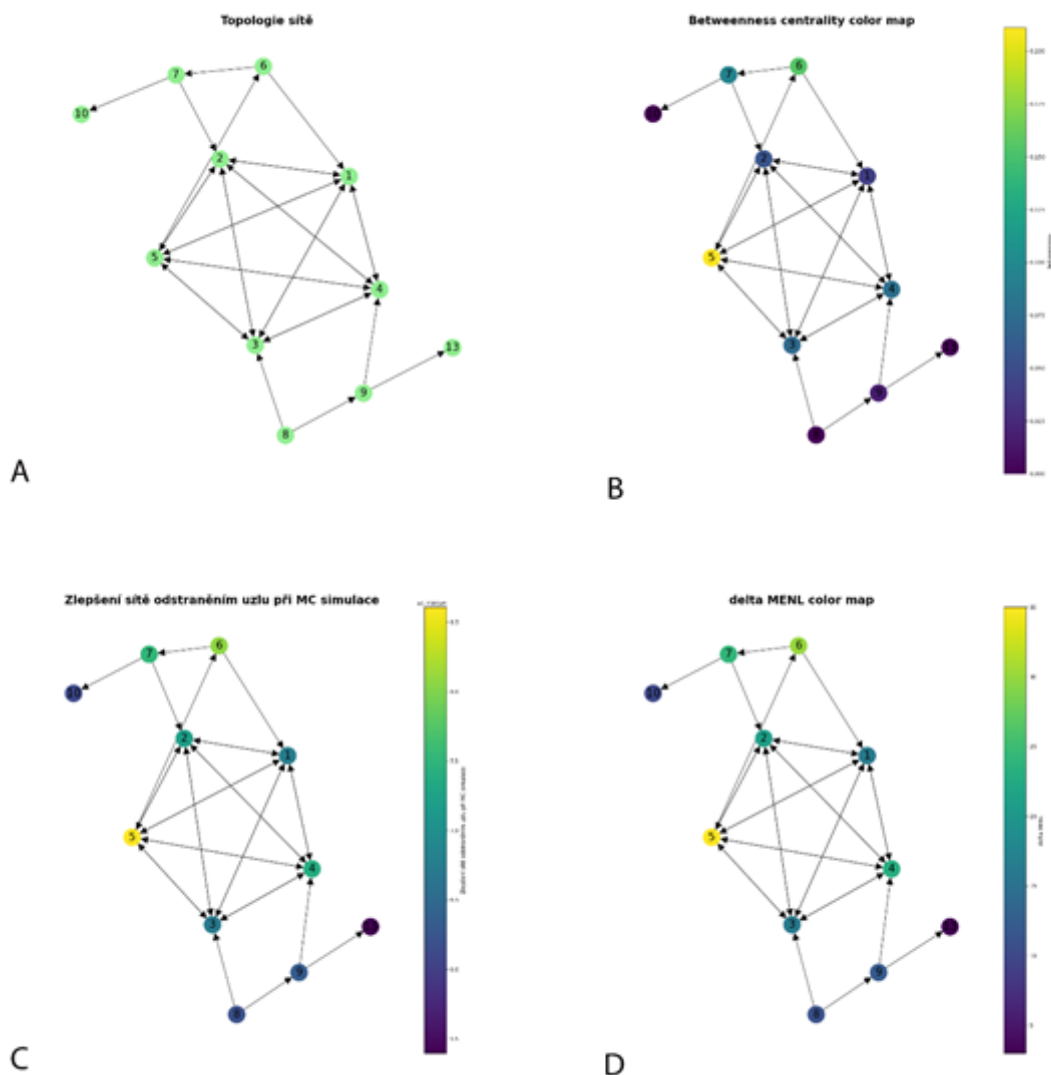


Obrázek 4.1 – Grafická prezentace výsledků nalezení hubů a mostů – srovnání betweenness centrality, MENL a MC. A-topologie analyzované sítě. B-color map pro betweenness centralitu jednotlivých uzlů. C-dosažené zlepšení sítě jako celku pro odstranění jednotlivých uzlů při MC simulaci. D-dosažené zlepšení sítě při odstranění jednotlivých uzlů a výpočtu MENL. Světlejší hodnoty značí vyšší riziko. Z B,C,D je patrné, že všechny 3 metody shodně identifikovaly nejvyšší zdroje rizika v síti.

(zdroj: vlastní)

Dalším zajímavým topologickým prvkem je jádro sítě. K-core je definované na neorientovaném grafu. V úlohách modelování domino efektu se pracuje s orientovanými hranami. Pro orientované grafy zobecnil k-core Giatsidis jako D-core. D-core je (k, l) -core kde k se vztahuje k in-hranám a l se vztahuje k out-hranám ve stejném smyslu jako hrana na neorientovaném grafu. Takže $D(k, k)$ -core přechází v k-core (Malliaros et al., 2019). Protože NetworkX nepodporuje práci s D-core, ale pouze k-core, tak je vytvořena neorientovaná síť s k5-core a ta převedena na orientovanou nahrazením hran jádra vždy dvěma orientovanými hranami a mimo jádro náhodnou orientací hran. K5-core tvoří uzly 1, 2, 3, 4 a 5.

Výsledky jsou zobrazeny na Obrázku 4.2. Všechny uzly jádra mají spojení s uzly mimo jádro, ale pouze uzel 5 má toto spojení out-hranou. To znamená, že je jediným uzlem jádra, který šíří domino efekt mimo jádro. Tato skutečnost se velmi hezky projevila na grafech MC, MENL a betweenness centrality, které dokázali jádro škálovat podle skutečné důležitosti pro domino efekt.



Obrázek 4.2 – Grafická prezentace výsledků na k5-core - srovnání betweenness centrality, MENL, MC. A-topologie analyzované sítě. B-color map pro betweenness centrality jednotlivých uzlů. C-dosažené zlepšení sítě jako celku pro odstranění jednotlivých uzlů při MC simulaci. D-dosažené zlepšení sítě při odstranění jednotlivých uzlů a výpočtu MENL.

Světlejší hodnoty značí vyšší riziko. Z B,C,D je patrné, že všechny 3 metody shodně identifikovaly klíčový uzel 5, který je nejvyšší zdroj rizika v síti.

(zdroj: vlastní)

Na druhou výzkumnou otázku je možné odpovědět, že je doporučena jako nejvhodnější metrika centrality pro popis domino efektu na síti betweenness centralita, která nejlépe aproximuje MENL a tedy i MC simulaci. Zjištění bylo podloženo statistickým vyhodnocením provedených simulací a otestováním na speciálně zkonstruovaných sítích, které ověřily chování v náročných podmínkách.

5 OPTIMALIZACE PRIORITIZACE HROZEB V KOMPLEXNÍM SYSTÉMU

U složitých optimalizačních problémů je klíčovou stránkou efektivita řešení. Z tohoto důvodu bylo vyvinuto množství algoritmů. Jednou z tříd optimalizačních algoritmů jsou heuristické algoritmy, mezi které patří genetické algoritmy. Kromě obecné formulace algoritmu se dosahuje výkonnostních zlepšení vhodnou implementací, protože stejné zadání lze implementovat v software různými způsoby.

Třetí výzkumná otázka řeší, jakým způsobem jde optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů. V rámci řešení první výzkumné otázky bylo ukázáno, že metoda MENL v bodě, kdy se formuje gigantická komponenta, resp. silně propojená komponenta orientovaného grafu dosahuje limitu svých možností a za fázovým přechodem ji nemá smysl používat a obdobně i jakoukoli jinou metodu, která se snaží najít největší riziko. Snížení rizika celého systému za tímto bodem je nutné řešit současným výběrem n -tice uzlů. Opravdu velkou výzvou ovšem je, jak tuto n -tici stanovit, jak z hlediska její velikosti, tak složení, aby poskytla optimální řešení. Pro řešení tohoto optimalizačního problému je navrženo použít genetické algoritmy, které umožní hledat suboptimální řešení i v těchto oblastech. Samozřejmě je lze nasadit i do oblastí před fázovým přechodem, ale protože půjde o to ukázat další krok v možnostech, tak jsou záměrně voleny příklady přesahující výše uvedený limit. Součástí řešení je posouzení různých strategií kódování, různých účelových funkcí a snaha o zlepšování výkonu použitých postupů. Odpovědí na třetí výzkumnou otázku je, zda a jakým způsobem by evoluční algoritmy, konkrétně genetické algoritmy mohly být vhodným nástrojem pro nalezení optimálního řešení výběru n -tice rizik, které mají být upřednostněny. GA jsou ideální nástroj pro prohledávání vysokodimenzionálního stavového prostoru řešení.

Je řešena jak kvalitativní, tak kvantitativní analýza domino efektu. V Tabulce 5.1 jsou shrnuty rozdíly obou modelů.

Tabulka 5.1 – Shrnutí rozdílů mezi kvalitativním a kvantitativním modelem řešení s pomocí GA a MCMC

vlastnost	kvalitativní model	kvantitativní model
aktivace iniciační události – s uniformním rozdělením pravděp. je vybrán 1 uzel a následně:	vybraný iniciační uzel je vždy aktivován	vybraný iniciační uzel je aktivován s pravděp. P_{inic}
šíření domino efektu na další uzly	s pravděp. 100 % je šířen na všechny dostupné uzly	každá orientovaná hrana má vlastní pravděp. hrany, se kterou je šířen na další uzel
omezení, aby optimalizace neprobíhala do odstranění všech uzlů	je stanovena maximální velikost odstraňované n-tice	-každý uzel má cenu za odstranění rizika -suma těchto cen v přijatelném řešení nesmí překročit předem stanovený limit
ztráta sítě při šíření domino efektu z iniciační události	-každý uzel představuje 1 bod -ztráta je suma všech uzlů aktivovaných domino efektem plus inic. událost	-každý uzel má svou cenu ztráty -ztráta sítě je suma všech ztrát uzlů, které byly aktivovány domino efektem plus cena inic. události
průměrná očekávaná ztráta sítě	-shodně pro oba modely -průměr ze všech MCMC vzorkování, tedy jednotlivých scénářů šíření domino efektu	

Poznámka: P_{inic} je pravděpodobnost aktivace rizika/uzlu jako počátku domino efektu, MCMC značí Monte Carlo Markov Chain

(zdroj: vlastní)

Pro aplikaci GA jsou zásadní 3 věci. Stanovit, jak efektivně zakódovat hledaná řešení, stanovit způsob manipulace s jedinci v populaci, tedy způsob jejich vytvoření a operátory křížení a mutace, a nakonec určit účelovou funkci, pomocí které jsou řešení navzájem porovnávána.

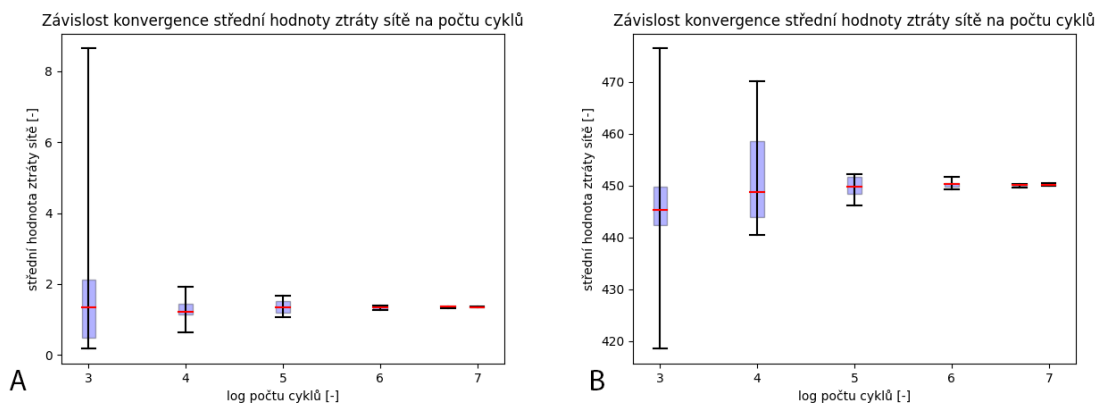
Nejdříve jsou hledány způsoby, jak urychlit výpočty, protože, při hodnocení pomocí GA stojí proti sobě dva protichůdné požadavky – přesnost a doba výpočtu. Firma nebo vládní agentura s finančním zázemím si může do určité míry dovolit zlepšování výsledků zvětšením výpočetního výkonu. K tomu může uplatnit několik cest např. předělat program na distribuované zpracování, využít výpočtů na grafických procesorech. Masivní navýšení výpočetní kapacity se potom projeví ve větším počtu zpracovaných scénářů a zlepšení výsledků optimalizace. Tato cesta ovšem není dostupná autorovi práce a ve většině případů ani běžným analytikům. Proto se musí uplatnit využití různých vylepšení na úrovni použitých algoritmů. První zásadní navrhované vylepšení je popsáno v následujícím textu a vede ke snížení doby o několik řádů při vzorkování MCMC. Další vylepšení jsou diskutována přímo v demonstrační kvantitativní analýze formou srovnání různých přístupů.

Každá úloha řešená pomocí GA musí mít účelovou funkci, která ohodnotí jednotlivé jedince populace. Pro účely DP je jako účelová funkce využito vzorkování MCMC. Následující text popisuje kvantitativní analýzu, kde každý uzel má vlastní iniciační pravděpodobnost P_{inic} , s jakou se aktivuje.

Při simulaci MCMC pro získání hodnoty účelové funkce každého jedince v populaci GA nastaly 2 problémy, se kterými bylo nutné se vypořádat. Jejich příčina spočívá v zavedení iniciační pravděpodobnosti P_{inic} pro jednotlivé uzly. Při prvních pokusech byly tyto pravděpodobnosti každému uzlu generovány náhodně z intervalu (0.001, 0.003). Při vzorkování MCMC je prvním krokem vygenerování náhodného čísla z intervalu (0; 1). Pouze pokud je toto číslo menší než iniciační pravděpodobnost náhodně zvoleného uzlu, který se může stát iniciační událostí, tak tento naplní svůj potenciál a skutečně se aktivuje a stane se iniciační událost. To má dva důsledky.

1) Simulace reflektuje realitu. Jenomže pokud je $P_{\text{inic}} = 0.002$, tak se v 998 případech z 1000 iniciací nespustí. To má za důsledek, že se MCMC simulátor promění v gigantický stroj, který má provést milion cyklů, ale v 99,8 % případech se točí naprázdno. O několik řádů se tak zhoršila jeho funkčnost. Jestliže je očekávaný výsledek založený na předpokladu zprůměrování milionu cyklů, které měří stav uvnitř sítě, tak ve skutečnosti vnitřní spoje měří pouze řádově tisíce cyklů. Dramaticky se tím zhorší konvergence. Protože výsledkem simulace je aproximace, kterou nejsme schopni získat analytickým výpočtem. A čím širší je rozsah hodnot, tím horší aproximace je. Tento fakt je dokumentován na Obrázku 5.1A. Topologie sítě pro příklad není podstatná. Je to obecný problém, proto není topologie popisována. Pro síť byly provedeny opakované simulace. Postupně se navyšoval počet

MCMC simulace od 10^3 do 10^7 . Každá varianta počtu cyklů měla 10 opakování. Výsledek je na Obrázek 5.1A. Je z něho patrné, jak se postupně zlepšuje aproximace celkové střední ztráty pro síť jako celek.



Obrázek 5.1 - Závislost konvergence střední hodnoty ztráty sítě na počtu cyklů zobrazená pomocí krabicového grafu. Pro počet cyklů je použita logaritmická stupnice. A – původní řešení bez upraveného rozsahu iniciačních pravděpodobností. B – stejná síť, ale transformovaný rozsah iniciačních pravděpodobností. Na ose x je log počtu cyklů MC simulace. Na ose y je střední hodnota ztráty sítě získaná simulací.

(zdroj: vlastní)

První řešení tohoto problému, které se intuitivně nabízí jako nejjednodušší, je prostě zkontrolovat, jestli došlo k aktivaci iniciačního rizika a vyřadit cykly, kde se riziko nespustilo. To by ovšem odpovídalo rezignaci na iniciační pravděpodobnost jako takovou. Tímto postupem pracovaly sítě v kvalitativním modelu v rámci první výzkumné otázky. To zcela jistě není žádoucí přístup u kvantitativní analýzy. Pokud se některý uzel vybral jako iniciační v kvalitativní analýze, tak se automaticky spustil sled jeho domino následků. V kvantitativní analýze si takové zjednodušení ovšem není možné dovolit, protože uzly, které mají např. $P_{\text{inic}}=0,002$ a $P_{\text{inic}}=0,2$ by byly spouštěny stejně často i s jejich veškerými domino následky, a to je naprosté zkreslení výsledků. To, co musí být zachováno je relativní poměr v četnosti spuštění všech uzlů.

2) Druhý dopad nízkých hodnot iniciační četnosti se projevuje při výpočtu střední hodnoty ztráty sítě. Při MCMC simulaci se sčítají hodnoty jednotlivých vzorků a výsledná hodnota je průměrem ze všech cyklů. Pokud ovšem 998 cyklů z 1000 dá jako výsledek 0 iniciovaných uzlů a 0 jako ztrátu sítě, tak se i průměrná hodnota ztráty propadá o několik řádů. To ve skutečnosti není chybná hodnota. Kdyby existovalo paralelně 1000 světů a na každém by ona situace proběhla, tak skutečně bude průměrná hodnota ztráty tak nízká. Čili

výsledek je numericky správný. Spíše optické potíže ale působí, že se při srovnávání dostáváme k velmi nízkým číslům a zdánlivě se tak může jevit, že různé situace jsou skoro stejné. Řešení porovnává stroj, takže skutečným problémem to není, ale interpretaci provádí člověk, který tak může být vystaven riziku nepochopení skutečného stavu.

Řešení výše popsaných problémů spočívá v úpravě algoritmu, kdy dojde k transformaci intervalu iniciačních pravděpodobností $\langle P_{\text{inic_min}}, P_{\text{inic_max}} \rangle$ na interval $\langle P_{\text{inic_min}}/P_{\text{inic_max}}, 1 \rangle$. Zůstane tím zachovaná poměrná četnost mezi inicializací jednotlivých uzlů a tím i poměrná četnost jim odpovídajících scénářů. Současně ovšem stoupne pravděpodobnost skutečného spuštění domino efektu. Dalo by se říct, že simulátor dříve běžící naprázdno se dostane do záběru. To, co se změní, je střední hodnota účelové funkce, ale pouze relativně, úměrně provedené transformaci. To ovšem naprosto nevadí, protože účelová funkce má jediný úkol a tím je srovnat v populaci řešení v genetickém algoritmu, které řešení je lepší nebo horší než jiné. A to splní, protože poměry výsledků zůstávají zachovány. Výsledek takovéto upravené MCMC simulace není skutečná hodnota ztráty na síti, ale její lineární transformace. Transformační parametr $1/P_{\text{inic_max}}$ je potřeba určit ještě na síti, která obsahuje všechny uzly, tedy počáteční zadání. Je to z toho důvodu, že když vznikají jednotlivé upravené sítě, jakožto řešení s odstraněnými n -ticemi uzlů, tak při odstranění právě uzlů, které mají $P_{\text{inic_min}}$ nebo $P_{\text{inic_max}}$ by došlo ke změně transformačního faktoru mezi různými sítěmi a tím ke zkreslení. V implementaci programu je to ošetřeno.

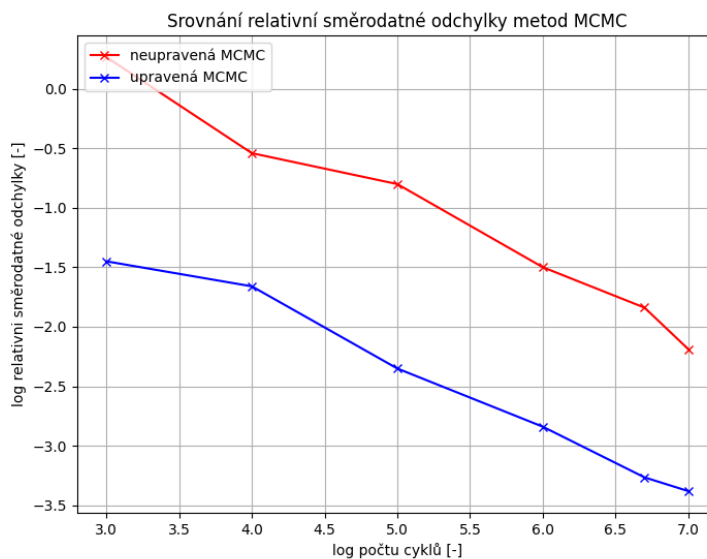
Výsledky tohoto upraveného MCMC vzorkování jsou na Obrázku 5.1B. Na první pohled mohou působit podobně. V obou případech je vidět, že dochází ke konvergenci. Dokonce na obrázku 5.1B je boxplot pro hodnotu 4, což odpovídá 10 000 cyklů, výrazně větší, což může svádět k názoru, že první varianta konverguje rychleji. Klíčem ke správné interpretaci obou grafů je ovšem relativní směrodatná odchylka. Pro srovnání dvou sad dat, které se liší mediánem je potřeba použít právě relativní směrodatnou odchylku, protože hodnota samotné směrodatné odchylky nemůže být přenesena na zcela jiný soubor dat. Vypočtené hodnoty jsou v Tabulce 5.2. O rychlosti konvergence vypovídá relativní směrodatná odchylka, proto je z nich patrné, že v upravené verzi došlo ke zrychlení konvergence o 2 řády (Obrázek 5.2). Jinými slovy, abychom získali původní kvalitu řešení, tak je možné provést o 2 řády méně cyklů a snížit tak o 2 řády výpočetní čas. Současně podle statistik došlo ke snížení "běhu naprázdno" z 99,8 % na přibližně 25%. Čím užší je rozsah mezi $P_{\text{inic_min}}$ a $P_{\text{inic_max}}$, tím větší je nárůst účinnosti simulace, a tedy více se projeví

zmiňovaný efekt. Současně čím menší jsou P_{inic_min} a P_{inic_max} , tím se rovněž zvětší efekt transformace intervalu.

Tabulka 5.2 – Srovnání rychlosti konvergence původního a upraveného vzorkování MCMC

řešení bez úpravy			upravené řešení	
počet cyklů	směrodatná odchylka	relativní směrodatná odchylka	směrodatná odchylka	relativní směrodatná odchylka
1000	2.4898	1.8463	15.7931	0.0355
10000	0.3482	0.2877	9.8100	0.0219
100000	0.2102	0.1581	2.0048	0.0045
1000000	0.0427	0.0316	0.6505	0.0014
5000000	0.0196	0.0145	0.2440	0.0005
10000000	0.0087	0.0065	0.1870	0.0004

(zdroj: vlastní)



Obrázek 5.2 – Srovnání relativní směrodatné odchylky celkové ztráty sítě pro dvě varianty vzorkování MCMC. Červená křivka zobrazuje neupravenou simulaci. Modrá křivka je pro simulaci s transformovanými hodnotami iniciační pravděpodobnosti. Vzhledem k rozsahům hodnot jsou obě osy logaritmické.

(zdroj: vlastní)

Prezentované testování proběhlo opakovaně na více sítích se shodnými výsledky. Z prostorových důvodů nejsou další testy uváděny. Na základě získaných dat bylo rozhodnuto používat pro získání očekávané ztráty sítě mean z MCMC vzorkování nastavené na 50000 vzorků jako kompromis mezi rychlostí a přesností.

Vlastní vzorkování bylo implementováno v programu vytvořením objektu sítě s danou topologií, přičemž uzly byly rovněž objekty s atributy pro stav a parametry. Hrany byly realizovány jako vzájemné volání těchto objektů. Tím došlo k přirozené simulaci šíření domino efektu. Aby bylo zabráněno zacyklení, tedy garantována konečnost algoritmu, tak uzel, který byl jednou aktivovaný už v tomto stavu zůstal a nemohl být aktivovaný znovu, a tedy ani opakovaně šířit událost.

MCMC bylo tímto způsobem modifikováno tak, aby se zlepšila rychlost konvergence. V této podobě je použito v kvantitativní analýze domino efektu.

5.1 Využití genetických algoritmů při kvalitativní analýze

Pro optimalizaci řešení výzkumné otázky číslo tři pro kvalitativní analýzu sítě s domino efektem je možné využít genetické algoritmy. Cílem je na síti velikosti N vyhledat optimalizovanou n -tici uzlů, jejichž odstraněním se nejvíce sníží průměrná střední očekávaná ztráta sítě. Použita je síť na Obrázku 3.6, na které je překročený limit perkolace. Poměr hrana/uzel je $187/19=9,8$, takže je vysoce v oblasti, kde již vzniklo silné propojení. Hlavní informace o kvalitativním modelu jsou v Tabulce 5.1.

Hledat n -tici z N možností znamená provádět výběr n prvků z N bez opakování, přičemž počet možností je popsán vzorcem

$$C_n(N) = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! * (N-n)!}, \quad (27)$$

kde $C_n(N)$ značí počet kombinací n prvků z N bez opakování, N počet uzlů sítě a n počet odstraňovaných uzlů.

Prvním krokem je volba způsobu zakódování řešení. Tady se nabízí použít chromozom konstantní délky n , přičemž jednotlivé lokusy nabývají hodnoty v rozsahu od 1 do N . Chromozom tedy představuje přímo seznam uzlů na vyřazení. Není ani potřeba hlídat, aby se jeden uzel nevyskytl vícekrát, protože takové řešení poskytne nižší fitness a je přirozeně eliminováno v procesu selekce.

Mutace odpovídá náhodné změně na jiný uzel. Jednobodové křížení potom výměně části chromozomů navzájem. Tím, že je délka všech chromozomů stejná, tak přirozeně dojde k zachování délky i u potomků.

Takto popsané řešení potom bylo realizováno pro n v rozsahu od 1 do 19, aby bylo zjištěno, jak se kvalita mění s měnící se délkou n -tice. Pro každý takový případ byly

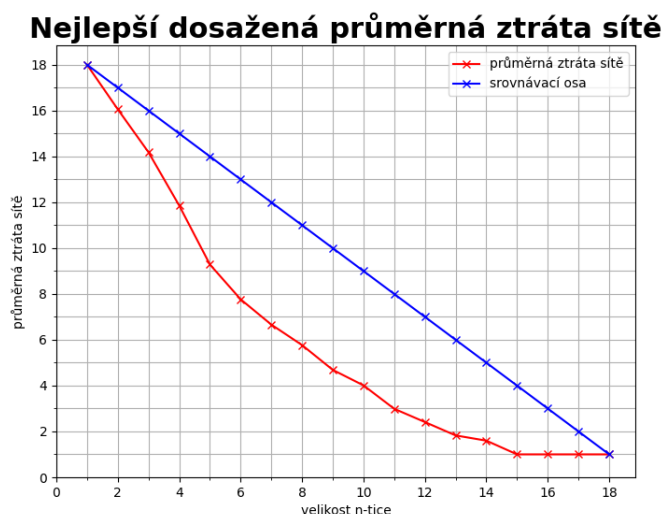
nastaveny parametry podle Tabulky 5.3. Lze je interpretovat tak, že pro hledání například optimální 10-tice je provedeno 100 populací, každá s 15 jedinci.

Tabulka 5.3 – Parametry nastaveného GA řešení

parametr	hodnota
počet generací	100
počet jedinců v populaci	15
počet jedinců pro křížení z populace	7

(zdroj: vlastní)

Po 9hod 23 min byly získány výsledky prezentované na Obrázku 5.3. Výsledky lze interpretovat následujícím způsobem: Modrá přímka ukazuje, že kdyby neexistoval domino efekt, tak odstranění jednoho rizika způsobí snížení průměrné ztráty přesně o 1, protože není co šířit. V první fázi, odstraněním 1 až 5 uzlů zrychluje rozpojování sítě. Zpočátku je pomalejší, protože existují náhradní cesty, postupně se zrychluje. Odstraněním od 6 do 11 uzlů je zhruba ekvivalentní v relativním porovnání zisků a nákladů na jejich dosažení, protože je červená křivka rovnoběžná s modrou. V absolutní hodnotě samozřejmě stále klesá. V další fázi už se zisk zpomaluje. V kvalitativní analýze nelze říct, jakou velikost upřednostnit, protože není v zadání stanoveno, jaké prostředky je možné vynaložit na eliminaci rizik a model ani neobsahuje cenu za odstranění jednoho uzlu, ale pouze cenu ztráty jednoho uzlu, která je jednotková. Z průběhu grafu lze pouze konstatovat, že nejlepší poměr zisk a náklady je při velikosti 5-tice. Konkrétně se jednalo o rizika [10, 11, 16, 2, 1].



Obrázek 5.3 – Nejlepší dosažená průměrná ztráta sítě pro kvalitativní model v závislosti na velikosti odstraňované n-tice. Na ose x je počet odstraňovaných uzlů. Na ose y nejlepší dosažená hodnota ztráty. Červená křivka je pro analyzovanou síť a zobrazuje hodnoty reálně získané při simulaci a provedené optimalizaci. Modrá křivka zobrazuje pro srovnání situaci, kdy by rizika nebyla propojena a nemohlo by tedy docházet k domino efektu. Velikost sítě 19 uzlů. Zatímco v modré křivce odstranění 1 uzlu způsobí snížení rizika vždy o 1, tak v červené je snižování zpočátku rychlejší, protože dochází k rozpojování domino efektu.

(zdroj: vlastní)

5.2 Využití genetických algoritmů při kvantitativní analýze

V dalším kroku je posouzeno, jestli by i v kvantitativním modelu mohla být prioritizace rizik řešena pomocí GA a za jakých podmínek, resp. jakou strategií. Cílem je provést úplné kvantitativní hodnocení domino efektu. Úplným je myšleno, že každý uzel má sadu parametrů popsanou v Tabulce 5.1. Současně je i stanoveno maximální množství finančních prostředků, které má manažer k dispozici na eliminaci rizik, aby se situace co nejvíce blížila skutečnosti. Výstupem je suboptimální řešení, tedy doporučení, jak s daným rozpočtem naložit efektivně.

Stabilní metoda, která by byla řešením výzkumné otázky číslo tři, se musí vyrovnat s jakýmkoli modelem sítě. Je tedy náhodně vygenerována síť podle parametrů v Tabulce 5.4.

Tabulka 5.4 – Parametry vygenerované sítě

parametr	hodnota
velikost sítě	50
počet hran	149
model sítě	Erdős-Rényiho model
rozsah pro generování P_{inic} NODE_INIC_PROBABILITY_SCOPE	(0.001, 0.003)
rozsah pro generování ztráty uzlu NODE_LOSS_SCOPE	(100, 500)
rozsah pro generování ceny eliminace rizika NODE_RISK_SUPPRESS_COST_SCOPE	(0.01, 0.05)
rozsah pro generování pravděp. šíření po hraně EDGE_PROBABILITY_SCOPE	(0.1, 0.3)

Poznámka: P_{inic} je pravděpodobnost aktivace rizika/uzlu jako počátku domino efektu

(zdroj: vlastní)

Postupně jsou prováděny různé úpravy vedoucí ke zrychlení výpočtu, takže je použito a komparováno několik postupů.

V první variantě je použito binární kódování chromozomu. Řešení je binární varianta GA. Cílem je určit suboptimální řešení, kterým je n -tice uzlů odstraněných ze sítě G o velikosti N uzlů. Každé řešení je možné zakódovat jako sekvenci 1 a 0 ve vektoru, jehož velikost je N , kde 1 odpovídá uzlu, který je ze sítě odstraněn a 0 uzlu, který je ponechán. Z toho plyne velikost stavového prostoru, který je prohledávaný jako 2^N . Pro hrubou orientaci ve složitosti úkolu, pro síť velikosti $2^{50} \sim 10^{15}$ možných řešení (pro 200 uzlů by to bylo $2^{200} \sim 10^{60}$. Pro srovnání počet atomů ve vesmíru se odhaduje na 10^{78} .)

Mutace je řešena náhodnou změnou z 1 na 0 a obráceně. Křížení je realizováno jako jednobodové.

Topologie sítě je v Příloze P IV Obrázek 1. Každému uzlu je náhodně vygenerovaná hodnota iniciační pravděpodobnosti, jednotlivé pravděpodobnosti pro hrany šíření, ceny ztráty při aktivaci uzlu a ceny za redukci rizika uzlu. Tyto hodnoty jsou graficky prezentovány ve formě color map v Příloze P IV Obrázek 2, 3 a 4.

Každé hledání n -tice rizik, které odstranit, má dvě hlediska posuzování. První je úroveň následků, které se v síti průměrně vyskytnou při opakovaném simulování domino efektu na

síti vzniklé odstraněním této n-tice, tedy očekávaná průměrná ztráta sítě. Musí zde být, ale zastoupena i nějaká protiváha, kterou jsou náklady na odstranění rizika této n-tice. Kdyby byly náklady vynechány, tak by hledání řešení pokračovalo tak dlouho, až by bylo nalezeno triviální řešení odstranit všechna rizika a mít nulové škody. Takové triviální řešení zjevně není cílem. Účelová funkce, která ohodnotí každé navržené řešení, musí brát do úvahy obě tyto stránky. V prvních experimentech s GA byla použita následující filozofie: vypočte se suma nákladů na odstranění všech rizik sítě a prohlásí se, že náklady nesmí překročit x% (bylo nastaveno 20 %). Tuto hodnotu by si každý manager zadal podle svého rozpočtu jako procento nebo by ji zadal jako absolutní velikost nákladů. Zajistí se tím, že i velmi nákladná rizika mohou být odstraňována, pokud je n-tice menší nebo jsou náklady na ostatní odstraňovaná rizika nižší. Nebo mohou vznikat větší n-tice s nižšími jednotlivými náklady. Velikost n-tice je tedy proměnlivá. Ponechává se tím dostatečná volnost procesu tvorby nových řešení. Na počátku hodnocení účelové funkce se spočítá hodnota nákladů na odstranění dané n-tice. Pokud překračuje mez, tak je návratová hodnota 0. Pokud je finanční mez splněna, tak se provede MCMC vzorkování takto upravené sítě. To vrátí odhad střední hodnoty ztráty na celé síti `mean_loss`. Čím je tato hodnota nižší tím lépe. Protože implementační požadavek na fitness function daný použitou package je, že má být maximalizační, tak je její návratovou hodnota určena jako $1/\text{mean_loss}$.

Časově kritická místa jsou závislá zejména na dvou ovlivnitelných parametrech. Počet cyklů MCMC vzorkování a velikost populace řešení GA. Velikost sítě ovlivnit nelze, protože je daná zadáním. Dále má vliv způsob generování jedinců pro GA. Příliš vysoké procento jedinců, kteří jsou vyřazeni kvůli nedodržení podmínek ekonomické efektivity způsobí, že se sníží efektivita GA. Je to trochu obdoba situace, kdy MCMC simulátor běžel "naprázdno".

Při vzorkování MCMC čím větší množství cyklů je provedeno, tím přesnější je hodnota účelové funkce, ale současně roste doba výpočtu. Na základě statistických experimentů bylo zjištěno, že při nastavení parametrů vzorkování na `MCMC_CYCLES = 5000` a `MCMC_META_CYCLES = 10`, tedy celkem 50000 vzorků, bylo konzistentně dosahováno chyby výsledku střední hodnoty ztráty sítě menší než 0,4 %. Současně se ještě jednalo při velikosti sítě 50 uzlů o rychlost, se kterou šlo pracovat. Při velikosti sítě 50 uzlů je stavový prostor všech řešení přibližně $1,1 \cdot 10^{15}$. Pokud tedy je provedeno 10000 generací a v každé bude v populaci 40 řešení, tak je prohledáno 400 000 řešení, což odpovídá pouze

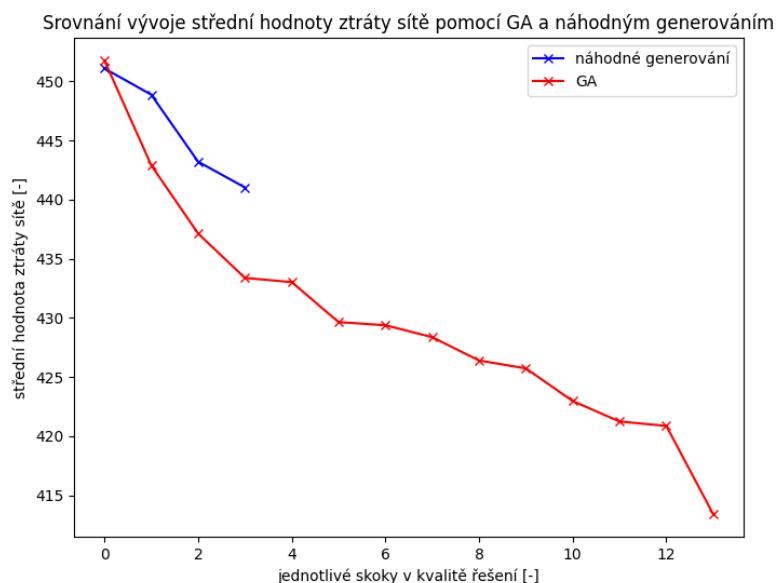
$3,6 \cdot 10^{-8}$ % stavového prostoru. Z takto malé velikosti prohledané oblasti je vidět, že u GA nemůže jít o pouhé náhodné hledání.

Častou reakcí osob, které se setkávají poprvé s GA bývá otázka, jestli to opravdu funguje, jestli to není pouhé generování náhodných řešení s přáním, že to snad vyjde. Proto jako první je provedeno takovéto srovnání zcela náhodného hledání a hledání GA. Pro srovnání je generováno 400 000 řešení bez jakékoli vazby mezi sebou (toto není GA, ale čistá náhoda). První variantou založenou na GA je běh GA 10 000 generací, každá obsahující 40 řešení, celkem také 400 000 řešení. Svou velikostí prohledání stavového prostoru si tedy obě varianty odpovídají. Neodpovídají si však kvalitou dosažených řešení, kde je na první pohled patrné mnohem lepší řešení pomocí GA. Jak je vidět z grafu na Obrázku 5.4, tak řešení prostou náhodou uvázne a už se dále nezlepšuje, zatímco řešení GA se v každé generaci postupně zlepšuje. V obou případech je použita stejná účelová funkce, popsaná v předchozím odstavci. Výsledky jsou v Tabulce 5.5 a Obrázku 5.4.

Tabulka 5.5 - Srovnání výsledků GA a náhodného řešení. Výchozí hodnota ztráty sítě 451,7. Počet řešení 400000, risk_reduction_cost_border=0.288 (hranice ceny za redukci n-tice rizik). Běh GA byl po 11 hod 9 min přerušen z časových důvodů. Podrobné výstupy z programu pro oba běhy jsou v Příloze P IV jako Výpis1 a Výpis2.

	nejlepší dosažená ztráta sítě	zlepšení o
genetický algoritmus	413.412	38.288
náhodné řešení	441.024	10.676

(zdroj: vlastní)



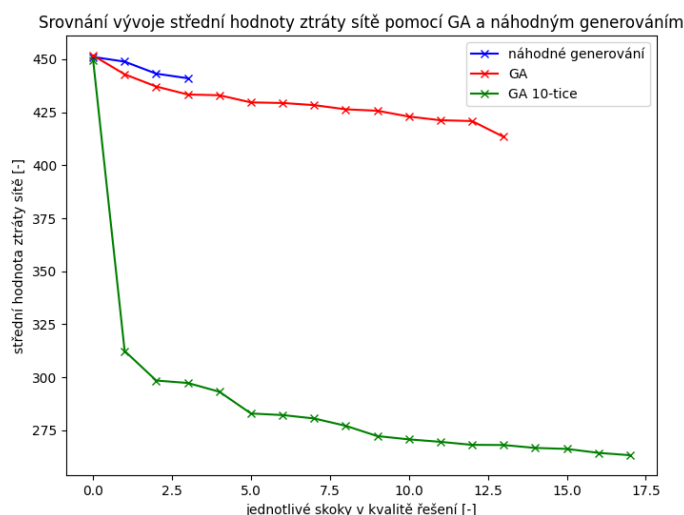
Obrázek 5.4 - Vývoj nejlepšího řešení v čase pro srovnání GA a náhodného řešení. Byla zaznamenána vždy pouze řešení překračující kvalitou předchozí řešení. Není tedy prezentován každý časový bod, ale pouze body zlepšení účelové funkce. Modrá křivka reprezentuje náhodná řešení, která krátce po startu ustrnou a dále se nezlepšují. Červená křivka reprezentuje řešení genetickými algoritmy. Na ose x dojde k posunu o 1 krok, pokud je nalezeno řešení lepší, než všechna zatím nalezená řešení. Neodpovídá nijak reálnému času výpočtu. Na ose y je střední hodnota ztráty sítě ještě před provedením zpětné transformace. Hodnoty na ose y je nutné srovnávat pouze relativně mezi sebou, pokud není provedena zpětná transformace pravděpodobnosti iniciace uzlů.

(zdroj: vlastní)

Generátor zcela náhodných řešení po několika zlepšeních ustrnul a již nebyl schopen poskytnout lepší řešení, zatímco GA vzájemnou kombinací různých řešení se systematicky zlepšoval. Po 11 hod byl běh GA zastaven, protože výpočetní kapacita byla potřebná pro jiné účely, ale řešení mohlo být pravděpodobně ještě dále zlepšováno. Z výše uvedeného srovnání je patrné, že i když GA je heuristická metoda, tedy prvek náhodnosti v sobě nese přímo v názvu, tak se nejedná o pouhé generování náhodných řešení. Rozdíl by se dal asi metaforicky popsat slovy, že GA za pomoci svých funkcí pro crossingover a mutaci "tvoří", zatímco prostý generátor pouze "generuje".

Další pokus o vylepšení výkonu je v následující myšlence. Z účelové funkce se odstraní požadavek na horní mez finančních nákladů na odstranění n-tice. Zůstane pouze minimalizace ztráty sítě, ale aby existoval nějaký protitlak, který zabráni kolapsu řešení do odstranění všech uzlů, tak se povolí odstranit přesně konstantní počet uzlů (obdobu téhož v kvalitativním modelu). Kvůli tomu se změní kódování řešení z binárního vektoru o délce

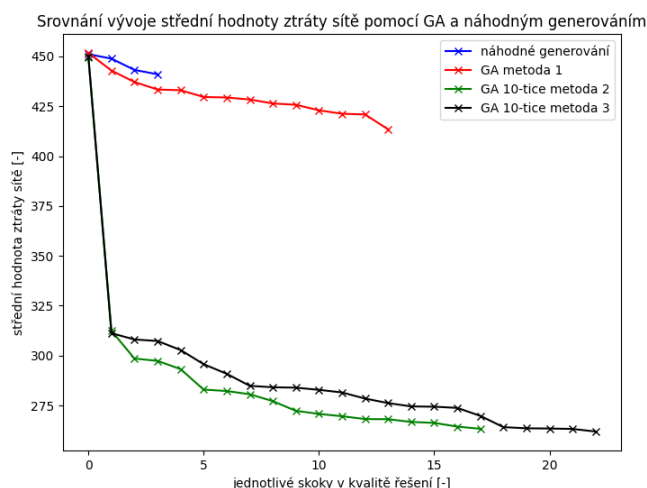
sítě na způsob, který byl použitý v kvalitativním řešení. Řešení je přímo n-tice navržená k odstranění. Tímto způsobem projdou i některá řešení přesahující náklady na odstranění rizik, ale ty jsou odstraněny na závěr. Z GA se vrátí nikoli jedno řešení, ale nějaká větší množina, která na konci ještě projde filtrem ceny za odstranění rizik. Tento způsob hledání řešení je označen jako metoda 2. Konkrétně byla hledána 10-tice uzlů. (10 bylo zvoleno protože 20 % uzlů sítě ještě bylo shledáno, že by mohlo být označeno termínem priorita). Výstup z programu je v Příloze P IV Výpis 3. K dřívějším metodám byl do grafu pro srovnání doplněný průběh nového postupu metody 2 – Obrázku 5.5 zelená křivka. Je vidět, že postup je výrazně efektivnější. Zelené a modré i červené řešení trvalo srovnatelnou dobu kolem 11hod.



Obrázek 5.5 - Vývoj nejlepšího řešení v čase. Oproti Obrázku 5.4 byla doplněná zelená křivka, která odpovídá optimalizaci GA s hledáním 10 rizik pro odstranění. Je patrné, že střední hodnota ztráty sítě na ose y klesá výrazně rychleji než při binárním kódování první metodou, kterému odpovídá červená křivka. Na ose x jsou skoky při zlepšení střední hodnoty ztráty sítě oproti všem zatím získaným hodnotám.

(zdroj: vlastní)

Posledním pokusem o vylepšení je využít znalostí z druhé výzkumné otázky, že betweenness centrality koreluje s významností uzlu pro šíření domino efektu. Zatím byla iniciační populace řešení GA tvořena čistě náhodně. Nyní je nejprve vypočtena betweenness centralita všech uzlů. Vytvoří se množina 30 % uzlů s nejvyšší betweenness a z nich se náhodně vygenerují různé 10-tice. Ty jsou 1. populace GA. Dál už je standardní postup s křížením a mutací, takže i uzly s nižší betweenness se do řešení dostanou v rámci mutací. Tento postup je označen jako metoda 3.



Obrázek 5.6 - Vývoj nejlepšího řešení v čase. Byla doplněná černá křivka odpovídající předzpracování iniciační populace pomocí betweenness (v textu na str. 102 označena jako metoda 3). Je patrné, že nedošlo ke zlepšení výkonu. Na ose x dojde k posunu o 1 krok, pokud je nalezeno řešení lepší, než všechna zatím nalezená řešení.

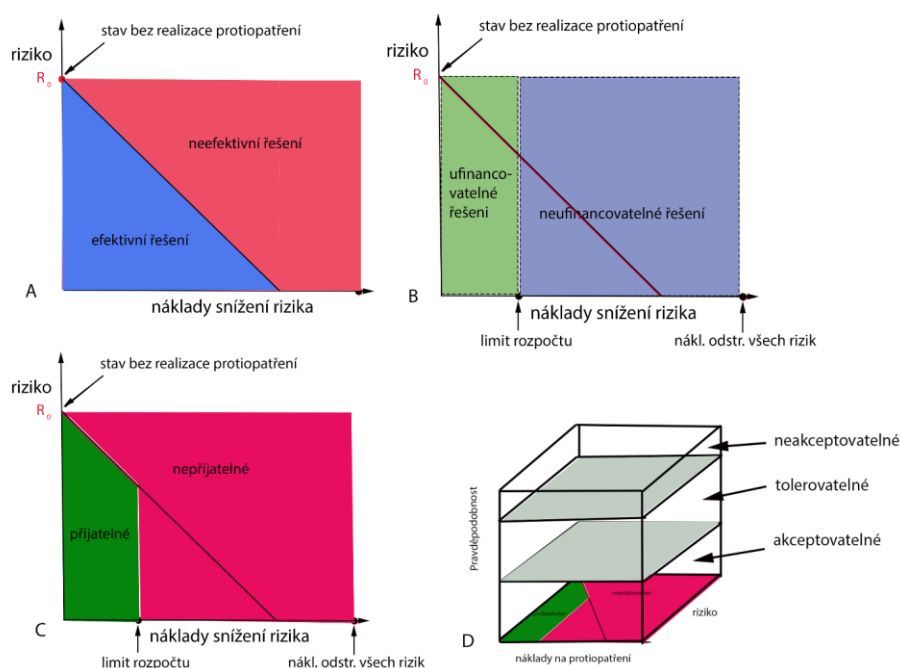
(zdroj: vlastní)

Z grafu na Obrázku 5.6 je vidět, že předzpracování iniciační populace pomocí betweenness centrality nepřináší žádný přínos oproti metodě 2. Rychlost hledání i nejlepší dosažené řešení je zcela srovnatelné s metodou 2, proto není metoda 3 dále použita a následující řešení pro větší rozsah n-tic je založeno na metodě 2.

Po dokončení přípravných prací pro zlepšení strategie kódování a postupu řešení bylo přistoupeno k celkovému řešení optimalizace zadané sítě. Byl snížen počet generací GA z 1000 na 60. Důvodem byla rozumná doba výpočtu a i fakt, že ve vyšších generacích už zlepšení redukce rizika nebylo významné. Po přibližně 25 hodinách výpočtu byly získány řešení různé kvality pro n-tice od 1 do 20. Pro vyšší n-tice už se nedařilo najít takové řešení, které by splnilo limit rozpočtu (20 % nákladů na redukci všech rizik). Ve skutečnosti nejdelší n-tice, která toto omezení splňovala měla 15 uzlů, protože v delších n-ticích docházelo k duplicitám uzlů. Všechna řešení jsou v Příloze P IV v Tabulka 1 a Tabulka 2.

Pro hodnocení vypočtených řešení je možné použít například cost benefit analysis (CBA). Na Obrázku 5.7 je zachycený princip CBA, zkombinovaný s limitem na rozpočet a posouzením pravděpodobnosti spuštění domino efektu na síti. Na Obrázku 5.7A je zobrazeno rozdělení na efektivní a neefektivní řešení podle změny rizika a nákladů na tuto změnu, oboje vyjádřené v peněžních jednotkách (Špačková a Straub, 2015). Na Obrázku 5.7B je rozdělení řešení na ty, které firma dovede zaplatit. Pro GA je nutné takové

omezení nastavit, protože bez něho by během několika málo generací skončila v triviálním řešení odstranit všechna rizika. Výstupem z GA v Příloze P IV Tabulka 1 a 2 jsou pouze ta řešení ze zelené, tedy vyhovující části. Na Obrázku 5.7C je průnik těchto množin, tj. množina řešení, která jsou vhodná z pohledu ceny. K tomuto čistě ekonomickému pohledu je možné přidat ještě osu s pravděpodobností, že na síti nastane domino efekt. Tím je možné zavést třídění v duchu ALARP na neakceptovatelná, tolerovatelná a akceptovatelná rizika. V této části analýzy tím, že dopředu jsou nastaveny hranice vzniku události je možné vnést nový úhel pohledu, který není pouze ekonomický, ale může zohlednit i společenské priority, požadavky. Výsledkem je potom 3D prostor, ze kterého je možné vybrat vhodné řešení. Pravděpodobnost spuštění domino efektu na síti P_{inic_celek} je sice možné čistě analyticky vypočítat podle vzorce pro sčítání pravděpodobností nezávislých jevů. Vzhledem k tomu, že rizik je 50 a každé má nenulovou P_{inic} , tak by se musely počítat jednotlivé 2-prvkové, 3-prvkové atd. průniky, takže je mnohem jednodušší zjistit P_{inic_celek} numerickou simulací.



Obrázek 5.7 – Způsob hodnocení variant řešení. Kombinace CBA s dalšími omezeními. A-Rozdělení řešení na efektivní a neefektivní pomocí metody CBA. B- Rozdělení řešení na ty, které jsou pod a nad hranicí stanovených maximálních nákladů, které firma může investovat do mitigačních opatření. C-Zkombinování množin řešení z A a B. D- Doplnění vertikální osy pro zachycení třídění na neakceptovatelná, tolerovatelná a akceptovatelná řešení na základě pravděpodobnosti. Na ose x jsou náklady na snížení rizika. Na ose y jsou náklady rizika. Na ose z je pravděpodobnost vyvolání domino efektu, kterému odpovídá střední hodnota ztráty sítě jako celku uvedená na ose y.

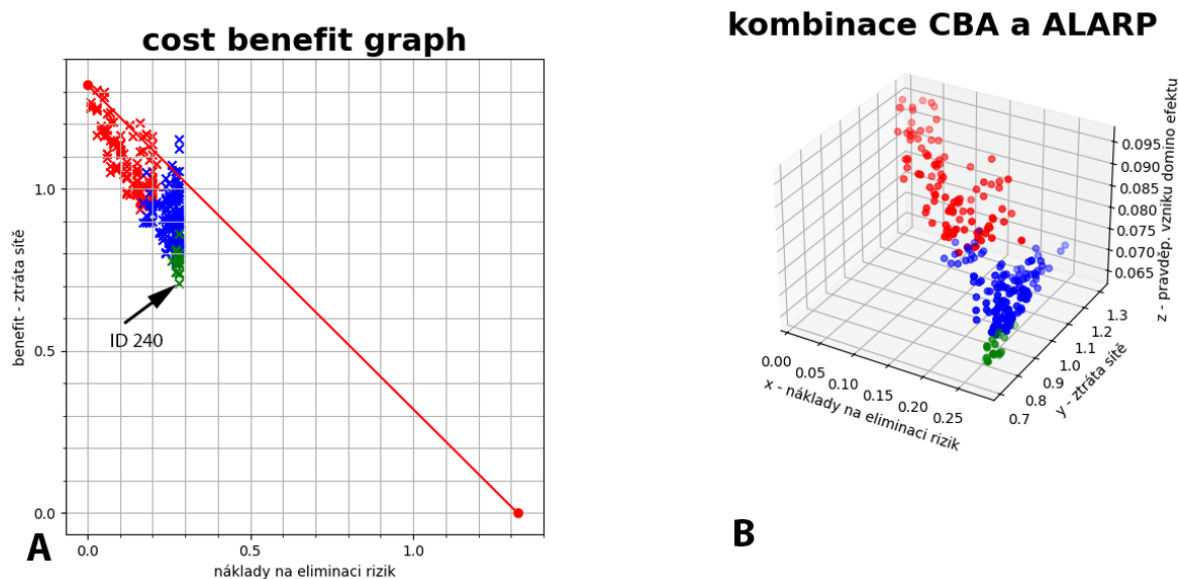
(zdroj: A- upraveno dle Špačková a Straub, 2015; B,C,D - vlastní)

Jak bylo vysvětleno na str. 93, tak při simulaci MCMC byla záměrně z důvodu většího zapojení simulačního stroje transformována P_{inic} u všech uzlů. To mělo 2 dopady. Zaprvé na absolutní hodnotu ztráty sítě a zadruhé na pravděpodobnost výskytu domino efektu na síti. Získané výsledky je tedy potřeba zpětně převést na hodnoty, které odpovídají originálním hodnotám P_{inic} .

Nejprve ztráta sítě. V Příloze P IV Tabulka 1 jsou 3 sloupce týkající se ztráty sítě. Ztráta z GA* je hodnota, která byla na výstupu z MCMC, tedy posunutý medián do vyšších hodnot. Protože všechny P_{inic} byly vyděleny hodnotou $P_{inic_max_origin}$, tak pro převod mediánů obou výběrových souborů platí i opačná transformace. Takto získaná hodnota je uvedena ve sloupci ztráta přepočtená **. Tato hodnota odvozená na základě statistické teorie byla ještě zkontrolována provedením samostatné MCMC simulace pro každou takovouto upravenou síť s původními nízkými P_{inic} uzlů. Počet cyklů byl 2 500 000. Tento výsledek je ve sloupci ztráta realita ***. Je vidět, že ztráta přepočtená i ztráta realita si velmi dobře odpovídají.

Další část se týká celkové pravděpodobnosti, že na síti dojde k domino efektu. Události iniciace více uzlů jsou na sobě nezávislé, ale nejsou disjunktní. Podle toho je potřeba s nimi pracovat jako se sjednocením nondisjunktních množin. Při optimalizaci pomocí GA bylo vědomě rozhodnuto řešit výběr spuštění iniciační události jako volbu jedné z N možností a tu otestovat na splnění podmínky P_{inic} . Tím došlo k záměrnému vyloučení situací (kvůli výkonu), kdy by se současně spouštělo více iniciačních událostí. Kdyby to tak nebylo pojato, tak přínos pro srovnání sítí by byl minimální, ale prodloužení času o 2 řády by znamenalo dostat se řádově do tisíců hodin výpočetního času, což nebylo reálné. Následné spočítání přesné pravděpodobnosti vzniku incidentu na síti pouze pro ty řešení vzešlá z GA však není problém, protože to znamená počítat pouze pro zlomek sítí, a navíc ani není ve výpočtu simulace MCMC na síti, protože jde pouze o první krok, stanovit, které iniciační události se spustí. Toto je tedy implementováno tak, že se bere v úvahu i vícenásobné současné spuštění více iniciačních událostí. Získaná pravděpodobnost tedy odpovídá tomu, co by bylo pozorováno na skutečném systému.

Získaná řešení jsou prezentována na Obrázku 5.8 a v plné velikosti v Příloze P IV Obrázek 5 a 6. Hladina podle principu ALARP pro tolerovatelné riziko je nastavena na 0.08 a pro akceptovatelné riziko na 0.07. Řešení jsou barevně roztříděna podle těchto hladin na netolerovatelná (červená), tolerovatelná (modrá) a akceptovatelná (zelená) řešení. Nastavení takovýchto hladin je pouze pro demonstraci principu a v praxi by se uplatnily zcela jiné rozsahy.



Obrázek 5.8 – Získaná řešení kvantitativní analýzy sítě. A-CBA analýza pro množinu nejlepších řešení. Odpovídá Obrázku 5.7C. Ostrá hrana v bodech řešení na pravé straně je způsobena tím, že mezi nejlepší řešení jsou zařazena pouze ta, která splňují podmínku maximálních nákladů na mitigaci. Ve 2D se jedná o průmět Obrázku 5.8B do základní roviny. Je označeno nejlepší řešení ID 240, které splňuje všechny podmínky. B-3D zobrazení řešení s doplněním osy z pro pravděpodobnost domino efektu. Na obou obrázcích osa x jsou náklady mitigace, osa y střední ztráta sítě při domino efektu po provedení zpětné transformace iniciačních pravděpodobností a osa z pravděpodobnost domino efektu po provedení zpětné transformace iniciačních pravděpodobností. Červeně jsou řešení, která jsou neakceptovatelná, modře tolerovatelná a zeleně široce akceptovatelná. Obrázek je v plné velikosti v Příloze P IV Obrázek 5 a 6.

(zdroj: vlastní)

Na originální síti bez jakýchkoli úprav topologie s transformovanými iniciačními pravděpodobnostmi uzlů P_{inic} byla celková ztráta 450,269. Po zpětné transformaci byla celková ztráta 1,346. Náklady na eliminaci všech rizik sítě byly 1,44. Z této částky byla stanovena hranice 20 % pro výši nákladů, které firma dokáže investovat do mitigačních opatření, což odpovídá 0,288.

275 nalezených řešení splňovalo podmínku, že byla lepší než dosud nalezená řešení při běhu GA. Z nich splňovalo podmínky pro náklady na eliminaci rizik menší než 0,288 a P_{inic_celek} celé sítě menší než 0.07 pouze 13 možných řešení zobrazených v Příloze P IV Tabulka 3. Je vidět, že řešení se ve většině uzlů shodují a to tvoří "jádro řešení" a potom obsahují několik uzlů, ve kterých se rozcházejí. Protože řešení byla získána ve zcela samostatných cyklech pro různě dlouhé n-tice, které vycházejí ze zcela samostatných prvotních populací řešení, tak je to známkou toho, že se skutečně jedná o odhalení nejdůležitějších uzlů domino efektu řešené sítě. Absolutně nejlepším je řešení č. 240, které

má celkovou skutečnou ztrátu 0,710 a skládá se ze 13 odstraňovaných uzlů {'10', '14', '15', '17', '19', '25', '26', '27', '29', '41', '43', '47', '49'}. Odstraněním 26 % uzlů tak došlo k poklesu ztráty sítě o 47% z původních 1,346 na 0,710. Skutečná pravděpodobnost vzniku domino efektu na takto upravené síti P_{inic_celek} je 0,068. Náklady na odstranění těchto 13 uzlů tvoří 0,28, splňují tedy ekonomický limit 0,288. Bylo provedeno úspěšné kvantitativní řešení domino efektu na zadané síti a nalezeno řešení, které vyhovuje stanoveným maximálním nákladům na eliminaci rizik, ekonomické efektivitě stanovené cost benefit analysis a principu ALARP.

Z výše uvedeného je patrné, že na výzkumnou otázku číslo tři, jak optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů lze odpovědět, že je doporučeno využití kombinace genetických algoritmů pro nalezení optimální n-tice a metody MCMC pro ohodnocení střední hodnoty ztráty sítě. Pro praxi je doporučeno použít nejdříve vyhledání optimálních n-tic a až z nich vytrdit ty, které splňují ekonomické podmínky. Současně se doporučuje uplatnit i výše uvedenou transformaci iniciačních pravděpodobností pro zvýšení rychlosti výpočtu.

6 DISKUSE

Přístupy k problematice analýzy domino efektu zahrnují širokou škálu od metod založených na Bayesovské statistice, přes Petriho sítě až k metodám využívajícím teorii grafů a komplexní sítě (Zhang et al., 2024). Vyhodnocení domino efektu je možno nahlížet ze dvou vzájemně provázaných hledisek. První zohledňuje mikro pohled na systém a zkoumá význam každého jednotlivého rizika a jeho vazeb k okolí, aby vyhodnotil jeho přínos k riziku jako celku. Umožňuje tedy srovnávat význam jednoho rizika vzhledem k riziku jinému, se zahrnutím domino efektu, který má potenciál vygenerovat. Druhý pohled je makro pohled na systém jako celek, který systému přiřazuje celkovou hodnotu rizika. Tento pohled umožňuje vzájemné srovnání různě modifikovaných systémů, zejména různou variací mitigačních opatření. Z literární rešerše vyplynulo, že dostupné práce pracující s topografickým přístupem se zaměřují na mikro pohled s cílem nalézat nejvyšší zdroje rizik jako Zhang et al. (2024) nebo Khakzad a Reniers (2015). Absence makropohledu vedla k formulaci první výzkumné otázky, **jakým způsobem lze popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu**. Na tuto výzkumnou otázku byla poskytnuta odpověď **formulací nového parametru MENL (Maximum Expected Network Loss) a metodiky jeho výpočtu, včetně omezení oblasti použitelnosti**. Parametr MENL způsobem své definice v sobě obsahuje požadovaný makro pohled. Vhodnost parametru MENL pro charakterizaci systému jako celku byla ověřena komparací s výsledky metody Monte Carlo simulací na uměle vygenerovaných sítích. Současně byly podrobně analyzovány meze použitelnosti navržené metody související s jevem fázového přechodu, nazývaným perkolace, který nastává na komplexních systémech. Úspěšné vyřešení výzkumné otázky umožňuje v budoucnu jednoznačně kvantifikovat přínosy navrhovaných mitigačních opatření. To mimo jiné umožňuje využití takových optimalizačních nástrojů, které vyžadují pro práci srovnání kvality jednotlivých řešení. Příkladem jsou různé evoluční techniky včetně genetických algoritmů. Práce Zhanga et al. (2024) a Khakzada a Renierse (2015) jsou současně průkopnickými i nejpokročilejšími pracemi v oblasti využití grafů pro modelování rizika komplexních systémů. Tím, že v návaznosti na ně bylo umožněno charakterizovat nejenom uzly v rámci mikropohledu, ale systém jako celek v makropohledu, bylo dosaženo posunu v řešení problematiky komplexních systémů.

V rámci mikropohledu, který popisuje jednotlivá rizika, se s rostoucí velikostí systému prudce zvyšuje komplexita problému a narůstají požadavky na dobu zpracování a výpočetní výkon. Z toho důvodu je požadavek na hledání aproximativních řešení, která na rozdíl od

metod MENL nebo Monte Carlo vyžadují zlomek výpočetního času, ale s dostatečnou přesností je dokáží nahradit. Z literární rešerše vyplynulo, že jednotliví autoři volí v oblasti popisu komplexních sítí různé metriky bez hlubšího odůvodnění, proč padla volba právě na tuto a ne jinou metriku. Příkladem je nejenom Zhang et al. (2024), Khakzad a Reniers (2015), ale i Zhixin et al. (2021), Han et al. (2022), Tao et al. (2018) a další. Nejčastějším přístupem je, že autor použije metrik několik a alespoň částečně se tak vyhne nutnosti volby, protože tím ponechává na čtenáři nutnost interpretovat, nakolik v každé z nich vidí popisované jevy. Tento stav vedl k formulaci druhé výzkumné otázky, **které metriky centrality uzlů poskytují nejlepší výsledky pro hodnocení významnosti hrozeb v komplexních systémech**. Jiná formulace téhož by mohla znít, která z centralit nejlépe popisuje domino efekt, resp. pozici jednotlivého uzlu jako zdroje pro šíření domino efektu. Odpověď na takto formulovanou otázku byla hledána srovnáním kvality předpovědi jednotlivých metrik centrality s výsledky poskytnutými metodou MENL, která toto vyjádření poskytuje přesně, stejně jako Monte Carlo simulace. Opět bylo pracováno pomocí metod simulace, komparace a statistického vyhodnocení. Na výzkumnou otázku je možné odpovědět, že **jako nejlepší aproximace se jeví betweenness centralita**. Toto zjištění je v souladu s faktem, že většina autorů uvádí mezi dvěma až třemi centralitami, které používají i **betweenness centralitu** např. Zhang et al. (2024), Khakzad a Reniers (2015). Naopak model založený na in degree a out degree centralitě jako má Pacinda (2007) využívá centrality, které v opakovaných simulacích dosahují nízké vypovídací hodnoty. Vyhodnocení opakovaných simulací tak poskytlo pevný základ pro volbu vhodné centrality jako prediktivní charakteristiky významu konkrétního uzlu jako zdroje rizika v síti při započtení možného domino efektu.

Rizikové inženýrství jako aplikovaná vědní disciplína je jen natolik úspěšné, nakolik jsou jeho metody přínosné pro praxi. Jedním z požadavků praxe je navrhovat taková řešení, která dokáží pracovat v rámci finančních mantinelů zpracovatele, resp. zadavatele. V rámci omezeného rozpočtu je nutné dokázat rizika vhodným způsobem prioritizovat, přičemž kritérií může být více. Vždy jsou však přítomny minimálně velikost rizika při započítání všech jeho vazeb do okolí a náklady na eliminaci rizika. Komplexní problémy se vyznačují tím, že obsahují vysoký počet vazeb, a i ve značné vzdálenosti od iniciační události může docházet ke zcela zásadním událostem/škodám. Další jejich vlastností je, že mohou fungovat vysoce paralelně a v průběhu svého projevu se zesilovat. Všechny tyto vlastnosti z nich činí v praxi těžko řešitelné problémy, ve kterých je snadné něco přehlédnout. V rovině analýzy jde o těžké optimalizační úlohy. Pro praktické použití managery tak byla formulována třetí

výzkumná otázka, **jakým způsobem lze optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů.** Z literatury jediné známé použití evolučních algoritmů na topologickou analýzu popisující rizika v petrochemickém průmyslu Zhang et al. (2024) posloužilo jako základ pro další experimentální studium. Byly zkoumány metody kódování jedinců v genetických algoritmech, různé způsoby formulace účelové funkce, využití metody Monte Carlo Markov Chain (MCMC) pro ohodnocení jedinců populace a další hledání způsobů, jak urychlit výpočet. **Výsledkem je vytvoření funkčního systému založeného na MCMC a GA, který umožňuje jak kvalitativní, tak kvantitativní analýzu síťového modelu popisujícího vazby mezi riziky.** Funkčnost přístupu byla ověřena simulací na uměle připravené síti. V praxi se tak dostává do rukou rizikovým inženýrům silný nástroj, který umožňuje provádět analýzu doménově neutrálně, není tedy omezený na využití pouze v chemickém průmyslu, ale funguje univerzálně od strojírenství přes vývoj software až po urbanistiku. Nebylo možné přímo provést srovnání s algoritmem použitým Zhangem et al. (2024), protože není k dispozici jeho zdrojový kód. Není také možné se domnívat, že pouze genetické algoritmy jsou jediným vhodným řešením. Existuje široká paleta optimalizačních algoritmů založených na heuristice například Greedy algoritmus, simulované žíhání, Hill Climbing. Cílem bylo ukázat, že takové řešení funguje a může být použito pro optimalizaci libovolné sítě, protože s výjimkou jediné výše citované práce Zhanga et al. (2024) není nikde jinde pro optimalizace sítě rizik použito a i v ní ještě zaniká v implementačních detailech modelu zaměřeného velmi specificky na přenos tepla.

ZÁVĚR

Rizikové inženýrství v modelování rizik podobně jako jiné vědní disciplíny v posledních dekáдах přechází od zaměření na jednotlivé jevy k orientaci na jejich propojení, vazby, které mezi sebou mají a vzájemné způsoby, jak se ovlivňují. Zatímco dříve byla hranice možností poznání na úrovni modelování pravděpodobnosti, s jakou dojde k určité izolované havárii, tak v dnešní době se posunuje k určování důsledků iniciační havárie na další prvky okolí a kaskádovitě dál. Problematika je posuzována komplexně. Tento vývoj je důsledkem kvalitativních posunů v matematice a informatice, mezi které patří i modely komplexních sítí. V oblasti rizikového inženýrství tak nabývá na významu modelování domino efektu. Výzkumné práce z této oblasti se zatím orientují zejména na aplikace v oblasti chemického průmyslu, protože chemické havárie patří mezi nejvýznamnější, jak svým dopadem na společnost, tak i z finančního pohledu. V budoucnu se však postupně bude tento přístup rozšiřovat do ostatních oblastí a již nyní jsou vidět první snahy například v urbanistice a dopravě.

V souladu s těmito tendencemi k rozvoji aplikace komplexních sítí pro modelování rizik byly formulovány tři výzkumné otázky, které si kladly za cíl posunout hranice poznání a umožnit tak použití komplexních sítí doménově neutrálně k popisu a analýze domino efektu a optimalizaci navržených mitigačních opatření:

Jakým způsobem lze popsat celkové riziko v komplexním systému za pomoci síťového modelu?

Které metriky centrality uzlů poskytují nejlepší výsledky pro hodnocení významnosti hrozeb v komplexních systémech?

Jakým způsobem jde optimalizovat prioritizaci hrozeb v kvalitativním i kvantitativním posuzování komplexních systémů?

Na každou z otázek se podařilo najít úspěšně odpověď, jak je prezentováno v aplikační části a diskusi výsledků, což umožňuje konstatovat, že vytčeného cíle diplomové práce, stanovit doporučení pro využití metod síťové analýzy při modelování rizik komplexních systémů, bylo dosaženo.

Přínosem práce je, že umožňuje další, efektivnější využití komplexních sítí pro modelování domino efektu **formulací následujících doporučení:**

- **hodnotit riziko šíření domino efektu na systému jako celku stanovením nově zavedené metriky MENL**, čímž se otevírá cesta ke srovnávání systémů s různě aplikovanými mitigačními opatřeními
- **současně používat MENL v rámci oblasti své platnosti i jako nástroj pro charakterizaci příspěvku jednotlivých rizik**, tím je umožněno rizika seřadit a vytvořit množinu prioritních rizik
- **pro aproximaci rizika jednotlivých uzlů využívat betweenness centralitu**, která se ukázala nejvhodnější metrikou centrality a tím snížit výpočetní nároky na prováděné analýzy
- **pro nalezení optimální prioritizace rizik, jak v kvalitativní, tak kvantitativní analýze, využívat kombinaci metod MCMC a genetických algoritmů způsobem**, který je popsán v aplikační části

Takto stanovená doporučení a postupy umožňují využití komplexních sítí bez omezení oblasti použití od urbanistiky, přes strojírenství až po softwarové inženýrství.

Komplexní sítě jsou vhodným prostředkem pro modelování rizik spojených se vznikem domino efektu. Umožňují nalezení řešení ve vysoce komplexních situacích, kde je řešení jinými metodami buď nedosažitelné nebo časově a finančně nákladnější. Například ve srovnání s výstavbou simulačních modelů založených na agentech je v případě, že lze vztahy mezi komponentami systému zachytit pomocí kauzálních vztahů, určitě rychlejší vybudovat model komplexní sítě než agentový model. Komplexní a náhodné sítě však určitě nejsou jediným řešením na všechno, ale jako každý nástroj mají své klady i slabiny, a proto je vhodné je kombinovat s dalšími postupy.

V této oblasti existuje řada zatím nevyřešených otázek, které vytvářejí prostor pro další výzkum. Například časový aspekt je v modelech většinou opomíjen. Je patrné, že mezi jevy typu koroze potrubí a exploze je mnoho řádů časového rozdílu. Podobně šíření mezi objekty v reálném systému může zahrnovat šíření požáru v minutách nebo šíření infekce s inkubační dobou v týdnech. Synchronní působení může rovněž hrát roli v systémech jako je rozvod elektrické energie. Řada objektů reálného světa prochází životním cyklem, v jehož různých fázích jsou různě citlivé na různá nebezpečí. Tyto a další otázky poskytují prostor pro zkoumání, jak je možné je zapojit do komplexních sítí například formou různé kategorie uzlů.

Další oblastí aplikovaného výzkumu je vytvoření frameworku pro propojení s GIS a přenesení myšlenek prezentovaných na uměle generovaných sítích do konkrétního prostoru vesnic, měst nebo průmyslových areálů. V nich by potom byla hodnocena zranitelnost

a riziko nikoli metodami založenými na použití škál, jako je tomu nyní, ale skutečně kvantitativně na základě dat z různých zdrojů, jako jsou informace pojišťoven, Hasičského záchranného sboru České republiky (HZS ČR), správců technických sítí atd. Takovýto model by měl nesrovnatelně vyšší vypovídací hodnotu pro prevenci. V ideálním případě by nebyl využitý pouze k popisu stávajícího stavu, ale už ve fázi projektu by umožňoval urbanistům a dalším profesím modelovat umístění mitigačních opatření a hledat optimální řešení. Subjektivní názor autora je, že je pouze otázkou času, kdy se tato vize promění ve skutečnost.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

ABDOLHAMIDZADEH, Bahman a ABBASI, Tasneem. A new method for assessing domino effect in chemical process industry. Online. *Journal of Hazardous Materials*. 2010, roč. 182, č. 1-3, s. 10. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2010.06.049>. [cit. 2025-04-02].

Barabasi, 2024. Online. Dostupné z: <https://barabasi.com/>. [cit. 2024-08-06].

BARABÁSI, Albert-László, 2005. *V pavučině sítí*. Paseka. ISBN 80-7185-751-3.

BARRAT, Alain; BARTHELEMY, Marc a VESPIGNANI, Alessandro, 2008. *DYNAMICAL PROCESSES ON COMPLEX NETWORKS*. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. ISBN 978-0-521-87950-7.

BIENVENU, François, 2019. Positive association of the oriented percolation cluster in randomly oriented graphs. Online. *Combinatorics, Probability and Computing* (. Roč. 28, č. 6, s. 5. Dostupné z: <https://doi.org/10.1017/S0963548319000191>. [cit. 2024-08-08].

BORGATTI, Stephen P; EVERETT, Martin G a JOHNSON, Jeffrey C, 2018. *Analyzing Social Networks*. 2nd edition. London: SAGE Publications. ISBN 978-1-5264-0410-7.

BULDYREV, Sergey; PARSHANI, Roni a GERALD, Paul, 2010. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. Online. *Nature*. Č. 464, s. 5. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/nature08932>. [cit. 2024-08-06].

CALDARELLI, Guido (ed.), 2007. *Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks FROM INFORMATION TECHNOLOGY TO NATURAL SCIENCE*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. ISBN 978-981-270-664-5.

CHEN, Keru, 2023. *Markov Chain Monte Carlo and Metropolis Hasting*. Online. Medium. Dostupné z: <https://medium.com/@keruchen/markov-chain-monte-carlo-and-metropolis-hasting-1dbb9c33f40>. [cit. 2024-08-08].

COHEN, Reuven a EREZ, Keren, 2000. Resilience of the Internet to random breakdowns. Online. *Physical Review Letters*. Roč. 85, č. 21, s. 3. Dostupné z: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4626>. [cit. 2024-08-06].

COLUMBIA UNIVERSITY, 2022. *Markov Chain Monte Carlo*. Online. COLUMBIA UNIVERSITY. Columbia University. Dostupné

z: <https://www.publichealth.columbia.edu/research/population-health-methods/markov-chain-monte-carlo>. [cit. 2024-08-08].

ČSN EN 62502 *Techniky analýzy spolehlivosti - Analýza stromu událostí (ETA)* 2 Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011.

DAVIDSON-PILON, Cameron, 2015. *Bayesian Methods for Hackers: Probabilistic Programming and Bayesian Inference*. Online. Addison-Wesley Professional. ISBN 978-0133902839. Dostupné

z: <https://github.com/CamDavidsonPilon/Probabilistic-Programming-and-Bayesian-Methods-for-Hackers>. [cit. 2024-08-08].

DOROGOVTSSEV, S. N., 2010. *Lectures on Complex Networks*. OXFORD: CLARENDON PRESS. ISBN 978-0199548927.

ERDŐS, Paul a RÉNYI, Albert. On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae*. 1959, roč. 6, č. 3-4, s. 6.

FREEMAN, Linton, 1977. A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness. Online. *Sociometry*. Roč. 40, č. 1. Dostupné z: <https://doi.org/10.2307/3033543>. [cit. 2024-08-07].

FRIEDMAN, Nit a KOLLER, Daphe. Being Bayesian About Network Structure. A Bayesian Approach to Structure Discovery in Bayesian Networks. Online. *Machine Learning*. 2003, roč. 50, č. 1-2, s. 30. Dostupné z: <https://www.proquest.com/docview/757030037?pq-origsite=summon&sourcetype=Scholarly%20Journals>. [cit. 2025-04-14].

GEPHI, 2022. *Gephi*. Online. Dostupné z: <https://gephi.org/>. [cit. 2024-08-07].

Graph-tool, 2024. Online. Dostupné z: <https://graph-tool.skewed.de/>. [cit. 2024-08-08].

HAMMOUD, Zaynab a KRAMER, Frank, 2020. Multilayer networks: aspects, implementations, and application in biomedicine. Online. *Big Data Analytics*. Roč. 5, č. 2, s. 18. Dostupné z: <https://doi.org/10.1186/s41044-020-00046-0>. [cit. 2024-08-06].

HAN, Zhao; ZHENG, Li a RUI, Zhou, 2022. Risk assessment method combining complex networks with MCDA for multi-facility risk chain and coupling in UUS.

Online. *Tunnelling and Underground Space Technology*. Č. 119, s. 19. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2024.110300>. [cit. 2024-08-06].

HE, Zhichao a WENG, Wenguo. A dynamic and simulation-based method for quantitative risk assessment of the domino accident in chemical industry. Online. *Process Safety and Environmental Protection*. 2020, č. 144, s. 13. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2020.07.014>. [cit. 2025-04-02].

HEJLOVÁ, Markéta, 2015. *Google PageRank: Relevance webových stránek a problém vlastních čísel*. Bakalářská práce. Liberec: Technická univerzita v Liberci.
HORÁK, Jiří, 2024. *Prostorová analýza dat LINIE, Teorie grafů*. Online. TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ. Dostupné z: <https://homel.vsb.cz/~hor10/Vyuka/PAD/PAD62022.pdf>. [cit. 2024-08-07].

HOOS, Holger a STÜTZLE, Thomas. Stochastic Local Search Foundations and Applications. Online. 2005, s. 46. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9781558608726500184>. [cit. 2025-04-17].

HUAFU, Jiang a YOUHONG, Dong, 2018. Safety evaluation for evacuation system under serious emergency from interdependent network perspective. Online. *International Journal of Wireless and Mobile Computing*. Roč. 14, č. 3. Dostupné z: <https://doi.org/10.1504/IJWMC.2018.092367>. [cit. 2024-08-06].

UNIVERSITY OF MINNESOTA. *Hub definition*. Online. UNIVERSITY OF MINNESOTA. Math Insight. 2024. Dostupné z: https://mathinsight.org/definition/network_hub. [cit. 2024-08-07].

CHEN, Nan. *Stochastic Methods for Modeling and Predicting Complex Dynamical Systems Synthesis Lectures on Mathematics & Statistics Uncertainty Quantification, State Estimation, and Reduced-Order Models*. 2023: Springer. ISBN 978-3-031-22248-1.

GRIDIN, Ivan. *Learning Genetic Algorithms with Python*. New Delhi: BPB PUBLICATIONS, 2021. ISBN 978-81-94837-756.

ISHA, Das; SUGATA, Hazra a SOURAV, Das, 2018. Trophic-level modelling of the coastal waters of the northern Bay of Bengal, West Bengal, India. Online. *Fisheries Science*. Roč. 84, č. 6, s. 15. Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12562-018-1246-x>. [cit. 2024-08-07].

KARRAS, Christos; KARRAS, Aristeidis a AVLONITIS, Markos, 2022. An Overview of MCMC Methods: From Theory to Applications. Online. *IFIP Advances in Information and Communication Technology*. Č. 652, s. 15. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/978-3-031-08341-9_26. [cit. 2024-08-08].

KHAKZAD, Nima a RENIERS, Genserik. Using graph theory to analyze the vulnerability of process plants in the context of cascading effects. Online. *Reliability Engineering & System Safety*. 2015, č. 143, s. 10. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2015.04.015>. [cit. 2025-02-21].

KHAKZAD, Nima; LANDUCCI, Gabriele; COZZANI, Valerio a RENIERS, Genserik. Cost-effective fire protection of chemical plants against domino effects. Online. *Reliability Engineering & System Safety*. 2018, Roč. 169, s. 9. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2017.09.007>. [cit. 2025-04-02].

KHAN, Faisal; RATHNAYAKA, Samith a AHMED, Salim. Methods and models in process safety and risk management: past, present and future. Online. *Process Safety and Environmental Protection*. 2015, roč. 98, s. 31. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2015.07.005>. [cit. 2025-04-02].

KNIHOVNA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY UK. *Počet částic ve vesmíru*. Online. KNIHOVNA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY UK. Knihovna Matematicko-fyzikální fakulty UK. 2012. Dostupné z: https://www.ptejteseknihovny.cz/dotazy/castice?utm_source=chatgpt.com. [cit. 2025-04-17].

KOVÁŘ, Petr, 2021. Úvod do Teorie grafů. Online. In: *Úvod do Teorie grafů*. Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni, s. 167. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~kov16/files/uvod_do_teorie_grafu.pdf. [cit. 2024-08-06].

LATORA, Vito; NICOSIA, Vincenzo a RUSSO, Giovanni, 2017. *Complex Networks Principles, Methods and Applications*. United Kingdom: University Printing House, Cambridge CB2 8BS. ISBN 978-1-107-10318-4.

LI, Ming; LIU, Run-Ran a LÜ, Linyuan, 2021. Percolation on complex networks: Theory and application. Online. *Physics Reports*. Č. 907, s. 68. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157320304269>. [cit. 2024-08-07].

LINDEMAN, Raymond L., 1991. The Trophic-Dynamic Aspect of Ecology. Online. *Bulletin of Mathematical Biology*. Roč. 53, č. 1, s. 6. Dostupné z: <https://doi.org/10.2307/1930126>. [cit. 2024-08-07].

MALLIAROS, Fragkiskos; GIATSIDIS, Christos a PAPADOPOULOS, Apostolos, 2019. The Core Decomposition of Networks: Theory, Algorithms and Applications. Online. *The VLDB Journal*. S. 56. Dostupné z: https://centralesupelec.hal.science/hal-01986309/file/Core_Decomposition_VLDBJ.pdf. [cit. 2024-08-15].

MALLIAROS, Fragkiskos D.; GIATSIDIS, Christos a PAPADOPOULOS, Apostolos N., 2020. The Core Decomposition of Networks: Theory, Algorithms and Applications. Online. *VLDB Journal*. Roč. 29, č. 1, s. 32. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s00778-019-00587-4>. [cit. 2024-08-07].

MATA, Angélica Sousa da, 2020. Complex Networks: a Mini-review. Online. *Brazilian Journal of Physics*. Roč. 50, č. 5, s. 15. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s13538-020-00772-9>. [cit. 2024-08-07].

Matplotlib, 2024. Online. Dostupné z: <https://matplotlib.org/stable/>. [cit. 2024-08-07].

MAXFIELD, Max, 2020. *When Genetic Algorithms Meet Artificial Intelligence*. Online. Journal electronic engineering. Dostupné z: <https://www.eejournal.com/article/when-genetic-algorithms-meet-artificial-intelligence/>. [cit. 2024-08-08].

MILGRAM, Stanley. The Small World Problem. *Psychology Today*. 1967.

MOJTABA, Seyed; BAMAKANA, Hosseini a NURGALIEVA, Ildar, 2019. Opinion leader detection: A methodological review. Online. *Expert Systems With Applications*. Č. 115, s. 23. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957417418304950>. [cit. 2024-08-07].

MONES, Enys; VICSEK, Lilla a VICSEK, Tamás, 2012. Hierarchy Measure for Complex Networks. Online. *Plos One*. Roč. 7, č. 3, s. 10. Dostupné z: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0033799>. [cit. 2024-08-06].

MOTTER, Adilson a LAI, Ying-Cheng, 2002. Cascade-based attacks on complex networks. Online. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and*

Related Interdisciplinary Topics. Roč. 66, č. 6, s. 4. Dostupné z: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.065102>. [cit. 2024-08-06].

MOUTSINAS, Giannis a GUO, Weisi, 2020. Node-Level Resilience Loss in Dynamic Complex Networks. Online. *Scientific Reports*. Roč. 10, č. 1, s. 12. Dostupné z: <https://www.nature.com/articles/s41598-020-60501-9>. [cit. 2024-08-06].

NetworkX, 2024a. *Degree centrality*. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: <https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms centrality.degree centrality.html>. [cit. 2024-08-07].

NetworkX, *Katz centrality*, 2024b. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: <https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms centrality.katz centrality.html>. [cit. 2024-08-07].

NetworkX, *Local reaching centrality*, 2024c. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms centrality.local_reaching centrality.html#r1374f6eac9a7-1. [cit. 2024-08-07].

NetworkX, *Connected_watts_strogatz_graph*, 2024d. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.generators.random_graphs.connected_watts_strogatz_graph.html#networkx.generators.random_graphs.connected_watts_strogatz_graph. [cit. 2024-08-12].

NetworkX, *Erdos_renyi_graph*, 2024e. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.generators.random_graphs.erdos_renyi_graph.html. [cit. 2024-08-12].

NetworkX, *Barabasi_albert_graph*, 2024f. Online. NetworkX analysis on Python. Dostupné z: https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.generators.random_graphs.barabasi_albert_graph.html#networkx.generators.random_graphs.barabasi_albert_graph. [cit. 2024-08-12].

NetworkX, 2024g. Online. Dostupné z: <https://networkx.org/>. [cit. 2024-08-08].

NEWMAN, M. E. J., 2001. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. Online. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. Roč. 64, č. 1, s. 8. Dostupné z: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.016131>. [cit. 2024-08-07].

ODEH, Suhail; ROS, Eduardo a ROJAS, Ignacio, 2006. Skin Lesion Diagnosis Using Fluorescence Images. Online. *Lecture Notes in Computer Science*. S. 13. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/11867661_58. [cit. 2024-08-08].

ORAKZAI, Rahmat Ullah, 2023. *What Is the K-Core of a Graph?* Online. BAELDUNG. Dostupné z: <https://www.baeldung.com/cs/graph-k-core>. [cit. 2024-08-07].

PACINDA, Štefan, 2007. *Analýza rizik, jeden ze základních nástrojů krizového managementu při řešení nevojenských krizových situací*. Dizertační práce. Brno: Univerzita obrany.

PAGANI, Alessio; MOSQUERA, Guillem a ALTURKI, Aseel, 2019a. Resilience or robustness: identifying topological vulnerabilities in rail networks. Online. *Royal Society Open Science*. Roč. 6, č. 2, s. 16. Dostupné z: <https://doi.org/10.1098/rsos.181301>. [cit. 2024-08-06].

PAGANI, Alessio; MENG, Fanlin a FU, Guangtao, 2019b. Quantifying Networked Resilience via Multi-Scale Feedback Loops in Water Distribution Networks. Online. *Physics and Society*. S. 14. Dostupné z: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.03004>. [cit. 2024-08-06].

PAULY, Daniel a PALOMARES, Maria-Lourdes, 2005. Fishing down marine food web: It is far more pervasive than we thought. Online. *Bulletin of Marine Science*. Roč. 76, č. 2, s. 16. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/216900499_Fishing_Down_Marine_Food_Web_It_is_Far_More_Pervasive_Than_We_Thought. [cit. 2024-08-07].

PELÁNEK, Radek, 2011. *Modelování a simulace komplexních systémů : jak lépe porozumět světu*. Brno: Masarykova univerzita. ISBN 978-80-210-5318-2.

PyGAD, 2024. Online. Dostupné z: <https://pygad.readthedocs.io/en/latest/>. [cit. 2024-08-08].

RAUCH, Allison. *Butterfly effect*. Online. Britannica. 2025. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/butterfly-effect>. [cit. 2025-04-02].

RAUSAND, Marvin a HAUGEN, Stein, 2020. *Risk Assessment: Theory, Methods, and Applications*. John Wiley. ISBN 9781119377238.

REKA, Albert; HAWOONG, Jeong a BARABÁSI, Albert, 2000. Error and attack tolerance of complex networks. Online. *Nature*. Č. 406, s. 6. Dostupné z: <https://www.nature.com/articles/35019019>. [cit. 2024-08-06].

SANDOVAL, Vicente; SARMIENTO, Juan Pablo a MAZARIEGOS, Erick Alberto, 2020. Exploring Network Analysis for Urban Planning and Disaster Risk Reduction in Informal Settlements: Cases From Honduras, Jamaica, and Peru. Online. *International Journal of Disaster Response and Emergency Management*. Roč. 3, č. 1, s. 16. Dostupné z: <https://doi.org/10.4018/IJDREM.2020010103>. [cit. 2024-08-06].

SEVTSUK, Andres, 2010. *Path and Place: A Study of Urban Geometry and Retail Activity in Cambridge and Somerville*. PhD DISSERTATION. Cambridge: MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY Department of Urban Studies & Planning.

SHANNON, Paul; MARKIEL, Andrew a OZIER, Ozier, 2003. Cytoscape: a software environment for integrated models of biomolecular interaction networks. Online. *Genome Research*. Roč. 13, č. 11. Dostupné z: <https://doi.org/10.1101/gr.1239303>. [cit. 2024-08-07].

STRÁNSKÁ, Kateřina. *Genetické algoritmy pro řešení úlohy obchodního cestujícího*. Diplomová práce. Olomouc: UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA, 2012.

ŠPAČKOVÁ, Olga a STRAUB, Daniel, 2015. Cost-Benefit analysis for optimization of risk protection under budget constraints. Online. *Risk Analysis*. Roč. 35, č. 5, s. 8. Dostupné z: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/risa.12310?saml_referrer. [cit. 2024-08-17].

TAO, Sun; CHANGLIN, Jiang a ANNING, Ni, 2018. Vulnerability of ultra-large urban traffic system based on complex network and topological potential. Online. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. Roč. 11, č. 5, s. 9. Dostupné z: <http://www.jestr.org/downloads/Volume11Issue5/fulltext61152018.pdf>. [cit. 2024-08-06].

UNITED STATES NUCLEAR REGULATORY COMMISSION. *Chain reaction*. Online. Nrc.gov. 2021, 2021. Dostupné z: <https://www.nrc.gov/reading-rm/basic-ref/glossary/chain-reaction.html>. [cit. 2025-04-17].

VAN STEEN, Maarten, 2010. *Graph Theory and Complex Networks*. Maarten van Steen. ISBN 978-9081540612.

WANDORA. *Wandora - Random graph generator*. Online. WANDORA. Wandora. 2012. Dostupné z: http://wandora.org/wiki/Random_graph_generator. [cit. 2024-08-06].

WANG, Ying; ZHAO, Ou a ZHANG, Limao, 2024. Multiplex networks in resilience modeling of critical infrastructure systems: A systematic review. Online. *Reliability Engineering & System Safety*. Č. 250, s. 17. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com.ezproxy.muni.cz/science/article/pii/S0951832024003727?via%3Dihub#sec0017>. [cit. 2024-08-06].

YUAN, Shuaiqi; RENIERS, Genserik a YANG, Ming. Cost-effective maintenance of safety and security barriers in the chemical process industries via genetic algorithm. Online. *Process Safety and Environmental Protection*. 2023, č. 170, s. 15. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2022.12.008>. [cit. 2025-02-21].

Zákon č. 224/2015 Sb. Zákon o prevenci závažných havárií způsobených vybranými nebezpečnými chemickými látkami nebo chemickými směsmi a o změně zákona č. 634/2004 Sb., o správních poplatcích, ve znění pozdějších předpisů, (zákon o prevenci závažných havárií). In: *Sbírka zákonů*. 2015, 93/2015.

ZHANG, Muchen; LI, Zelin a HOU, Shuya. Optimizing safety barrier allocation to prevent domino effects in large-scale chemical clusters using graph theory and optimization algorithms. Online. *Process Safety and Environmental Protection*. 2024, č. 184, s. 13. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.psep.2024.02.057>. [cit. 2025-02-21].

ZHIXIN, Zhen; JUN, Li a LI, Zhongxue, 2021. Study on Accident Prevention of Tailings Storage Facilities Based on Complex Networks. Online. In: *5th IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference*. Chongqing, s. 5. ISSN 2689-6621. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/IAEAC50856.2021.9390939>. [cit. 2024-08-06].

ZINOVIEV, Dmitry. Complex Network Analysis in Python: Recognize - Construct - Visualize - Analyze - Interpret. Pragmatic Bookshelf, 2018. ISBN 978-1680502695.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1.1	Dvojí zobrazení topologicky identické sítě	19
Obrázek 1.2	Indukovaný podgraf aktivovaného rizika	19
Obrázek 1.3	Reálná komplexní síť zobrazující část Internetu	20
Obrázek 1.4	Náhodný graf.....	20
Obrázek 1.5	Srovnání průměrné délky cesty v grafu pro reálné sítě a náhodný graf.....	21
Obrázek 1.6	Délka cesty při small world experimentu.....	22
Obrázek 1.7	Příklad výpočtu shlukovacího koeficientu.....	23
Obrázek 1.8	Srovnání shlukovacího koeficientu pro reálné sítě a náhodný graf.....	23
Obrázek 1.9	Srovnání Poissonova a mocninného rozložení.....	24
Obrázek 1.10	Distribuci stupně uzlů.....	25
Obrázek 1.11	Distribuce stupňů uzlů na reálné bezškálové síti.....	25
Obrázek 1.12	Vysvětlení interagujících sítí.....	26
Obrázek 1.13	Vysvětlení pojmu vícevrstevných sítí.....	26
Obrázek 1.14	Představa, jak vzniká komplexní rizikologická vrstva ve vícevrstevném grafu.....	28
Obrázek 1.15	Ukázka grafů.....	28
Obrázek 1.16	Orientovaný graf.....	29
Obrázek 1.17	Triviální graf a kompletní grafy.....	29
Obrázek 1.18	Cykly C3, C4, C5.....	29
Obrázek 1.19	Cesty P3 a P4.....	30
Obrázek 1.20	Vznik podgrafu z grafu.....	30
Obrázek 1.21	Graf G, jeho indukovaný podgraf I a podgraf H, který není indukovaný....	30
Obrázek 1.22	Vysvětlení vzniku perkolace v závislosti na průměrném stupni uzlů.....	31
Obrázek 1.23	Ukázka vzniku gigantické komponenty ve 2D.....	32
Obrázek 1.24	Způsob tvorby bezškálového grafu.....	33
Obrázek 1.25	Vznik Watts-Strogatzova modelu grafu malého světa pro různé parametry p.....	34
Obrázek 1.26	Demonstrace degree centrality a její změny.....	37
Obrázek 1.27	Demonstrace rozdílu mezi in-degree a out-degree centrality.....	38
Obrázek 1.28	Demonstrace rozdílu mezi closeness a betweenness centrality.....	40
Obrázek 1.29	Demonstrace eigenvector centrality.....	41
Obrázek 1.30	Demonstrace in a out reachable centrality.....	43
Obrázek 1.31	Pozice druhu zobrazená v potravním řetězci na základě fractional trophic level.....	45
Obrázek 1.32	Ukázka mostu.....	46
Obrázek 1.33	Ukázka hubu.....	46
Obrázek 1.34	Způsob nalezení k-core pomocí pruning algoritmu.....	47
Obrázek 1.35	Vizualizace počátku běhu GA.....	55
Obrázek 1.36	Typický průběh fitness křivky při použití GA.....	55
Obrázek 1.37	Závislost mezi nejlepšími řešeními nalezenými genetickým algoritmem a rozpočtem.....	56
Obrázek 1.38	Přechod mezi stavy si při MCMC.....	57

Obrázek 1.39	Ukázka získání histogramu pro pravděpodobnostní rozdělení na základě MCMC vzorkování.....	58
Obrázek 3.1	Zobrazení acyklického orientovaného grafu a vznik cyklu.....	64
Obrázek 3.2	Základní síť pro demonstraci výpočtu rizika sítě jako celku.....	64
Obrázek 3.3	Všechny možné varianty scénářů pro demo příklad.....	65
Obrázek 3.4	Scénáře po odstranění uzlu 3 v demo příkladu.....	66
Obrázek 3.5	Scénáře po odstranění uzlu 6 v demo příkladu.....	66
Obrázek 3.6	Ilustrace mostu.....	68
Obrázek 3.7	Síť pro demonstraci perkolace.....	73
Obrázek 3.8	Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a pravděpodobností p vzniku hrany.....	76
Obrázek 3.9	Závislost velikosti gigantické komponenty na pravděpodobnosti hrany p	77
Obrázek 3.10	Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametrem m....	78
Obrázek 3.11	Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametry k, p.....	80
Obrázek 4.1	Grafická prezentace výsledků nalezení hubů a mostů.....	86
Obrázek 4.2	Grafická prezentace výsledků na k5-core.....	87
Obrázek 5.1	Závislost konvergence střední hodnoty ztráty sítě na počtu cyklů.....	92
Obrázek 5.2	Srovnání relativní směrodatné odchylky celkové ztráty sítě pro dvě varianty vzorkování MCMC.....	94
Obrázek 5.3	Nejlepší dosažená průměrná ztráta sítě v závislosti na velikosti odstraňované n-tice.....	97
Obrázek 5.4	Vývoj nejlepšího řešení v čase pro srovnání GA a náhodného řešení.....	101
Obrázek 5.5	Vývoj nejlepšího řešení v čase	102
Obrázek 5.6	Vývoj nejlepšího řešení v čase.....	103
Obrázek 5.7	Způsob hodnocení variant řešení.....	104
Obrázek 5.8	Získaná řešení kvantitativní analýzy sítě.....	106

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1.1	Schopnost jednotlivých modelů zachytit vlastnosti reálných komplexních sítí.....	35
Tabulka 3.1	Parametry syntetické sítě pro Erdős-Rényiho model	69
Tabulka 3.2	Parametry syntetické sítě pro Barabási-Albertův model	69
Tabulka 3.3	Parametry syntetické sítě pro Watts-Strogatzův model.....	69
Tabulka 3.4	Parametry simulace.....	70
Tabulka 3.5	Výsledky simulací	70
Tabulka 3.6	Parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence a parametrem p	76
Tabulka 3.7	Parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence a parametrem p	78
Tabulka 3.8	Parametry programu pro hledání vztahu mezi počtem tříd ekvivalence a parametry k a p	79
Tabulka 3.9	Doporučené hodnoty modelů pro používá metod MENL.....	80
Tabulka 4.1	Dosažené výsledky při testování 1000 sítí ER.....	84
Tabulka 4.2	Dosažené výsledky při testování 1000 sítí BA.....	84
Tabulka 4.3	Dosažené výsledky při testování 1000 sítí WS.....	84
Tabulka 5.1	Shrnutí rozdílů mezi kvalitativním a kvantitativním modelem s pomocí GA a MCMC.....	90
Tabulka 5.2	Srovnání rychlosti konvergence původního a upraveného vzorkování MCMC.....	94
Tabulka 5.3	Parametry nastaveného GA řešení.....	96
Tabulka 5.4	Parametry sítě.....	98
Tabulka 5.5	Srovnání výsledků GA a náhodného řešení.....	100

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

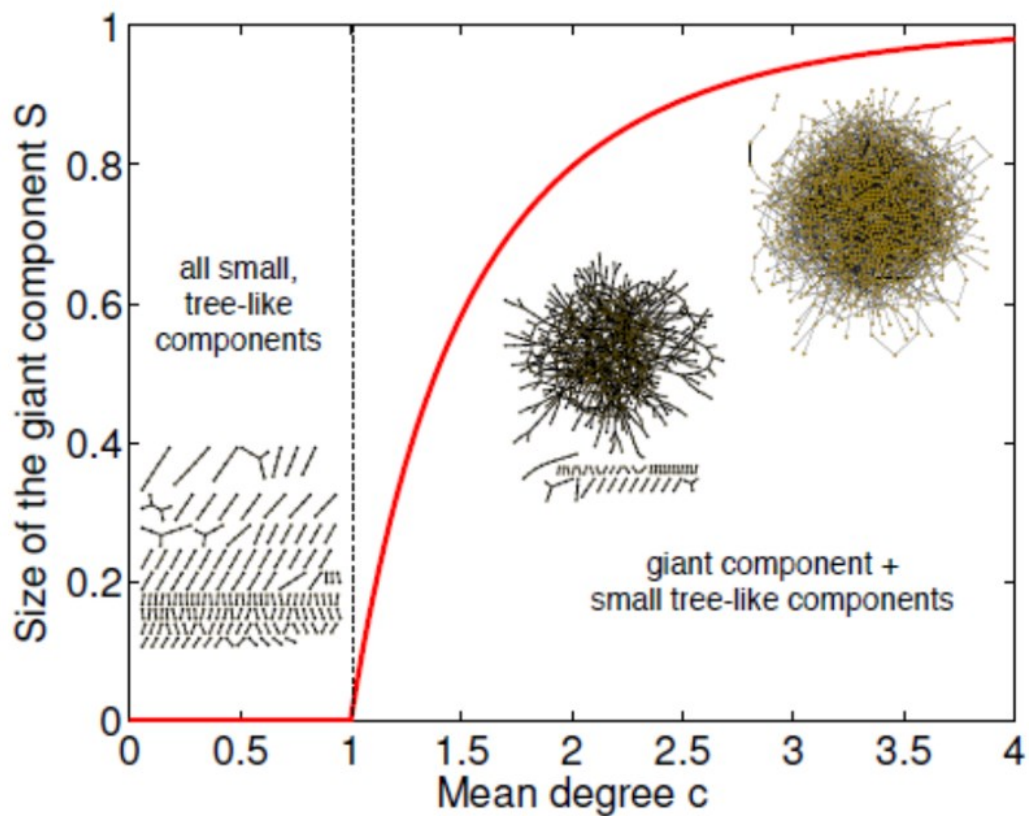
ALARP	as low as reasonably practicable
A_{ij}	prvky matice souvztažnosti
B	počet přidělených bodů
BA	Barabási-Albertův model
$\mathcal{B}_{p_k}$	množina všech stránek, které odkazují na stránku P_k
CBA	cost benefit analysis
c_i	náklady ztráty i
$C_B(i)$	betweenness centrality uzlu i
$C_C(i)$	closeness centrality uzlu i
$C_C^{\text{out } 0}(i)$	out-closeness centrality uzlu i před zavedením mitigačního opatření
$C_C^{\text{out}}(i)$	out-closeness centrality uzlu i po zavedení mitigačního opatření
$C_{DG}(i)$	stupeň uzlu neboli degree centrality uzlu i na neorientovaném grafu
$C_{DGN}(i)$	normovaná degree centralita uzlu i
$C_{DG}^{\text{ori}}(i)$	celková degree centralita uzlu i na orientovaném grafu
$C_{DG}^{\text{in}}(i)$	in-degree centralita uzlu i
$C_{DG}^{\text{out}}(i)$	out-degree centralita uzlu i
$C_{\text{eig}}(i)$	eigenvector centrality uzlu i
$C_{\text{eig}}(j)$	eigenvector centrality uzlu j
$C_{\text{katz}}(i)$	katz centrality uzlu i
$C_{\text{katz}}(j)$	katz centrality uzlu j
$C_n(N)$	počet kombinací n prvků z N bez opakování
C_n	cyklus na n vrcholech
$C_{\text{reach}}^k(i)$	k -step reach centrality uzlu i pro počet kroků k
$C_{\text{reach}}^{\text{in}}(i)$	in-reachable centrality uzlu i na orientovaném grafu
$C_{\text{reach}}^{\text{out}}(i)$	out-reachable centrality uzlu i na orientovaném grafu
$C_{\text{reach}}^{\text{sum}}(i)$	sum-reachable centrality uzlu i na orientovaném grafu
DAG	directed acyclic graph
DP	diplomová práce
$D(k, k)$	jádro na orientovaném grafu
$d(i, j)$	nejkratší cesta mezi uzly i, j
E	množina hran
ETA	analýza stromu událostí (event tree analysis)
ER	Erdős-Rényiho model
E_i	ztráta na zásobníku i
$G_{(-i)}$	síť s odstraněným uzlem i
G	graf, síť
GA	genetické algoritmy
H	podgraf grafu G
HZS ČR	Hasičský záchranný sbor České republiky
I	indukovaný podgraf grafu G
L_i	ztráta způsobená aktivací rizika uzlu i
L_j	ztráta způsobená aktivací rizika uzlu j (uzel j je následný uzel domino efektu)
MC	Monte Carlo simulace
MCMC	Monte Carlo Markov Chain
MENL	maximum expected network loss

$MENL_{start}$	hodnota metriky MENL pro celou originální síť bez úprav
$MENL_i$	hodnota metriky MENL pro síť s odstraněným uzlem i
$MENL_m$	hodnota MENL pro síť s odstraněným uzlem m
$\Delta MENL_i$	změna metriky MENL odstraněním uzlu i ze sítě
$\langle k \rangle$	průměrný stupeň uzlu k
M	množina nejdůležitějších řešení vrácených metodou MENL
$\max\{p_{kj}\}$	nejvyšší pravděpodobnost z množiny dostupných vstupních hran vedoucích do uzlu j
N	počet uzlů sítě
N	množina nejdůležitějších řešení vrácených konkrétní centralitou
NP	Nondeterministic Polynomial time
$ P_j $	počet odkazů na stránce P_j
P_{inic_i}	pravděpodobnost, že uzel i bude na počátku domino efektu
P_{inic_celek}	pravděpodobnost vzniku domino efektu na síti
p_i	pravděpodobnost i
$p(k)$	distribuce stupně uzlu
R	riziko
RI	rizikové inženýrství
R_{red}	snížení rizika
$r(P_k)$	pagerank web stránky P_k
$r(P_j)$	pagerank stránky P_j , která odkazuje na stránku P_k
s_i	scénář i
V	množina vrcholů
VO	výzkumná otázka
WS	Watts-Strogatzovův model
λ_{max}	největší vlastní hodnota matice souvztažnosti A
$\sigma_{st}(i)$	počet nejkratších cest mezi uzly s a t , které probíhají uzlem i
σ_{st}	počet nejkratších cest mezi uzly s a t

SEZNAM PŘÍLOH

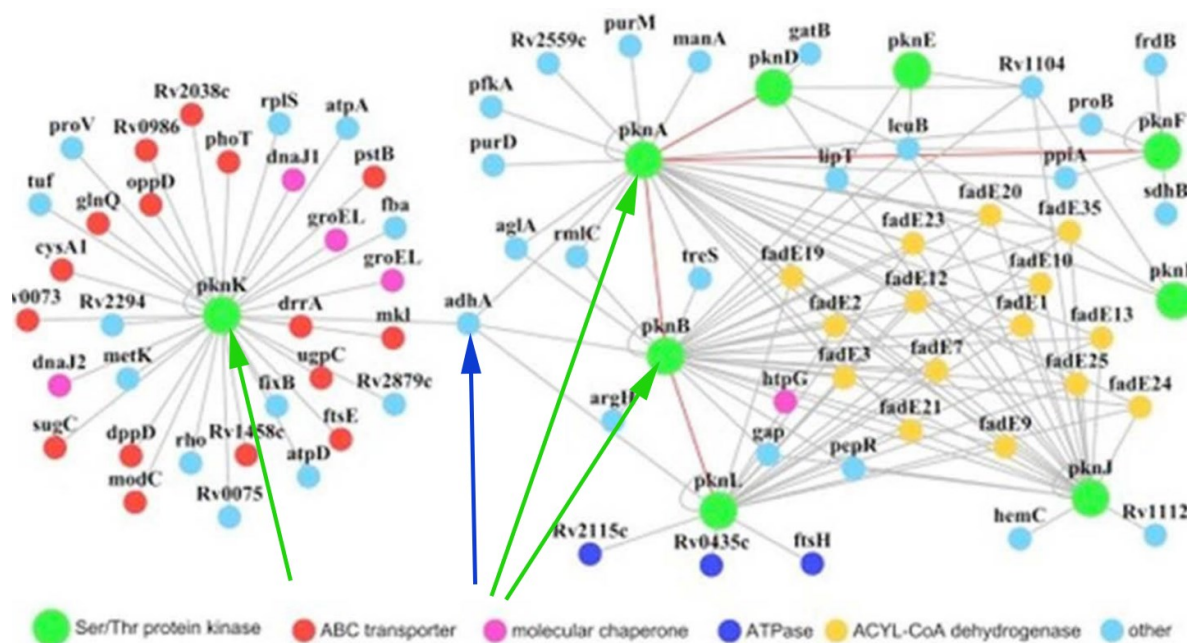
- Příloha P I Obrazová dokumentace kapitoly Komplexní sítě
- Příloha P II Obrazová dokumentace kapitoly Aplikace komplexních sítí v modelování rizik
- Příloha P III Dokumentace ke stanovení tříd ekvivalence pro hlavní modely sítí
- Příloha P IV Dokumentace ke kvantitativní optimalizaci domino efektu pomocí genetických algoritmů

PŘÍLOHA PI – OBRAZOVÁ DOKUMENTACE KAPITOLY KOMPLEXNÍ SÍTĚ



Obrázek 1 - Vznik gigantické komponenty ve vztahu k průměrnému stupni uzlů sítě. S je velikost největší komponenty vyjádřená poměrem k celkové velikosti s

(zdroj: Horák, 2024)

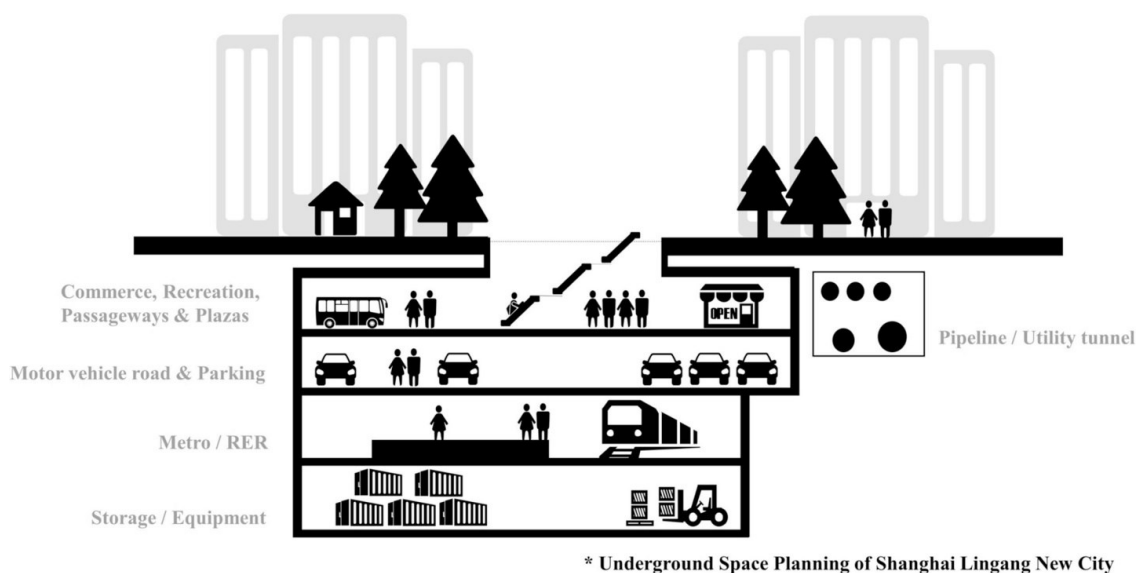


Obrázek 2 - Ukázka mostu a hubu na příkladu reálné sítě interakce protein – protein.

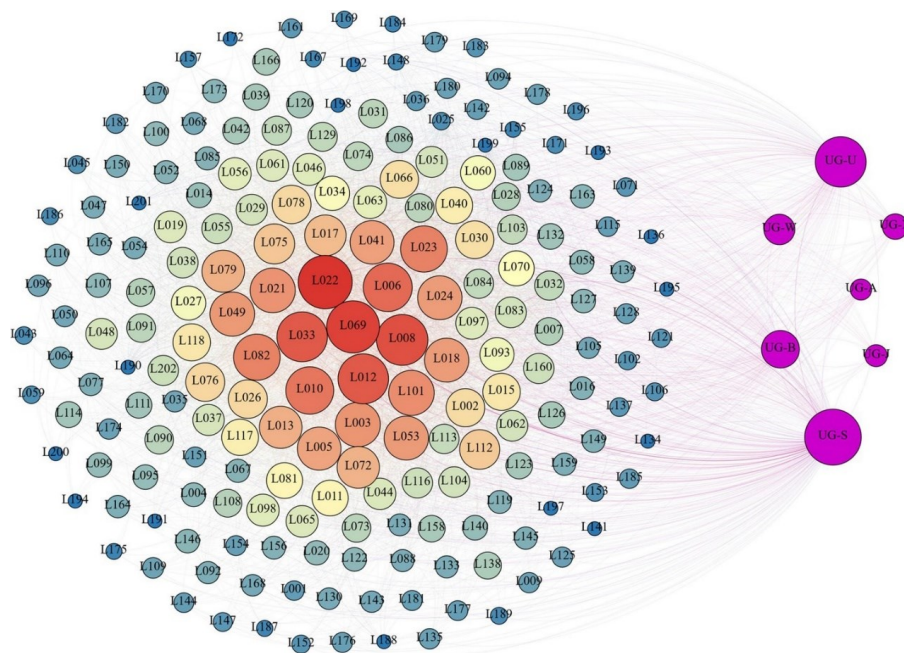
Zelenou šipkou označeny huby a modrou šipkou vyznačen most

(upraveno podle Horák, 2024)

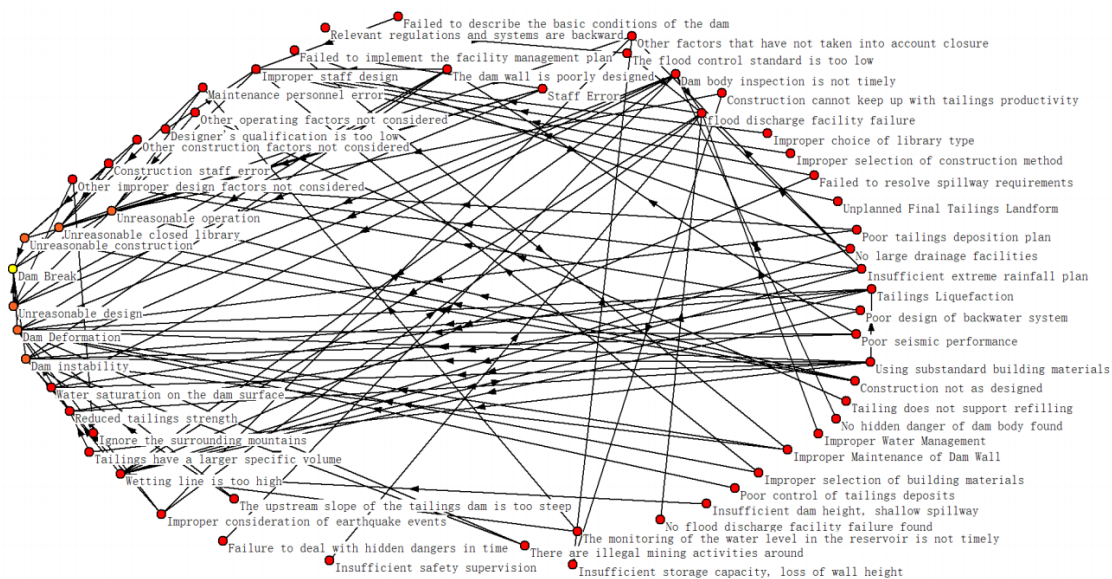
PŘÍLOHA PII – OBRAZOVÁ DOKUMENTACE KAPITOLY APLIKACE KOMPL. SÍTÍ V MODELOVÁNÍ RIZIK



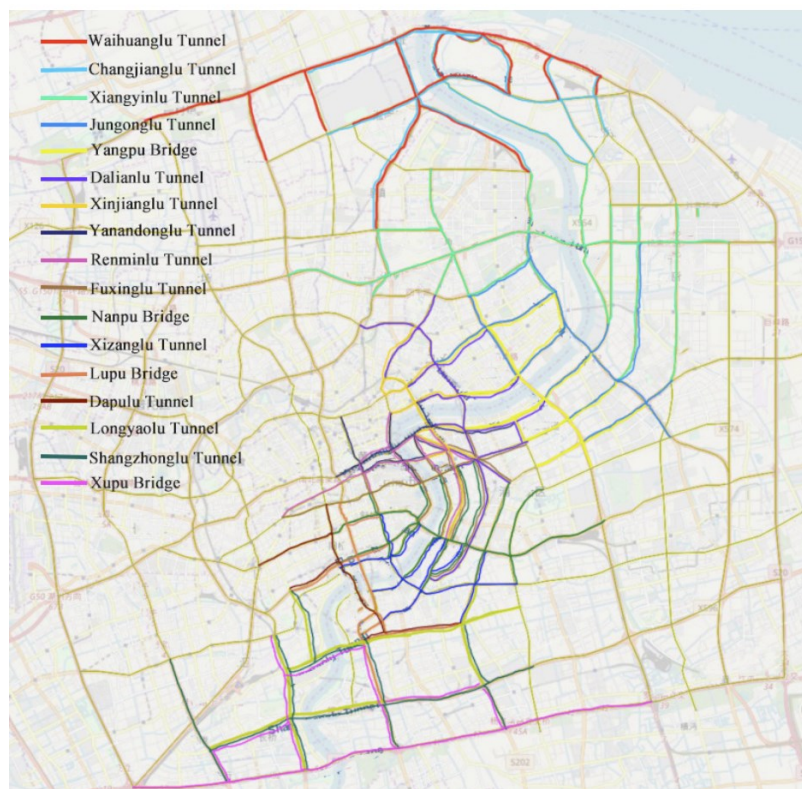
Obrázek 1 - Příklad podzemních prostor pro analýzu šíření domino efektu v Shanghai. Podzemní prostory vytvářejí propojením gigantickou komponentu. Pro analýzu rizika byla použita nová metoda E-CN-TOPSIS.
(zdroj: Han et al., 2022)



Obrázek 2 – Síť zobrazující rizikové řetězce podzemních prostor pro "Mega" město. Bylo nalezeno 201 rizikových uzlů na základě skutečných případů a z nich zkonstruována síť popisující šíření rizika v podzemních prostorech. Metoda E-CN-TOPSIS.
(zdroj: Han et al., 2022)

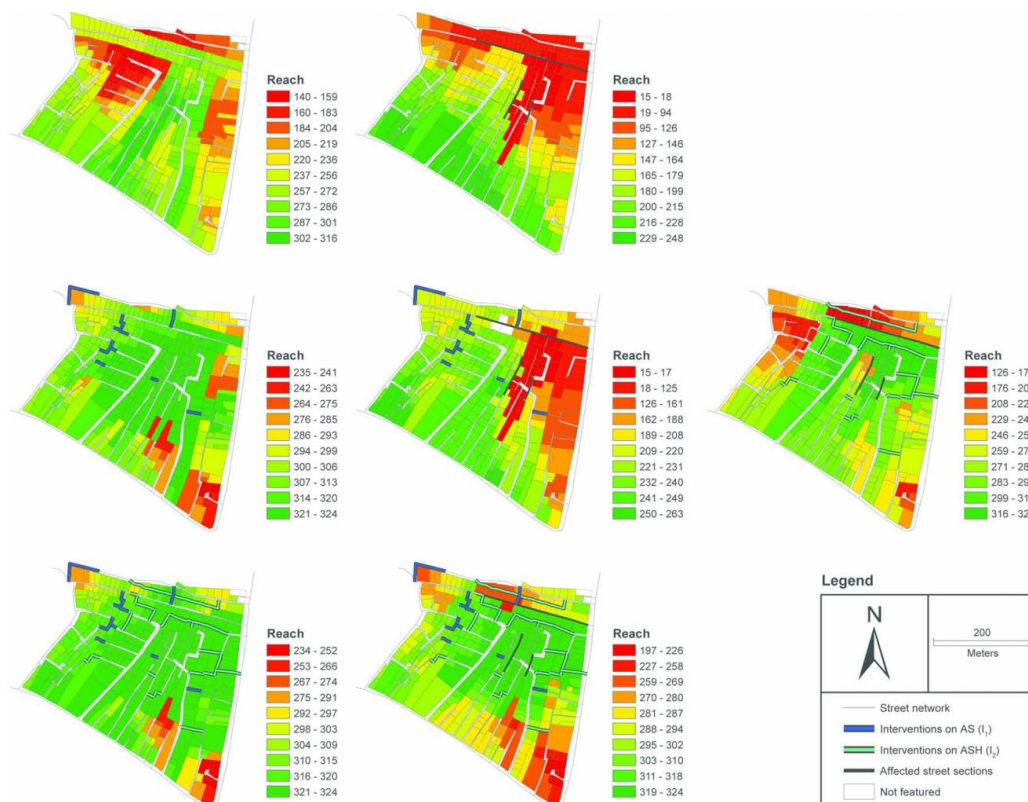


Obrázek 3 - Vizualizace sítě analýzy rizika na odkalištích. Uzly jsou zdroje rizik převzatá z reálných havárií a hrany zobrazují jejich vztah příčina – následek.
(zdroj: Zhixin et al., 2021)

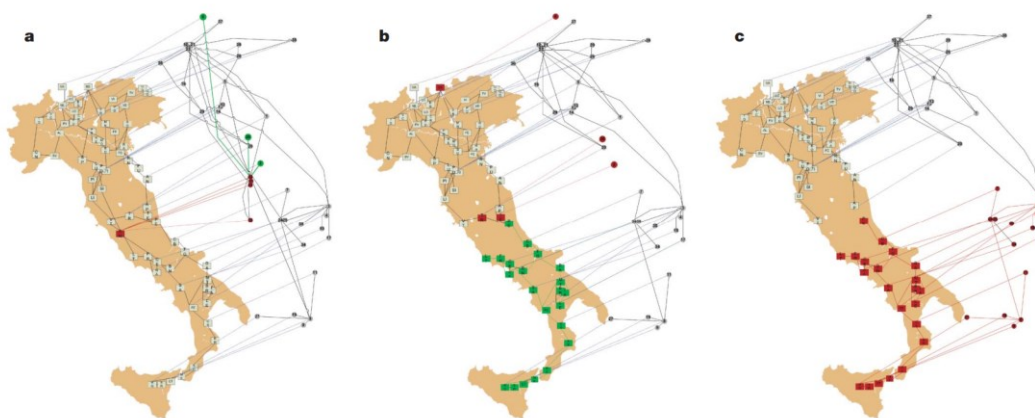


Obrázek 4 - Dostupnost důležitých dopravních prvků jako tunelů a mostů. Topologie těchto prvků byla abstrahována do komplexní sítě a následně analyzována pomocí centralit.
(zdroj: Tao et al., 2018)

Figure 5. Reach centrality for Naggo Head, Jamaica. Source: Authors, 2019.



Obrázek 5 - Příklad využití reach centrality v praxi pro hodnocení dostupnosti parcel.
(Sandoval et al., 2020)



Obrázek 6 - Modelování blackoutů v Itálii v roce 2003 jako interakce mezi elektrickou rozvodnou sítí (červené uzly) a Internetem (zelené uzly). Počáteční výpadek el. zdroje (obrázek vlevo) způsobil výpadek řídicích center (zelené uzly uprostřed) a to způsobilo výpadek dalších elektrických zdrojů (obrázek vpravo).
(zdroj: Buldyrev et al., 2010)

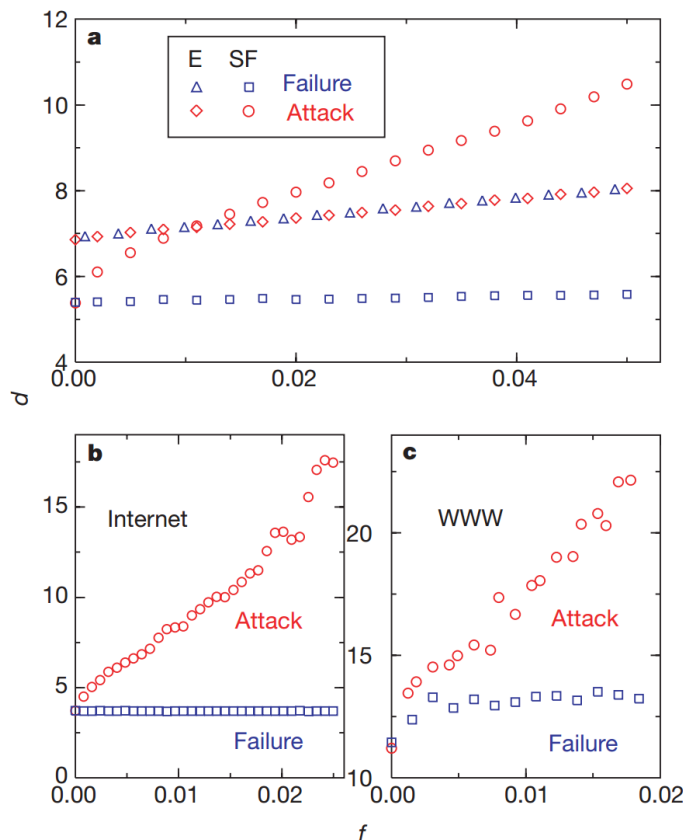


Figure 2 Changes in the diameter d of the network as a function of the fraction f of the removed nodes. **a**, Comparison between the exponential (E) and scale-free (SF) network models, each containing $N = 10,000$ nodes and 20,000 links (that is, $\langle k \rangle = 4$). The blue symbols correspond to the diameter of the exponential (triangles) and the scale-free (squares) networks when a fraction f of the nodes are removed randomly (error tolerance). Red symbols show the response of the exponential (diamonds) and the scale-free (circles) networks to attacks, when the most connected nodes are removed. We determined the f dependence of the diameter for different system sizes ($N = 1,000; 5,000; 20,000$) and found that the obtained curves, apart from a logarithmic size correction, overlap with those shown in **a**, indicating that the results are independent of the size of the system. We note that the diameter of the unperturbed ($f = 0$) scale-free network is smaller than that of the exponential network, indicating that scale-free networks use the links available to them more efficiently, generating a more interconnected web. **b**, The changes in the diameter of the Internet under random failures (squares) or attacks (circles). We used the topological map of the Internet, containing 6,209 nodes and 12,200 links ($\langle k \rangle = 3.4$), collected by the National Laboratory for Applied Network Research (<http://moat.nlanr.net/Routing/rawdata/>). **c**, Error (squares) and attack (circles) survivability of the World-Wide Web, measured on a sample containing 325,729 nodes and 1,498,353 links³, such that $\langle k \rangle = 4.59$.

Obrázek 7 - Reka a Barabasiho závěry ohledně citlivosti komplexní sítě na útok a selhání, včetně originálního popisu. Z obrázku je patrné, že komplexní sítě jsou odolné proti přirozeným výpadkům (modré symboly), ale značně zranitelné proti cíleným útokům na kritické uzly (červené symboly). Na ose x je procento odstraněných uzlů. Na ose y je průměr sítě, který je měřítkem průměrné dostupnosti uzlů. S odstraňováním uzlů se tato dostupnost zhoršuje.

(zdroj: Reka et al., 2000)

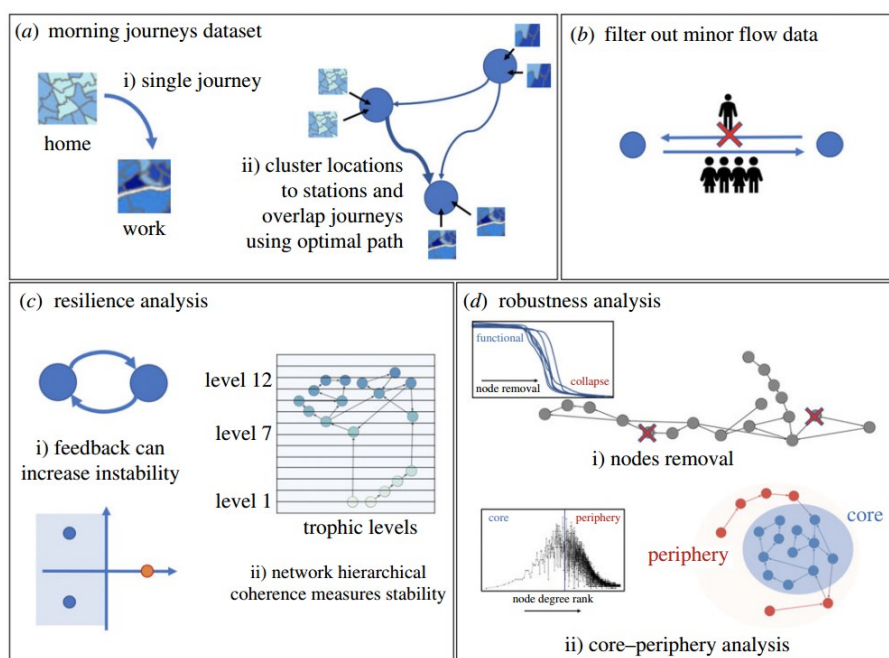


Figure 1. We reconstruct the major rail networks under stress conditions considering the morning journeys (a) and we measure the topological characteristics of these networks: the uninteresting flows are removed (b), then the resilience (c) and robustness (d) of these networks are analysed.

Obrázek 8 - Postup práce na analýze odolnosti a robustnosti železniční sítě, včetně originálního popisku. Pro analýzu byl formulován koncept trofické koherence pro orientované grafy.
(zdroj: Pagani et al., 2019a)

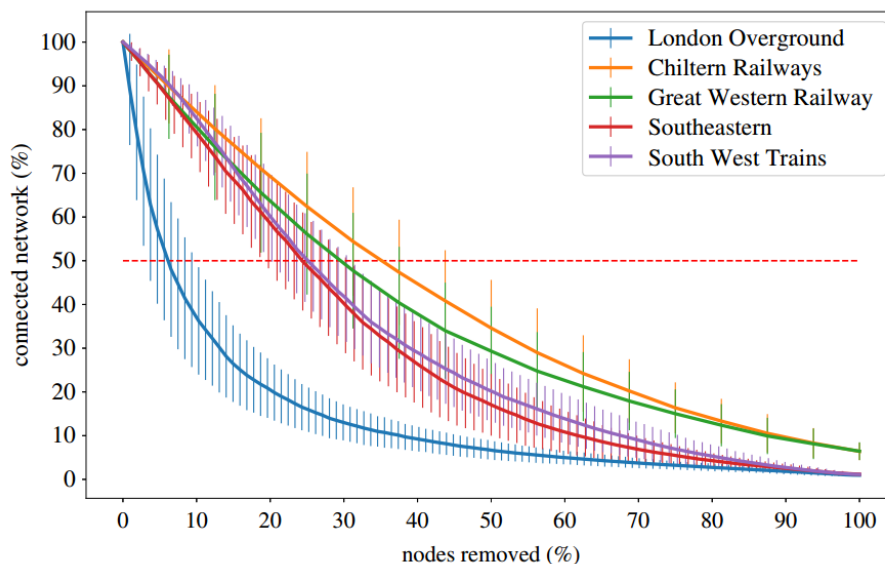


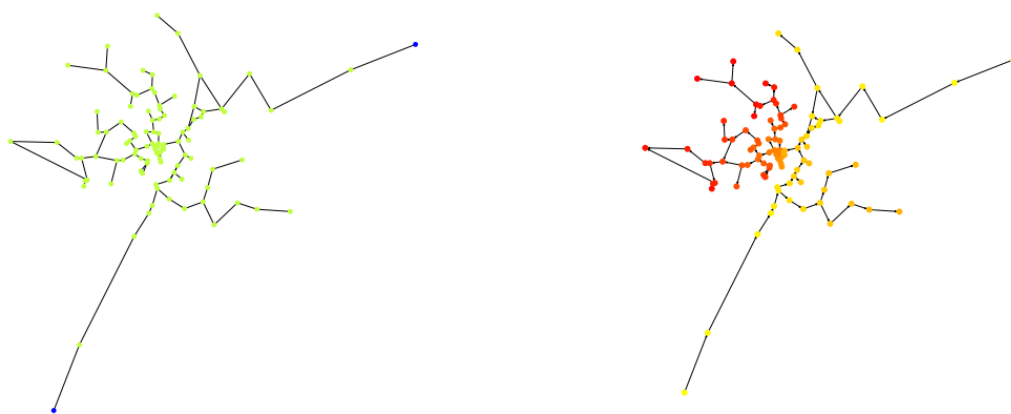
Figure 8. Size of the largest strongly connected component. The horizontal line indicates when more than 50% of the network is compromised and it is used as the value to compute the robustness in figure 9.

Obrázek 9 - Vztah mezi velikostí silně propojené komponenty a počtem odstraněných uzlů pro železniční síť. Z grafu je patrné, jak se postupně snižuje propojenost železniční sítě při odstraňování uzlů. Osa x je počet odstraněných uzlů, na ose y je propojenost sítě.
(zdroj: Pagani et al., 2019a)

Table 1. Summary of Topological Resilience Metrics for Complex Networked Systems

Metric or Approach	Concept	Deficiency
Mean degree [30]	Avg. connectivity	Biased by extreme values
Algebraic connectivity [18]	Ease of synchronisation	Incorrect dynamic for WDNs
Spectral gap [20]	Disconnectedness	No dynamics considered
Eccentricity diameter [18]	Max. disconnectedness	Biased by periphery junctions
Betweenness [31]	Bridging nodes between DMAs	Biased by bridge nodes
Efficiency [18]	Ease of energy exchange	No dynamics considered
Modularity [22]	No. partitions (DMAs)	No dynamics considered
Core size [16]	Core reinforcement	No dynamics considered
Node removal [17]	Cascade failure	Incorrect dynamic for WDNs
Spectral gap [18]	Eigenvalue distribution	No dynamics considered
Trophic coherence [27]	No. feedback loops	Lack of time lag

Obrázek 10 - Tabulka použitelných metrik a přístupů s vysvětlením jejich zaměření, jak ji definují Pagani et al. pro práci o odolnosti vodovodní distribuční sítě
(zdroj: Pagani et al., 2019b)

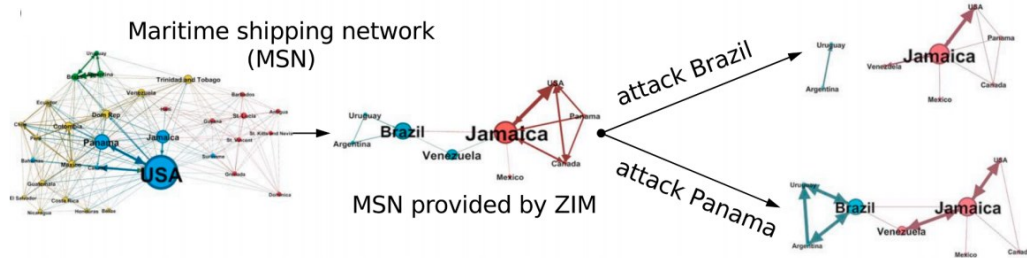


(a) Example of WDN, reservoirs and tanks are highlighted in blue.

(b) Trophic level of the junctions, from yellow (low trophic level) to red (high trophic level).

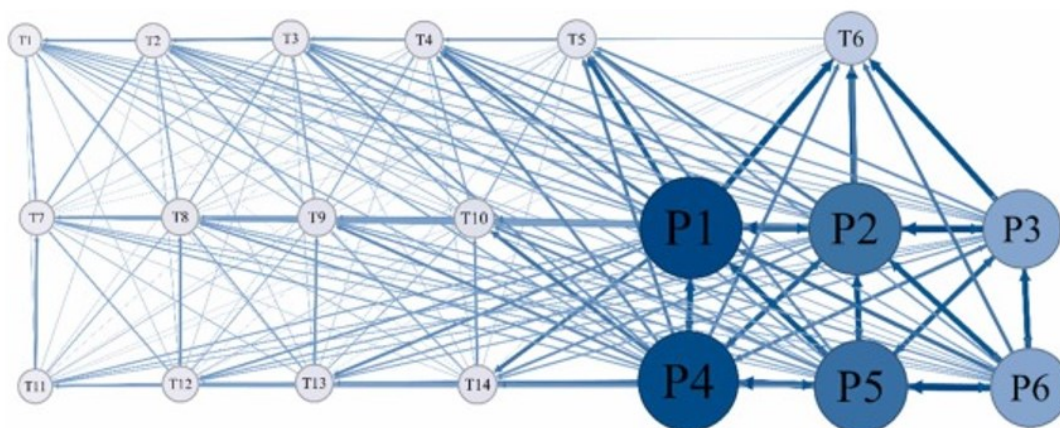
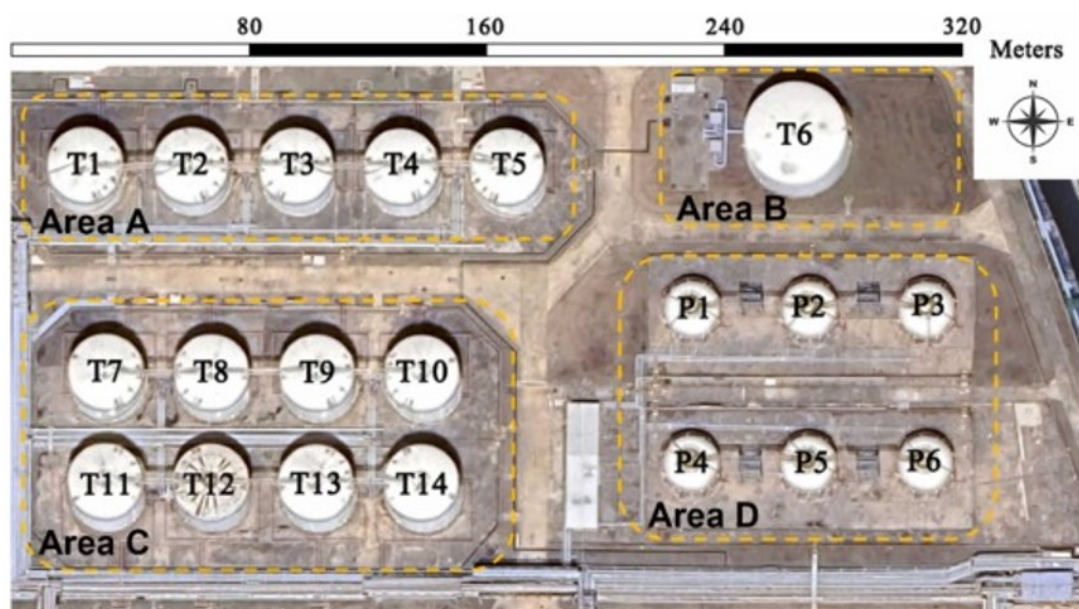
Fig. 3. Trophic level of the junctions in a WDN.

Obrázek 11 - Příklad určení trofické úrovně uzlů vodovodní distribuční sítě pro síť jejíž topologie je uvedena vlevo. Rezervoáry, které jsou zdrojem jsou označeny na levém obr. jako dvě malé modré tečky.
(zdroj: Pagani et al., 2019b)



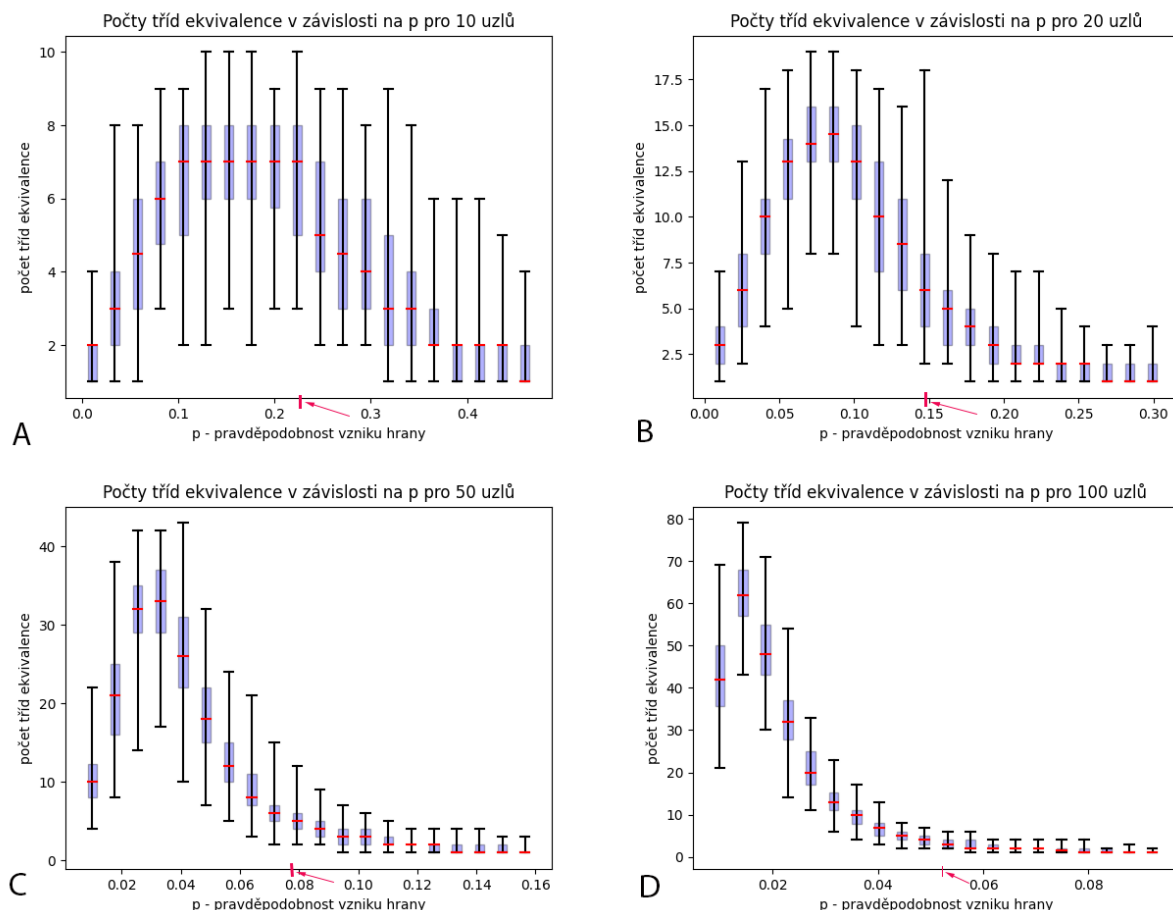
Single node attack on multi-company maritime shipping network in the Americas. Node size indicates betweenness centrality, node color indicates maritime communities by region, and link weight indicates shipping capacities.

Obrázek 12 - Zobrazení útoku na uzel kritické infrastruktury, včetně originálního popisku
(upraveno, zdroj: Wang et al., 2024)



Obrázek 13 A - Prostorové umístění zásobníků a B - jeho vyjádření ve formě grafu. Převod umístění zásobníků do abstraktní formy grafu umožnilo hodnocení významu jednotlivých uzlů pomocí closeness centrality. Hrany představují možnost šíření z jednoho zásobníku na další. Barevně tmavší barvou a širší čarou je zakódován vyšší význam.
(Zhang et al., 2024)

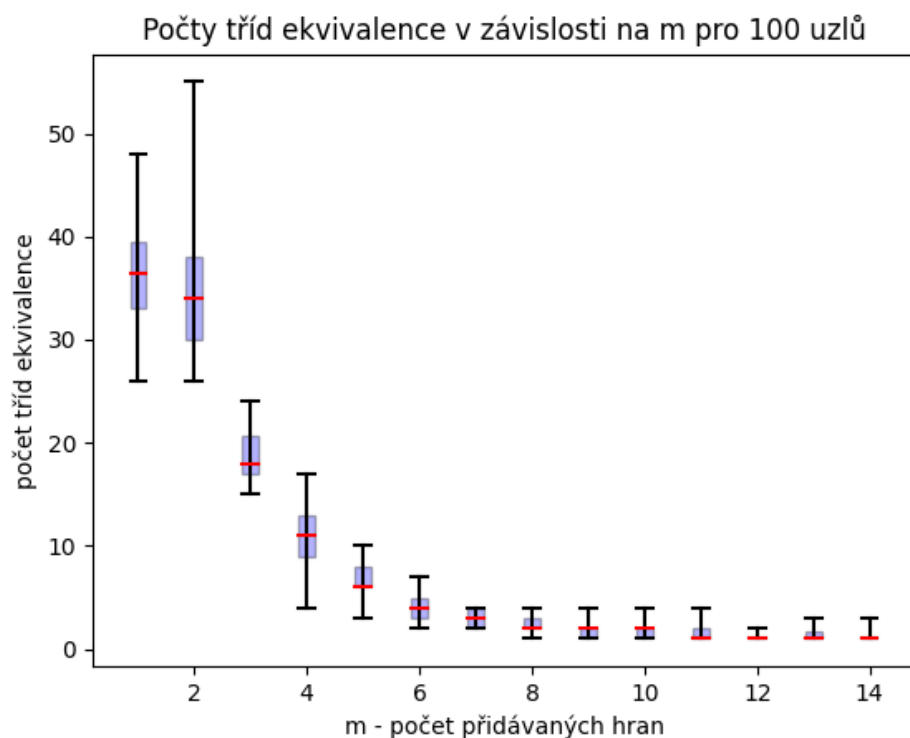
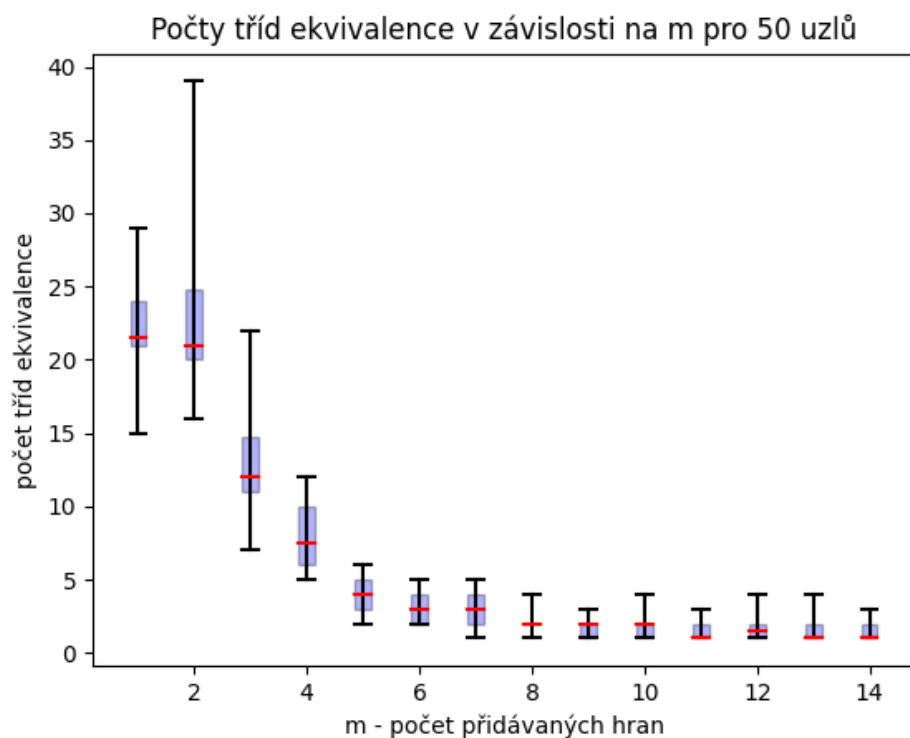
PŘÍLOHA PIII – DOKUMENTACE KE STANOVENÍ TŘÍD EKVIVALENCE PRO HLAVNÍ MODEL Y SÍTÍ



Obrázek 1 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a pravděpodobností p vzniku hrany v Erdős-Rényiho modelu náhodného grafu.

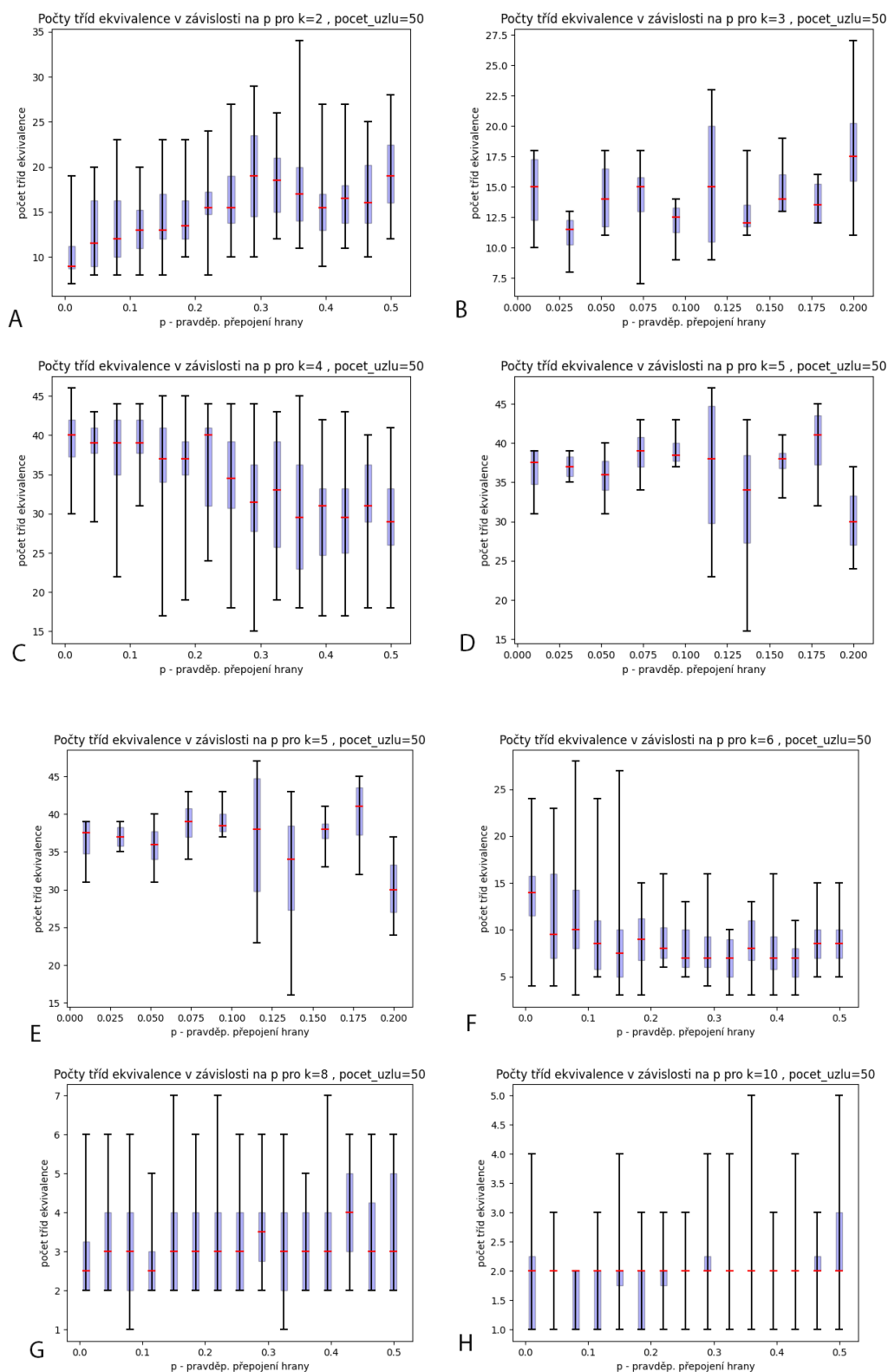
A – pro $n=10$ uzlů, B– pro $n=20$ uzlů, C– pro $n=50$ uzlů, D– pro $n=100$ uzlů. Červenou šipkou je označený teoreticky předpovězený fázový přechod. Osa x odpovídá pravděpodobnosti p. Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max).

(zdroj: vlastní)



Obrázek 2 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametrem m v Barabási-Albertově modelu pro různé počty uzlů. Osa x odpovídá počtu přidávaných hran m. Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max). Horní obrázek pro 50 uzlů, spodní pro 100 uzlů.

(zdroj: vlastní)



Obrázek 3 - Závislost mezi počtem tříd ekvivalence podle MENL a parametry p a k ve Watts-Strogatz modelu grafu malého světa modelu pro 50 uzlů. Subgrafy A-H postupně navyšují parametr k od 2 do 10. Osa x odpovídá pravděpodobnosti přepojení hrany p . Na ose y je zjištěný počet tříd ekvivalence. Zobrazení box plot grafem (min, Q1, medián, Q3, max).

(zdroj: vlastní)

PŘÍLOHA PIV – DOKUMENTACE KE KVANTITATIVNÍ OPTIMALIZACI DOMINO EFEKTU POMOCÍ GENETICKÝCH ALGORITMŮ

Výpis 1 - Výstup z programu bez použití GA, pouhým náhodným generováním řešení
(zdroj: vlastní)

loss_origin=451.082

risk_reduction_full_net=1.44, risk_reduction_cost_border=0.288

451.082,0.002205526873903853,[0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
448.8657,0.002227837858851768,[0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
443.2,0.002256317689530686,[0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1]
441.024,0.002267450297489479,[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
best_fitness=0.002267450297489479, loss=441.024

Výpis 2 - Výstup z programu při použití GA – metoda 1 (zdroj: vlastní)

```
vysledek 1. testu
- GA zcela nahodne na 50 genech
- v ucelove funkci se nejdriv zkouma jestli cena za redukci rizika
prekroci hranici 0.2 * (suma za redukci cele site)
  -pokud ano, tak je fitness 0
-parametry
  NUM_GA_GENERATION = 10000
  MCMC_CYCLES = 5000
  MCMC_META_CYCLES = 10
  HORNI_HRANICE_NA_REDUKCI_RIZIK_PROC = 0.2

-nejlepsi reseni
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1]

risk_reduction_full_net=1.44, risk_reduction_cost_border=0.288

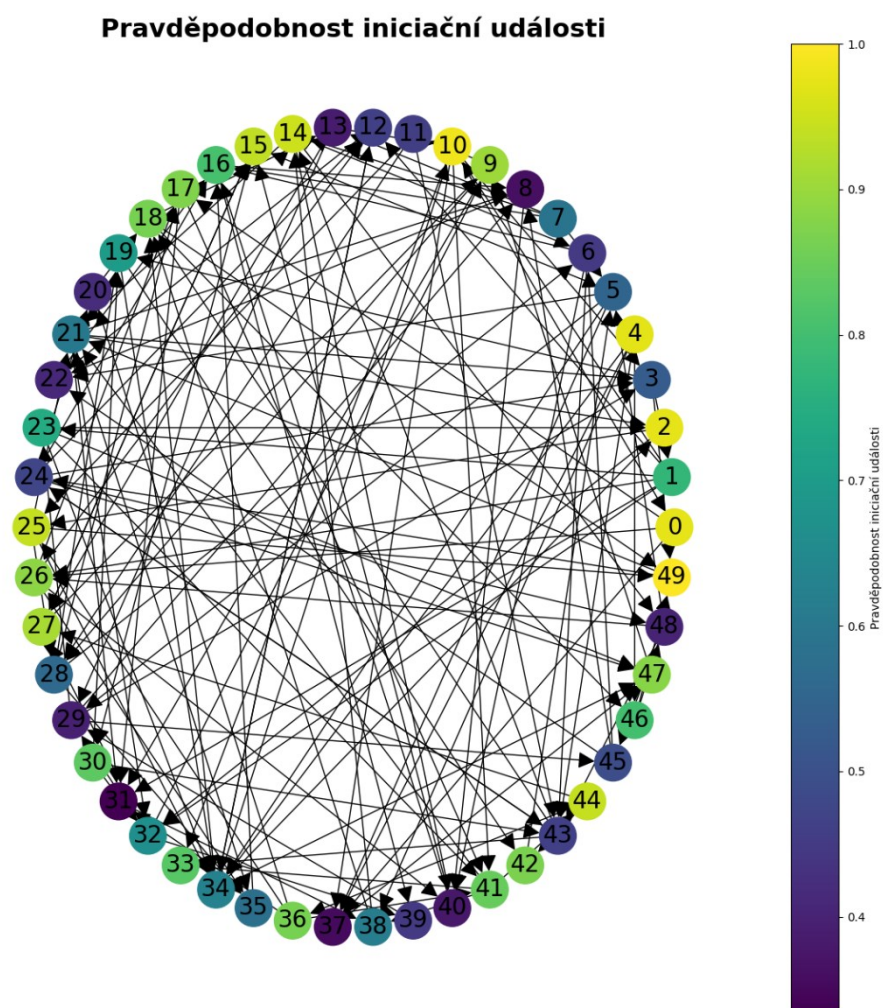
lowest_loss = 1 / best_solution_fitness

lowest_loss=442.8952
lowest_loss=437.13
lowest_loss=433.37560000000001
lowest_loss=433.0164
lowest_loss=429.6392
lowest_loss=429.374400000000004
lowest_loss=428.3648
lowest_loss=426.391
lowest_loss=425.7256
lowest_loss=422.967199999999993
lowest_loss=421.237800000000005
lowest_loss=420.859
lowest_loss=413.4124

po GA ztrata=413.4124, nejlepší řešení: [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1]
```

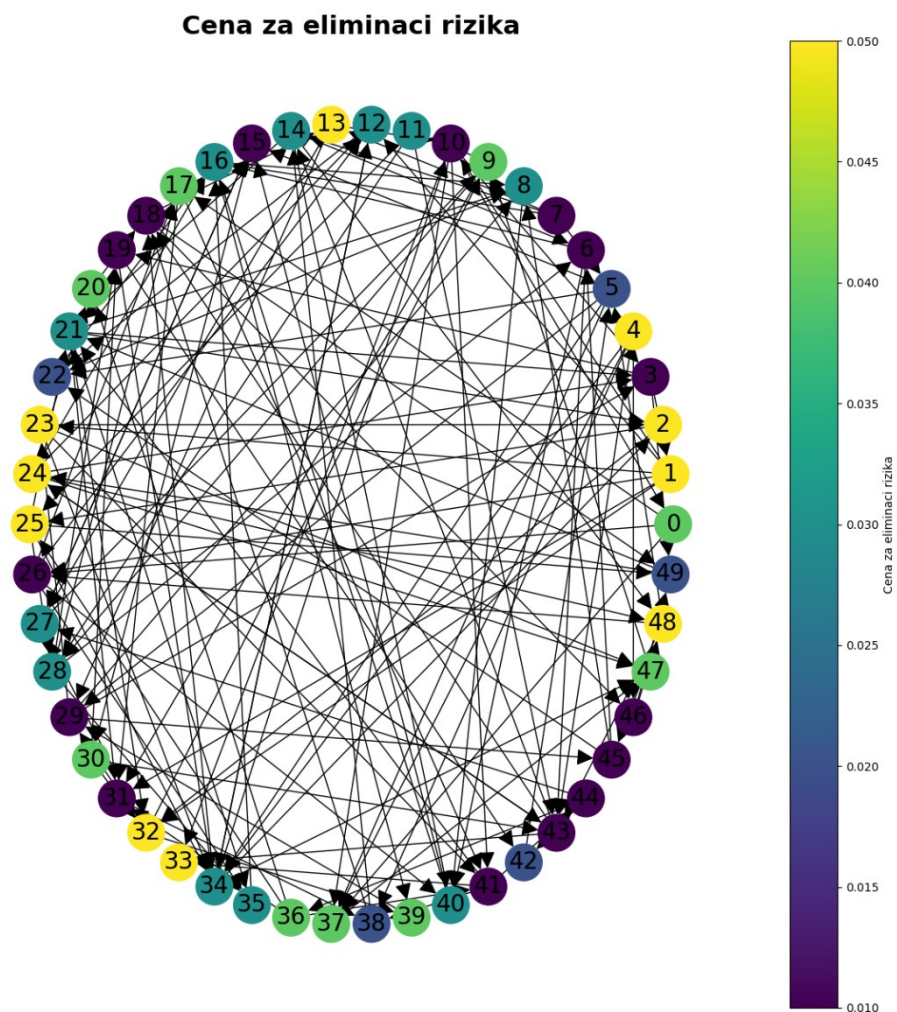
Výpis 3 - Výstup z programu při použití GA – metoda 2
(zdroj: vlastní)

```
parametry
NUM_GA_GENERATION=1000
SOLUTIONS_PER_POPULATION=40
NUM_GEN_IN_CHROMOSOME=10
MCMC_META_CYCLES=10
MCMC_CYCLES=5000
HORNÍ_HRANICE_NA_REDUKCI_RIZIK_PROC=0.2
start_loss=449.7113
start_fitness=0.002223648816474036
-----prubezne nejlepsi vysledky-----
generace,net_loss,fitness
0,312.4353,0.003200662665198203
2,298.509,0.00334998274758885
6,297.3569999999997,0.0033629610199188186
6,293.2109,0.003410514411299171
10,282.95770000000005,0.0035340971459691672
11,282.2347,0.0035431504347268428
17,280.6191,0.003563549309366326
23,277.1683,0.003607916201095147
24,272.3105,0.003672278520292093
24,270.7688,0.0036931876937076947
35,269.60569999999996,0.003709120393226108
82,268.18960000000004,0.003728705363668091
128,268.10850000000005,0.003729833257804209
131,266.73220000000003,0.0037490786639183416
195,266.2718,0.0037555610470203756
195,264.4003,0.0037821439688230304
381,263.303,0.003797905834722734
```

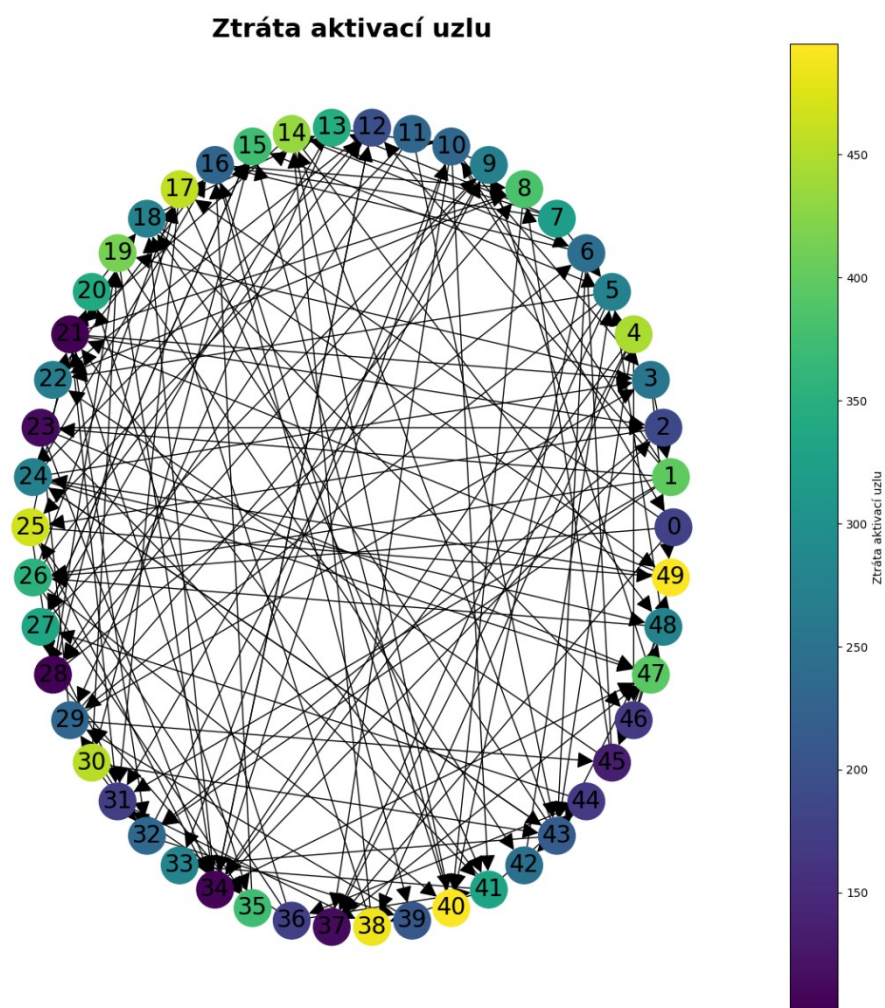


Obrázek 1 – Color map zobrazení vstupního parametru uzlu pravděpodobnost iniciace uzlu. Hodnoty jsou již transformované z originálních do intervalu $\langle P_{\text{inic_min}} / P_{\text{inic_mac}}, 1 \rangle$, takže je zachovaný poměr, ale jsou o několik řádů vyšší než v originále z důvodu zlepšení výpočetního výkonu (bližší vysvětlení v textu na str. 93). Světlejší barva odpovídá vyšší pravděpodobnosti aktivace hrozby.

(zdroj: vlastní)

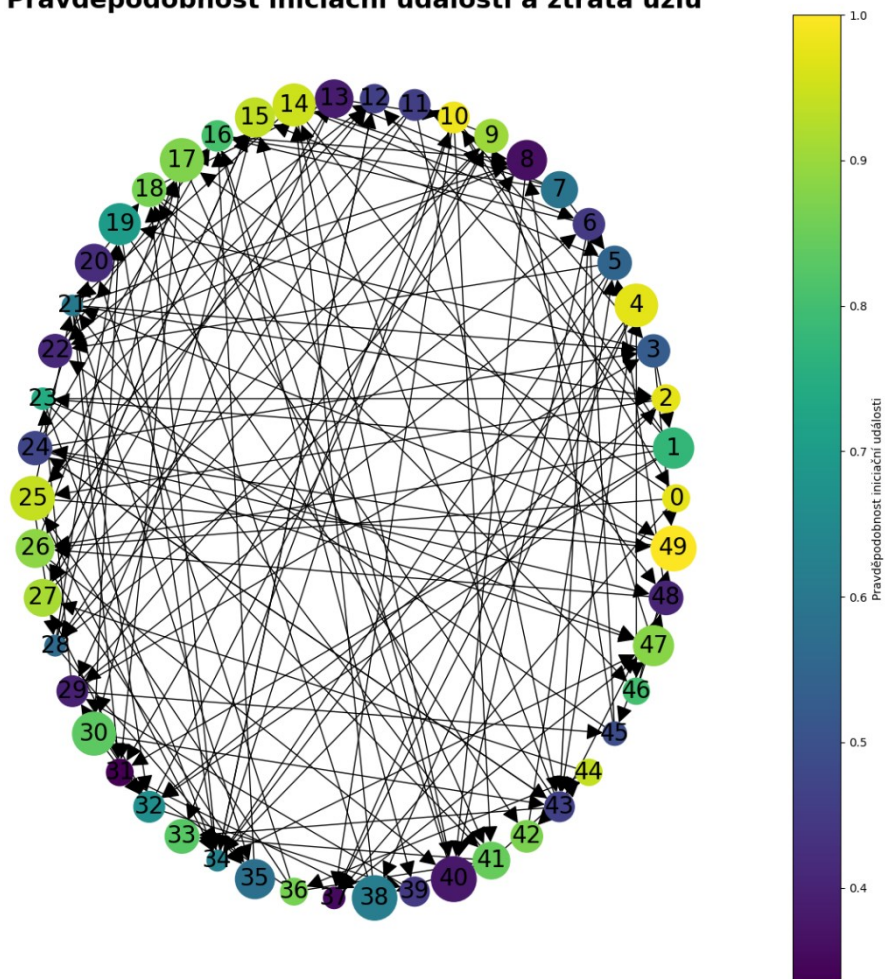


Obrázek 2 – Color map zobrazení vstupního parametru uzlu: cena eliminace rizika uzlu.
Světlejší barva odpovídá vyšším nákladům na mitigaci.
(zdroj: vlastní)



Obrázek 3 – Color map zobrazení vstupního parametru uzlu: ztráta při aktivaci uzlu. Cena vyjadřuje ztrátu pouze za daný uzel, nikoli domino efekt. Světlejší barva odpovídá vyšší ztrátě.
(zdroj: vlastní)

Pravděpodobnost iniciační události a ztráta uzlu



Obrázek 4 – Color map zobrazení kombinace 2 vstupních parametrů uzlů - pravděpodobnost iniciace a ztráta uzlu. Pravděpodobnost iniciace je kódována jako color map a ztráta pro daný uzel jako velikost uzlu. Iniciační pravděpodobnost je již transformovaná z důvodu zlepšení výpočetního výkonu (bližší vysvětlení v textu na str. 93).

(zdroj: vlastní)

Tabulka 1 – Všechna dosažená řešení z GA pro různě dlouhé n-tice uzlů. Jsou vypsána pouze řešení, která kvalitou překonala dřívější nalezená řešení. Význam jednotlivých sloupců je blíže vysvětlen v textu.

*Hodnota rizika z MCMC v GA odpovídá transformovaným pravděpodobnostem pro zefektivnění simulace

** Vypočtená hodnota převedená z MCMC v GA na originální P_{inic} jednotlivých uzlů

***Skutečná celková průměrná ztráta pro originální síť zjištěná simulací na originální síti

4* Pravděpodobnost domino efektu na síti zjištěná simulací (zohledňuje i současné spuštění více uzlů)

id řešení	ztráta z GA*	ztráta přepočtená **	ztráta realita ***	P_{inic} síť celek *4	náklady risk reduction	velikost n-tice
1	436.92	1.306	1.336	0.095	0.03	1
2	433.79	1.297	1.310	0.095	0.05	1
3	428.54	1.281	1.249	0.096	0.05	1
4	423.17	1.265	1.285	0.096	0.01	1
5	419.83	1.255	1.251	0.094	0.01	1
6	418.05	1.250	1.205	0.094	0.03	1
7	417.45	1.248	1.262	0.095	0.03	1
8	416.98	1.247	1.257	0.094	0.01	1
9	415.50	1.242	1.256	0.092	0.03	2
10	412.64	1.234	1.233	0.094	0.07	2
11	411.74	1.231	1.218	0.092	0.06	2
12	399.16	1.193	1.161	0.092	0.04	2
13	395.15	1.181	1.267	0.093	0.06	2
14	394.60	1.180	1.163	0.092	0.04	2
15	394.58	1.180	1.164	0.092	0.05	2
16	389.62	1.165	1.225	0.092	0.03	2
17	388.71	1.162	1.198	0.092	0.05	2
18	388.31	1.161	1.173	0.091	0.05	2
19	403.87	1.208	1.194	0.091	0.08	3
20	390.14	1.166	1.136	0.092	0.06	3
21	389.77	1.165	1.152	0.089	0.10	3
22	384.33	1.149	1.166	0.091	0.07	3
23	379.68	1.135	1.174	0.090	0.08	3
24	379.64	1.135	1.130	0.090	0.10	3
25	374.83	1.121	1.162	0.088	0.10	3
26	374.69	1.120	1.105	0.089	0.10	3
27	372.97	1.115	1.115	0.089	0.10	3
28	370.93	1.109	1.082	0.089	0.10	3
29	370.92	1.109	1.090	0.089	0.06	3
30	370.68	1.108	1.122	0.089	0.06	3
31	366.63	1.096	1.147	0.089	0.06	3
32	402.98	1.205	1.239	0.091	0.07	4
33	402.41	1.203	1.205	0.090	0.16	4
34	384.04	1.148	1.191	0.089	0.08	4

35	382.15	1.143	1.168	0.089	0.08	4
36	380.86	1.139	1.140	0.088	0.10	4
37	373.92	1.118	1.131	0.088	0.17	4
38	370.55	1.108	1.154	0.088	0.11	4
39	361.71	1.081	1.079	0.088	0.12	4
40	358.14	1.071	1.088	0.088	0.12	4
41	357.84	1.070	1.109	0.088	0.09	4
42	357.51	1.069	1.042	0.089	0.07	4
43	355.87	1.064	1.070	0.088	0.09	4
44	353.11	1.056	1.099	0.089	0.09	4
45	351.11	1.050	1.044	0.087	0.07	4
46	349.50	1.045	1.024	0.087	0.11	4
47	400.64	1.198	1.162	0.087	0.13	5
48	388.65	1.162	1.176	0.086	0.17	5
49	380.60	1.138	1.119	0.089	0.20	5
50	378.17	1.131	1.146	0.086	0.09	5
51	372.98	1.115	1.125	0.086	0.16	5
52	354.70	1.061	1.071	0.085	0.15	5
53	353.12	1.056	1.037	0.085	0.15	5
54	352.07	1.053	1.060	0.087	0.12	5
55	350.02	1.047	1.059	0.086	0.15	5
56	349.47	1.045	1.034	0.085	0.15	5
57	347.28	1.038	1.021	0.086	0.12	5
58	346.21	1.035	1.028	0.086	0.12	5
59	345.15	1.032	1.059	0.084	0.12	5
60	343.30	1.026	1.037	0.086	0.15	5
61	341.56	1.021	1.015	0.084	0.15	5
62	341.47	1.021	1.023	0.084	0.15	5
63	340.09	1.017	1.051	0.087	0.14	5
64	337.91	1.010	1.028	0.085	0.15	5
65	334.86	1.001	1.048	0.085	0.15	5
66	333.53	0.997	0.984	0.085	0.15	5
67	330.83	0.989	0.971	0.084	0.12	5
68	329.04	0.984	0.983	0.084	0.12	5
69	390.88	1.169	1.151	0.087	0.18	6
70	373.76	1.118	1.119	0.085	0.17	6
71	352.33	1.053	1.041	0.083	0.20	6
72	348.76	1.043	1.062	0.084	0.17	6
73	345.94	1.034	1.015	0.082	0.20	6
74	344.18	1.029	1.066	0.083	0.20	6
75	335.15	1.002	1.013	0.081	0.19	6
76	328.41	0.982	0.960	0.082	0.15	6
77	326.24	0.975	1.007	0.083	0.20	6
78	323.48	0.967	0.977	0.082	0.20	6
79	323.17	0.966	0.956	0.081	0.16	6

80	321.79	0.962	0.940	0.083	0.17	6
81	316.50	0.946	0.971	0.082	0.17	6
82	313.42	0.937	0.937	0.082	0.16	6
83	390.60	1.168	1.177	0.086	0.18	7
84	369.79	1.106	1.089	0.084	0.20	7
85	369.29	1.104	1.117	0.083	0.10	7
86	360.57	1.078	1.076	0.082	0.15	7
87	354.22	1.059	1.046	0.081	0.15	7
88	339.32	1.015	1.018	0.082	0.25	7
89	339.29	1.014	1.027	0.081	0.19	7
90	338.23	1.011	0.960	0.081	0.20	7
91	338.11	1.011	1.056	0.083	0.18	6
92	337.18	1.008	1.040	0.081	0.17	7
93	336.70	1.007	1.010	0.081	0.21	7
94	332.32	0.994	0.999	0.081	0.15	7
95	329.80	0.986	1.017	0.081	0.15	7
96	328.55	0.982	0.972	0.082	0.13	7
97	320.14	0.957	0.991	0.080	0.17	7
98	319.52	0.955	0.941	0.079	0.19	7
99	317.31	0.949	0.937	0.080	0.19	7
100	316.80	0.947	0.959	0.080	0.19	7
101	316.79	0.947	0.950	0.081	0.20	7
102	316.54	0.946	0.964	0.078	0.20	7
103	312.14	0.933	0.902	0.079	0.20	7
104	300.71	0.899	0.901	0.079	0.20	7
105	300.44	0.898	0.929	0.081	0.19	7
106	299.74	0.896	0.896	0.079	0.17	7
107	364.48	1.090	1.098	0.082	0.19	8
108	359.68	1.075	1.084	0.082	0.21	8
109	341.33	1.021	0.963	0.082	0.20	8
110	332.13	0.993	1.008	0.081	0.16	8
111	330.32	0.988	0.989	0.081	0.16	8
112	329.99	0.987	0.969	0.080	0.19	8
113	329.67	0.986	0.999	0.081	0.20	8
114	320.91	0.959	0.953	0.081	0.16	8
115	320.88	0.959	0.972	0.080	0.21	8
116	319.75	0.956	0.983	0.080	0.20	8
117	309.74	0.926	0.937	0.079	0.20	8
118	306.84	0.917	0.940	0.079	0.18	8
119	299.50	0.895	0.914	0.078	0.18	8
120	299.24	0.895	0.901	0.078	0.19	8
121	290.34	0.868	0.877	0.078	0.22	8
122	289.32	0.865	0.863	0.077	0.22	8
123	289.23	0.865	0.887	0.078	0.22	8
124	388.96	1.163	1.149	0.081	0.14	9

125	388.59	1.162	1.178	0.081	0.20	9
126	359.02	1.073	1.084	0.077	0.26	9
127	354.13	1.059	1.083	0.079	0.26	9
128	351.98	1.052	1.122	0.080	0.18	9
129	325.70	0.974	0.968	0.080	0.27	9
130	324.37	0.970	0.988	0.078	0.28	9
131	317.21	0.948	0.919	0.080	0.21	8
132	315.20	0.942	0.943	0.079	0.24	8
133	312.31	0.934	0.944	0.079	0.24	8
134	309.63	0.926	0.909	0.074	0.27	9
135	308.31	0.922	0.934	0.076	0.27	9
136	305.33	0.913	0.900	0.078	0.25	9
137	302.90	0.906	0.892	0.076	0.24	9
138	301.42	0.901	0.904	0.078	0.25	9
139	298.88	0.894	0.905	0.076	0.26	9
140	298.23	0.892	0.886	0.076	0.27	9
141	297.87	0.891	0.885	0.076	0.27	9
142	293.30	0.877	0.884	0.076	0.25	9
143	292.57	0.875	0.851	0.074	0.26	9
144	290.03	0.867	0.855	0.077	0.23	9
145	286.05	0.855	0.865	0.077	0.23	9
146	284.00	0.849	0.858	0.075	0.27	9
147	276.41	0.826	0.828	0.075	0.27	9
148	276.02	0.825	0.842	0.076	0.27	9
149	344.74	1.031	1.079	0.075	0.27	10
150	339.10	1.014	1.021	0.078	0.28	10
151	322.54	0.964	0.984	0.076	0.27	9
152	321.30	0.961	0.954	0.077	0.27	9
153	320.76	0.959	0.965	0.075	0.26	9
154	320.28	0.958	0.966	0.075	0.26	9
155	316.47	0.946	0.939	0.077	0.27	10
156	312.09	0.933	0.925	0.075	0.24	10
157	303.56	0.908	0.893	0.076	0.25	9
158	302.69	0.905	0.885	0.076	0.28	9
159	300.33	0.898	0.892	0.076	0.28	9
160	299.84	0.897	0.925	0.075	0.28	10
161	297.64	0.890	0.918	0.075	0.28	10
162	293.99	0.879	0.871	0.076	0.27	10
163	281.37	0.841	0.817	0.075	0.23	10
164	281.09	0.840	0.848	0.077	0.26	10
165	279.56	0.836	0.817	0.076	0.26	10
166	277.07	0.828	0.854	0.074	0.28	10
167	274.65	0.821	0.864	0.075	0.28	10
168	274.05	0.819	0.829	0.073	0.28	10
169	273.25	0.817	0.843	0.075	0.25	10

170	266.91	0.798	0.797	0.072	0.27	10
171	385.02	1.151	1.178	0.077	0.28	11
172	376.11	1.125	1.130	0.077	0.28	11
173	353.03	1.056	1.032	0.076	0.28	11
174	352.16	1.053	1.053	0.075	0.27	11
175	345.64	1.033	1.017	0.074	0.24	11
176	339.63	1.015	1.048	0.076	0.25	11
177	336.09	1.005	1.007	0.073	0.27	11
178	331.62	0.992	0.982	0.079	0.27	10
179	331.61	0.991	0.977	0.079	0.27	10
180	330.75	0.989	1.021	0.076	0.27	11
181	326.73	0.977	1.002	0.077	0.28	11
182	317.72	0.950	0.979	0.076	0.23	11
183	316.08	0.945	0.930	0.076	0.23	11
184	312.96	0.936	0.888	0.074	0.28	11
185	309.51	0.925	0.960	0.073	0.28	11
186	306.83	0.917	0.902	0.074	0.28	11
187	298.98	0.894	0.878	0.076	0.25	9
188	298.90	0.894	0.904	0.076	0.25	9
189	282.04	0.843	0.824	0.073	0.28	11
190	281.68	0.842	0.860	0.073	0.27	11
191	280.75	0.839	0.826	0.073	0.26	10
192	279.76	0.836	0.839	0.073	0.26	10
193	275.98	0.825	0.829	0.074	0.26	10
194	274.27	0.820	0.832	0.074	0.25	11
195	270.81	0.810	0.812	0.072	0.28	11
196	269.46	0.806	0.793	0.072	0.27	11
197	269.39	0.805	0.837	0.071	0.27	11
198	266.76	0.798	0.788	0.072	0.27	11
199	265.60	0.794	0.816	0.073	0.27	11
200	264.19	0.790	0.792	0.072	0.28	11
201	262.27	0.784	0.761	0.072	0.28	11
202	262.17	0.784	0.787	0.072	0.27	11
203	260.17	0.778	0.773	0.072	0.27	11
204	341.43	1.021	1.012	0.074	0.27	12
205	335.83	1.004	1.010	0.079	0.28	9
206	323.91	0.968	0.973	0.073	0.27	12
207	322.68	0.965	0.936	0.073	0.27	12
208	311.51	0.931	0.924	0.074	0.28	12
209	308.55	0.923	0.925	0.075	0.25	12
210	304.38	0.910	0.911	0.076	0.25	12
211	290.61	0.869	0.879	0.074	0.28	11
212	289.96	0.867	0.845	0.072	0.27	12
213	282.95	0.846	0.849	0.074	0.26	11
214	282.57	0.845	0.852	0.074	0.26	11

215	282.06	0.843	0.837	0.072	0.28	11
216	280.36	0.838	0.826	0.072	0.28	10
217	279.25	0.835	0.842	0.073	0.28	11
218	275.81	0.825	0.805	0.072	0.28	10
219	265.07	0.793	0.789	0.070	0.27	12
220	265.02	0.792	0.819	0.074	0.27	10
221	257.52	0.770	0.747	0.071	0.27	11
222	257.05	0.769	0.773	0.072	0.27	11
223	317.07	0.948	0.951	0.072	0.25	13
224	287.60	0.860	0.850	0.070	0.28	12
225	286.24	0.856	0.898	0.073	0.27	11
226	278.60	0.833	0.834	0.072	0.28	12
227	277.86	0.831	0.837	0.071	0.28	12
228	276.78	0.828	0.843	0.073	0.26	11
229	274.92	0.822	0.840	0.072	0.27	11
230	267.70	0.800	0.801	0.074	0.24	11
231	267.53	0.800	0.833	0.070	0.28	12
232	267.52	0.800	0.784	0.072	0.28	12
233	266.25	0.796	0.802	0.071	0.27	12
234	263.64	0.788	0.786	0.068	0.27	12
235	263.41	0.788	0.783	0.068	0.27	12
236	248.99	0.744	0.759	0.067	0.27	13
237	248.89	0.744	0.741	0.069	0.27	13
238	247.03	0.739	0.757	0.068	0.28	13
239	246.42	0.737	0.755	0.068	0.28	13
240	237.37	0.710	0.729	0.068	0.28	13
241	330.79	0.989	1.003	0.074	0.28	12
242	324.76	0.971	0.933	0.076	0.24	11
243	322.69	0.965	0.995	0.075	0.24	11
244	321.78	0.962	0.971	0.077	0.26	11
245	308.14	0.921	0.921	0.070	0.27	14
246	306.35	0.916	0.922	0.070	0.27	14
247	299.73	0.896	0.875	0.072	0.28	12
248	298.87	0.894	0.906	0.073	0.28	12
249	293.39	0.877	0.899	0.075	0.24	11
250	291.03	0.870	0.901	0.072	0.27	11
251	281.07	0.840	0.846	0.072	0.27	12
252	276.72	0.827	0.833	0.073	0.28	11
253	258.39	0.773	0.761	0.067	0.28	13
254	257.49	0.770	0.755	0.067	0.28	13
255	248.48	0.743	0.744	0.069	0.27	13
256	247.69	0.741	0.764	0.068	0.28	13
257	336.27	1.005	1.022	0.073	0.24	12
258	323.01	0.966	0.961	0.073	0.27	11
259	300.25	0.898	0.888	0.071	0.26	13

260	282.84	0.846	0.830	0.072	0.26	13
261	278.61	0.833	0.816	0.073	0.25	12
262	271.40	0.811	0.808	0.071	0.28	13
263	271.38	0.811	0.787	0.070	0.27	13
264	269.66	0.806	0.824	0.069	0.27	13
265	258.13	0.772	0.755	0.070	0.27	12
266	318.87	0.953	0.960	0.072	0.25	13
267	302.30	0.904	0.881	0.074	0.23	12
268	262.39	0.785	0.788	0.067	0.28	14
269	260.86	0.780	0.789	0.067	0.28	14
270	272.63	0.815	0.802	0.072	0.28	13
271	268.77	0.804	0.801	0.071	0.24	12
272	328.94	0.984	1.021	0.074	0.25	13
273	326.12	0.975	0.969	0.074	0.25	13
274	260.07	0.778	0.784	0.065	0.26	15
275	260.00	0.777	0.757	0.064	0.26	15

(zdroj: vlastní)

Tabulka 2 – Seznam nalezených řešení, splňujících omezení na cenu odstranění rizik. Jsou
vypsána pouze řešení, která kvalitou překonala dřívější nalezená řešení.

id řešení	velikost n-tice	n-tice
1	1	{'34'}
2	1	{'2'}
3	1	{'32'}
4	1	{'41'}
5	1	{'41'}
6	1	{'14'}
7	1	{'14'}
8	1	{'41'}
9	2	{'49', '45'}
10	2	{'47', '21'}
11	2	{'25', '3'}
12	2	{'14', '41'}
13	2	{'14', '34'}
14	2	{'14', '41'}
15	2	{'14', '49'}
16	2	{'49', '41'}
17	2	{'14', '49'}
18	2	{'14', '49'}
19	3	{'40', '9', '10'}
20	3	{'49', '34', '43'}
21	3	{'25', '41', '30'}
22	3	{'26', '25', '41'}
23	3	{'49', '25', '26'}
24	3	{'14', '49', '1'}
25	3	{'14', '49', '1'}
26	3	{'25', '14', '49'}
27	3	{'25', '14', '49'}
28	3	{'14', '25', '49'}
29	3	{'14', '41', '49'}
30	3	{'14', '41', '49'}
31	3	{'14', '49', '41'}
32	4	{'49', '43', '12', '31'}
33	4	{'25', '31', '24', '2'}
34	4	{'28', '14', '29', '18'}
35	4	{'14', '43', '34', '46'}
36	4	{'28', '14', '21', '29'}
37	4	{'25', '32', '49', '1'}
38	4	{'25', '49', '34', '43'}
39	4	{'14', '49', '34', '17'}
40	4	{'14', '49', '34', '17'}
41	4	{'14', '49', '34', '26'}

42	4	{'14', '49', '29', '41'}
43	4	{'28', '14', '49', '41'}
44	4	{'28', '14', '49', '41'}
45	4	{'14', '49', '26', '41'}
46	4	{'25', '14', '49', '41'}
47	5	{'10', '32', '44', '11', '21'}
48	5	{'1', '47', '41', '11', '17'}
49	5	{'8', '48', '13', '49', '25'}
50	5	{'16', '15', '43', '14', '26'}
51	5	{'15', '32', '49', '9', '17'}
52	5	{'1', '47', '49', '18', '14'}
53	5	{'1', '47', '49', '18', '14'}
54	5	{'43', '49', '41', '35', '25'}
55	5	{'43', '47', '49', '14', '25'}
56	5	{'43', '47', '49', '14', '25'}
57	5	{'1', '41', '49', '18', '14'}
58	5	{'1', '41', '49', '18', '14'}
59	5	{'49', '41', '24', '14', '26'}
60	5	{'47', '32', '49', '14', '26'}
61	5	{'10', '47', '49', '14', '25'}
62	5	{'10', '47', '49', '14', '25'}
63	5	{'40', '49', '41', '14', '25'}
64	5	{'49', '41', '14', '25', '30'}
65	5	{'49', '41', '14', '25', '30'}
66	5	{'47', '49', '41', '14', '25'}
67	5	{'49', '41', '14', '25', '26'}
68	5	{'49', '41', '14', '25', '26'}
69	6	{'40', '0', '12', '13', '49', '29'}
70	6	{'40', '0', '49', '23', '38', '26'}
71	6	{'9', '18', '35', '14', '25', '30'}
72	6	{'29', '9', '18', '35', '14', '25'}
73	6	{'27', '9', '18', '14', '25', '30'}
74	6	{'27', '9', '18', '14', '25', '30'}
75	6	{'49', '9', '18', '14', '25', '30'}
76	6	{'27', '41', '49', '18', '14', '25'}
77	6	{'4', '41', '49', '9', '14', '25'}
78	6	{'4', '41', '49', '9', '14', '25'}
79	6	{'15', '41', '49', '9', '14', '25'}
80	6	{'32', '41', '49', '14', '25', '26'}
81	6	{'32', '41', '49', '14', '25', '26'}
82	6	{'47', '41', '49', '14', '25', '26'}
83	7	{'8', '12', '39', '32', '41', '44', '26'}
84	7	{'5', '8', '42', '27', '49', '21', '23'}
85	7	{'31', '15', '19', '6', '38', '14', '26'}
86	7	{'26', '43', '10', '49', '6', '33', '17'}

87	7	{'5', '0', '10', '28', '49', '38', '26'}
88	7	{'8', '27', '13', '1', '49', '14', '17'}
89	7	{'5', '27', '39', '49', '9', '14', '26'}
90	7	{'8', '27', '43', '49', '25', '33', '26'}
91	6	{'27', '43', '1', '14', '25', '26'}
92	7	{'22', '27', '15', '43', '49', '14', '25'}
93	7	{'8', '36', '27', '43', '49', '14', '25'}
94	7	{'22', '15', '43', '10', '49', '14', '25'}
95	7	{'22', '15', '43', '10', '49', '14', '25'}
96	7	{'15', '43', '28', '49', '41', '9', '26'}
97	7	{'15', '49', '9', '14', '25', '26', '46'}
98	7	{'34', '10', '49', '9', '2', '14', '26'}
99	7	{'21', '10', '49', '9', '14', '25', '26'}
100	7	{'21', '10', '49', '9', '14', '25', '26'}
101	7	{'43', '49', '9', '14', '25', '26', '30'}
102	7	{'26', '10', '49', '9', '14', '25', '17'}
103	7	{'26', '10', '49', '9', '14', '25', '17'}
104	7	{'49', '41', '9', '14', '25', '26', '30'}
105	7	{'34', '49', '41', '9', '14', '25', '26'}
106	7	{'15', '49', '41', '9', '14', '25', '26'}
107	8	{'42', '7', '3', '47', '9', '18', '35', '21'}
108	8	{'15', '34', '19', '48', '13', '28', '49', '44'}
109	8	{'5', '4', '43', '39', '41', '6', '25', '26'}
110	8	{'43', '12', '19', '1', '49', '41', '38', '26'}
111	8	{'43', '12', '19', '1', '49', '41', '38', '26'}
112	8	{'5', '27', '26', '43', '41', '18', '25', '23'}
113	8	{'15', '34', '48', '47', '49', '41', '11', '26'}
114	8	{'5', '15', '43', '34', '49', '41', '11', '14'}
115	8	{'5', '34', '47', '49', '41', '24', '18', '14'}
116	8	{'34', '49', '41', '29', '11', '35', '14', '30'}
117	8	{'4', '15', '28', '49', '41', '14', '26', '30'}
118	8	{'19', '10', '49', '41', '2', '14', '26', '30'}
119	8	{'15', '3', '49', '41', '14', '25', '26', '30'}
120	8	{'27', '19', '49', '41', '35', '14', '25', '26'}
121	8	{'27', '34', '49', '41', '14', '25', '26', '30'}
122	8	{'15', '1', '49', '41', '9', '14', '25', '26'}
123	8	{'43', '1', '49', '41', '9', '14', '25', '26'}
124	9	{'0', '10', '3', '29', '6', '18', '35', '45', '31'}
125	9	{'0', '10', '28', '37', '6', '38', '21', '45', '46'}
126	9	{'42', '4', '0', '43', '7', '44', '9', '2', '14'}
127	9	{'15', '34', '11', '41', '44', '24', '38', '25', '33'}
128	9	{'15', '7', '34', '12', '10', '38', '35', '21', '26'}
129	9	{'5', '43', '7', '1', '28', '49', '25', '17', '30'}
130	9	{'43', '7', '47', '28', '49', '17', '14', '25', '23'}
131	8	{'19', '28', '41', '29', '49', '2', '14', '25'}

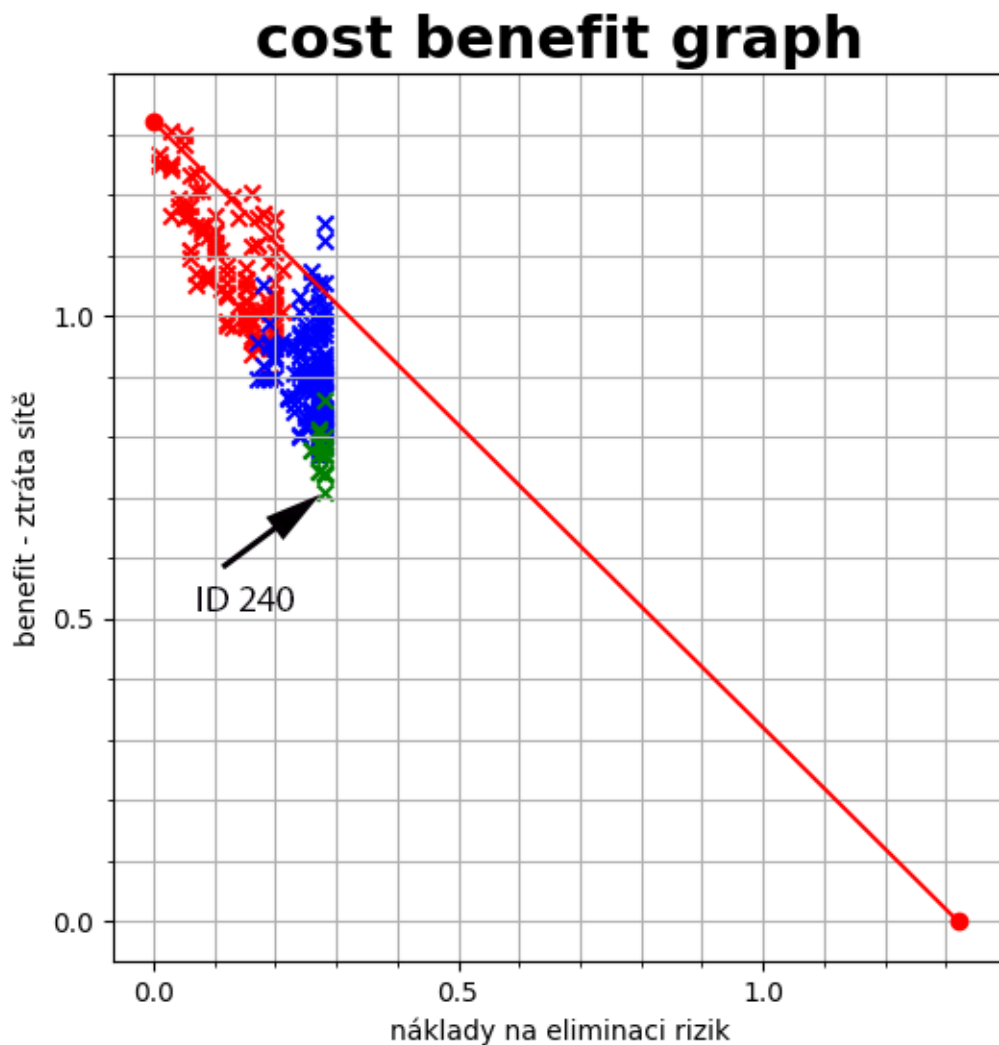
132	8	{'12', '47', '41', '29', '49', '2', '14', '25'}
133	8	{'16', '47', '41', '29', '49', '2', '14', '25'}
134	9	{'42', '15', '7', '1', '47', '49', '14', '25', '17'}
135	9	{'42', '15', '7', '1', '47', '49', '14', '25', '17'}
136	9	{'19', '47', '28', '41', '29', '49', '14', '25', '33'}
137	9	{'42', '19', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '33'}
138	9	{'27', '43', '12', '47', '41', '49', '35', '14', '25'}
139	9	{'27', '12', '19', '47', '41', '49', '9', '14', '25'}
140	9	{'4', '1', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '46'}
141	9	{'4', '1', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '46'}
142	9	{'26', '19', '47', '39', '41', '49', '14', '25', '17'}
143	9	{'16', '0', '27', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
144	9	{'43', '19', '13', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
145	9	{'43', '19', '13', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
146	9	{'8', '27', '1', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
147	9	{'4', '19', '47', '32', '41', '49', '14', '25', '26'}
148	9	{'4', '19', '47', '32', '41', '49', '14', '25', '26'}
149	10	{'0', '19', '41', '37', '44', '24', '25', '26', '45', '30'}
150	10	{'15', '1', '39', '14', '29', '37', '18', '2', '21', '26'}
151	9	{'10', '47', '3', '11', '18', '2', '14', '25', '17'}
152	9	{'10', '47', '3', '11', '18', '2', '14', '25', '17'}
153	9	{'5', '21', '42', '4', '10', '18', '14', '25', '17'}
154	9	{'5', '21', '42', '4', '10', '18', '14', '25', '17'}
155	10	{'15', '34', '48', '47', '49', '29', '6', '18', '25', '17'}
156	10	{'5', '42', '15', '10', '32', '49', '18', '38', '21', '25'}
157	9	{'21', '15', '10', '47', '32', '49', '18', '14', '25'}
158	9	{'40', '10', '47', '32', '49', '18', '14', '25', '30'}
159	9	{'40', '10', '47', '32', '49', '18', '14', '25', '30'}
160	10	{'40', '19', '10', '47', '32', '44', '18', '14', '25', '17'}
161	10	{'40', '19', '10', '47', '32', '44', '18', '14', '25', '17'}
162	10	{'5', '21', '4', '43', '3', '49', '41', '14', '25', '30'}
163	10	{'5', '27', '19', '3', '47', '32', '49', '41', '14', '26'}
164	10	{'5', '8', '27', '3', '32', '49', '41', '14', '25', '26'}
165	10	{'5', '27', '3', '28', '32', '49', '41', '14', '25', '26'}
166	10	{'42', '15', '48', '47', '41', '49', '14', '25', '26', '30'}
167	10	{'8', '15', '34', '47', '32', '49', '41', '14', '25', '26'}
168	10	{'4', '27', '19', '28', '47', '49', '41', '14', '25', '26'}
169	10	{'5', '27', '43', '28', '47', '49', '41', '14', '25', '26'}
170	10	{'19', '10', '47', '32', '49', '41', '9', '14', '25', '26'}
171	11	{'22', '13', '49', '20', '41', '6', '18', '45', '33', '23', '46'}
172	11	{'16', '42', '15', '1', '28', '20', '37', '29', '11', '18', '46'}
173	11	{'16', '8', '4', '26', '43', '10', '20', '18', '21', '45', '23'}
174	11	{'36', '22', '4', '27', '13', '3', '44', '41', '18', '35', '26'}
175	11	{'16', '15', '34', '19', '10', '49', '37', '44', '38', '2', '31'}
176	11	{'16', '8', '43', '10', '20', '6', '18', '25', '26', '46', '30'}

177	11	{'5', '40', '4', '12', '10', '47', '44', '41', '6', '2', '46'}
178	10	{'36', '27', '7', '43', '19', '13', '3', '32', '41', '25'}
179	10	{'36', '27', '7', '43', '19', '13', '3', '32', '41', '25'}
180	11	{'8', '43', '19', '10', '20', '6', '23', '25', '26', '46', '30'}
181	11	{'16', '8', '43', '34', '10', '20', '6', '38', '25', '26', '30'}
182	11	{'16', '8', '43', '19', '10', '6', '18', '38', '25', '26', '30'}
183	11	{'16', '8', '43', '19', '10', '6', '18', '38', '25', '26', '30'}
184	11	{'8', '7', '43', '19', '10', '23', '38', '17', '25', '26', '30'}
185	11	{'4', '27', '48', '10', '3', '41', '6', '25', '26', '46', '30'}
186	11	{'4', '27', '48', '10', '3', '41', '6', '25', '26', '46', '30'}
187	9	{'4', '10', '47', '41', '6', '14', '25', '26', '30'}
188	9	{'4', '10', '47', '41', '6', '14', '25', '26', '30'}
189	11	{'4', '15', '34', '10', '13', '41', '49', '6', '14', '25', '26'}
190	11	{'4', '15', '34', '41', '49', '6', '14', '25', '26', '46', '30'}
191	10	{'5', '16', '10', '41', '49', '9', '17', '14', '25', '26'}
192	10	{'16', '27', '19', '28', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
193	10	{'16', '27', '19', '28', '47', '41', '49', '14', '25', '26'}
194	11	{'27', '19', '28', '47', '49', '29', '6', '41', '14', '25', '26'}
195	11	{'4', '15', '34', '19', '10', '32', '41', '49', '24', '14', '26'}
196	11	{'4', '27', '43', '19', '10', '39', '41', '49', '14', '25', '26'}
197	11	{'5', '4', '27', '10', '41', '49', '9', '18', '14', '26', '30'}
198	11	{'27', '43', '10', '47', '32', '41', '49', '14', '25', '26', '45'}
199	11	{'27', '43', '10', '47', '32', '41', '49', '14', '25', '26', '45'}
200	11	{'5', '27', '10', '47', '32', '41', '49', '6', '14', '25', '26'}
201	11	{'5', '27', '10', '47', '32', '41', '49', '6', '14', '25', '26'}
202	11	{'4', '27', '19', '10', '41', '29', '49', '14', '25', '26', '30'}
203	11	{'4', '27', '19', '10', '41', '29', '49', '14', '25', '26', '30'}
204	12	{'40', '27', '15', '26', '12', '10', '41', '37', '6', '14', '23', '46'}
205	9	{'27', '43', '34', '1', '47', '24', '38', '17', '26'}
206	12	{'5', '40', '42', '4', '15', '43', '19', '10', '9', '38', '45', '17'}
207	12	{'5', '40', '42', '4', '15', '43', '19', '10', '9', '38', '45', '17'}
208	12	{'5', '15', '34', '48', '49', '41', '9', '6', '18', '35', '31', '30'}
209	12	{'5', '40', '15', '43', '1', '49', '41', '29', '17', '14', '45', '31'}
210	12	{'5', '40', '15', '43', '1', '49', '41', '29', '17', '14', '45', '31'}
211	11	{'16', '40', '27', '19', '3', '41', '18', '35', '14', '25', '17'}
212	12	{'15', '19', '3', '41', '29', '6', '9', '18', '2', '35', '14', '25'}
213	11	{'5', '40', '27', '19', '41', '49', '18', '14', '25', '17', '45'}
214	11	{'5', '40', '27', '19', '41', '49', '18', '14', '25', '17', '45'}
215	11	{'16', '19', '3', '47', '41', '49', '18', '35', '14', '25', '30'}
216	10	{'4', '27', '19', '10', '28', '47', '41', '49', '14', '25'}
217	11	{'40', '27', '19', '10', '47', '32', '41', '29', '49', '14', '17'}
218	10	{'27', '26', '10', '41', '49', '9', '14', '25', '17', '30'}
219	12	{'5', '40', '27', '10', '47', '41', '49', '18', '14', '25', '26', '45'}
220	10	{'5', '27', '10', '47', '32', '41', '49', '14', '25', '26'}
221	11	{'4', '27', '43', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}

222	11	{'4', '27', '43', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}
223	13	{'31', '22', '1', '3', '28', '41', '49', '18', '35', '14', '45', '26', '46'}
224	12	{'15', '43', '19', '10', '47', '32', '49', '44', '9', '38', '25', '46'}
225	11	{'5', '8', '15', '47', '49', '41', '9', '6', '14', '25', '46'}
226	12	{'5', '27', '43', '19', '1', '28', '41', '49', '18', '14', '25', '46'}
227	12	{'5', '27', '43', '19', '1', '28', '41', '49', '18', '14', '25', '46'}
228	11	{'5', '16', '8', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}
229	11	{'5', '8', '15', '10', '47', '32', '41', '49', '9', '14', '26'}
230	11	{'5', '8', '15', '3', '47', '41', '49', '18', '14', '25', '26'}
231	12	{'8', '15', '19', '10', '32', '41', '49', '6', '18', '14', '25', '17'}
232	12	{'25', '8', '19', '3', '47', '32', '41', '49', '18', '14', '45', '26'}
233	12	{'8', '15', '7', '19', '3', '47', '32', '41', '18', '14', '25', '26'}
234	12	{'8', '15', '7', '10', '47', '41', '49', '18', '17', '14', '25', '26'}
235	12	{'8', '15', '7', '10', '47', '41', '49', '18', '17', '14', '25', '26'}
236	13	{'15', '7', '19', '10', '47', '32', '41', '29', '49', '18', '14', '25', '26'}
237	13	{'15', '7', '19', '10', '47', '32', '41', '29', '49', '18', '14', '25', '26'}
238	13	{'8', '15', '26', '19', '10', '47', '41', '29', '49', '18', '14', '25', '17'}
239	13	{'8', '15', '26', '19', '10', '47', '41', '29', '49', '18', '14', '25', '17'}
240	13	{'15', '27', '43', '26', '19', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '17'}
241	12	{'42', '34', '7', '19', '1', '28', '14', '44', '38', '35', '21', '26'}
242	11	{'16', '31', '27', '26', '43', '19', '48', '41', '14', '17', '46'}
243	11	{'16', '31', '27', '26', '43', '19', '48', '41', '14', '17', '46'}
244	11	{'7', '1', '28', '49', '41', '38', '35', '21', '45', '26', '30'}
245	14	{'16', '5', '27', '15', '43', '12', '19', '49', '29', '18', '38', '35', '14', '45'}
246	14	{'16', '5', '27', '15', '43', '12', '19', '49', '29', '18', '38', '35', '14', '45'}
247	12	{'5', '40', '42', '4', '27', '43', '34', '10', '49', '38', '35', '26'}
248	12	{'5', '40', '42', '4', '27', '43', '34', '10', '49', '38', '35', '26'}
249	11	{'16', '21', '27', '43', '19', '41', '49', '29', '38', '14', '17'}
250	11	{'16', '4', '15', '19', '3', '47', '41', '49', '38', '14', '17'}
251	12	{'5', '4', '27', '12', '3', '47', '41', '49', '6', '29', '14', '26'}
252	11	{'21', '27', '19', '1', '47', '41', '29', '9', '49', '14', '26'}
253	13	{'42', '15', '27', '34', '7', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}
254	13	{'42', '15', '27', '34', '7', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}
255	13	{'40', '27', '43', '19', '10', '47', '41', '29', '49', '14', '25', '26', '46'}
256	13	{'21', '4', '15', '27', '43', '19', '10', '41', '29', '49', '14', '25', '26'}
257	12	{'40', '0', '7', '19', '49', '29', '41', '37', '20', '18', '44', '26'}
258	11	{'31', '15', '19', '10', '1', '32', '47', '38', '2', '26', '46'}
259	13	{'8', '43', '3', '10', '41', '49', '24', '18', '38', '14', '45', '26', '30'}
260	13	{'27', '43', '7', '19', '49', '29', '9', '6', '38', '14', '25', '26', '45'}
261	12	{'27', '43', '7', '19', '49', '29', '9', '6', '38', '14', '25', '26'}
262	13	{'5', '43', '7', '19', '1', '47', '41', '49', '29', '18', '14', '25', '45'}
263	13	{'5', '7', '19', '1', '10', '41', '29', '9', '49', '6', '14', '26', '30'}
264	13	{'5', '7', '19', '1', '10', '41', '29', '9', '49', '6', '14', '26', '30'}

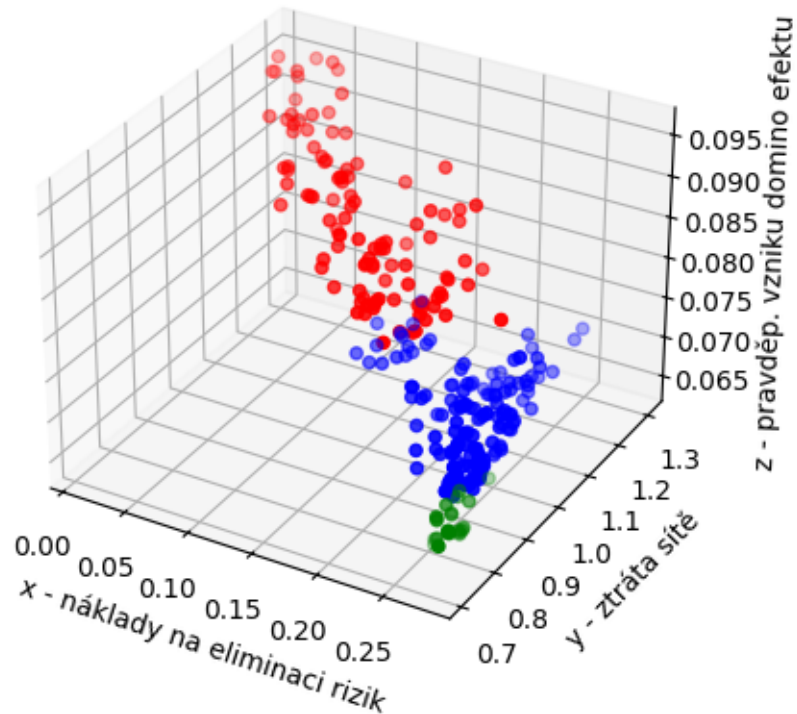
265	12	{'5', '19', '10', '47', '49', '29', '41', '38', '14', '25', '26', '30'}
266	13	{'40', '17', '43', '34', '10', '47', '44', '41', '29', '35', '45', '26', '46'}
267	12	{'42', '15', '43', '3', '49', '29', '6', '41', '18', '35', '25', '17'}
268	14	{'27', '15', '7', '34', '10', '47', '3', '49', '29', '41', '14', '25', '26', '45'}
269	14	{'27', '15', '7', '34', '10', '47', '3', '49', '29', '41', '14', '25', '26', '45'}
270	13	{'8', '15', '34', '19', '3', '47', '49', '41', '35', '14', '26', '46', '30'}
271	12	{'25', '15', '19', '3', '10', '47', '49', '41', '35', '14', '45', '26'}
272	13	{'5', '43', '7', '19', '3', '32', '49', '41', '44', '24', '18', '11', '45'}
273	13	{'5', '43', '7', '19', '3', '32', '49', '41', '44', '24', '18', '11', '45'}
274	15	{'15', '26', '7', '19', '3', '10', '41', '49', '6', '18', '38', '14', '25', '17', '46'}
275	15	{'15', '26', '7', '19', '3', '10', '41', '49', '6', '18', '38', '14', '25', '17', '46'}

(zdroj: vlastní)



Obrázek 5 – CBA ve formě grafu pro jednotlivá řešení z Tabulka 1 resp. Tabulka 2. Červená čára odděluje efektivní a neefektivní řešení. Levý horní bod na ose y odpovídá originální síti bez úprav. Ostrá hrana v bodech řešení na pravé straně je způsobena tím, že mezi nejlepší řešení jsou zařazena pouze ta, která splňují podmínku maximálních nákladů na mitigaci. Je označeno nejlepší řešení ID 240, které splňuje všechny podmínky. osa x jsou náklady mitigace, osa y střední ztráta sítě při domino efektu po provedení zpětné transformace iniciačních pravděpodobností. Řešení jsou současně barevně kódována (podle zde nezobrazené osy z, protože se jedná o průmět Obrázku 6 do roviny základny z, y): červené křížky P_{inic} sítě netolerovatelné, modré – tolerovatelné, zelené – akceptovatelné.
(zdroj: vlastní)

kombinace CBA a ALARP



Obrázek 6 – 3D zobrazení řešení s doplněním osy z pro pravděpodobnost domino efektu. Kombinace CBA a ALARP ve formě grafu pro jednotlivá řešení z Tabulka 1 resp. Tabulka 2. Bodům z Obr. 5 byla přidána souřadnice z – pravděpodobnost vzniku domino efektu, kde hranice byly nastaveny: $P_{\text{inic}} > 0.08$ netolerovatelné (červené body), $0.08 > P_{\text{inic}} > 0.07$ – tolerovatelné (modré body), $P_{\text{inic}} < 0.07$ – akceptovatelné (zelené body). Osa x jsou náklady mitigace, osa y střední ztráta sítě při domino efektu po provedení zpětné transformace iniciačních pravděpodobností.

(zdroj: vlastní)

Tabulka 3 – Řešení vybraná jako akceptovatelná podle principu ALARP pro P_{inic} celé sítě menší než 0.07. Zeleně zvýrazněno řešení ID 240, které bylo vybráno jako celkově nejlepší nalezené řešení.

id řešení	velikost n_tice	result_node_n_tice
231	12	{'10', '14', '15', '17', '18', '19', '25', '32', '41', '49', '6', '8'}
234	12	{'10', '14', '15', '17', '18', '25', '26', '41', '47', '49', '7', '8'}
236	13	{'10', '14', '15', '18', '19', '25', '26', '29', '32', '41', '47', '49', '7'}
238	13	{'10', '14', '15', '17', '18', '19', '25', '26', '29', '41', '47', '49', '8'}
240	13	{'10', '14', '15', '17', '19', '25', '26', '27', '29', '41', '43', '47', '49'}
253	13	{'10', '14', '15', '25', '26', '27', '29', '34', '41', '42', '47', '49', '7'}
255	13	{'10', '14', '19', '25', '26', '27', '29', '40', '41', '43', '46', '47', '49'}
256	13	{'10', '14', '15', '19', '21', '25', '26', '27', '29', '4', '41', '43', '49'}
263	13	{'1', '10', '14', '19', '26', '29', '30', '41', '49', '5', '6', '7', '9'}
264	13	{'1', '10', '14', '19', '26', '29', '30', '41', '49', '5', '6', '7', '9'}
265	12	{'10', '14', '19', '25', '26', '29', '30', '38', '41', '47', '49', '5'}
268	14	{'10', '14', '15', '25', '26', '27', '29', '3', '34', '41', '45', '47', '49', '7'}
274	15	{'10', '14', '15', '17', '18', '19', '25', '26', '3', '38', '41', '46', '49', '6', '7'}

(zdroj: vlastní)