

Simulační modely vybraných nestabilních systémů

Bc. Martin Vybíral

Diplomová práce
2025



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

Ústav automatizace a řídicí techniky

Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	Bc. Martin Vybíral
Osobní číslo:	A22326
Studijní program:	N0714A150006 Automatické řízení a informatika v průmyslu 4.0
Forma studia:	Kombinovaná
Téma práce:	Simulační modely vybraných nestabilních systémů
Téma práce anglicky:	Simulation Models of Selected Unstable Systems

Zásady pro vypracování

1. Vypracujte literární rešerši na dané téma.
2. Důkladně se seznámte se stávající podobou a vnitřní strukturou projektu Webové databáze nestabilních systémů.
3. Připravte podklady pro doplnění uvedené databáze o min. 5 dalších modelů reálných nestabilních systémů.
4. Dané podklady připravte ve dvojjazyčné mutaci (česky/anglicky) ve vedoucím definovaném formátu s následující strukturou: stručný popis systému a jeho proměnných, vhodný obrázek, uvažovaný matematický model včetně použitých parametrů a zdroj(e) informací.
5. Pro každý ze systémů vytvořte odpovídající simulační schéma v programovém prostředí MATLAB/Simulink postavené na uvažovaném matematickém modelu.
6. U vybraného nestabilního systému navrhnete vhodný algoritmus řízení, simulačně ho ověřte, a pokud to bude prakticky možné, tak i experimentálně na odpovídajícím zařízení z Laboratoře reálných modelů Ústavu řízení procesů FAI UTB ve Zlíně.

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. PADMA SREE, R. a CHIDAMBARAM, M. *Control of unstable systems*. Oxford: Alpha Science Int. Ltd., 2006. ISBN 1-84265-287-7.
2. FORMALSKII, A. M. *Stabilisation and motion control of unstable objects*. Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015. ISBN 978-3-11-037582-4.
3. KOLAŘÍK, J. *Webová databáze nestabilních systémů*. Zlín, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky.
4. MAJER, J. *Aktualizace a rozšíření webové databáze nestabilních systémů*. Zlín, 2019. Bakalářská práce. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky.
5. GAZDOŠ, F. Introducing a New Tool for Studying Unstable Systems. Online. *International Journal of Automation and Computing*. 2014, roč. 11, č. 6, s. 580-587. ISSN 1476-8186. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s11633-014-0844-z>. [cit. 2023-11-11].
6. BALÁTEJ, J. *Automatické řízení*. Praha: BEN, 2004. ISBN 978-80-7300-148-3.
7. SKOGESTAD, S. a POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. Chichester: Wiley, 2008. ISBN 0-470-01168-8.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. František Gazdoš, Ph.D.**
Ústav řízení procesů

Datum zadání diplomové práce: **6. prosince 2024**

Termín odevzdání diplomové práce: **27. května 2025**

doc. Ing. Jiří Vojtěšek, Ph.D. v.r.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc. v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 6. prosince 2024

PROHLÁŠENÍ AUTORA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Beru na vědomí, že

- odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění bez ohledu na výsledek obhajoby;
- diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému a bude dostupná k nahlédnutí;
- jedno vyhotovení diplomové práce v listinné podobě bude ponecháno Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně k uložení;
- na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- podle § 60 odst. 1 autorského zákona má Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- podle § 60 odst. 2 a 3 mohu užít své dílo – diplomovou práci – nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tj. k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá; neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

- jsem na diplomové práci pracoval(a) samostatně a použitou literaturu jsem řádně citoval(a); v případě publikace výsledků budu uveden(a) jako spoluautor;
- odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou obsahově totožné.

Ve Zlíně, dne ..27.5.2025.....

.....
podpis autora

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zaměřuje na tvorbu vybraných simulačních modelů reálných nestabilních systémů, určených pro Webovou databázi nestabilních systémů. Praktická část práce je věnována vývoji šesti simulačních modelů v prostředí MATLAB/Simulink, které reprezentují různé typy nestabilních systémů včetně příslušné dokumentace ve dvojjazyčné mutaci – česky/anglicky. Na závěr práce je prezentován návrh řízení a jeho praktická realizace pro jeden z daných nestabilních systémů, konkrétně edukační model helikoptéry CE150.

Klíčová slova: nestabilní systémy, simulační model, stabilita, MATLAB/Simulink

ABSTRACT

This diploma thesis focuses on the development of selected simulation models of real unstable systems intended for the Web Database of Unstable Systems. The practical part of the thesis is dedicated to the implementation of six simulation models in the MATLAB/Simulink environment, representing various types of unstable systems, including corresponding documentation in a bilingual version – Czech and English. The thesis concludes with a controller design and its practical implementation for one of the presented unstable systems, specifically the CE150 educational helicopter model

Keywords: unstable systems, simulation model, stability, MATLAB/Simulink

Rád bych zde poděkoval vedoucímu mé diplomové práce, panu doc. Ing. Františkovi Gazdošovi, Ph.D. za jeho cenné rady, čas věnovaný této práci, trpělivost a skvělou zpětnou vazbu.

OBSAH

ÚVOD.....	11
I TEORETICKÁ ČÁST	12
1 LITERÁRNÍ REŠERŠE	13
2 DATABÁZE NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ	15
2.1 VYUŽITELNOST	15
2.2 INFORMACE OBSAŽENÉ V DATABÁZI	16
2.3 UŽIVATELSKÉ ROZHRANÍ DATABÁZE.....	17
2.4 HISTORIE A BUDOUCÍ VÝVOJ	17
2.5 AKTUÁLNÍ REKONSTRUKCE DATABÁZE	17
3 STABILITA DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	19
3.1 VYBRANÉ DEFINICE STABILITY	19
3.1.1 BIBO stabilita.....	19
3.1.2 Asymptotická stabilita.....	19
3.1.3 Ljapunovská stabilita	19
3.2 STABILITA LINEÁRNÍCH SPOJITÝCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	20
3.2.1 Kritéria stability	23
3.3 STABILITA DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ.....	29
4 POLYNOMIÁLNÍ PRÍSTUP V NÁVRHU REGULÁTORU	33
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	35
5 MODEL NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ	36
5.1 KULIČKA NA PLOŠE	36
5.1.1 Matematický model.....	37
5.1.2 Simulační model.....	40
5.1.3 Model edukačního zařízení CE151	42
5.2 DVOUKOLOVÝ NESTABILNÍ ROBOT	44
5.2.1 Matematický model.....	44
5.2.2 Simulační model.....	47
5.3 PRŮTOČNÝ CHEMICKÝ REAKTOR S PLÁŠTĚM	49
5.3.1 Matematický model.....	50
5.3.2 Simulační model.....	53
5.4 ORIENTACE DRUŽICE	55
5.4.1 Matematický model.....	55
5.4.2 Simulační model.....	57
5.5 MODEL HELIKOPTÉRY CE150.....	59
5.5.1 Matematický model.....	60
5.5.2 Simulační model.....	62

5.6	DVOJITÉ KYVADLO	65
5.6.1	Matematický model.....	66
5.6.2	Simulační model.....	68
6	ŘÍZENÍ VYBRANÉHO NESTABILNÍHO SYSTÉMU.....	71
6.1	SPECIFIKACE KOMUNIKAČNÍHO ROZHRANÍ	71
6.1.1	Přepočty jednotek pro elevaci a azimut.....	71
6.2	IDENTIFIKACE A NÁVRH MODELU PRO ŘÍZENÍ	71
6.2.1	Linearizace	73
6.3	REGULACE.....	76
6.3.1	Výsledky regulace	78
ZÁVĚR.....		82
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY		83
SEZNAM OBRÁZKŮ		86
SEZNAM TABULEK.....		88
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK		89
SEZNAM PŘÍLOH.....		90

ÚVOD

Nestabilní systémy představují významnou výzvu v oblasti automatického řízení, modelování a simulace. Stabilita dynamického systému obecně označuje schopnost systému vrátit se po poruše nebo výchylce zpět do původního (rovnovážného) stavu nebo zůstat v jeho blízkosti. Naopak, nestabilní systémy reagují na malé odchylky nekontrolovaným růstem některých jejich veličin bez omezení – často exponenciálním růstem. Takové chování je nejen nebezpečné v reálných aplikacích, ale také znemožňuje jednodušší typy řízení bez vhodné zpětnovazební stabilizace.

Moderní softwarové nástroje, jako je MATLAB/Simulink, umožňují vytvářet poměrně přesné simulační modely, které nacházejí uplatnění jak při vývoji řídicích algoritmů, tak ve výuce teorie automatického řízení. V této souvislosti vznikla na naší fakultě Webová databáze nestabilních systémů [1], která do budoucna může sloužit jako otevřená platforma pro sdílení a využití modelů mezi akademickou i odbornou veřejností. Cílem této práce je databázi dále rozšířit a zkvalitnit vytvořením nových, různorodě zaměřených modelů, které pokrývají reálně se vyskytující typy nestabilních systémů a umožňují jejich simulaci, analýzu i návrh řízení.

I TEORETICKÁ ČÁST

1 LITERÁRNÍ REŠERŠE

Určení, zda je regulační obvod nebo jeho část nestabilní, je nedílnou součástí prakticky každé publikace, která se věnuje problematice automatického řízení. V daných publikacích jsou často nestabilní systémy prezentovány nejčastěji jako určitá přenosová funkce nebo stavový popis, často bez určení, o jaký reálný systém se může jednat. Kromě toho však existují i odborné publikace a články, které se zabývají popisem, modelováním a regulací reálných systémů, které mají nestabilní chování, přičemž modelem se pro účely této práce rozumí model matematický, model popsany přenosovými funkcemi nebo odpovídajícím stavovým popisem, kde tyto byly získány použitím identifikačních metod, případně na základě matematického nebo identifikovaného modelu odvozený počítačový simulační model. V následujícím textu je vybraný přehled takových prací, případně prací, které mají podstatný význam pro řízení nestabilních systémů a nějakým způsobem se vztahují k této diplomové práci.

Jako jedna ze stěžejních prací je považován článek „Respect the Unstable“ od Guntera Steina [2], který je významným a srozumitelným varováním před přeceňováním matematických metod v řízení na úkor porozumění fyzikální realitě a praktickým omezením, včetně několika konkrétních příkladů. „Control Limitations for Unstable Plants“ od autorů Sigurda Skogestada, Kjetila Havreho a Trulse Larssona [3] je další zajímavý článek, který upozorňuje na možné omezení při řízení nestabilních systémů.

Kromě řady článků byly vydány i publikace, které se celé věnují modelování a řízení nestabilních procesů. Autoři Padma Sree a Chidambaram. se v knize „Control of unstable systems“. [4] věnují řízení nestabilních systémů pomocí PID regulátorů. Kniha obsahuje hodně konkrétních příkladů, hlavně z oblasti chemického průmyslu (např. CSTR reaktory). Další publikace od autora Alexander M. Formal'skii, „Stabilisation and motion control of unstable objects“ [5] se věnuje hlavně nestabilním mechanickým systémům jako je např. inverzní kyvadlo.

Co se týká podobných, veřejně přístupných webových databází modelů nestabilních systémů, je Webová databáze nestabilních systémů [1] je unikátní projekt, momentálně se v internetovém prostoru podobná, veřejně přístupná databáze modelů pro Matlab-Simulink, ani pro jiný simulační software dle dostupných informací autora nevyskytuje.

Řadu dalších modelů nestabilních systémů lze často nalézt v literatuře, která se věnuje modelování a automatickému řízení pro určité specifické obory. Jedním z těchto oborů je

např. chemické a biochemické procesní inženýrství. V daném odvětví se nachází značné množství potenciálních nestabilních systémů jako jsou např. CSTR reaktory, fluidní reaktory, polymerizační reaktory, bioreaktory, destilační kolony apod. Vzhledem k ekonomickému významu těchto procesů existuje bohatá, často velmi rozsáhlá, odborná literatura, jako např. publikace [6][7]. Dalšími obory, kde se často vyskytují přirozeně nestabilní systémy jsou dále např. letectví a kosmonautika [8] nebo robotika [9].

Dalším cenným zdrojem v této oblasti jsou kvalifikační práce, např. práce které se zabývají nestabilními systémy [10] nebo různými edukačními modely, jako je model magnetické levitace [11], v neposlední řadě bylo publikováno enormní množství různých vědeckých článků, které popisují nějaký konkrétní nestabilní systém, ale jejich výčet není rozhodně cílem této předkládané kvalifikační práce.

2 DATABÁZE NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ

Databáze nestabilních systémů je přes webové rozhraní přístupná databáze matematických a simulačních modelů reálných vybraných nestabilních systémů.[1] Databáze je dvojjazyčná (čeština/angličtina). Úvodní stránka – viz Obrázek 1 níže.

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Databáze nestabilních systémů

ÚVOD NESTABILNÍ SYSTÉMY STABILITA KONTAKT O PROJEKTU

Vyhledat...

Jste zde:

PŘIHLAŠOVACÍ FORMULÁŘ

Uživatelské jméno
mavy

Heslo
.....

Pamatuj si mě ☐

- Zapomenuté heslo?
- Zapomenuté jméno?
- Vytvořit účet

NEJNOVĚJŠÍ PŘÍSPĚVKY

- **Balistická raketa**
25. 05. 2012 11:38
- **Průtočný chemický reaktor**
22. 05. 2012 19:28
- **Inverzní kyvadlo**
20. 05. 2012 18:08

NEJČTENĚJŠÍ ČLÁNKY

- Inverzní kyvadlo
- Magnetická levitace
- Průtočný chemický reaktor

UŽITEČNÉ ODKAZY

- UTB ve Zlíně, FAI

RSS KANÁL

RSS kanál z této stránky

ÚVODNÍ STRANA

Vítejte v databázi nestabilních systémů

Na webových stránkách tohoto projektu můžete nalézt mimo samotných modelů nestabilních systémů v sekci *nestabilní systémy* také stručný popis stability systémů obecně v sekci *stabilita*. Pro práci s publikovanými modely si prosím nejprve prostudujte podmínky užití v sekci *o projektu*. V případě dotazů či připomínek použijte prosím kontaktní formulář v sekci *kontakt*.

Ke trojici nejvíce zobrazovaných modelů systémů a také ke trojici nejnovějších modelů v databázi můžete přistupovat přímo ze seznamů v levém postranním sloupci pod přihlašovacím formulářem.

Pokud je Váš zájem o nestabilní systémy hlubší, můžete využít registrace.

Proč se registrovat?

Registraci na stránkách projektu získáte pouze výhody v podobě větší interaktivnosti stránek a v neposlední řadě také přístup k částem obsahu přístupným pouze registrovaným uživatelům. Výhody jsou následující:

- Možnost hodnocení článků
- Možnost přidávání komentářů k modelům systémů
- Přístup k souborům s modelem systémů (např. v MATLAB/Simulink)
- Zaslání novinek na e-mail

Poslední novinky:

Revize ukončena

Zveřejněno 24. 10. 2013 9:42 Napsal František Gazdčík

Revize a doplnění webu včetně aktualizace všech simulačních souborů byla úspěšně finalizována. V rámci dalších plánovaných závěrečných studentských prací by se měl web dále rozrůstat a vylepšovat... 😊

Revize a doplnění webu

Zveřejněno 3. 10. 2013 13:09 Napsal František Gazdčík

V současné době probíhá důkladná revize a doplnění informací obsažených na tomto webu, včetně simulačních souborů. Po této fázi se začne web dále rozrůstat a vylepšovat...

Uvedení webu do provozu

Zveřejněno 25. 5. 2012 14:20 Napsal Jaroslav Kolařík

Web byl uveden do provozu v průběhu května 2012 v rámci praktické části bakalářské práce.

Jako vzorové příklady nestabilních systémů byly do databáze v rámci zadání bakalářské práce vloženy následující systémy: Inverzní kyvadlo, Magnetický levitační systém, Balistická raketa, Průtočný chemický reaktor (CSTR), Letadlo X-29 a Fluidní reaktor.

Obrázek 1. Úvodní strana databáze nestabilních systémů

(zdroj: [1])

2.1 Využitelnost

Základním podnětem pro vytvoření dané databáze byla skutečnost, že řízení nestabilních systémů není úplně triviální záležitost a nelze je bezpečně řídit bez porozumění všem fyzikálním a praktickým omezením. Důsledky selhání řízení nestabilních systémů mohou být i závažnější, viz např.[2]. Databáze obsahující matematický popis a odpovídající

simulační modely vybraných reálných nestabilních systémů může být využita jak pro edukační tak i vědecké účely např. pro analýzu chování daných systémů, pro testování vhodných řídicích metod, pro sledování nebezpečných stavů systémů apod. Vytvořené modely jsou prostřednictvím internetu snadno dostupné širokému okruhu uživatelů, kteří je dále mohou používat ve svých projektech.[12]

2.2 Informace obsažené v databázi

Kromě vlastních modelů obsahuje daná webová databáze též stručné informace a přehled informačních zdrojů o stabilitě dynamických systémů, kritériích pro její testování a dalších souvisejících pojmech.



Fyzikální parametry modelu:

Hodnoty všech důležitých parametrů jsou uvedené v následující tabulce:

Parametr	Symbol	Hodnota	Parametr	Symbol	Hodnota
Zesílení A/D převodníku	k_{AD}	0,2 MU/V	Konstanta cívky	k_C	$1,769 \times 10^{-6} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$
Zesílení D/A převodníku	k_{DA}	20 V/MU	Hmotnost kuličky	m_k	$8,27 \times 10^{-3} \text{ kg}$
Konstanta tlumení	k_{fv}	0,02 Ns/m	Offset cívky	x_0	$7,6 \times 10^{-3} \text{ m}$
Zesílení snímače polohy	k_x	821 V/m	Gravitační konstanta	g	$9,81 \text{ m/s}^2$
Zesílení výkonového zesilovače	k_i	0,3 A/V	Offset senzoru polohy	y_0	0,0183 V

MU ... napětí převedené měřicí kartou a transformované na rozsah ± 1 MU (machine unit).

Matematický model

Uvedený systém, včetně obou převodníků, může být popsán následující nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu (Humusoft, 2002; Pelikán, 2006; Gazdoš, Dostál & Pelikán, 2009):

$$\frac{m_k}{k_{AD}k_x} \ddot{y} - \frac{k_{fv}}{k_{AD}k_x} \dot{y} = \frac{k_{DA}^2 k_i^2 u^2 k_c}{\left(\frac{y - k_{AD}y_0}{k_{AD}k_x} - x_0 \right)^2} - m_k g$$

Obrázek 2. Část záznamu pro systém magnetická levitace.

(zdroj: [1])

Záznam pro každý model obsahuje následující informace:

- Stručný popis systému.
- Nákres, případně obrázek systému.
- Zjednodušený matematický model.

- Fyzikální parametry modelu včetně příkladů možných hodnot.
- Simulační model pro Matlab-Simulink.
- Další zdroje informací.
- Ve většině případů i linearizovaný model, viz např. Obrázek 2 výše prezentující část záznamu o modelu magnetické levitace.

Momentálně databáze obsahuje popis šesti nestabilních systémů: Fluidní reaktor, Inverzní kyvadlo, Magnetická levitace, Balistická raketa, Letadlo X-29 a průtočný chemický reaktor.

2.3 Uživatelské rozhraní databáze

Uživatelské rozhraní umožňuje přepínat mezi českým a anglickým jazykem. Zobrazuje přehled nejvíce zobrazovaných a nově přidaných modelů. Lze také zobrazit přehled modelů a následně ho seřadit dle různých kritérií. K modelům lze přidávat komentáře a hodnocení registrovanými uživateli. Kartu modelu lze vytisknout nebo odeslat přes e-mail. K dispozici je i jednoduché vyhledávání.

2.4 Historie a budoucí vývoj

První verze vznikla v roce 2012 v rámci bakalářské práce pana Jaroslava Kolaříka [13]. Následně modely zrevidoval a doplnil vedoucí projektu pan doc. František Gazdoš.

Pro další vývoj databáze se samozřejmě počítá s průběžným doplňováním dalších modelů, dále s modely pro jiný simulační software než Matlab-Simulink, s modely řízení pro vybrané nestabilní systémy, s rozšířením o další kritéria pro vyhledávání (např. SISO/MIMO, Lineární/Nelineární model, zda se jedná o minimálně/neminimálně fázový systém apod.). Dále se postupně bude rozšiřovat informační část, která se zabývá vlastní stabilitou[12]

2.5 Aktuální rekonstrukce databáze

K aktuálnímu datu (duben 2025) probíhá kompletní rekonstrukce uvedené databáze s novou architekturou a funkcemi v rámci jiné závěrečné práce studenta naší fakulty - magisterského studijního programu Informační technologie, specializace Softwarové inženýrství. Z toho důvodu nelze momentálně vytvořit nové uživatelské účty a tím pádem jsou omezeny

všechny funkce databáze vázané na přihlášení uživatele. Po zdařilé rekonstrukci daného webu budou v rámci této diplomové práce vytvořené modely její platnou součástí.

3 STABILITA DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Systém je stabilní, jestliže po svém vychýlení z rovnovážného stavu a odstranění vzruchu, který vychýlení způsobil, je schopen se ustálit v rovnovážném stavu. Nový rovnovážný stav nemusí být s původním stavem totožný[14]

3.1 Vybrané definice stability

3.1.1 BIBO stabilita

Systém je BIBO stabilní (z angl. Bounded Input – Bounded Output), pokud každý omezený vstup vždy vyvolá omezený výstup.[15]

$$\begin{aligned}\exists M_u > 0: |u(t)| \leq M_u \quad \forall t \geq 0 \\ \exists M_y > 0: |y(t)| \leq M_y \quad \forall t \geq 0\end{aligned}\tag{1}$$

3.1.2 Asymptotická stabilita

Systém je asymptoticky stabilní, pokud jeho stav (nebo výstup) při nulovém vstupu časem nejen zůstává omezený, ale také konverguje k rovnovážnému bodu (typicky k nule)[16], tedy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0\tag{2}$$

3.1.3 Ljapunovská stabilita

Rovnovážný bod $x = 0$ systému $\dot{x} = f(x)$ je Ljapunovsky stabilní, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0\tag{3}$$

Neboli zvolíme-li počáteční stav $x(0)$ v δ okolí počátku, pak hodnota výstupu nepřesáhne zvolené ε z okolí počátku. Při této definici nepožadujeme, aby se $x(t)$ blížilo asymptoticky počátku (tj. konvergovalo k nule) [16]

3.2 Stabilita lineárních spojitých dynamických systémů

V rámci této práce je za lineární systém, považován jakýkoliv systém, u něhož se dá vztah mezi vstupem a výstupem (mezi vstupním a výstupním signálem) popsat pomocí lineární přenosové funkce (5) (dále jen přenos), obecně ve tvaru:

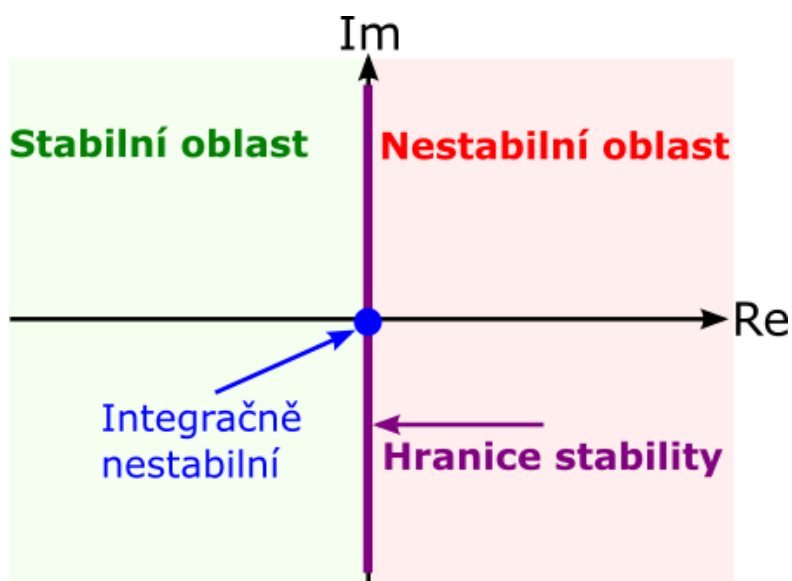
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4)$$

kde polynom jmenovatele $a(s)$ nazýváme charakteristický polynom a rovnici (5) poté charakteristickou rovnicí.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5)$$

Může se jednat např. o regulátor nebo o reálný systém, který byl popsán pomocí diferenciálních rovnic, které byly následně pomocí Laplaceovy transformace převedeny na přenos [17], nebo byl přenos identifikován pomocí některých identifikačních metod [18], příp. byl tento přenos vypočten ze stavového popisu. Jednotlivé systémy se mohou dále skládat v komplexní systém jako např. zpětnovazební regulační obvod, jehož přenos se obecně vypočítá dle pravidel blokové algebry.

Pro všechny lineární spojitý systémy platí stejné pravidlo, které říká, že systém je stabilní, pokud se všechny kořeny charakteristické rovnice (5), tj. póly daného systému, nacházejí v levé části komplexní roviny, neboli že reálná část komplexního čísla kořene má zápornou hodnotu. (viz Obrázek 3)



Obrázek 3. Oblast stability lineárních spojitých systémů.

Z hlediska polohy pólů v komplexní rovině může systém nabývat 4 základních stavů:

Stabilní systém: Reálná část všech kořenů se nachází v levé části komplexní poloroviny

Nestabilní systém: Alespoň u jednoho kořene se reálná část kořene nachází v pravé části komplexní poloroviny.

Systém na hranici stability: některé kořeny se nacházejí na imaginární ose komplexní roviny.

Integrační systém: Alespoň jeden kořen má nulovou hodnotu, tzn. že se nachází v počátku souřadného systému. Integrační systém se obecně chová podobně jako nestabilní systém.

Dále jsou uvedeny příklady přenosů pro jednotlivé stavy.

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (6)$$

Systém $G_1(s)$ má dva reálné póly: $s_1 = -1$ a $s_2 = -2$, jsou záporné $\rightarrow$ systém je stabilní.

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \quad (7)$$

Systém $G_2(s)$ má dva reálné póly: $s_1 = -1$ a $s_2 = 3$, pól s_2 je kladný $\rightarrow$ systém je nestabilní.

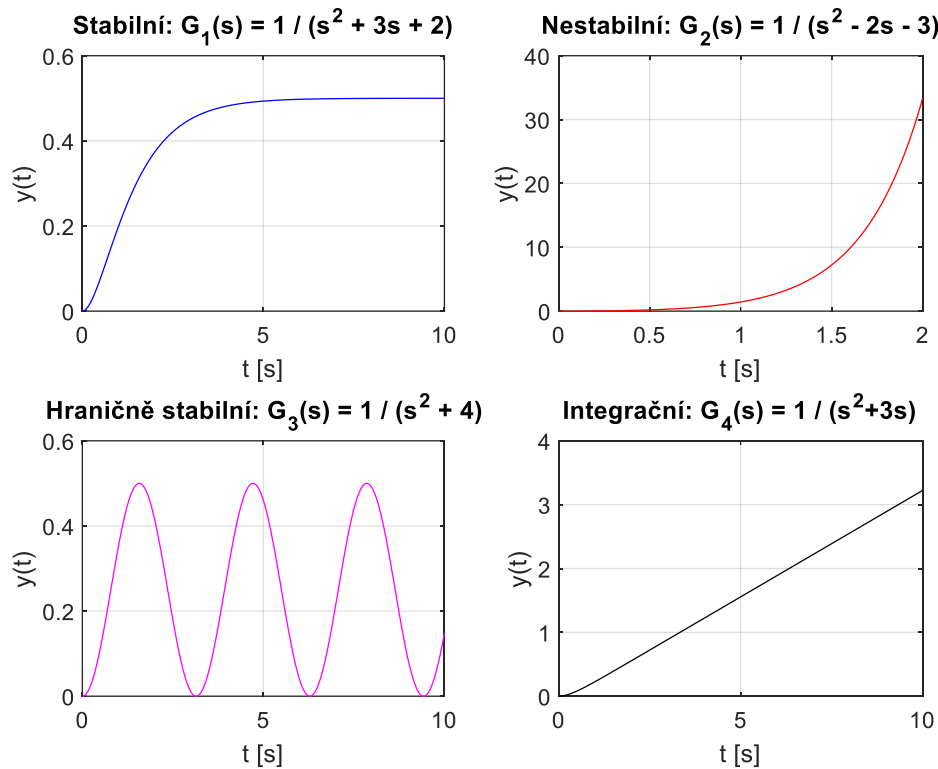
$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 4} \quad (8)$$

Systém $G_3(s)$ má dva póly: $s_{1,2} = 0 \pm 2i$, póly jsou komplexně sdružené s nulovou reálnou složkou a s imaginární složkou $\pm 2i$, leží proto na imaginární ose $\rightarrow$ systém je na hranici stability.

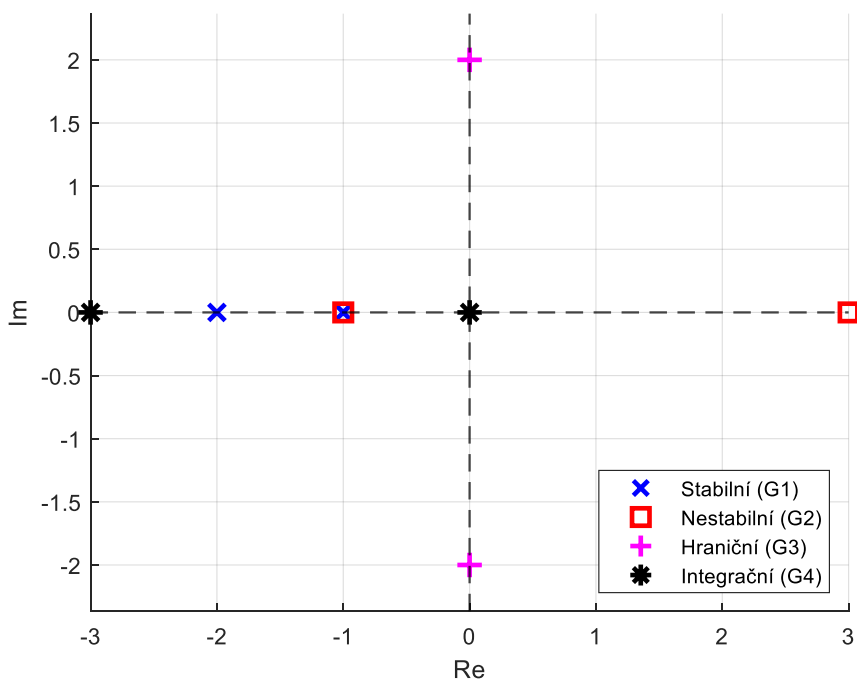
$$G_4(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 - 3s} \quad (9)$$

Systém $G_4(s)$ má dva reálné póly: $s_1 = 0$ a $s_2 = -3$, $s_1 = 0 \rightarrow$ systém integrační.

Obrázek 4 obsahuje přechodové charakteristiky pro přenosy dle rovnic (6-9). Obrázek 5 poté zobrazuje polohu kořenů přenosů v komplexní rovině.



Obrázek 4. Přechodové charakteristiky vybraných typů soustav



Obrázek 5. Rozložení pólů vybraných spojitých přenosů v komplexní rovině.

3.2.1 Kritéria stability

V předchozí kapitole bylo definováno určení stability systému na základě polohy pólů v komplexní rovině. Analyticky však lze počítat póly maximálně do polynomu 4. stupně, a již výpočet pro vyšší stupeň než druhý, je poměrně náročný. Polynomy vyššího než 4. stupně lze počítat jen numericky. Dále může být potřeba analyzovat přenos vyšších řádů, který je zadán symbolicky nebo parametricky. Ve všech případech, kdy nelze spočítat hodnoty pólů přímo se používají **kritéria stability**, která posuzují stabilitu **nepřímo**, tedy bez potřeby jejich výpočtu. [19]

Základní kritérium je následující podmínka (též nazývaná jako Stodolova): **Aby byl systém stabilní, musí být všechny koeficienty charakteristické rovnice stejné znaménko a žádný nesmí chybět**[14]. Tato podmínka:

- Je nutná a dostačující pro charakteristické rovnice maximálně druhého stupně.
- Pokud je stupeň rovnice vyšší, je tato podmínka pouze nutná, ale nedostačující. Pro přesné určení, zda je systém stabilní je potřeba ještě použít další kritéria nebo vypočítat kořeny.[14]
- Často se v literatuře uvádí, že všechny koeficienty musí být kladné, ale pokud jsou všechny koeficienty záporné, může být charakteristická rovnice přenásobena číslem -1 a tím se dostanou kladné koeficienty.

Pokud aplikujeme Stodolovu větu na přenosy G1-G4 (6-9). dostaneme:

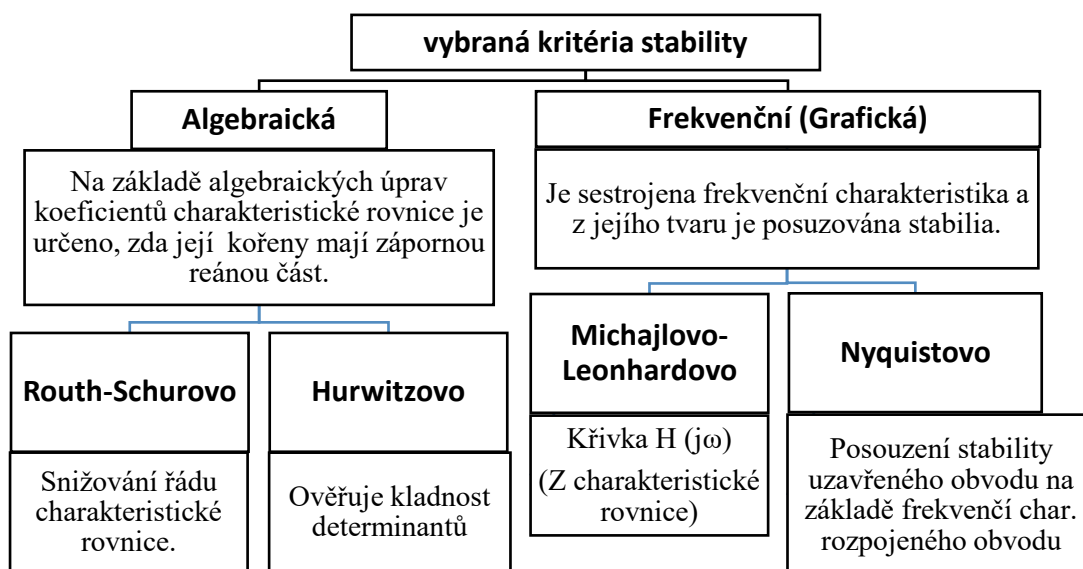
$G_1: a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 2 \rightarrow$ Všechny koeficienty jsou kladné, systém je stabilní.

$G_2: a_2 = 1, a_1 = -2, a_0 = -3 \rightarrow$ Koeficienty jsou kladné i záporné, systém je nestabilní.

$G_3: a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 4 \rightarrow$ Koeficient pro a_1 chybí (tzn.=0), systém je nestabilní. Nebo přesněji, systém není asymptoticky stabilní. Reálně je systém hraničně stabilní.

$G_4: a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 0 \rightarrow$ Koeficient pro a_0 chybí (tzn.=0), systém je nestabilní.

Protože všechny výše uvedené systémy mají charakteristickou rovnici druhého stupně, je splnění Stodolovy podmínky dostačující pro definitivní určení stability systému, pokud by byl systém s charakteristickou rovnicí vyššího řádu, je nutné u systémů, které podmínku splňují, použít další kritérium, které definitivně určí stabilitu systému. Některá nejběžněji používaná kritéria a jejich rozdělení ukazuje Obrázek 6.



Obrázek 6. Rozdělení kritérií stability

(zdroj [14])

Algebraická kritéria se nehodí pro systémy s dopravním zpožděním. Zde mohou být použity pouze k přibližnému ověření, pokud je dopravní zpoždění nahrazeno aproximací např. ve tvaru racionální lomené funkce[15].

Grafická (frekvenční) kritéria stability posuzují stabilitu systému na základě tvaru křivky, která je výstupem vhodně definované komplexní funkce přenosu. Jejím definičním oborem jsou frekvence ω v určitém intervalu $(0, \infty)$ nebo $(-\infty, \infty)$. Přičemž hodnota této funkce je sledována v komplexní rovině nebo ve frekvenční charakteristice v logaritmickém měřítku [19].

Routh-Schurovo kritérium

Jedná se o postupnou redukci řádu polynomu charakteristické rovnice (5) o jeden řád až na polynom druhého řádu dle daného algoritmu. Redukce probíhá pouze přepočtem koeficientů. Pokud všechny redukované polynomy mají kladné koeficienty, je systém stabilní, pokud se během výpočtu objeví záporný nebo nulový koeficient, jedná se o nestabilní systém a výpočet lze ukončit.

Při výpočtu se vychází z charakteristické rovnice (5).

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Postup výpočtu:

Jsou sepsány koeficienty všech mocnin v pořadí od nevyšší mocniny po nejnižší, čím je získána řada $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$ kde $(x_1 = a_n, x_2 = a_{n-1}, \dots, x_{n+1} = a_0)$

1. Je vypočten poměr prvních dvou členů

$$k = \frac{x_1}{x_2} \quad (10)$$

2. Každý lichý člen $(x_1, x_3, x_5, \dots)$ je přepočítán dle vzorce:

$$x_n = x_n - k \cdot x_{n+1} \quad (11)$$

3. Každý sudý člen $(x_2, x_4, x_6, \dots)$ je opsán.
4. Přepočítaná řada je zredukována o první člen, který se vynuloval.
5. Pokud jsou všechny členy kladné a počet členů je vyšší než 3, tak jsou znovu provedeny kroky 1 až 4. Pokud jsou některé členy redukované řady záporné, nebo nulové, tak systém je nestabilní.
6. Pokud jsou všechny poslední členy kladné tak systém je stabilní.

Hurwitzovo kritérium

Z koeficientů charakteristické rovnice (5) je vytvořen Hurwitzův determinant n -tého stupně, kde n odpovídá stupni charakteristické rovnice. Determinant má n řádků a n sloupců. [15]

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \quad (12)$$

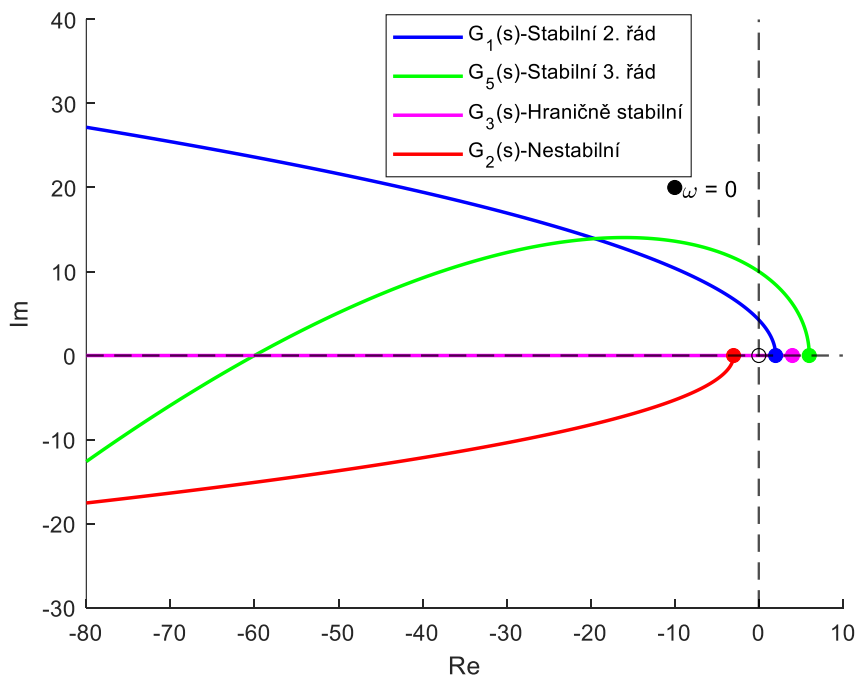
Dle Hurwitzova kritéria platí, že systém je stabilní, pokud jsou všechny subdeterminanty Hurwitzova determinantu větší jak 0. Pro kladný koeficient a_0 není nutné počítat $|H_n|$, neboť platí $|H_n| = a_0 |H_{n-1}|$

Michajlovo-Leonhardovo kritérium

Funkce pro výpočet hodnot Michajlovo-Leonhardovi $L(j\omega)$ křivky je získána z levé části charakteristické rovnice (5), ve které je komplexní proměnná s nahrazena komplexní frekvencí $j\omega$. Interval dosazovaných frekvencí je $\langle 0, \infty \rangle$.

$$L(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}s(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 \quad (13)$$

Dle definice Michajlovo-Leonhardova kritéria je systém asymptoticky stabilní, pokud křivka komplexní funkce $L(j\omega)$ začíná na kladné části reální osy komplexní roviny a postupně projde v kladném směru (v protisměru hodinových ručiček) n kvadrantů, kde n je stupeň polynomu charakteristické rovnice (5)[19]. (viz Obrázek 7)



Obrázek 7. Michajlovo-Leonhardovo kritérium - příklady

Pro Obrázek 7 byly použity přenosové funkce: $G_1(s)$ (6), $G_2(s)$ (7), $G_3(s)$ (8) a také následující:

$$G_5(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (14)$$

Nyquistovo kritérium

Je založeno na vyhodnocení amplitudově-fázové charakteristiky, známé též jako Nyquistova křivka. Výhoda Nyquistova kritéria spočívá v tom, že umožňuje určit, zda uzavřený regulační obvod bude stabilní z frekvenční charakteristiky jeho otevřeného obvodu. Nyquistova křivka též umožňuje zjistit i kvalitativní kritéria stability jako například amplitudovou a fázovou bezpečnost. Další výhodou je možnost vyhodnocovat stabilitu obvodů s dopravním zpožděním [19][14].

Funkce pro výpočet hodnot Nyquistovi křivky $G_o(j\omega)$ je získána z přenosu (4) otevřeného regulačního obvodu $G_o(s)$, ve kterém je komplexní proměnná s nahrazena komplexní frekvencí $j\omega$. Interval dosazovaných frekvencí je $(0, \infty)$. Přenos otevřené části regulačního obvodu $G_o(s)$ se většinou skládá z přenosů regulátoru $G_r(s)$ a regulované soustavy $G_s(s)$. [14][19]

$$G_o(s) = G_r(s)G_s(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (15)$$

$$G_o(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (16)$$

Při aplikaci Nyquistových kritérií je vyhodnocováno chování Nyquistovi křivky $G_o(j\omega)$ kolem kritického bodu $[-1, 0j]$ komplexní roviny. Jsou dvě verze kritérií, pro stabilní a nestabilní přenos $G_o(s)$.

1. Otevřený regulační obvod je stabilní (zjednodušená verze Nyquistova kritéria stability):

Je-li otevřený regulační obvod stabilní, pak uzavřený regulační obvod je stabilní jen tehdy, pokud Nyquistova křivka otevřeného regulačního neobkrouží kritický bod $[-1, 0j]$. (viz Obrázek 8).

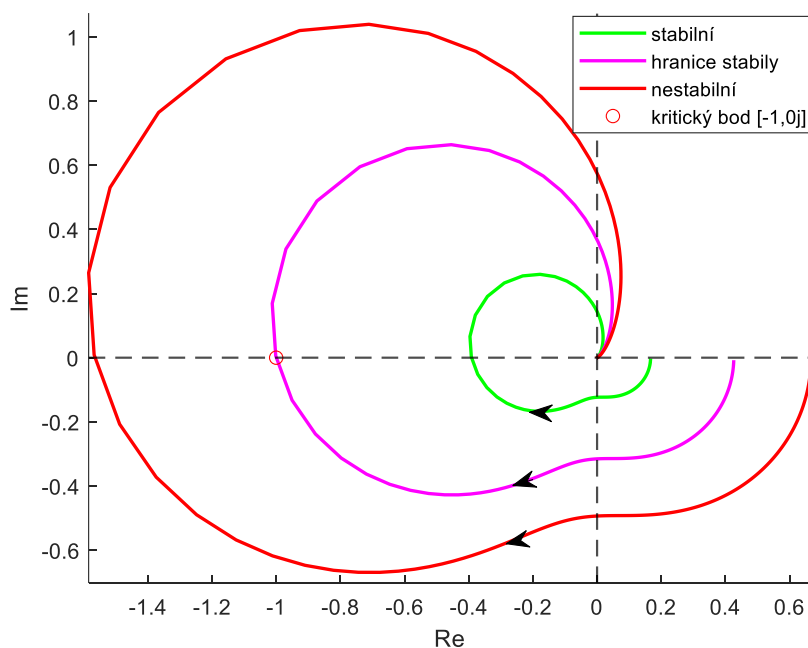
Nyquistovi křivky, které zobrazuje, byly spočítány na základě přenosu otevřeného regulačního obvodu $G_o(s)$ (15), s těmito parametry $G_s(s) = G_6(s)$ (17), $G_r(s)$ = zesílení: 1 pro stabilní, 2.5556 pro hranici stability, 4 pro nestabilní.

$$G_6(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (17)$$

Kořeny $G_o(s)$ (15), ležící na imaginární ose jsou z hlediska Nyquistova kritéria považovány za stabilní.

2. Otevřený regulační obvod je nestabilní (zobecněná verze Nyquistova kritéria stability)

Je-li otevřený regulační obvod nestabilní, poté uzavřený regulační obvod bude stabilní jen tehdy, pokud Nyquistova křivka otevřeného regulačního obvodu obkrouží kritický bod $[-1, 0j]$ $p/2$ krát v kladném směru (v protisměru hodinových ručiček). Kdy p je počet nestabilních pólů otevřeného regulačního obvodu. Jedno obkroužení je 2π , tak např. pro systém s jedním nestabilním pólem stačí pro stabilitu poloviční obkroužení π [19]. (viz Obrázek 9)



Obrázek 8. Nyquistovi křivky pro stabilní otevřený regulační obvod.

Parametry přenosu otevřeného regulačního obvodu $G_o(s)$ (15), pro zobrazenou Nyquistovi křivku jsou $G_s(s) = G_2(s)$ (7), $G_r(s) = 10 + 10s$ (PD regulátor s proporcionální a derivační konstantou rovnou 10).

Stabilní obvod s dopravním zpožděním

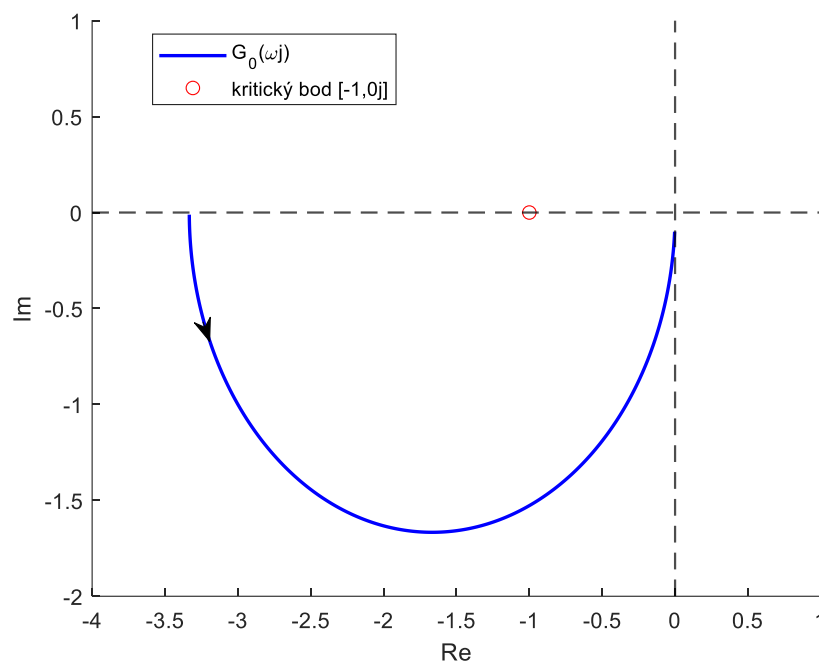
Pokud je zjišťována zpětnovazební stabilita stabilního otevřeného regulačního obvodu s dopravním zpožděním T_d tak do daného přenosu:

$$G_o(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} e^{-T_d j\omega} \quad (18)$$

Je dosazen Eulerův vztah

$$e^{-T_d j\omega} = \cos(T_d \omega) + j \sin(T_d \omega) \quad (19)$$

Pro jednotlivé hodnoty T_d je vykreslena Nyquistova křivka, která je pak vyhodnocena dle kritéria číslo 1. [14]



Obrázek 9. Nyquistova křivka pro nestabilní otevřený regulační obvod.

3.3 Stabilita diskrétních systémů

Za diskrétní systém, je v rámci této práce považován systém, u něhož se dá vztah mezi vstupem a výstupem (mezi vstupním a výstupním signálem) popsat pomocí diskrétní přenosové funkce (20) (dále jen přenos).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (20)$$

Kde polynom jmenovatele $a(z)$ stejně jako u lineárních spojitých systémů nazýváme charakteristický polynom a rovnici (21) poté charakteristickou rovnicí.

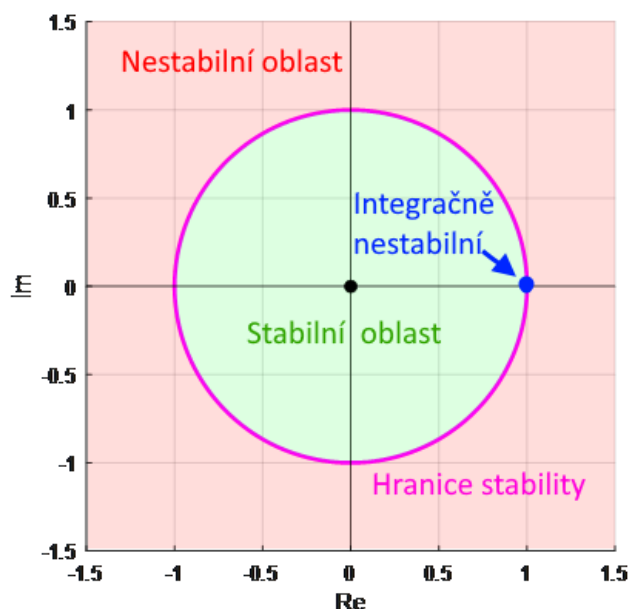
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (21)$$

Pro všechny diskrétní systémy platí pravidlo, které říká, že **systém je stabilní, pokud se kořeny charakteristické rovnice (21) nacházejí uvnitř jednotkové kružnice, která má střed v počátku komplexní roviny.**[14] (viz Obrázek 10)

Neboli platí:

$$|z_i| = \sqrt{(Re(z_i))^2 + (Im(z_i))^2} < 1 \quad \forall i \quad (22)$$

Kde z_i je kořen charakteristické rovnice a $Re(z_i)$, $Im(z_i)$ jsou jeho reálná a imaginární část.



Obrázek 10. Oblast stability lineárních diskrétních systémů.

Přenosy $G1$ až $G4$ (6-9) byly převedeny na diskrétní za použití vzorkovací period $T_s = 0,3s$ a tvarovače nultého řádu, Tím byly získány následující diskrétní přenosy.

$$G_1(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,03356z + 0,02488}{z^2 + 1,29s + 0,4066} \quad (23)$$

Systém $G_1(z)$ má dva reálné póly: $z_1 = 0,7408$ a $z_2 = 0,5488$, oba leží uvnitř jednotkové kružnice $\rightarrow$ systém je stabilní.

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,0612z + 0,08261}{z^2 - 3,172s + 2,46} \quad (24)$$

Systém $G_2(z)$ má dva reálné póly: $z_1 = 1,8221$ a $z_2 = 1,3499$, oba leží vně jednotkové kružnice $\rightarrow$ systém je nestabilní.

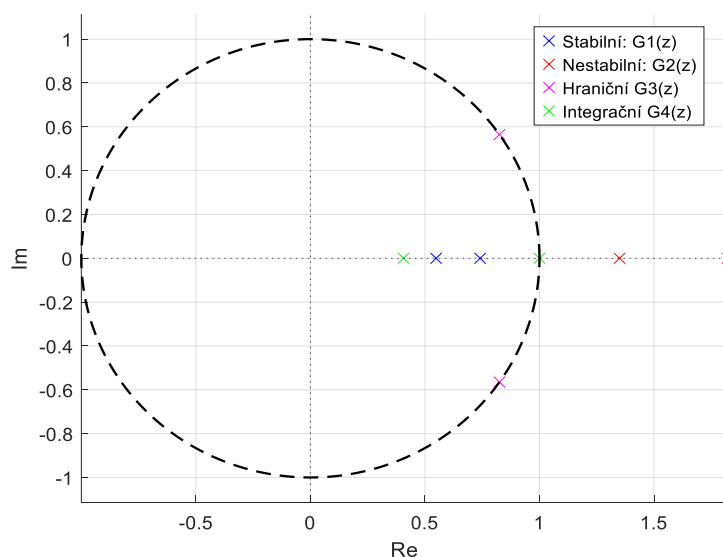
$$G_3(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,04367z + 0,04367}{z^2 + 1,651s + 1} \quad (25)$$

Systém $G_3(z)$ má dva komplexně sdružené póly: $z_{1,2} = 0,8253 \pm 0,5646i$; $(\text{Re}(z_{1,2}))^2 + (\text{Im}(z_{1,2}))^2 = 1 \rightarrow$ póly leží na jednotkové kružnici $\rightarrow$ systém je na hranici stability.

$$G_4(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,03406z + 0,02528}{z^2 + 1,407s + 0,4066} \quad (26)$$

Systém $G_4(z)$ má dva reálné póly: $z_1 = 1$ a $z_2 = 0,4066$, $z_1 = 1 \rightarrow$ jedná se o integrační systém.

Následně Obrázek 11 zobrazuje polohu kořenů uvedených diskrétních přenosů v komplexní rovině.



Obrázek 11. Rozložení pólů vybraných diskrétních přenosů v komplexní rovině.

Kritéria stability

Stejně jako u spojitých systémů lze stabilitu systému ověřit bez výpočtu kořenů charakteristické rovnice (21). Neplatí však nutná podmínka stability o shodnosti znamének koeficientů (Stodolova podmínka) - i charakteristický polynom, který má rozdílné koeficienty může být stabilní.[16] .

Pro určení stability lze poté použít např. diskrétní verzi Routh-Schurova nebo Michajlovo-Leonhardova kritéria [14], nebo lze přetransformovat stabilní oblast uvnitř jednotkové kružnice na zápornou komplexní polorovinu „ w “ a použít kritéria stability pro spojitý systémy. K danému převodu lze použít například bilineární transformaci.

Bilineární transformace je definována vztahem:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} \quad (27)$$

Po dosazení vzorce (27) do charakteristické rovnice (21) získáme:

$$a_n \left(\frac{w + 1}{w - 1} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{w + 1}{w - 1} \right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{w + 1}{w - 1} \right) + a_0 = 0 \quad (28)$$

Po přepočítání má pak rovnice (28) tvar:

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0 = 0 \quad (29)$$

Dále již lze na rovnici (29) použít kritéria stability platná pro spojitý systémy, včetně Stodolovi věty.[20]

4 POLYNOMIÁLNÍ PŘÍSTUP V NÁVRHU REGULÁTORU

Polynomiální metoda návrhu řízení je obecně přístup založený na řešení polynomiálních (diofantických) rovnic. Její hlavní výhodou je schopnost:

- navrhnout nejen parametry regulátoru, ale i jeho vhodnou strukturu, a to pro různé druhy vstupních signálů, tj. žádané hodnoty a poruchy (jako např. skoková funkce, rampa, harmonické funkce apod.)
- stabilizovat i systémy, které jsou obtížně říditelné konvenčními metodami a strukturami řízení (např. PID),
- poměrně snadno navrhnout vhodné řízení i pro nestabilní, integrační nebo neminimálně fázové systémy, včetně systémů s dopravním zpožděním,
- přímo formulovat požadované chování regulačního obvodu pomocí voleného charakteristického polynomu uzavřené smyčky.[21],[22]

Základní princip metody pro základní zpětnovazební konfiguraci 1DoF

Pro řízený systém, který je definovaný přenosem dle rovnice (4) a regulátor, který je definovaný přenosem (30).

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (30)$$

je regulátor navržen tak, aby výsledný charakteristický polynom uzavřené smyčky $d(s)$ měl požadovaný tvar (31).

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = d(s) \quad (31)$$

Rovnice (31) je diofantická polynomiální rovnice, kde $d(s)$ je volitelný stabilní charakteristický polynom, který určuje póly zpětnovazebního systému a tedy jeho výsledné chování a $p(s)$ a $q(s)$ jsou hledané polynomy regulátoru. Vlastní návrh regulátoru může mít následující postup:[23]

Určení stupně neznámých polynomů dle:

- Požadované ryzosti (fyzikální realizovatelnosti regulátoru): $\deg(q) \leq \deg(p)$
- Požadovaného sledování žádané hodnoty regulované veličiny (konstanta, rampa, apod.) a kompenzace daných typů poruch (např. skoková, harmonická, apod.).

Volba polynomu $d(s)$, který určuje dynamiku výsledného uzavřeného obvodu a tedy i kvalitu regulace.

Sestavení diofantické rovnice (31) a její vyřešení například metodou neurčitých koeficientů. Podrobnosti i pro jiné struktury řízení (např. v této práci použitá 2DoF konfigurace řízení) a různé druhy vstupních signálů lze nalézt např. v [22]

II PRAKTICKÁ ČÁST

5 MODELÝ NESTABILNÍCH SYSTÉMŮ

V rámci praktické části diplomové práce bylo vytvořeno 6 nových simulačních modelů reálných nestabilních procesů pro uvedenou webovou databázi nestabilních systémů. Jedná se o následující modely:

- **Model kuličky na ploše**, a následné rozšířený model edukačního zařízení CE 151 společnosti Humusoft.
- **Model dvoukolového nestabilní robota**
- **Model dvojitého inverzního kyvadla**
- **Model průtočného chemického reaktoru s pláštěm**
- **Model orientace orbitální družice**
- **Model edukačního zařízení Helikoptéra CE150** společnosti Humusoft.

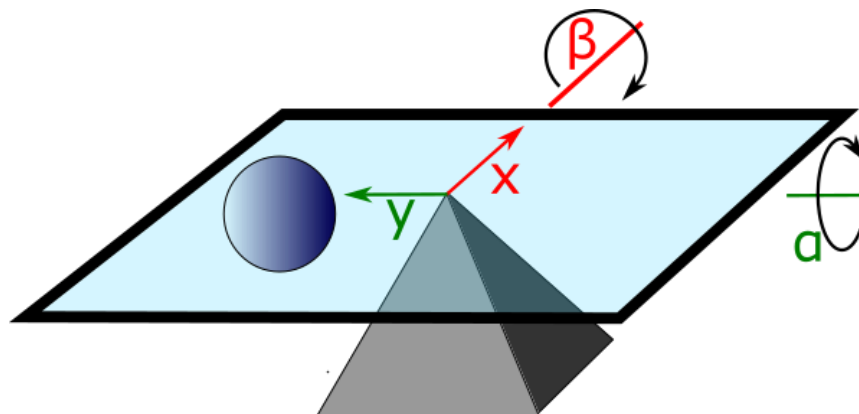
Všechny modely byly dle požadavků vedoucího vytvořeny pro simulační program Matlab – Simulink, konkrétně pro verzi 2020b.

Jedná se obecně o nelineární modely, případně kombinace nelineárního a empirického modelu. Modely byly vytvářeny s cílem snadné editace hodnot, které odpovídají reálným fyzikálním parametrům, proto vlastní matematické modely neobsahují konkrétní číselné hodnoty, ale proměnné, které jsou snadno editovatelné přes grafické uživatelské rozhraní, které se zobrazí po poklepání na příslušný simulační blok v MATLAB/Simulink. Každý model ale též obsahuje výchozí reálné přednastavené hodnoty, takže je ihned použitelný

5.1 Kulička na ploše

Nestabilní systém kulička na ploše je tvořen kuličkou, která se nachází na pohyblivé desce. Deska se může naklánět ve směrech os x a y . Střed souřadného systému je ve středu desky.

Vstupy systému jsou náklony plošiny o úhly α a β , výstupy jsou souřadnice x a y středu kuličky. Jedná se tedy o systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy viz Obrázek 12 níže [24].



Obrázek 12. systém kulička na ploše.

5.1.1 Matematický model

Pro následné odvození zjednodušeného modelu jsou použity následující předpoklady:

- Kulička za žádných okolností neztratí kontakt s plochou.
- Kulička po ploše neklouže
- Všechny třecí síly a kroutící momenty jsou zanedbány
- Kulička zpětně neovlivňuje náklon desky

Dále ve výpočtech jsou použity následující proměnné:

Tabulka 1. Fyzikální veličiny pro matematický model systému kulička na ploše

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Poloha kuličky na ploše dle osy X ; $x = 0$ je střed plošiny.	x	m
Poloha kuličky na ploše dle osy Y ; $y = 0$ je střed plošiny.	y	m
úhly náklonu plošiny.	α, β	rad
poloměr kuličky.	r	m
moment setrvačnosti kuličky.	I_k	$kg \cdot m^2$
moment setrvačnosti plochy.	I_p	$kg \cdot m^2$
hmotnost kuličky.	m	kg
gravitační konstanta	g	m/s^2

Pro matematický popis pohybových rovnic systému kuličky na ploše bylo vycházeno ze základní Euler-Lagrangeovy diferenciální rovnice (32)[25].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W_k}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = Q_i \quad (32)$$

Kde: q_i – i-tá obecná souřadnice, $\dot{q}_i$ – první derivace i-té obecné souřadnice podle času, W_k – kinetická energie systému, W_p – potenciální energie systému, Q_i – i-tá obecná síla.

Obecnými souřadnicemi jsou proměnné:

$$q_1 = x; q_2 = y; q_3 = \alpha; q_4 = \beta$$

Kinetická energie kuličky je dána součtem pohybové energie a rotační energie vzhledem k jejímu středu otáčení:

$$W_{kk} = \frac{1}{2} \left[m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I_k}{r^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_k}{r^2} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (33)$$

Kinetická energie plochy otáčející se kolem svého středu, včetně kuličky na pozici (x, y) , je vyjádřena rovnicí:

$$W_{kp} = \frac{1}{2} \left[(I_k + I_p)(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + m(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}y)^2 \right] \quad (34)$$

Celková kinetická energie je tedy dána součtem:

$$\begin{aligned} W_k &= W_{kk} + W_{kp} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(m + \frac{I_k}{r^2} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (I_k + I_p)(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + m(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}y)^2 \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Potenciální energie kuličky je vztažena ke středu naklánějící se plochy:

$$W_p = mgh = (x \sin \alpha + y \sin \beta) \quad (36)$$

d je vzdálenost od středu roviny do místa působení síly způsobující náklon plošiny

Obecné síly způsobující náklon plošiny jsou definovány:

$$Q_\alpha = F_\alpha d \cos \alpha; Q_\beta = F_\beta d \cos \beta \quad (37)$$

Po derivování dle rovnice (32) je získána soustava rovnic:

$$\left(m + \frac{I_k}{r^2}\right)\ddot{x} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + mg \sin \alpha = 0 \quad (38)$$

$$\left(m + \frac{I_k}{r^2}\right)\ddot{y} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}x + \dot{\beta}^2y) + mg \sin \beta = 0 \quad (39)$$

$$(I_k + I_p + mx^2)\ddot{\alpha} + m(\ddot{\beta}xy + \dot{\beta}\dot{x}y + \dot{\beta}x\dot{y} + 2\dot{\alpha}\dot{x}x) + mgx \cos \alpha = F_\alpha \quad (40)$$

$$(I_k + I_p + my^2)\ddot{\beta} + m(\ddot{\alpha}xy + \dot{\alpha}\dot{x}y + \dot{\alpha}x\dot{y} + 2\dot{\beta}\dot{x}x) + mgy \cos \beta = F_\beta \quad (41)$$

Pro další postup je předpokládáno, že systém zpětně neovlivňuje zdroje silového působení, takže vstupy systému jsou α a β místo sil F_α a F_β . Vzorci (40) a (41) mohou být proto vynechány.

Moment setrvačnosti kuličky I_k pro plnou kuličku může být spočítán:

$$I_k = \frac{2}{5}mr^2 \quad (42)$$

Moment setrvačnosti kuličky I_k pro dutou kuličku, kde vnitřní průměr pláště se blíží k vnějšímu průměru pláště, neboli jinak řečeno, pro kuličku s tenkým pláštěm může být spočítán jako.

$$I_k = \frac{2}{3}mr^2 \quad (43)$$

Rovnice (44, 45) zobrazují úpravy rovnic (38, 39) po dosazení (42), což je výpočet momentu setrvačnosti I_k pro plnou kuličku. Ze vzorce (44) vyplývá, že dynamika pohybu kuličky by neměla záležet na hmotnosti a průměru kuličky.

Hodnota koeficientu k (44) poté bude $\frac{5}{7}$. V případě duté kuličky (43) bude $k = \frac{3}{5}$. Nastavení koeficientu k je volitelné v rámci vytvořeného simulačního modelu.

$$\left(m + \frac{I_k}{r^2}\right)\ddot{x} - m(\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + mg \sin \alpha = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\left(m + \frac{I_k}{r^2}\right)}{m} \ddot{x} - (\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + g \sin \alpha = 0$$

$$\frac{\left(m + \frac{\frac{2}{5}mr^2}{r^2}\right)}{m} \ddot{x} - (\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + g \sin \alpha = 0$$

$$\frac{7}{5} \ddot{x} - (\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x) + g \sin \alpha = 0$$

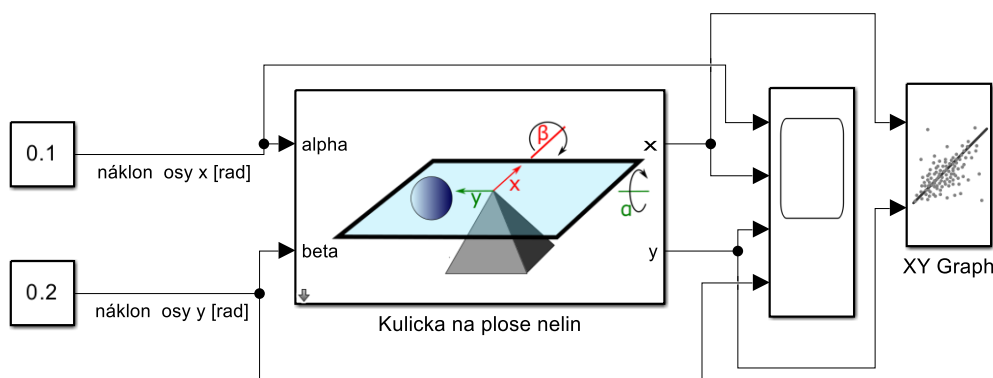
$$\ddot{x} = \frac{5}{7} (\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x - g \sin \alpha)$$

$$\ddot{x} = k(\dot{\alpha}\dot{\beta}y + \dot{\alpha}^2x - g \sin \alpha)$$

$$\ddot{y} = k(\dot{\alpha}\dot{\beta}x + \dot{\beta}^2y - g \sin \beta) \quad (45)$$

Výše odvozené rovnice (44, 45) popisují pohyb kuličky po ploše v závislosti na změně vstupních úhlů α a β . Vztah (44) popisuje časovou změnu souřadnice x a (45) časovou změnu souřadnice y .

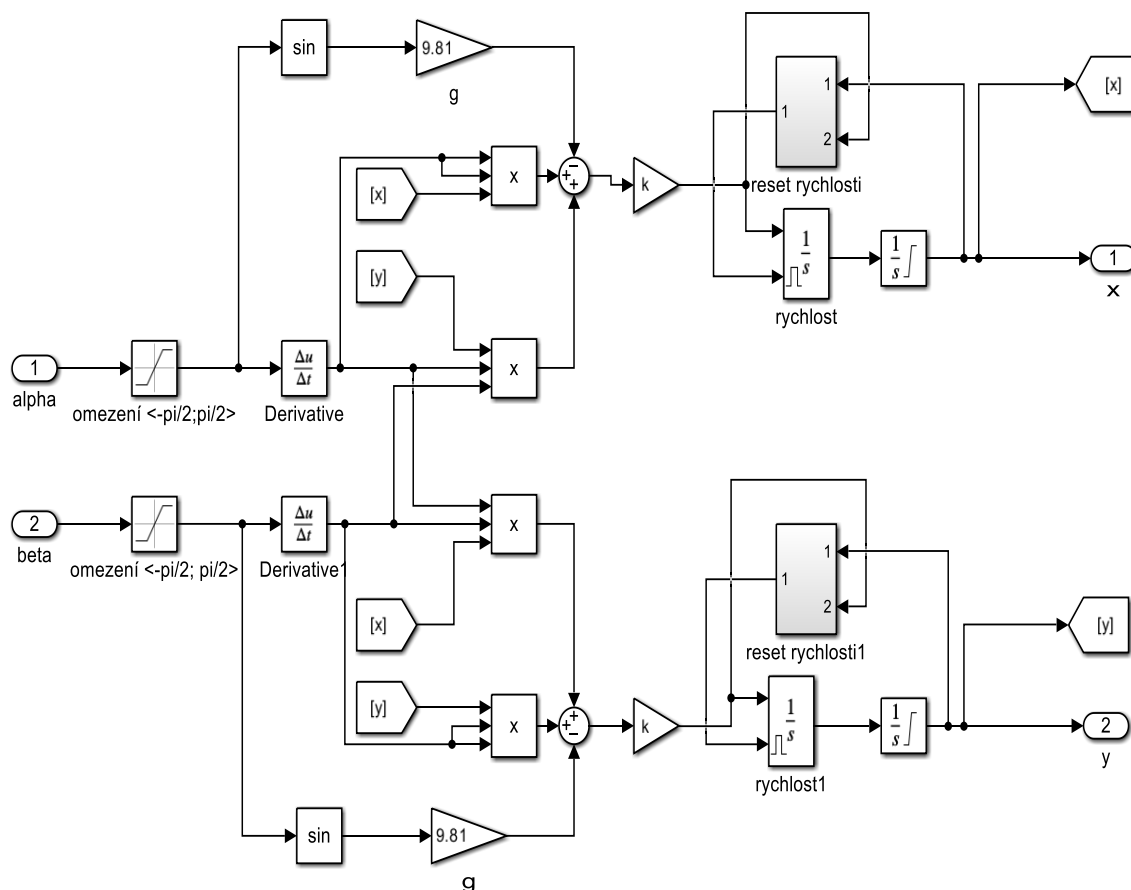
5.1.2 Simulační model



Obrázek 13. Systém kulička na ploše – Simulinkový model.

Obrázek 13 zobrazuje vytvořený simulační model. Jeho hlavní součástí je subsystém, který obsahuje vlastní nelineární model reálného systému vytvořený na základě pohybových rovnic (44, 45) (viz Obrázek 14). V Modelu je dále realizováno omezení náklonu plošiny za využití saturačního bloku a omezení velikosti desky, které simuluje mechanickou zábranu

na konci desky. Maximální možná hodnota souřadnice v dané ose je poté nastavené omezení, od kterého je odečten zadaný poloměr kuličky. Dané omezení využívá saturaci integrátoru. Pro správnou funkci omezení je nutné vhodně pracovat s integrátorem pro rychlost, o což se stará blok „reset rychlosti“.



Obrázek 14. Systém kulička na ploše – nelineární model v prostředí Simulink.

V editačním menu subsystému je možnost provést odpovídající nastavení modelu, je zde možno nastavit rozměry plochy (lze simulovat i neohraničenou plošinu), hodnotu koeficientu k (44). Poloměr kuličky a počáteční souřadnice kuličky na ploše. (viz Obrázek 15).

Obrázek 15. Systém kulička na ploše – nastavení modelu.

5.1.3 Model edukačního zařízení CE151

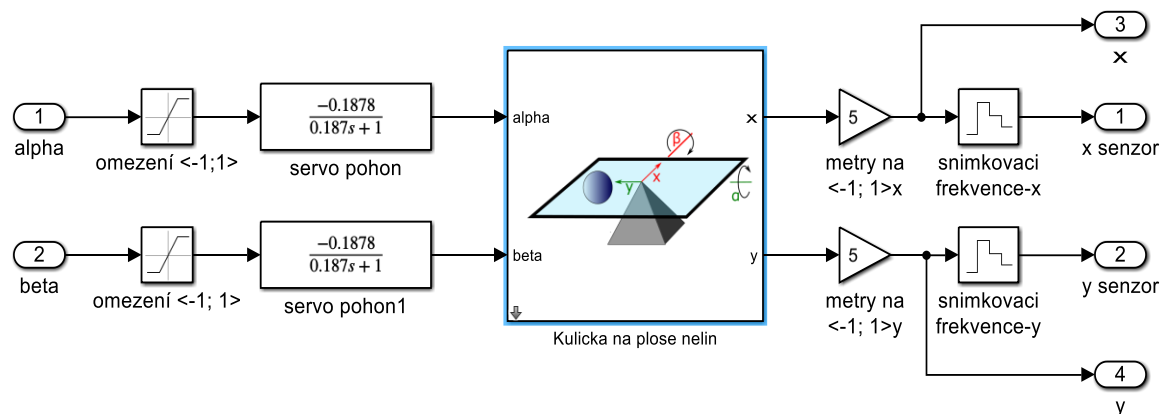
Nelineární model systému kulička na ploše z předchozí kapitoly, byl použit jako základ modelu edukačního zařízení CE151 firmu Humusoft (viz Obrázek 16).



Obrázek 16. CE 151 Ball & Plate Model firmy Humusoft

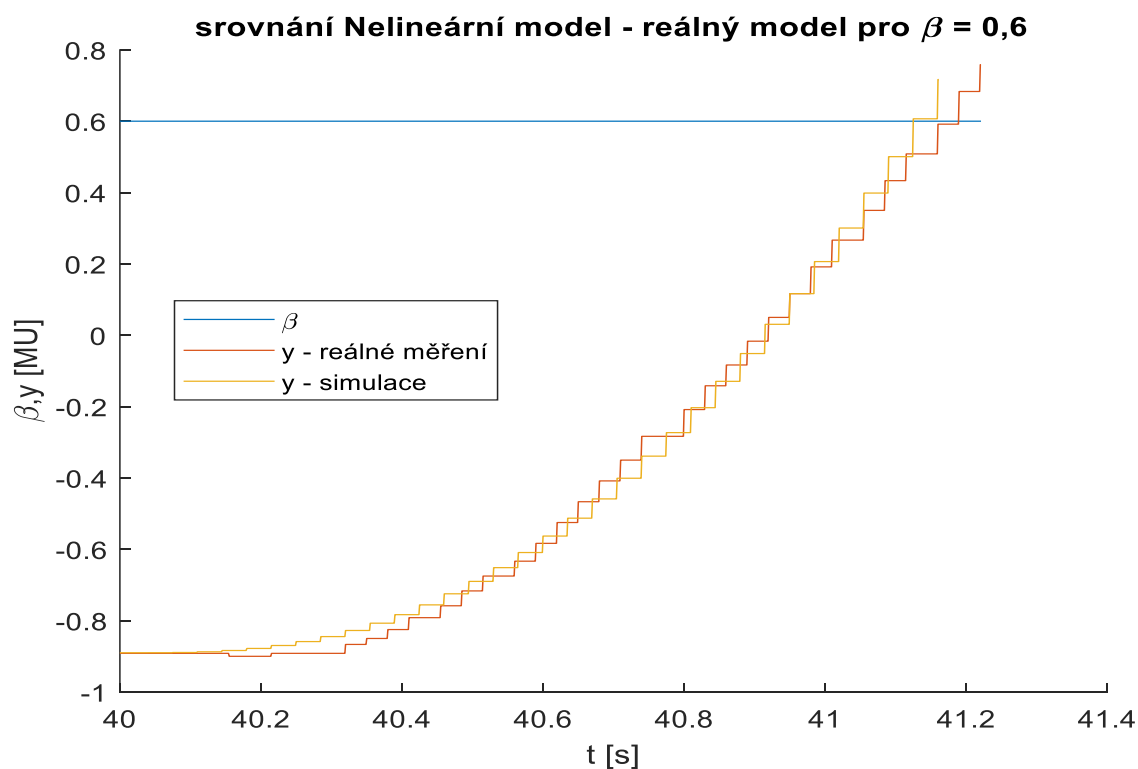
(zdroj: [26])

Model je doplněn o empirické modely servopohonů, které zajišťují vlastní pohyb plošiny a model snímacího senzoru a přepočtové členy. (viz Obrázek 17)



Obrázek 17. CE 151 Simulinkový model

Obrázek 18 ukazuje srovnání výstupu reálného výukového modelu a realizovaného simulačního modelu.



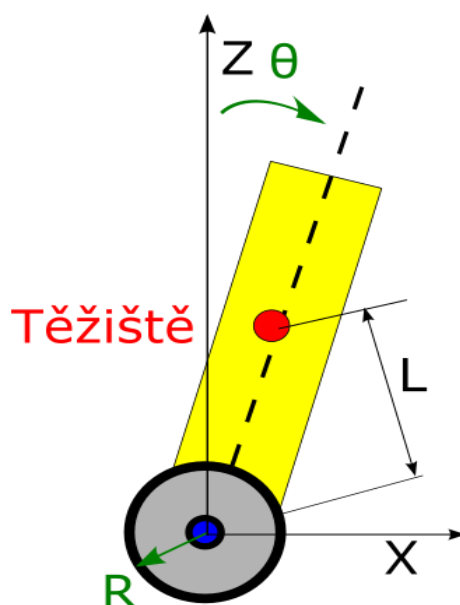
Obrázek 18. Srovnání simulačního a reálného modelu CE 151 pro uhel $\beta = 0,6$ MU

Data z reálného modelu jsou naměřená při sledování pohybu golfového míčku. Graf zobrazuje průběh souřadnice y , úhel α pro souřadnici x byl po dobu měření na hodnotě 1 MU a souřadnice x byla z toho důvodu konstantní, omezená rámem plošiny. V simulaci byla

nastavena hodnota koeficientu k pro dutou kuličku, při koeficientu pro plnou kuličku byla shoda s reálnými daty menší. Poloměr r v simulaci byl nastaven na hodnotu 0,022 m. Obrázek 18 ukazuje úsek z měření pro různé úhly náklonu a zachycuje přechod kuličky z jedné krajní polohy do druhé při náklonu plošiny $\beta = 0,6$ MU.

5.2 Dvoukolový nestabilní robot

Jedná se o model dvoukolového nestabilního robota. Tělo robota je umístěno mezi dvě kola. Tělo robota a obě kola mají společnou osu rotace. Na obě kola působí externí momenty sil v osách jejich rotace. Na samotné tělo robota nepůsobí, kromě gravitační žádná, externí síla, poloha těla robota je stabilizována pouze pohybem kol ve směru osy X . Úhel θ udává hodnotu vychýlení osy těla robota vůči ose Z – viz Obrázek 19 níže.



Obrázek 19. Systém dvoukolového nestabilního robota

Vstupy systému jsou točivé momenty působící na obě pojezdová kola a výstup systému je změna polohy v ose X globálního souřadného systému a úhel θ , který udává náklon od osy Z lokálního souřadného systému robota. Obrázek 19 zobrazuje lokální souřadný systém, který je na počátku simulace shodný s globálním souřadným systémem.

Daný systém má dva stupně volnosti, ale pouze 1 vstupní sílu, jedná se o tzv. nedostatečně ovládaný systém (tzv. „underactuated system“). [5]

5.2.1 Matematický model

Ve výpočtech jsou použity následující proměnné:

Tabulka 2. Fyzikální veličiny pro matematický model dvoukolového robota

Parametr	Symbol	jednotka
----------	--------	----------

Hmotnost těla robota	m_b	kg
Hmotnost jednoho kola robota	m_w	kg
Vzdálenost těžiště těla robota od osy rotace	L	m
Koeficient viskózního tření v kolech robota	b_w	$N \cdot m \cdot s/rad$
Koeficient viskózního tření při pohybu těla robota	b_b	$N \cdot m \cdot s/rad$
Náklon těla robota od osy Z	θ	rad
Poloměr kola robota	R	m
Moment síly působící v osách kol pro levé a pravé kolo.	$\tau_L + \tau_R$	$N \cdot m$
Moment setrvačnosti těla robota	I_b	$kg \cdot m^2$
Moment setrvačnosti kola robota	I_w	$kg \cdot m^2$
gravitační zrychlení	g	m/s^2
Poloha robota v ose X globálního souřadného systému.	x	m

Pro matematický popis pohybových rovnic systému dvoukolového robota je vycházeno ze základní Euler-Lagrangeovy diferenciální rovnice (32)[25].

Obecnými souřadnicemi jsou proměnné:

$$q_1 = x; q_2 = \theta$$

Kinetická energie pro tělo robota:

$$W_{kb} = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta)) + \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}^2 \quad (46)$$

Kinetická energie pro 2 kola robota:

$$W_{kw} = 2 \left(\frac{1}{2} m_w \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_w \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 \right) \quad (47)$$

Celková kinetická energie je tedy dána součtem:

$$\begin{aligned} W_k &= W_{kb} + W_{kw} \\ &= \frac{1}{2} \left(m_b + 2m_w + \frac{2I_w}{r^2} \right) \dot{x}^2 + m_b L \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} (I_b + m_b L^2) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Potenciální energie těla robota je vztažena k jeho ose rotace:

$$W_p = -m_b g L \sin(\theta) \quad (49)$$

Obecné a disipační síly jsou definovány:

$$Q_x = \frac{\tau_L + \tau_R}{r} - b_w \dot{x}; \quad Q_\theta = -b_b \dot{\theta} \quad (50)$$

Po derivování dle (32) je získána soustava rovnic:

$$\left(m_b + 2m_w + \frac{2I_w}{r^2}\right)\ddot{x} + m_b L \ddot{\theta} \cos(\theta) - m_b L \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = \frac{\tau_L + \tau_R}{r} - b_w \dot{x} \quad (51)$$

$$(I_b + m_b L^2)\ddot{\theta} + m_b L \dot{x} \cos(\theta) - L g m_b \sin(\theta) = -b_b \dot{\theta} \quad (52)$$

Získané rovnice nejsou pro modelování a následnou simulaci úplně vhodné, protože se v každé rovnici vyskytují druhé derivace dvou proměnných - takové rovnice jsou numericky řešitelné jen s obtížemi z důvodu vzniku algebraické smyčky. Program Matlab-Simulink obsahuje řešitel algebraických smyček a s jednoduššími rovnicemi je schopen si poradit, výpočty mohou být ale delší a navíc program vypisuje varování, což může být pro méně zkušené uživatele matoucí.

Z daného důvodu byly rovnice převedeny na maticovou formu.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_b + 2m_w + \frac{2I_w}{r^2} & m_b L \cos(\theta) \\ m_b L \dot{x} \cos(\theta) & I_b + m_b L^2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_b L \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + b_w \dot{x} \\ b_b \dot{\theta} \end{bmatrix}; \quad G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -L g m_b \sin(\theta) \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} \frac{\tau_L + \tau_R}{r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$M(q) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + C(q, \dot{q}) + G(q) = u \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = M(q)^{-1}(u - C(q, \dot{q}) + G(q)) \quad (56)$$

A po vyřešení (56) jsou získány výsledné rovnice:

$$\ddot{x} = \frac{r[-L m_b r \cos(\theta)(L g m_b \sin(\theta) - b_b \dot{\theta}) + (I_b + L^2 m_b)a]}{2I_b I_w + I_b m_b r^2 + 2I_b m_w r^2 + 2I_w L^2 m_b + L^2 m_b^2 r^2 \sin^2(\theta) + 2L^2 m_b m_w r^2} \quad (57)$$

$$a = r(L\dot{\theta}^2 m_b \sin(\theta) - b_w \dot{x}) + (\tau_L + \tau_R)$$

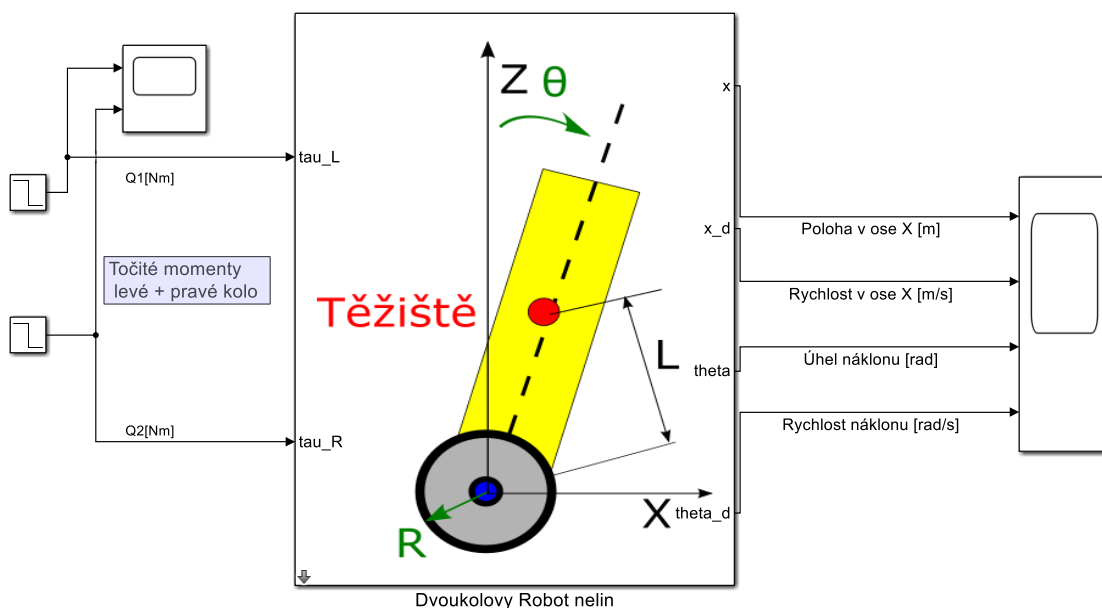
$$\ddot{\theta} = \frac{-Lm_b r \cos(\theta) a + (Lgm_b \sin(\theta) - b_b \dot{\theta})(2I_w + m_b r^2 + 2m_w r^2)}{2I_b I_w + I_b m_b r^2 + 2I_b m_w r^2 + 2I_w L^2 m_b + L^2 m_b^2 r^2 \sin^2(\theta) + 2L^2 m_b m_w r^2} \quad (58)$$

$$a = r(L\dot{\theta}^2 m_b \sin(\theta) - b_w \dot{x}) + (\tau_L + \tau_R)$$

Po úpravě již každá z rovnic (57) a (58) obsahuje jen jednu proměnou v druhé derivaci a rovnice tak mohou být bez problémů implementovány v prostředí Matlab-Simulink.

5.2.2 Simulační model

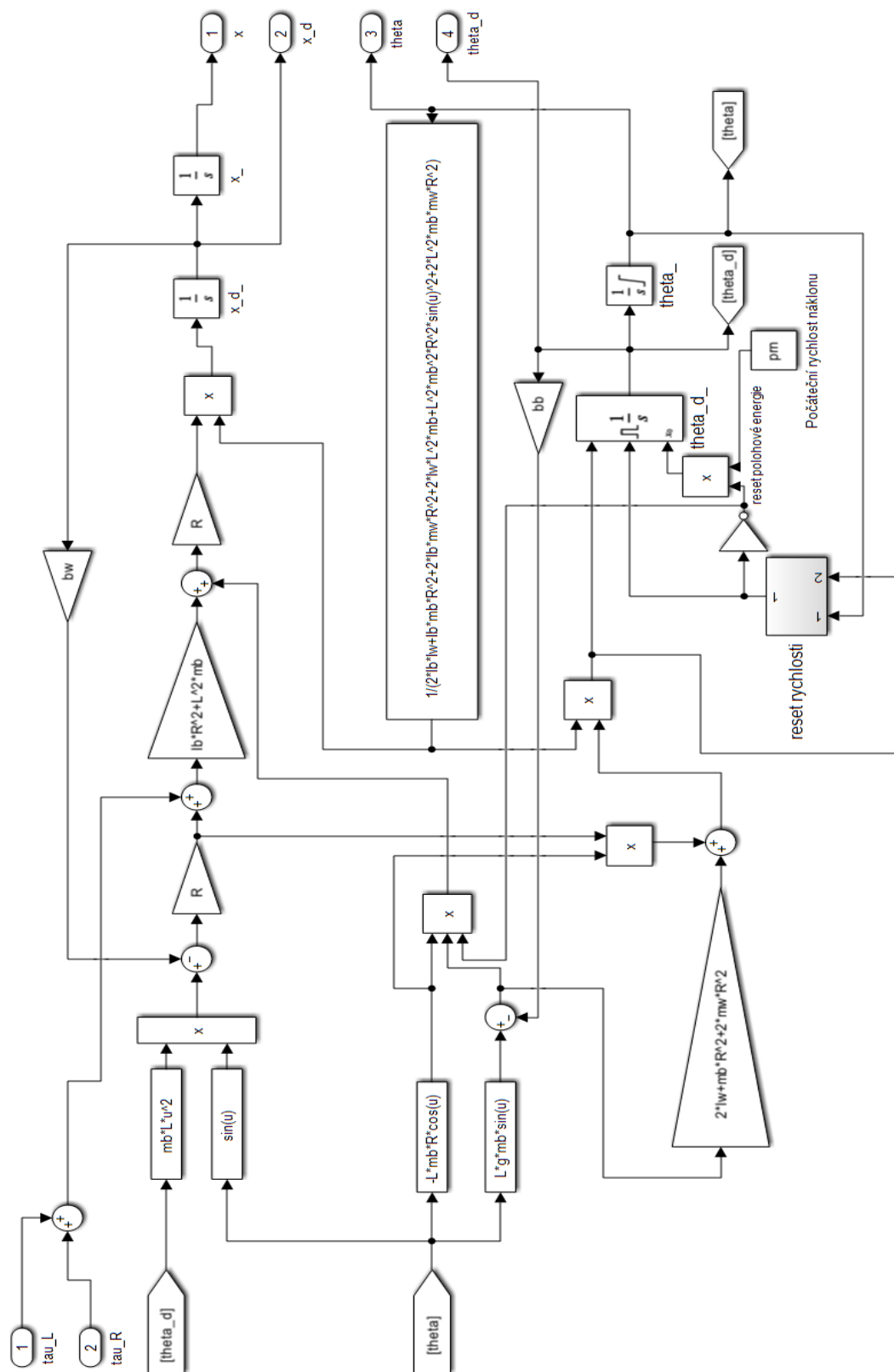
Na základní úrovni se realizovaný simulační model skládá z ilustračního obrázku, který zobrazuje použitý souřadný systém a blíže znázorňuje některé parametry systému, dále z prvků, které popisují vstupy a výstupy a ze základních vstupních a výstupních bloků. Viz Obrázek 20 níže.



Obrázek 20. Systém dvoukolového robota – Simulinkový model.

Hlavní součástí modelu je subsystém, který obsahuje vlastní zjednodušený nelineární model reálného systému vytvořený na základě pohybových rovnic (57, 58) (viz Obrázek 21). V Modelu je dále realizována simulace omezení náklonu těla robota za využití saturace integrátoru. Pro správnou funkci omezení je nutné vhodně pracovat s integrátorem rychlosti, o což se stará blok „reset rychlosti“.

Obrázek 22 dále ukazuje možnosti nastavení parametrů modelu.



Obrázek 21. Systém dvoukolový robot – nelineární model v prostředí Simulink.

Block Parameters: Dvoukolový Robot nelinear

Dvoukolový nestabilní robot

Parametry

Moment setrvačnosti kola robota [kgm²] 0.0036

koeficient tření kola [Nms/rad] 10

Hmotnost kola robota [kg] 0.6

Poloměr kola robota [m] 0.075

koeficient tření pro tělo robota [Nms/rad] 0.05

Vzdálenost těžiště těla robota od osy rotace [m] 0.1

Moment setrvačnosti těla robota [kgm²] 0.1

Hmotnost těla robota [kg] 6

g [m/s²] 9.82

Počáteční a omezující podmínky

Počáteční úhel náklonu těla robota [rad] (0 rad = kolmo nahoru) -0.06

Maximální záporný úhel náklonu těla robota [rad] -pi/3 -1.0472

Maximální kladný úhel náklonu těla robota [rad] pi/3 1.0472

Počáteční rychlost celého robota [m] 0

Počáteční poloha celého robota [m] 0

Počáteční rychlost náklonu těla robota [rad/s] 0

OK Cancel Help Apply

Obrázek 22. Systém dvoukolový robot – nastavení modelu.

V rámci této kapitoly vytvořený simulační model dvoukolového robota umožňuje sledovat náklon těla robota od svislé osy a pohyb robota podél vodorovné osy v závislosti na momentu síly, který působí na jeho kola. Přes grafické rozhraní je možno nastavit všechny fyzikální parametry, které ovlivňují průběh simulace a počáteční podmínky simulace.

5.3 Průtočný chemický reaktor s pláštěm

Systém je též znám pod zkratkou CSTR z anglického názvu „Continuous Stirred Tank Reactor“ [27].

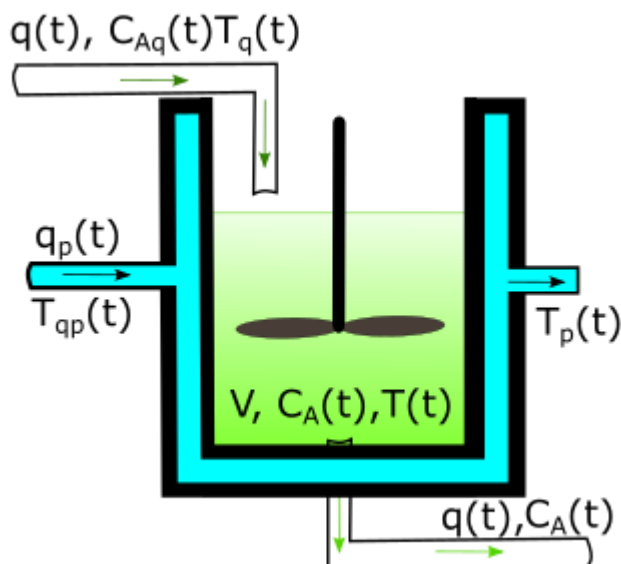
U průtočného chemického reaktoru s pláštěm (dále jen průtočný reaktor) se obecně jedná o nádobu určitého objemu, do které jsou průběžně přiváděny reaktanty a též průběžně odváděny produkty vzniklé chemickou reakcí. Obsah nádoby je neustále promícháván. Objemový přítok a odtok mají stejnou hodnotu, proto objem reaktantu v nádobě zůstává konstantní. Reaktor s pláštěm je varianta standardního průtočného reaktoru, který má

teplonosný plášť kolem nádoby. Tento plášť slouží k řízení teploty uvnitř reaktoru buď chlazením, nebo ohříváním pomocí média proudícího pláštěm [6]. Zde je prezentován zjednodušený model pouze pro přeměnu jednoho reaktantu A na produkt B .

Vstupy procesu jsou: Vstupní koncentrace reaktantu A (C_{Aq}), vstupní teplota přítoku (T_q), hodnota objemového přítoku a odtoku (q), vstupní teplota chladicí směsi (T_{pq}) a objemový průtok chladicí směsi (q_p).

Stavy a též výstupy poté jsou: Koncentrace reaktantu A v reaktoru (C_A), teplota reaktoru (T), teplota chladicí směsi (T_p).

Jedná se tedy obecně o systém s pěti vstupy a třemi výstupy. Systém může vykazovat jak stabilní, tak nestabilní chování v závislosti na druhu reakce a parametrech systému[6].



Obrázek 23. systém průtočný chemický reaktor s pláštěm

5.3.1 Matematický model

Pro odvození jsou použity následující předpoklady:

- předpokládá se dokonalé promíchání v rámci celého reaktoru.
- V modelu se zanedbává přestup tepla do vnějšího prostředí. (Reaktor je dokonale izolován)
- V modelu se zanedbává tepelná kapacita přepážky oddělující prostor mezi reaktantem a chladicím médiem.

- Objem reakční směsi je konstantní, objemový přítok = objemový odtok.

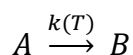
Ve výpočtech jsou dále použity následující proměnné:

Tabulka 3. Fyzikální veličiny pro matematický model průtočného reaktoru

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Koncentrace komponenty <i>A</i> v reaktoru	C_A	mol/m^3
Objemový průtok	q	m^3/s
Objem reaktantu	V	m^3
Vstupní koncentrace komponenty <i>A</i>	C_{Aq}	mol/m^3
Frekvenční faktor reakce	k_0	$1/\text{s}$
Aktivační energie	E_a	J/mol
Univerzální plynová konstanta	R	$\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$
Vstupní teplota reaktantu	T_q	K
Teplota reaktoru	T	K
Reakční entalpie	$-\Delta H$	J/mol
Koeficient přestupu tepla do pláště	U	$\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$
Přestupná plocha chladičského pláště	A	m^2
Hustota reaktantu	ρ	kg/m^3
Měrná tepelná kapacita reaktantu	c_p	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
Teplota chladicí směsi	T_p	K
Vstupní teplota chladicí směsi	T_{pq}	K
Objemový průtok chladicí směsi	q_p	m^3/s
Objem chladicí směsi v plášti	V_p	m^3
Hustota chladicí směsi v plášti	ρ_p	kg/m^3
Měrná tepelná kapacita chladicí směsi v plášti	c_{pp}	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
Látkové množství	n	mol

Pro matematický popis dynamického modelu systému průtočný reaktor se vychází z bilančních rovnic systému [28].

Pro změnu jednoho reaktantu *A* na produkt *B*



je sestavena látková bilance

$$\frac{dVC_A}{dt} = q(C_{Aq} - C_A) - Vr_A \quad (59)$$

kde látkové množství reaktantu *A* v reaktoru je definováno:

$$VC_A = n \quad (60)$$

Rychlost reakce (spotřeby reaktantu C_A) je vyjádřena:

$$r_A = k(T)C_A \quad (61)$$

Přičemž hodnota $k(T)$ je dána Arrheniovou rovnicí:

$$k(T) = k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} \quad (62)$$

Ze které vyplývá, že rychlost reakce je nelineárně závislá na teplotě T .

Po dosazení (61) a (62) do (59) je získána rovnice:

$$\frac{dVC_A}{dt} = V(C_{Aq} - C_A) - V k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} C_A \quad (63)$$

Protože objem V se předpokládá jako konstantní tak z rovnice (63) je vyjádřena diferenciální rovnice pro časovou změnu koncentrace C_A .

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{q}{V}(C_{Aq} - C_A) - k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} C_A \quad (64)$$

Kde $\frac{q}{V}$ udává frekvenci výměny objemu reaktoru a její obrácená hodnota $\frac{V}{q}$ dobu zdržení reaktantů v reaktoru.

Koncentrace C_B produktu B se v látkové bilanci nevyskytuje, protože jeho koncentrace je rovna poklesu vstupní koncentrace:

$$C_B = C_{Aq} - C_A \quad (65)$$

Z hlediska energetických bilancí jsou sestaveny tepelné bilance pro obsah reaktoru a kapaliny v plášti.

Tepelná bilance reaktantů v reaktoru je vyjádřena:

$$V\rho c_p \frac{dT}{dt} = q\rho c_p(T_q - T) + (-\Delta H)k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} C_A - UA(T - T_p) \quad (66)$$

kde $(-\Delta H)k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} C_A$ udává teplo uvolněné/spotřebované chemickou reakcí.

z rovnice (66) je odvozena diferenciální rovnice pro časovou změnu teploty T reaktantů v reaktoru:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V}(T_q - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} k_0 e^{\frac{-E_a}{RT}} C_A - \frac{UA}{V\rho c_p}(T - T_p) \quad (67)$$

Tepelná bilance chladicí kapaliny v plášti je následně vyjádřena:

$$V_p \rho_p c_{pp} \frac{dT_p}{dt} = q_p(T_{pq} - T_p) + UA(T - T_p) \quad (68)$$

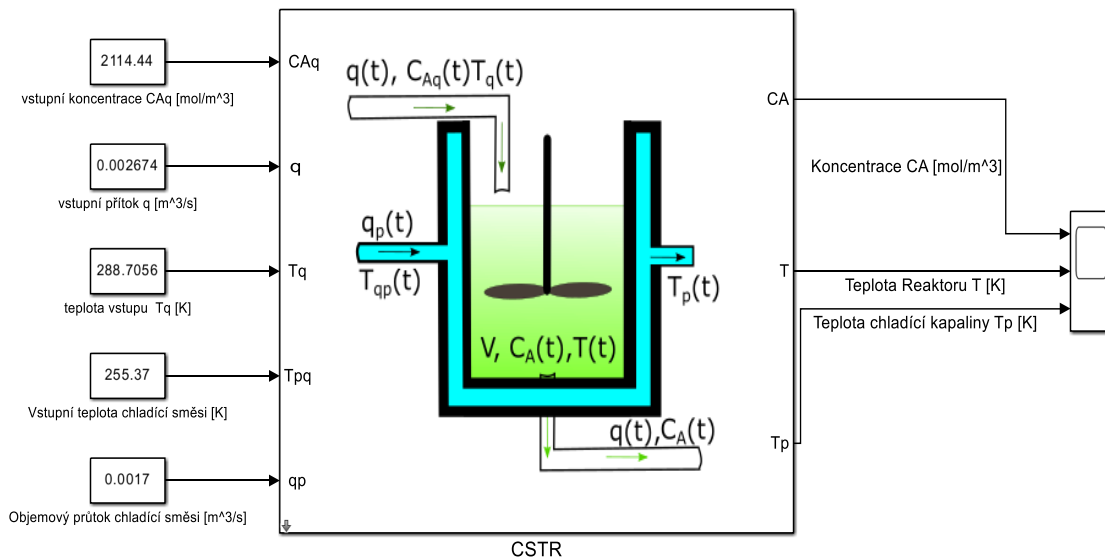
z rovnice (68) je poté odvozena diferenciální rovnice pro časovou změnu T_p teploty chladicí kapaliny v plášti.

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{q_p}{V_p}(T_{pq} - T_p) + \frac{UA}{V_p \rho_p c_{pp}}(T - T_p) \quad (69)$$

Výsledné diferenciální rovnice (64), (67) a (69), jsou následně implementovány do prostřední Matlab-Simulink, ve kterém jsou jejich prostřednictvím počítány časové průběhy výstupních veličin.

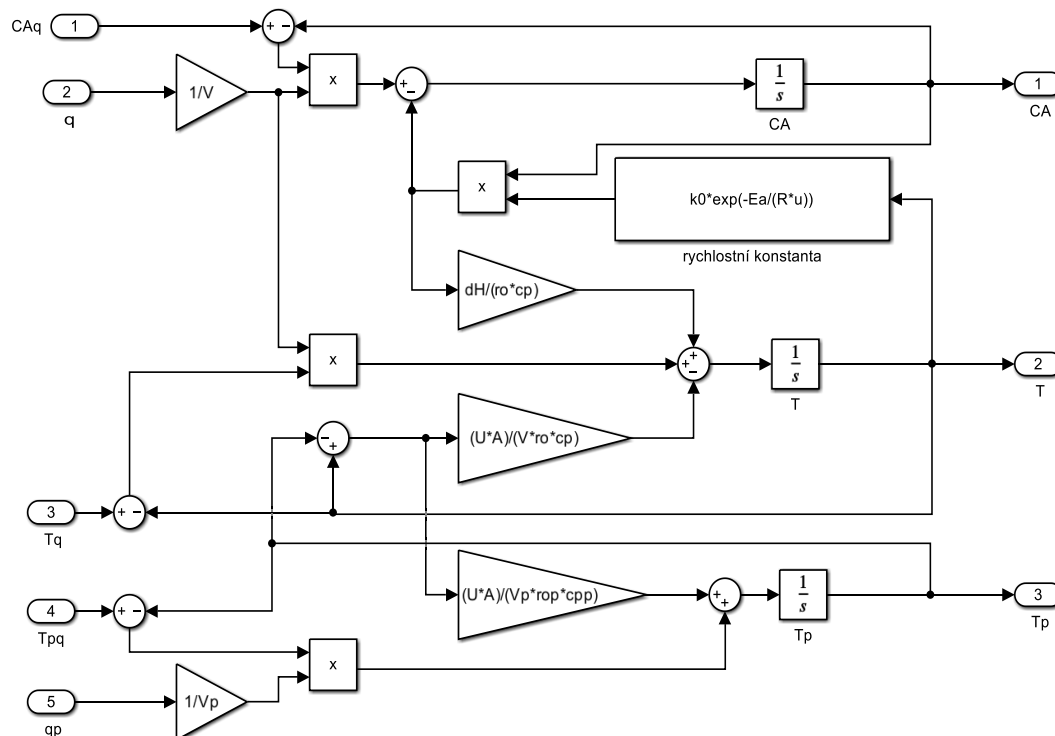
5.3.2 Simulační model

Na základní úrovni se realizovaný simulační model skládá z ilustračního obrázku, který přibližně zobrazuje simulované materiálové a energetické toky, dále z prvků, které popisují vstupy a výstupy a ze základních vstupních a výstupních bloků. Viz Obrázek 24 níže.



Obrázek 24. Systém průtočný reaktor – Simulinkový model

Obrázek 24 zobrazuje vytvořený simulační model v prostředí Simulink. Jeho hlavní součástí je subsystém, který obsahuje vlastní nelineární model reálného systému vytvořený na základě bilančních rovnic (64), (67) a (69). (viz Obrázek 25).



Obrázek 25. Systém průtočný reaktor – nelineární model v prostředí Simulink

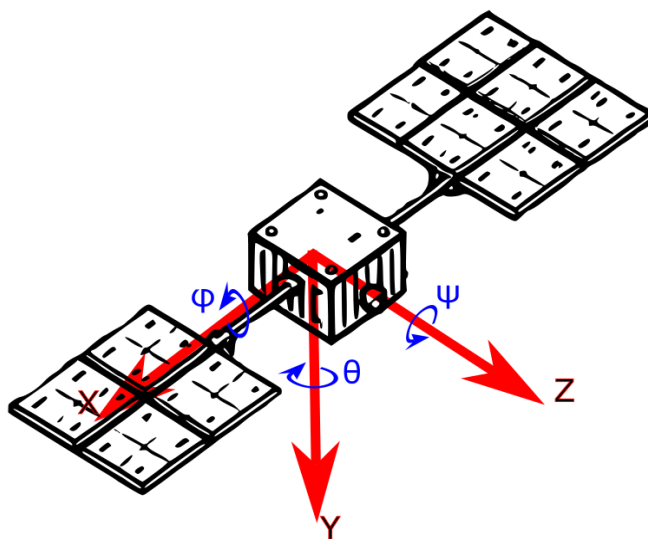
Obrázek 26. Systém průtočný reaktor – nastavení modelu

Obrázek 26 výše ukazuje možnosti nastavení parametrů modelu.

V rámci této kapitoly vytvořený simulační model průtočného reaktoru umožňuje sledovat změnu poklesu koncentrace vstupního reaktantu, teplotu obsahu reaktoru a teplotu chladicí kapaliny v závislosti na vstupech systému. Přes grafické rozhraní je možno nastavit všechny fyzikální parametry, které ovlivňují průběh simulace a také počáteční podmínky simulace.

5.4 Orientace družice

Jedná se o model simulující změnu orientace družice v prostoru v závislosti na řídicích momentech síly, které působí v osách souřadného systému družice (viz Obrázek 27). Výstupy modelu jsou úhlové rychlosti rotace kolem jednotlivých tělesových os a výsledná orientace satelitu vůči bázovému souřadnému systému, která je prezentována pomocí čtyřprvkového vektoru kvaternionu.



Obrázek 27. systém orientace družice

5.4.1 Matematický model

Pro odvození jsou použity následující předpoklady:

- celá družice uvažována jako pevné těleso
- Na samotnou družici nepůsobí žádná vnější síla, včetně gravitační.

Ve výpočtech jsou použity následující proměnné dle Tabulky 4 níže.

Tabulka 4. Fyzikální veličiny pro matematický model orientace družice

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Tenzor momentů setrvačnosti družice	$\mathbf{J}$	$kg \cdot m^2$
Momenty setrvačnosti satelitu kolem jednotlivých os. (momenty na hlavní diagonále tenzoru $\mathbf{J}$)	I_x, I_y, I_z	$kg \cdot m^2$
Vektor úhlových rychlostí v tělesovém souřadném systému $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$	$\boldsymbol{\omega}$	Rad/s
Vektor momentů sil působících na družici $\mathbf{m} = [M_x, M_y, M_z]^T$	$\mathbf{m}$	$N \cdot m$
Kvaternion – vektor určující orientaci satelitu $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$	$\mathbf{q}$	

Pohybové rovnice pro změnu orientace se odvozují z Eulerových rovnic rotačního pohybu pro tuhé těleso. Tyto rovnice popisují, jak se mění rotační pohyb tělesa v reakci na působící momenty, jsou ve tvaru:[29]

$$\begin{aligned}
 I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x \\
 I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= M_y \\
 I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z
 \end{aligned} \tag{70}$$

Převedením rovnice (70) do maticové formy získáme:

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{m} \tag{71}$$

V rovnici (71) $\times$ znamená vektorový součin. Rovnice (70) je rovná rovnici (71) jen pokud je tenzor $\mathbf{J}$ diagonální matice, tzn. pro případ, kdy jsou osy rotace tělesa zarovnané se souřadným systémem. V simulaci lze samozřejmě používat plný tenzor.

Z rovnice (71) poté odvodíme rovnici dynamiky družice pro výpočet rychlosti rotace kolem jednotlivých os:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega})) \tag{72}$$

Orientace satelitu je vyjádřena kvaternionem $\mathbf{q}$. Kvaternion je čtyřprvkový jednotkový vektor $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$, který reprezentuje orientaci tělesa jako rotaci v prostoru o úhel θ kolem jednotkové osy $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \|\mathbf{u}\| = 1$ [30].

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \mathbf{u} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (73)$$

Kvaternion se mění v závislosti na vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$.

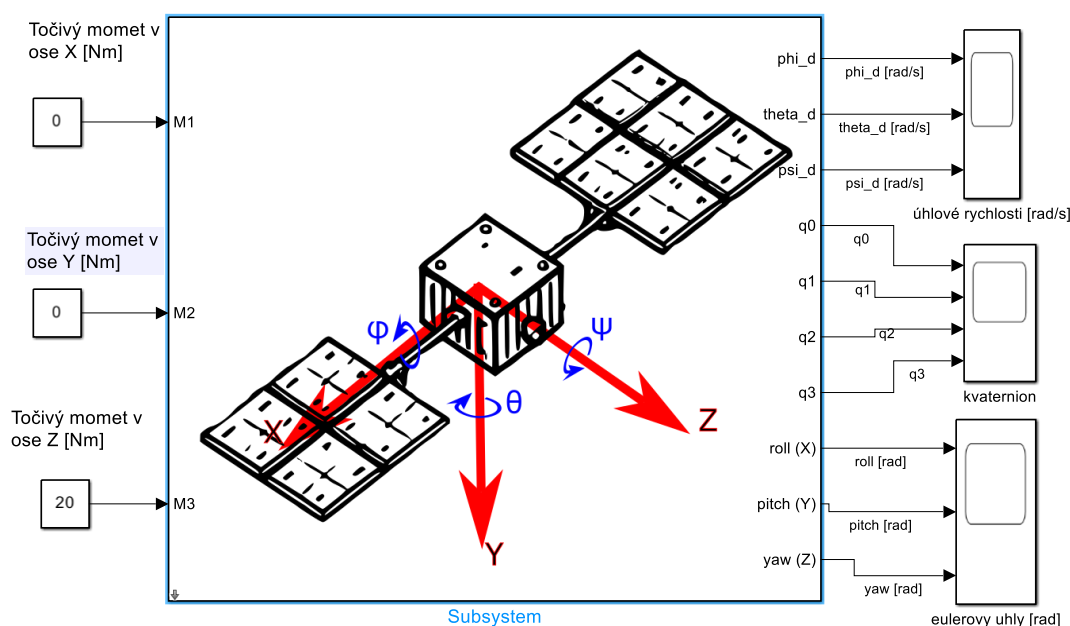
$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \quad (74)$$

kde:

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

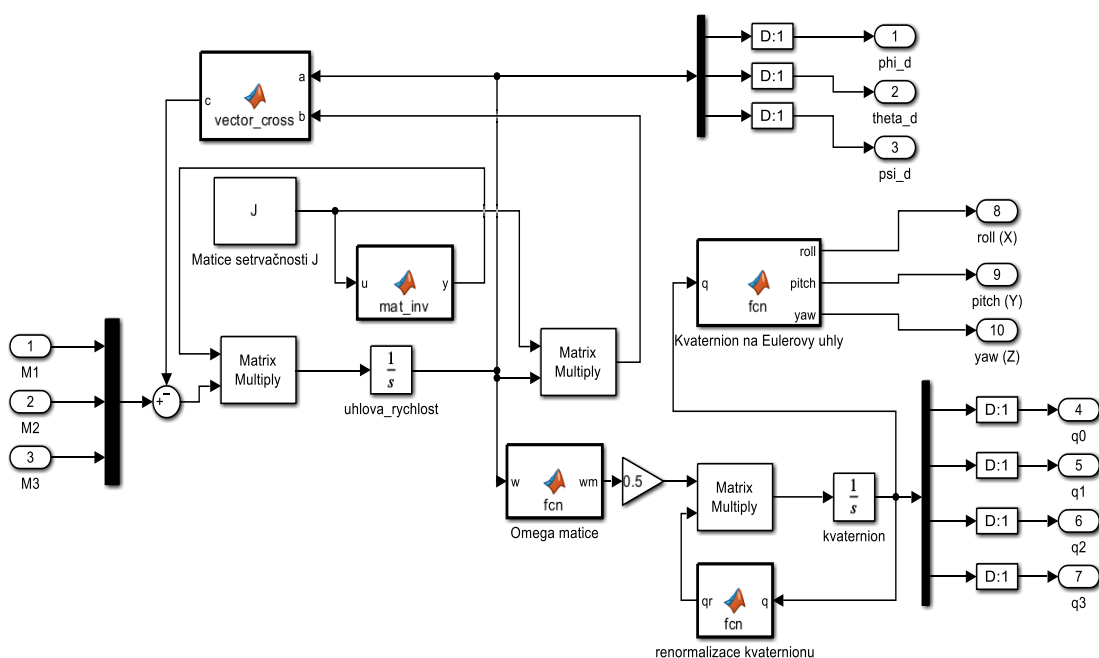
5.4.2 Simulační model

Na základní úrovni se realizovaný simulační model skládá z ilustračního obrázku, který zobrazuje použitý souřadný systém, dále z prvků, které popisují vstupy a výstupy a ze základních vstupních a výstupních bloků. Viz Obrázek 28 níže.

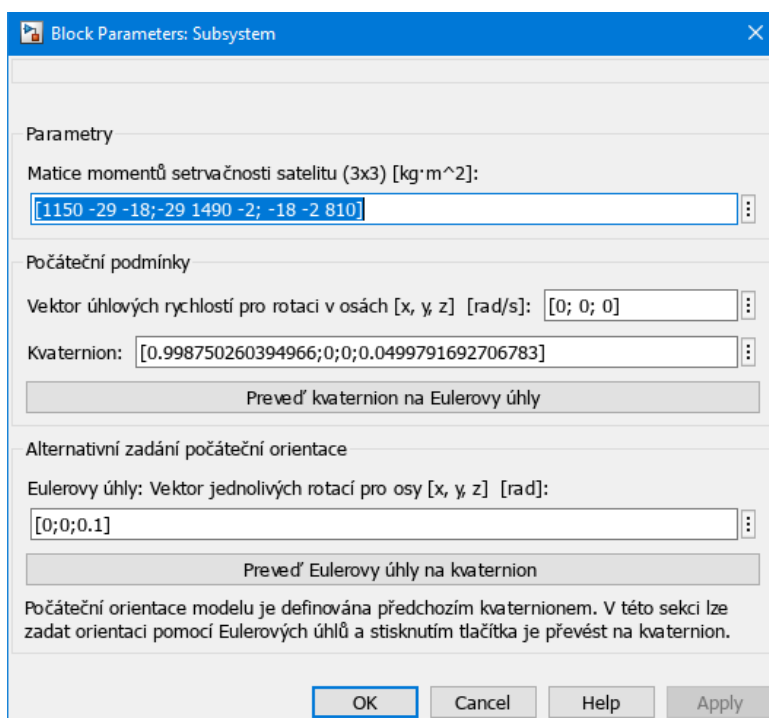


Obrázek 28. Systém orientace družice – Simulinkový model.

Obrázek 28 zobrazuje vytvořený simulační model. Jeho hlavní součástí je subsystém, který obsahuje vlastní zjednodušený nelineární model uvažovaného reálného systému vytvořený na základě pohybových rovnic (72) a (74). (Viz Obrázek 29) Kromě výstupu orientace pro jednotlivé prvky vektoru $\mathbf{q}$ má model též výstup orientace ve formě Eulerových úhlů v pořadí os (x,y,z) neboli $(roll, pitch, yaw)$.



Obrázek 29. Systém orientace družice – nelineární model v prostředí Simulink.



Obrázek 30. Systém orientace družice – nastavení modelu.

Obrázek 30 výše ukazuje možnosti nastavení parametrů modelu. Možnost nastavení počáteční polohy je jak nastavením kvaternionu, tak pomocí Eulerových úhlů.

V rámci této kapitoly vytvořený simulační model umožňuje sledovat změnu orientace družice a rychlost rotace kolem jednotlivých os v závislosti na řídicích momentech sil. Přes grafické rozhraní je možno nastavit všechny fyzikální parametry, které ovlivňují průběh simulace a také počáteční podmínky simulace.

5.5 Model Helikoptéry CE150

Jedná se o edukační model vrtulníku firmy Humosoft s.r.o. Vlastní fyzikální model je velmi zjednodušený model vrtulníku, který se skládá z těla vrtulníku a dvou motorů, které pohání hlavní a ocasní rotor, viz Obrázek 31 níže.



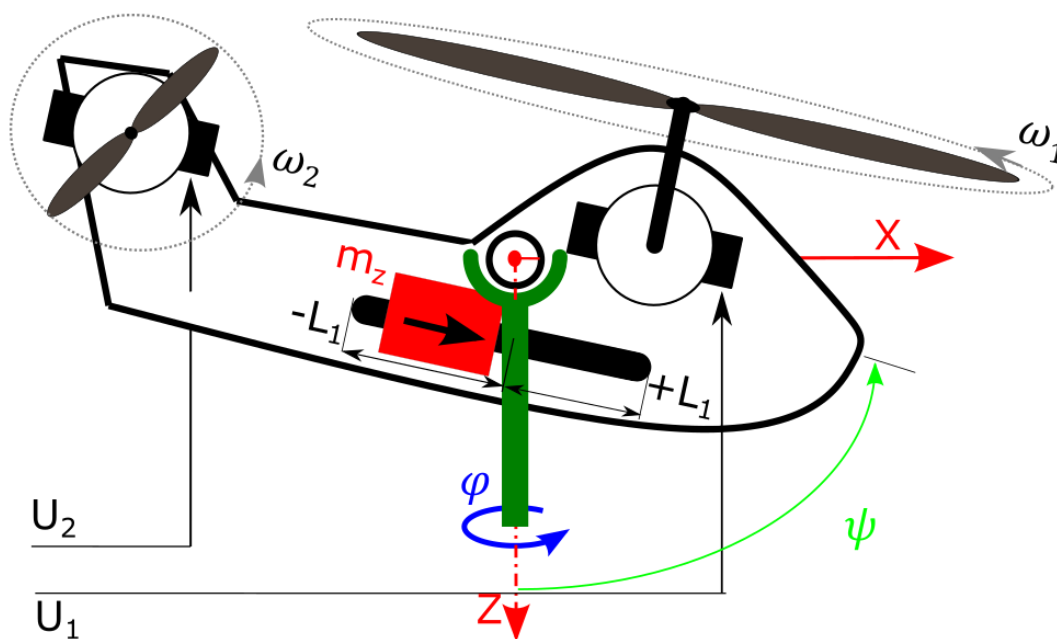
Obrázek 31. Fotografie modelu helikoptéry CE150

(zdroj: [26])

Osy obou rotorů jsou na sebe vzájemně kolmé. Tělo vrtulníku je připevněno na základě, která umožňuje dva stupně volnosti pohybu, a to elevaci neboli rotaci kolem horizontální osy (úhel ψ). Dále azimut neboli rotaci kolem vertikální osy (úhel φ). Oba úhly jsou měřitelné výstupy systému. Oba tyto výstupy se měří pomocí inkrementálních snímačů. Vlastní fyzikální model má tři říditelné vstupy, napětí pro hlavní motor, napětí pro ocasní

motor a napětí servomotoru pro změnu polohy těžiště modelu. Změna těžiště je realizována pomocí změny polohy pohyblivého závaží m_z uvnitř modelu. (viz Obrázek 32).

Pohyb vrtulníku je omezen pomocí mechanických dorazů na rozsah 270° v azimutu a na 90° v elevaci v rozsahu $\pm 45^\circ$ od osy X . Pohyb závaží m_z je poté v rozsahu ± 4 cm od vertikální osy Z .



Obrázek 32. Schéma modelu helikoptéry CE150

5.5.1 Matematický model

Tabulka 5 níže obsahuje veličiny pro dále odvozený zjednodušený matematický model [31].

Tabulka 5. Fyzikální veličiny pro matematický model systému helikoptéra CE150

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Moment síly hlavního rotoru	τ_1	$N \cdot m$
Moment třecí síly pro elevaci	τ_{fe}	$N \cdot m$
Moment tíhové síly	τ_m	$N \cdot m$
Moment gyroskopické síly	τ_G	$N \cdot m$
Odstředivý točivý moment	τ_ϕ	$N \cdot m$
hmotnost modelu	m	kg
vzdálenost těžiště od horizontální osy rotace	l	m
konstanta pro hlavní rotor	$k_{\omega 1}$	$kg \cdot m^2 / s$
Úhlová rychlost hlavního rotoru	ω_1	rad/s

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Koeficient coulombova tření v elevaci	C_ψ	$kg \cdot m^2/s$
Koeficient viskózního tření v elevaci	B_ψ	$kg \cdot m^2/s$
Moment síly ocasního rotoru	τ_2	$N \cdot m$
Moment třecí síly pro azimut	τ_{fa}	$N \cdot m$
Moment reakční síly hlavního rotoru	τ_r	$N \cdot m$
konstanta pro ocasní rotor	$k_{\omega 2}$	$kg \cdot m^2/s$
vzdálenost osy ocasního rotoru od vertikální osy rotace	l_2	m
Úhlová rychlost ocasního rotoru	ω_2	rad/s
Koeficient coulombova tření v azimutu	C_φ	$kg \cdot m^2/s$
Koeficient viskózního tření v azimutu	B_φ	$kg \cdot m^2/s$
Konstanta gyroskopické vazby elevace - azimut	K_{gyr}	$N \cdot m \cdot s/V$
Moment setrvačnosti při změně elevace	I_e	$kg \cdot m^2$
Moment setrvačnosti při změně azimutu	I_a	$kg \cdot m^2$
gravitační zrychlení	g	m/s^2

Pro matematický popis pohybových rovnic systému se vychází z rovnováhy momentů sil. Tato rovnováha je vyjádřena rovnicemi (76 - 83), které mají níže uvedený tvar [31]:

Pro dynamiku elevace:

$$I_e \ddot{\psi} = \tau_1 + \tau_\varphi - \tau_{fe} - \tau_m - \tau_G \quad (76)$$

$$\tau_m = (mgl + m_z g L_1) \cdot \sin(\psi) = (t_g + m_z g L_1) \sin(\psi) \quad (77)$$

$$\tau_1 = k_{\omega 1} \omega_1^2 \quad (78)$$

$$\tau_{fe} = C_\psi \operatorname{sign} \dot{\psi} + B_\psi \dot{\psi} \quad (79)$$

$$\tau_G = K_{gyr} \dot{\varphi} \omega_1 \cos(\psi), \quad \dot{\varphi} \ll \omega_1 \quad (80)$$

Pro dynamiku azimutu:

$$I_a \ddot{\varphi} = \tau_2 - \tau_{fa} - \tau_r \quad (81)$$

$$\tau_2 = k_{\omega 2} l_2 \sin(\psi) \omega_2^2 \quad (82)$$

$$\tau_{fa} = C_\varphi \operatorname{sign} \dot{\varphi} + B_\varphi \dot{\varphi} \quad (83)$$

Výše uvedené rovnice (76 - 83) tvoří základní rámec pro následně definovaný simulační model.

5.5.2 Simulační model

Některé parametry z rovnic (76 - 83) jsou na reálném zařízení obtížně zjistitelné nebo změřitelné. Matematický model je proto zjednodušen a některé části jsou aproximovány lineárními přenosovými funkcemi. Parametry lineárních přenosových funkcí mohou být poté identifikovány za použití vhodných identifikačních metod [32]. Jedná se proto částečně o empirický model. Při tvorbě modelu byly použity následující aproximace a zjednodušení:

Hlavní motor a ocasní motor byly aproximovány lineární přenosovou funkcí druhého řádu (84).

$$G_i(s) = \frac{U_{di}(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{(T_i + 1)^2} \quad (84)$$

Momenty sil τ_i od hlavního a ocasního motoru byly následně aproximovány za použití lineárně-kvadratické aproximace (85)

$$\tau_i = a_i u_{di}^2 + b_i u_{di} \quad (85)$$

kde pro hlavní motor $i = 1$ a ocasní motor $i = 2$.

Moment reakční síly hlavního rotoru τ_r byl aproximován přenosovou funkcí prvního řádu s jednou nulou. (86)

$$G_3(s) = \frac{\tau_r(s)}{U_1(s)} = \frac{T_{0r}s - 1}{T_{pr}s - 1} \quad (86)$$

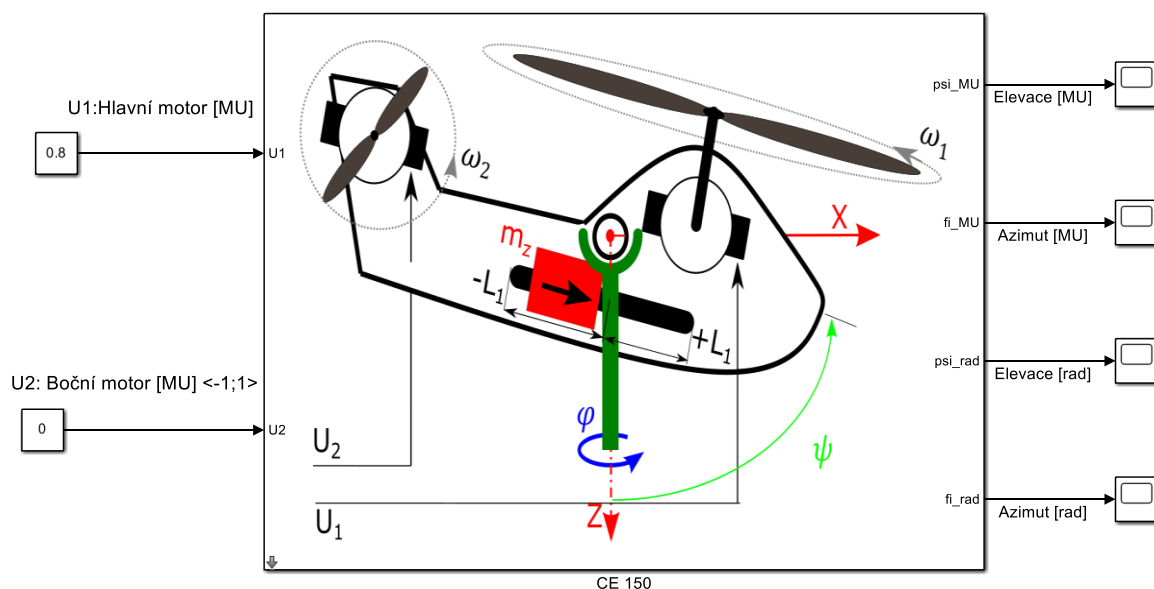
- Odstředivý točivý moment τ_ϕ (76) se zanedbává.
- Rovnice třecích sil (79, 83) jsou nahrazeny tlumícími koeficienty b_{fe} a b_{fa} .
- τ_G je funkcí vstupu u_1 místo úhlové rychlosti ω .

Tabulka 6 obsahuje veličiny pro empirický model.

Tabulka 6. Parametry pro empirický model systému helikoptéra CE150

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
<i>Dynamika soustavy hlavního motoru a vrtule</i>		
Reakční přepočtová konstanta kvadratického členu	a_e	$N \cdot m / MU^2$
Reakční přepočtová konstanta lineárního členu	b_e	$N \cdot m \cdot / MU$
Časová konstanta přenosu motoru	T_1	s

<i>Dynamika soustavy ocasního motoru a vrtule</i>		
Reakční přepočtová konstanta kvadratického členu	a_a	$N \cdot m / MU^2$
Reakční přepočtová konstanta lineárního členu	b_a	$N \cdot m \cdot / MU$
Časová konstanta přenosu motoru	T_2	s
<i>Dynamika křížové vazby hlavní motor - azimut</i>		
Zesílení přenosu	K_r	$N \cdot m / MU$
Časová konstanta čitatele	T_{0r}	s
Časová konstanta jmenovatele	T_{pr}	s
Tlumicí koeficient při změně elevace	b_{fe}	$kg \cdot m^2/s$
Tlumicí koeficient při změně azimutu	b_{fa}	$kg \cdot m^2/s$
Konstanta gyroskopické vazby elevace - azimut	K_{gyr}	$N \cdot m \cdot s / V$
Moment tíhové síly při $L_l = 0$	t_g	$N \cdot m$
<i>Výstupní blok</i>		
ofset převodníku pro elevaci	$y_{\psi 0}$	MU
konstanta pro převod $rad - MU$ pro elevaci	k_{ψ}	rad/MU
konstanta pro převod $rad - MU$ pro azimut	k_{φ}	rad/MU
<i>Ostatní</i>		
Hmotnost posuvného závaží	m_z	kg
Poloha posuvného závaží $\langle -0,04; 0,04 \rangle$	L_l	m

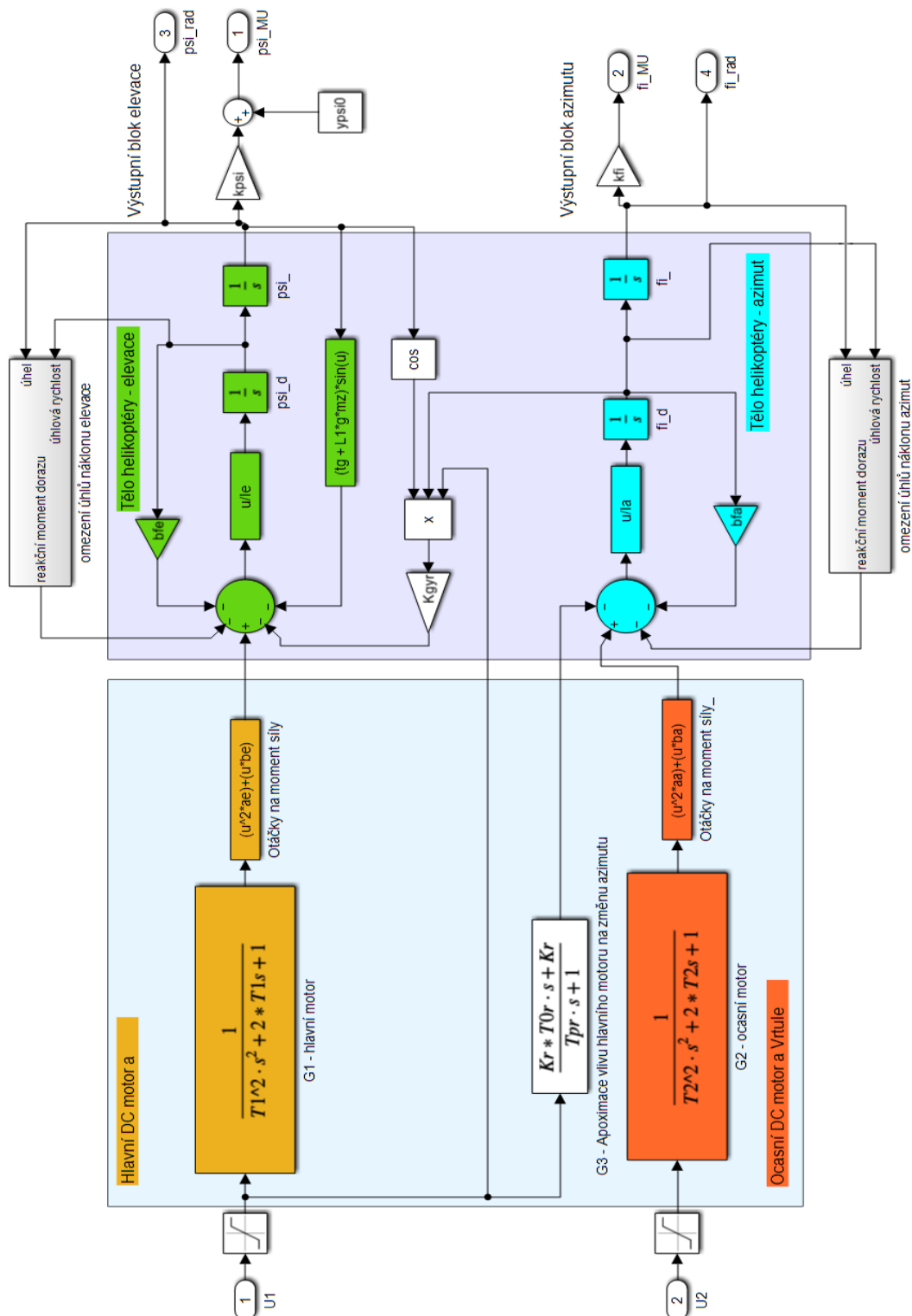


Obrázek 33. Systém model helikoptéry CE150 – Simulinkový model

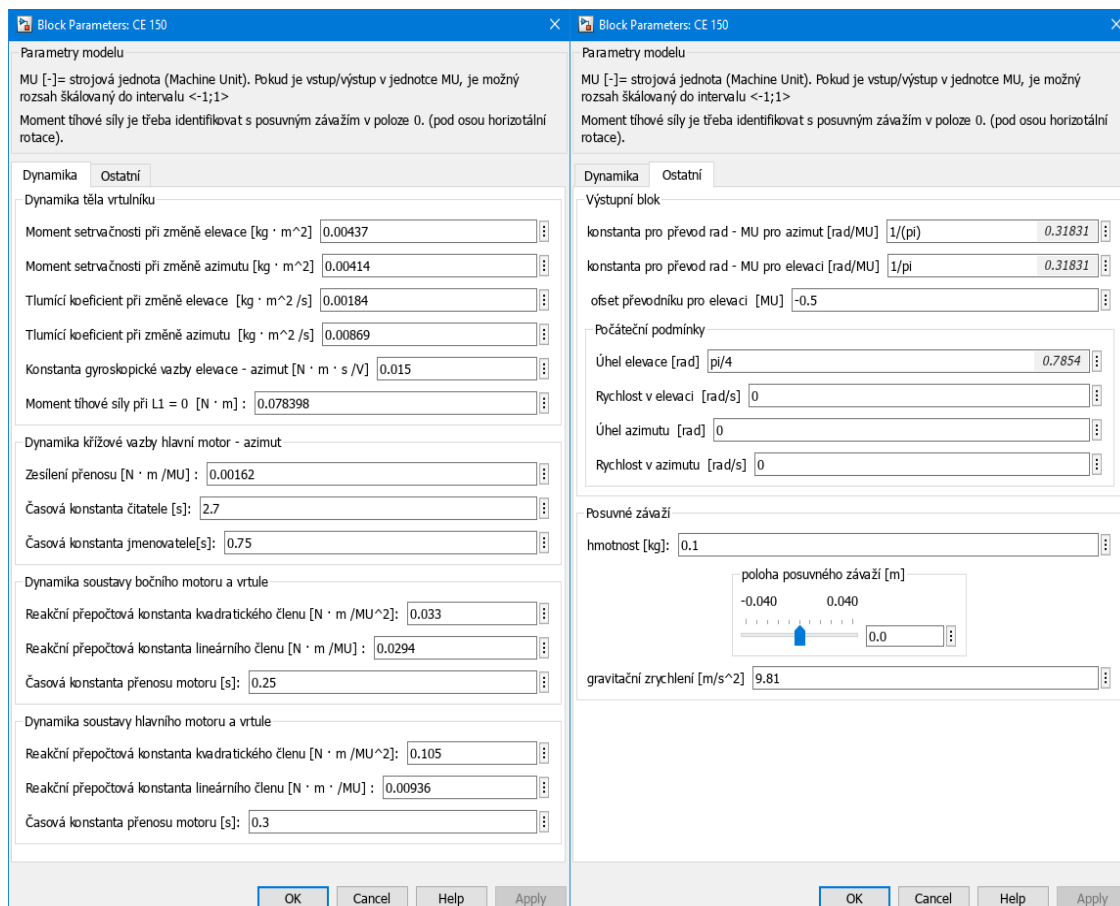
Obrázek 33 zobrazuje vytvořený simulační model. Jeho hlavní součástí je subsystém, který obsahuje vlastní nelineární model reálného systému vytvořený na základě pohybových rovnic (76) a (81). (viz Obrázek 34 níže) Simulační model má dvojí výstup, jak u elevace,

tak i u azimutu, může být výstup zobrazen jak v radiánech, tak ve strojových jednotkách $[MU]$. Poloha posuvného závaží m_z není v simulačním modelu vstup systému. Lze ji pouze nastavit jako parametr v nastavení modelu.

Obrázek 35. dále ukazuje možnosti nastavení parametrů modelu.



Obrázek 34. Systém model helikoptéry CE150 – nelineární model v prostředí Simulink



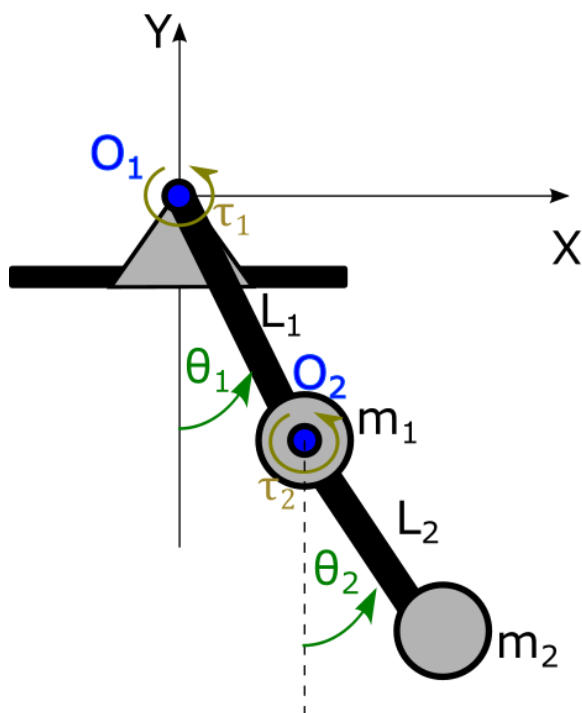
Obrázek 35. Systém model helikoptéry CE150 – nastavení modelu.

V rámci této kapitoly vytvořený simulační model helikoptéry CE150 umožňuje simulovat změny orientace v elevaci a azimutu v závislosti na velikosti řídicího signálu příslušného motoru. Přes grafické rozhraní je možno nastavit všechny fyzikální parametry, které ovlivňují průběh simulace a také počáteční podmínky simulace

5.6 Dvojitě kyvadlo

Jedná se o zjednodušený model dvojitěho kyvadla. Hmotný bod o hmotnosti m_1 je spojený nehmotným závěsem o délce L_1 s osou rotace O_1 . Hmotný bod o hmotnosti m_2 je spojený nehmotným závěsem o délce L_2 s osou rotace O_2 . Osa rotace O_2 se nachází v místě hmotného bodu m_1 . V ose rotace O_1 může působit moment síly τ_1 a v ose rotace O_2 může působit moment síly τ_2 . Úhel θ_1 udává hodnotu vychýlení závěsu L_1 od osy Y a úhel θ_2 udává hodnotu vychýlení závěsu L_2 od osy, která je rovnoběžná s osou L_2 a prochází osou rotace O_2 . (viz Obrázek 36).

Jedná se obecně o nestabilní systém (dle zvoleného prac. bodu pro řízení) se dvěma stupni volnosti. Výstupy systému jsou úhly θ_1 a θ_2 . Vstupy systému jsou momenty síly τ_1 a τ_2 [30].



Obrázek 36. Schéma systému dvojitého kyvadla

Každý závěs se může kolem své osy rotace otáčet o plný úhel 2π . Systém proto může nabývat čtyř rovnovážných stavů, jednoho stabilního a tří nestabilních. Stabilní stav je pro $\theta_1 = \theta_2 = 0$. V daném stavu se systém po mírném vychýlení vrátí opět do rovnovážné stabilní polohy. Nestabilní rovnovážné stavy jsou v případě, pokud jeden, nebo oba úhly $\theta_{1,2}$ nabývají hodnotu π . V daných stavech systém po mírném vychýlení směřuje ke stabilnímu stavu, ve kterém se ale ustálí jen pokud bude přítomno viskózní tření v osách rotace.

5.6.1 Matematický model

V odvození dále jsou použity následující proměnné, viz Tabulka 7 níže.

Tabulka 7. Fyzikální veličiny pro matematický model systému dvojitě kyvadla

<i>Parametr</i>	<i>Symbol</i>	<i>jednotka</i>
Hmotný bod 1	m_1	kg
Hmotný bod 2	m_2	kg
Délka 1. nehmotného závěsu	L_1	m
Délka 2. nehmotného závěsu	L_2	m

Koeficient viskózního tření pro osu rotace O_1	b_1	$N \cdot m \cdot s / rad$
Koeficient viskózního tření pro osu rotace O_2	b_2	$N \cdot m \cdot s / rad$
Vychýlení 1. nehmotného závěsu	θ_1	rad
Vychýlení 2. nehmotného závěsu	θ_2	rad
Moment síly působící v ose O_1	τ_1	$N \cdot m$
Moment síly působící v ose O_2	τ_2	$N \cdot m$
gravitační zrychlení	g	m/s^2

Pro matematický popis pohybových rovnic daného systému je vycházeno ze základní Euler-Lagrangeovy diferenciální rovnice (32)[25].

Obecnými souřadnicemi jsou proměnné:

$$q_1 = \theta_1; \quad q_2 = \theta_2$$

Kinetická energie systému je dána součtem energií obou hmotných bodů (87):

$$\begin{aligned}
 W_k &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
 W_k &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
 W_k &= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 L_2 \theta_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))
 \end{aligned} \tag{87}$$

Potenciální energie je vztažena k počátku souřadného systému (88)

$$\begin{aligned}
 W_p &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\
 W_p &= -(m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) - m_2 g L_2 \cos(\theta_2)
 \end{aligned} \tag{88}$$

Lagrangián $L = W_k - W_p$ má poté hodnotu (89)

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 L_2 \theta_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) + m_2 g L_2 \cos(\theta_2)
 \end{aligned} \tag{89}$$

Obecné a disipační síly jsou definovány:

$$Q_{\theta_1} = \tau_1 - b_1 \dot{\theta}_1; \quad Q_{\theta_2} = \tau_2 - b_2 \dot{\theta}_2 \tag{90}$$

Po derivování dle (32) je získána soustava rovnic (91):

$$(m_1 + m_2)L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2L_1L_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gL_1(m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = \tau_1 - b_1\dot{\theta}_1 \quad (91)$$

$$m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gL_2m_2 \sin(\theta_2) = \tau_2 - b_2\dot{\theta}_2 \quad (92)$$

Výsledné rovnice však obsahují dvě proměnné v druhé derivaci v každé z rovnic, což může způsobit problém při numerickém integrování z důvodu vzniku algebraických smyček viz kapitola 5.2.1. Daný problém se vyřeší převodem rovnic na maticovou formu, jak bylo popsáno v kapitole 5.2.1 a poté se dostanou výsledné rovnice (93)(94).

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{L_2\tau_1 - b_1\dot{\theta}_1L_2 - (gL_1l_2m_1 \sin(\theta_1))(m_1 + m_2) + \dot{\theta}_2^2l_1l_2^2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))a}{l_1^2l_2(-m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 + m_1 + m_2)} \quad (93)$$

$$a = (-\tau_2 + b_2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2L_1L_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gL_2m_2 \sin(\theta_2))$$

$$\frac{-(-L_1\tau_1)(m_1 + m_2) + b_2\dot{\theta}_2L_1(m_1 + m_2) + L_2m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)c + d((L_1L_2m_2^2) + (L_1L_2m_1m_2))}{l_2^2l_1m_2(-m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 + m_1 + m_2)} \quad (94)$$

$$c = (\tau_1 - b_1\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2L_1L_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - gL_1m_1 \sin(\theta_1))$$

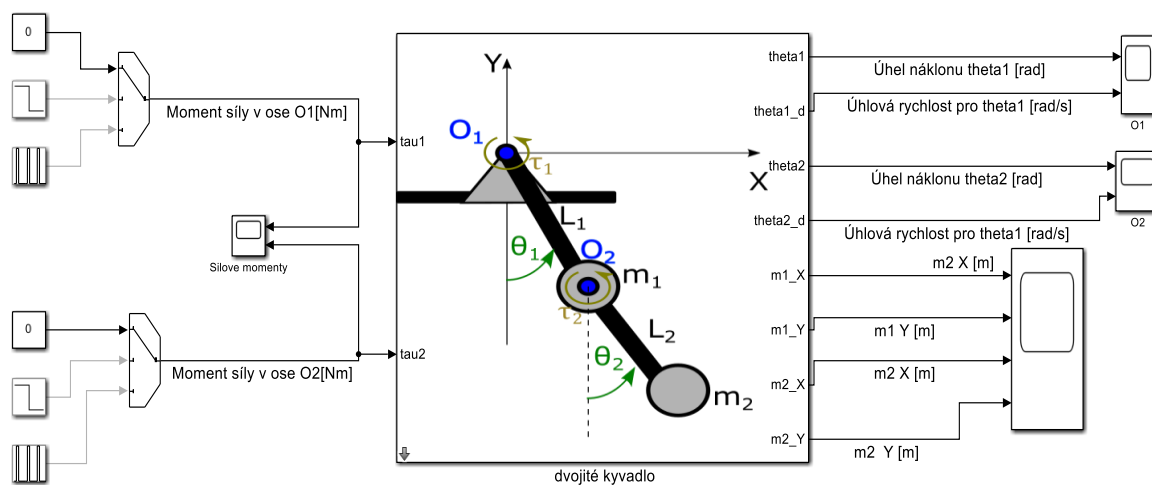
$$d = (\dot{\theta}_1^2L_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2))$$

Vytvořené rovnice (93)(94) jsou přímo implementovány do simulačního modelu pomocí bloků MATLAB Function. (viz Obrázek 38)

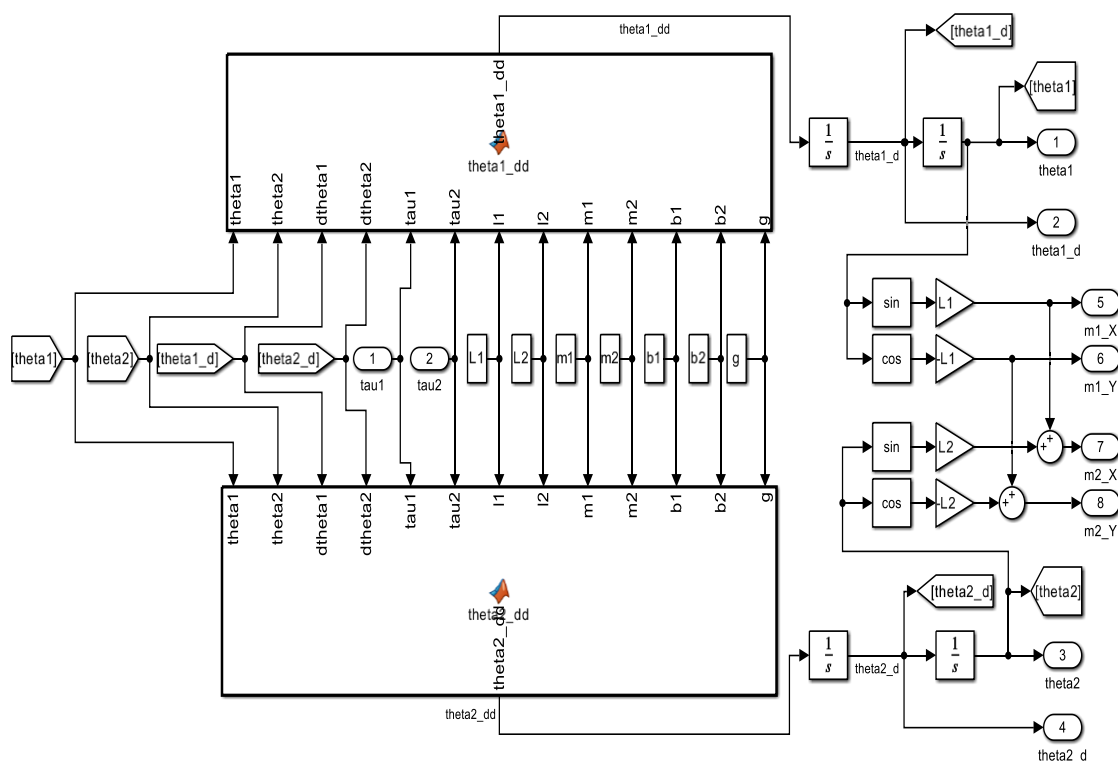
5.6.2 Simulační model

Na základní úrovni se realizovaný simulační model skládá z ilustračního obrázku, který zobrazuje použitý souřadný systém, dále z prvků, které popisují vstupy a výstupy a ze základních vstupních a výstupních bloků. Viz Obrázek 37 níže.

Hlavní součástí simulačního modelu je subsystém, který obsahuje vlastní zjednodušený nelineární model uvažovaného reálného systému vytvořený na základě pohybových rovnic (93) a (94). (Viz Obrázek 38) Kromě výstupu pro hodnoty úhlů θ_1 , θ_2 a hodnoty jejich prvních derivací je k dispozici i výstup pro souřadnice polohy $[x,y]$.



Obrázek 37. Dvojité kyvadlo, Simulinkový model



Obrázek 38. Dvojité kyvadlo – nelineární model v prostředí Simulink

Obrázek 39 ukazuje možnosti nastavení všech parametrů modelu.

Block Parameters: dvojité kyvadlo

m1 [kg] 1

m2 [kg] 1

L1 [m] 1

L2 [m] 1

Počáteční poloha úhlu theta1 [rad] pi

Počáteční poloha úhlu theta2 [rad] pi-0.05 3.0916

g 9.81

koeficient tření pro osu rotace O1 [-]

0

koeficient tření pro osu rotace O2 [-]

0

OK Cancel Help Apply

Obrázek 39. Systém dvojité kyvadlo – nastavení parametrů modelu.

V rámci této kapitoly vytvořený simulační model dvojitého kyvadla může mít více využití, v závislosti na tom, do jaké míry se aplikují silové momenty v jednotlivých osách, pokud se vynechají úplně, lze sledovat jen tlumený či netlumený pohyb dvojitého kyvadla působením gravitační síly. Je možnost experimentovat se stabilizací kyvadla v horní poloze pouze regulací točivého momentu v jedné ose. V případě regulace točivého momentu v obou osách, systém simuluje zjednodušený dvojramenný robotický manipulátor. Přes grafické rozhraní je možno nastavit všechny fyzikální parametry, které ovlivňují průběh simulace a také počáteční podmínky simulace.

6 ŘÍZENÍ VYBRANÉHO NESTABILNÍHO SYSTÉMU

V této kapitole je popsán proces návrhu a realizace řízení pro edukační model helikoptéry CE 150 firmy Humusoft. Daný systém je blíže popsán v kapitole 5.5. V dané kapitole je též popsán vytvořený simulační model pro program Matlab – Simulink, na kterém byly testovány navržené regulátory před aplikací na reálný systém.

6.1 Specifikace komunikačního rozhraní

Veškerá komunikace s reálným zařízením je realizována prostřednictvím programového prostředí Matlab – Simulink, který prostřednictvím doplňku Simulink Desktop Real-Time komunikuje s řídicí kartou Humusoft MF624, která dále komunikuje s vlastním zařízením. Zesilovače motorů zařízení jsou řízeny prostřednictvím PWM modulace, hodnota výstupu z regulátoru v Simulinku v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ poté odpovídá střídě PWM modulace u hlavního motoru, který se otáčí jen jedním směrem. Ocasní motor se otáčí oběma směry, výstup z programu Simulink v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ je v ovládacím bloku přepočítán na rozsah střídý $\langle 0; 0.5 \rangle$ pro jeden směr otáčení a $\langle 0.5; 1 \rangle$ pro druhý směr otáčení.

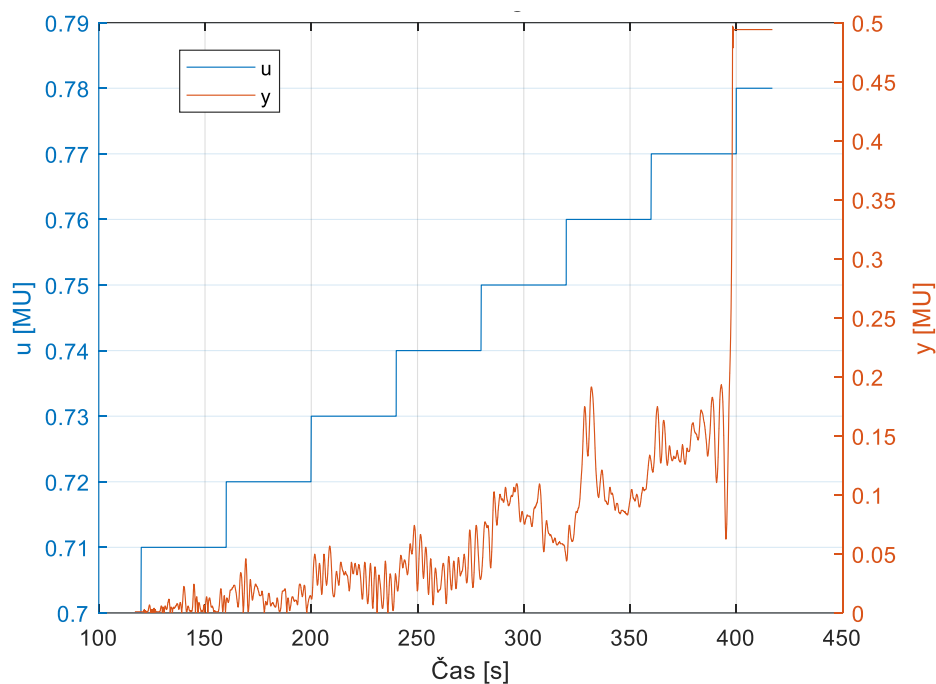
6.1.1 Přepočty jednotek pro elevaci a azimut.

Poloha je snímána pomocí inkrementálních snímačů, což znamená, že nulová hodnota je v pozici kde se nachází model na začátku simulace. U elevace je to pokaždé spodní doraz. Výstupy jsou normalizovány na rozsah $\langle 0; 0.5 \rangle$ MU u elevace, přičemž 0 odpovídá náklonu 45° od osy Z, což je hodnota spodního dorazu, hodnota 0.25 odpovídá vodorovné poloze modelu, což je 90° od osy Z a 0.5 odpovídá hodnotě 135° což je hodnota horního dorazu. Dorazy azimutu umožňují rozsah pohybu 270° . V této práci se používá rozsah $\pm 135^\circ$ což odpovídá $\pm 0,75$ MU. Z výše uvedeného vyplývá že hodnota 0,01 MU odpovídá $1,8^\circ$.

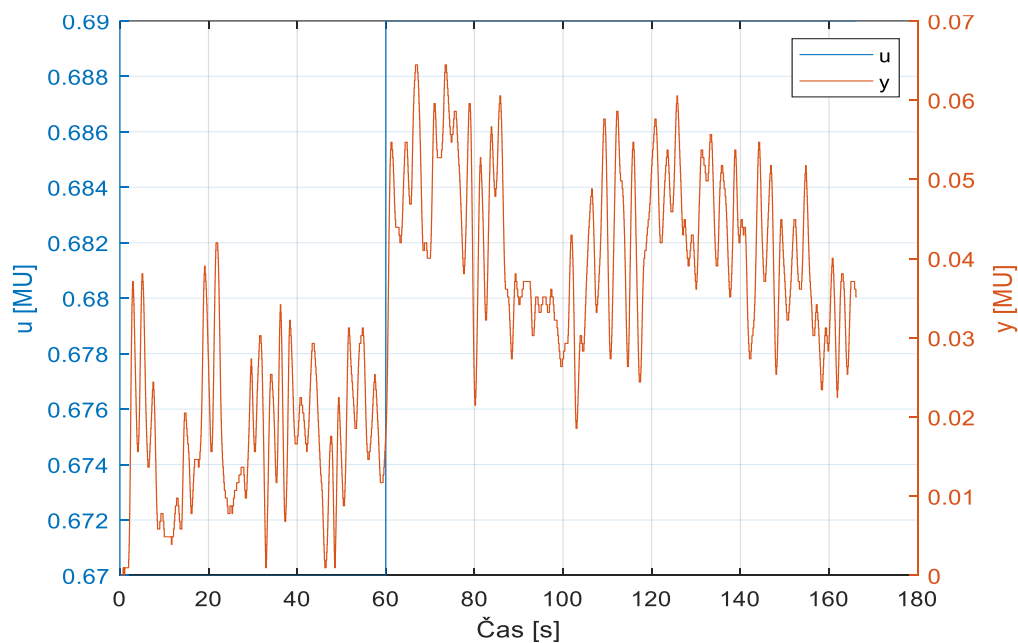
6.2 Identifikace a návrh modelu pro řízení

Za účelem návrhu regulátoru byla provedena rámcová identifikace reálného systému a dále následně linearizace navrženého nelineárního modelu v defín. prac. bodech. Obrázek 40 zobrazuje statickou charakteristiku systému (z pohledu řízení elevace), byly zkoušeny i delší časy mezi jednotlivými skoky, ale ani po delší době nedochází k postupnému tlumení kmitů. Z dané charakteristiky vyplývá omezený prostor pro akční zásah, přibližně $0.7 - 0.8$ MU a nestabilita pro náklony od cca 90° (vodorovné polohy), kdy se vrtulník překlápí k hornímu dorazu. Obrázek 41 zobrazuje přechodovou charakteristiku mezi hodnotou vstupního signálu

0.67 a 0.69 MU. (snížená úroveň vstupu oproti statické char. je kvůli přidání stabilizačního závaží). Tato charakteristika jen dokresluje kmitavost celého systému v jeho stabilní části.

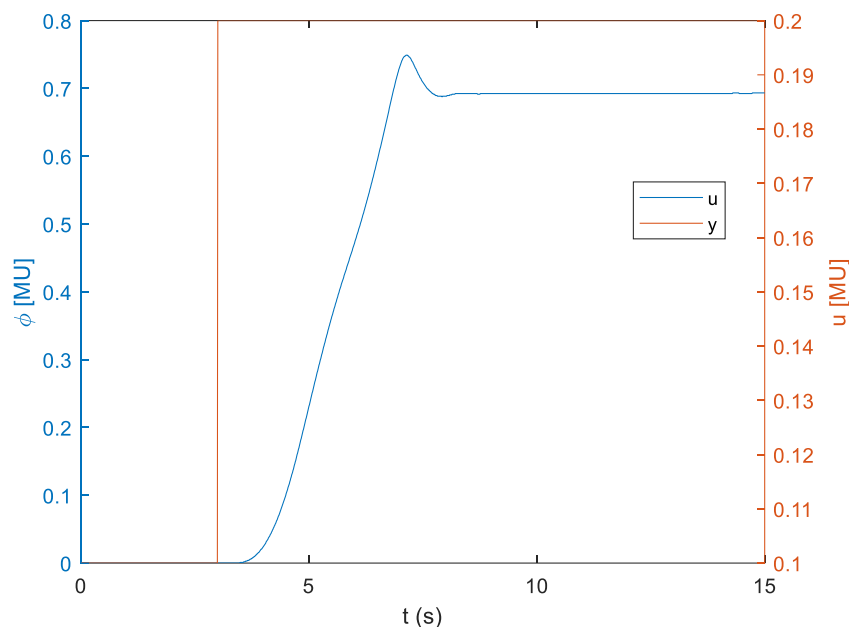


Obrázek 40. Statická charakteristika – elevace



Obrázek 41. Přechodová charakteristika – elevace

Obrázek 42 poté ukazuje přechodovou charakteristiku azimutu v reakci na vstupní skok 0.2 MU. Z klidového stavu se systém dá do pohybu a pohyb je zastaven až dorazem, z čehož vyplývá, že se jedná o integrační soustavu.



Obrázek 42. Přechodová charakteristika – azimut.

Na základě orientačního měření statické charakteristiky a vybraných přechodových charakteristik byl pro účely návrhu řízení vybrán přístup, kdy se navržený nelineární model linearizuje v defin. prac. bodech a na základě takto získaných modelů se dále navrhuje vhodné řízení.

6.2.1 Linearizace

Byla provedena linearizace empirického modelu z kapitoly 5.5.2. Při linearizaci byly zanedbány všechny křížové vazby mezi procesy změny elevace a změny azimutu. Vycházelo se z předpokladu, že příslušné silové momenty od vrtulí mají na pohyb systému větší vliv než dané vazby. U elevace byla provedena linearizace ve třech pracovních bodech. První pro náklon 45° . Získaný celkový přenos včetně přenosu motoru je (95):

$$G_{e1}(s) = \frac{10,95}{0,09s^4 + 0,6379s^3 + 2,356s^2 + 7,775s + 12,26} \quad (95)$$

Kdy póly přenosu jsou:

$$-0.2105 + 3.4947i; -0.2105 - 3.4947i; -3.3333 + 0.0000i; -3.3333 + 0.0000i$$

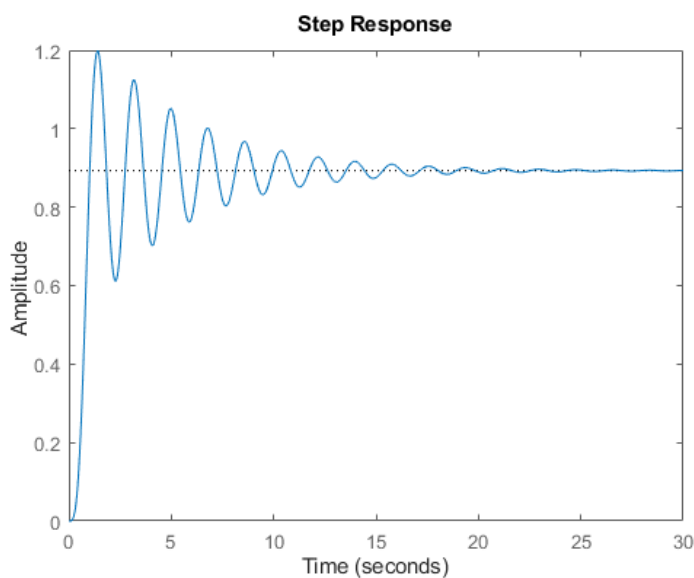
Z daného přenosu vyplývá, že v daném bodě je systém kmitavý stabilní. Obrázek 43 ukazuje reakci systému přenosu (95) na jednotkový skok.

Pro náklon 90° byl získán celkový přenos (96)

$$G_{e1}(s) = \frac{13,01}{0,09s^4 + 0,6379s^3 + 1,253s^2 + 0.4211s} \quad (96)$$

Kdy póly přenosu jsou: 0; -3.3333; -3.3333; -0.4211

Z daného přenosu vyplývá, že v daném bodě má systém integrační chování. Obrázek 44 zobrazuje reakci systému přenosu (96) na jednotkový skok.



Obrázek 43. Linearizace pro náklon 45°. Jednotkový skok.

Pro náklon 135° byl získán celkový přenos (97).

$$G_{e2}(s) = \frac{10,95}{0,09s^4 + 0,6379s^3 + 1,1495s^2 - 6.933s - 12,26} \quad (97)$$

Kdy póly přenosu jsou:

$$3.2969 + 0.0000i ; -3.7179 + 0.0000i ; -3.3333 + 0.0000i ; -3.3333 - 0.0000i$$

Z daného přenosu vyplývá, že v daném bodě má systém nestabilní chování. Obrázek 45 zobrazuje reakci systému přenosu (97) na jednotkový skok.

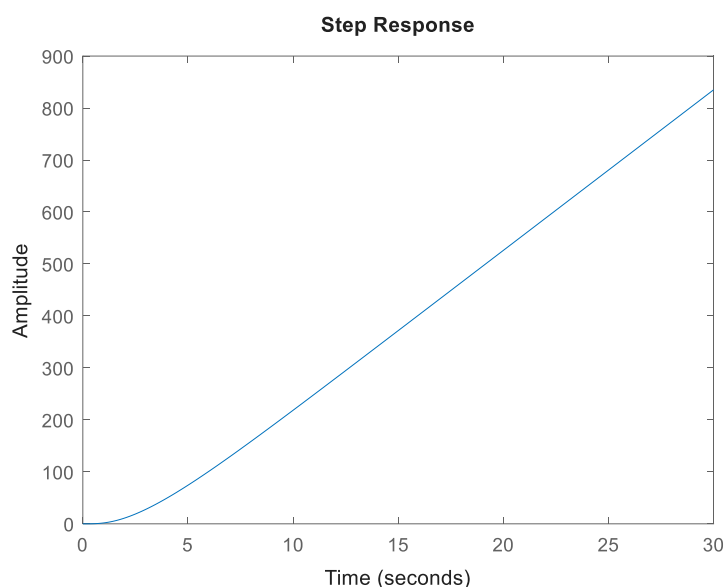
Přenos azimutu je poté popsán vztahem (98).

$$G_{e3}(s) = \frac{3,448}{0,0625s^4 + 0,6312s^3 + 2,05s^2 - 2,099s} \quad (98)$$

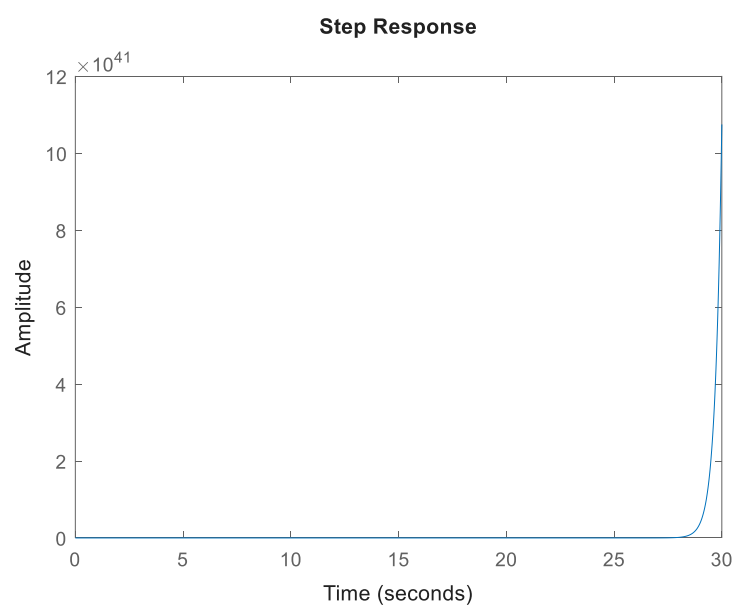
Kdy póly přenosu jsou: 0; -4.0000; -4.0000; -2.0990

Z daného přenosu vyplývá, že systém má integrační chování.

Získané linearizované modely alespoň přibližně odpovídají chování, které ukazují na začátku kapitoly popsané statické a přechodové charakteristiky.



Obrázek 44. Linearizace pro náklon 90°. Jednotkový skok.



Obrázek 45. Linearizace pro náklon 135°. Jednotkový skok.

6.3 Regulace

Regulátory byly navrhovány pro implementaci v rámci prostředí Matlab – Simulink.

Protože systém inkrementálních snímačů nesnímá nové hodnoty spojitě, nýbrž v nastavené periodě vzorkování, byl zvolen diskrétní způsob řízení se vzorkovací periodou 0,01s. Všechny regulátory byly nejprve odzkoušeny na simulačním modelu z kapitoly 5.5.2 a v případě uspokojivých výsledků i na reálné soustavě. Byl zvolen koncept samostatného regulátoru pro elevaci i pro azimut.

V rámci regulace v elevaci byly nejprve testovány klasické PID regulátory, a to s jedním i se dvěma stupni volnosti. Výsledky byly ale nevyhovující, byla dosažena regulace jen v rámci stabilní oblasti cca do úhlu 0,2 MU (36°) a ještě navíc sledování žádané hodnoty bylo poměrně pomalé a nepřesné. Proto byl dále zvolen a testován obecnější, polynomiální přístup k návrhu regulátorů. Regulátory s jedním stupněm volnosti (1DOF), navržené polynomiálním přístupem se ukázaly též jako nevyhovující, a to z důvodu, že při skokové změně žádané hodnoty docházelo k velkému podkmitu. Naopak se osvědčily regulátory se dvěma stupni volnosti (2DOF). Nejlepší výsledky ze zkoušených regulátorů měl regulátor navržený na základě lineárního modelu pro pracovní bod 3,5 MU (63°) tedy v nestabilní poloze. Diskrétní přenos zpětnovazební části výsledného regulátoru je popsán v rovnici (99)

$$G_{zv}(z) = \frac{165,1058z^4 - 641,3322z^3 + 934,2138z^2 - 604,8465z + 146,8591}{z^4 - 3,6637z^3 + 5,0385z^2 - 3,0821z + 0,7076} \quad (99)$$

Přenos přímovazební části výsledného regulátoru je popsán v rovnici (100)

$$G_{pv}(z) = \frac{(0,0105z^3 + 0,1073z^2 - 0,1001z + 0,0085)(0,0001)}{z^4 - 3,6637z^3 + 5,0385z^2 - 3,0821z + 0,7076} \quad (100)$$

Volba pólů pro uzavřený regulační obvod (definovaných polynomem $d(s)$ níže) pro výpočet přenosů $G_{zv}(z)$, $G_{pv}(z)$ byla provedena obecně dle (101) pro požadovaný stupeň polynomu j .

$$d(s) = n(s)(s + \alpha)^j \quad (101)$$

kde $n(s)$ je vždy stabilní polynom získaný spektrální faktorizací nestabilního polynomu $a(s)$ regulované soustavy a “ladící koeficient“ $\alpha > 0$ byl experimentálně nastaven na hodnotu 7.

Pro regulaci azimutu byl navržen taktéž polynomiální metodou 1DOF regulátor, jehož přenos je popsán vztahem (102)

$$G_a(z) = \frac{24,2991z^4 - 94,5872z^3 + 138,0637z^2 - 89,5608z + 21,7852}{z^4 - 3,8240z^3 + 5,4846z^2 - 3,4967z + 0,8361} \quad (102)$$

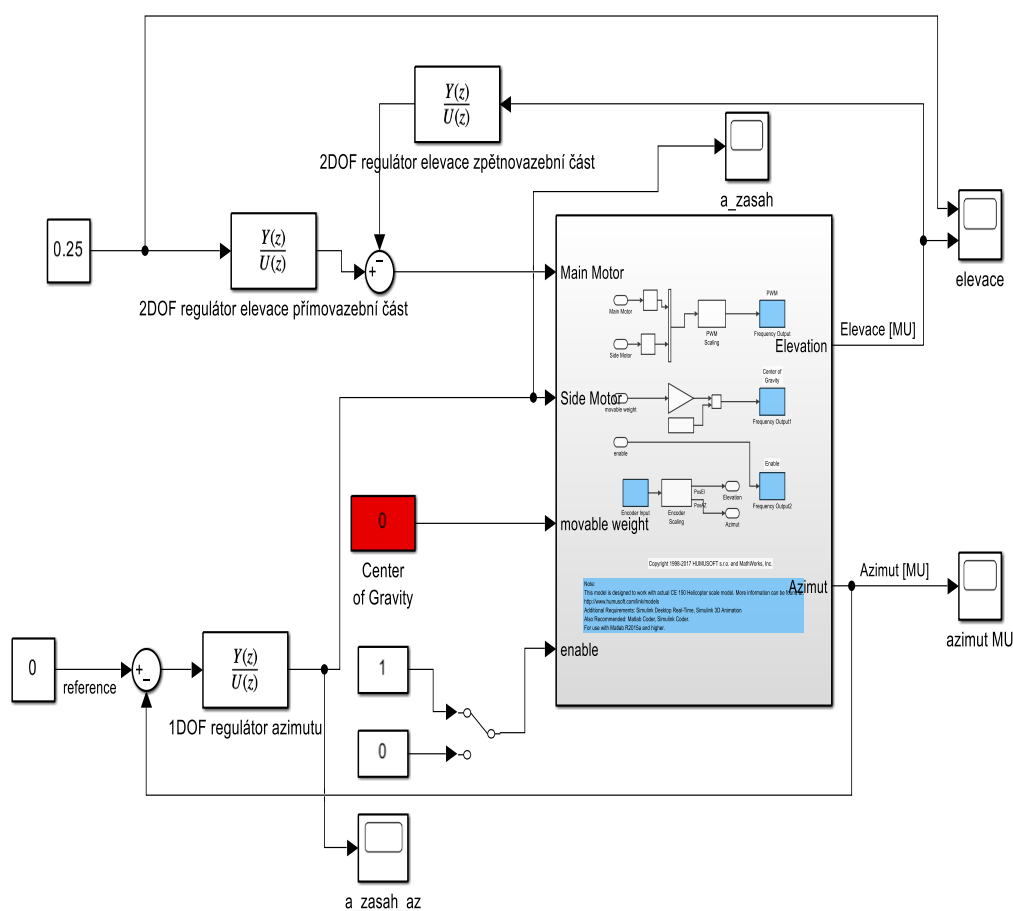
Volba pólů pro uzavřený regulační obvod (definovaných polynomem $d(s)$ níže) pro výpočet přenosu, $G_a(z)$ byla provedena obecně dle (103) pro požadovaný stupeň polynomu j :

$$d(s) = (s + \alpha)^j \quad (103)$$

kde „ladicí koeficient“ $\alpha > 0$ byl v tomto případě experimentálně doladěn na hodnotu 3.5.

Všechny přenosy regulátorů byly odvozeny jako spojité a poté převedeny na diskrétní.

Obrázek 46 zobrazuje použité regulační schéma pro řízení reálného modelu vrtulníku CE150.

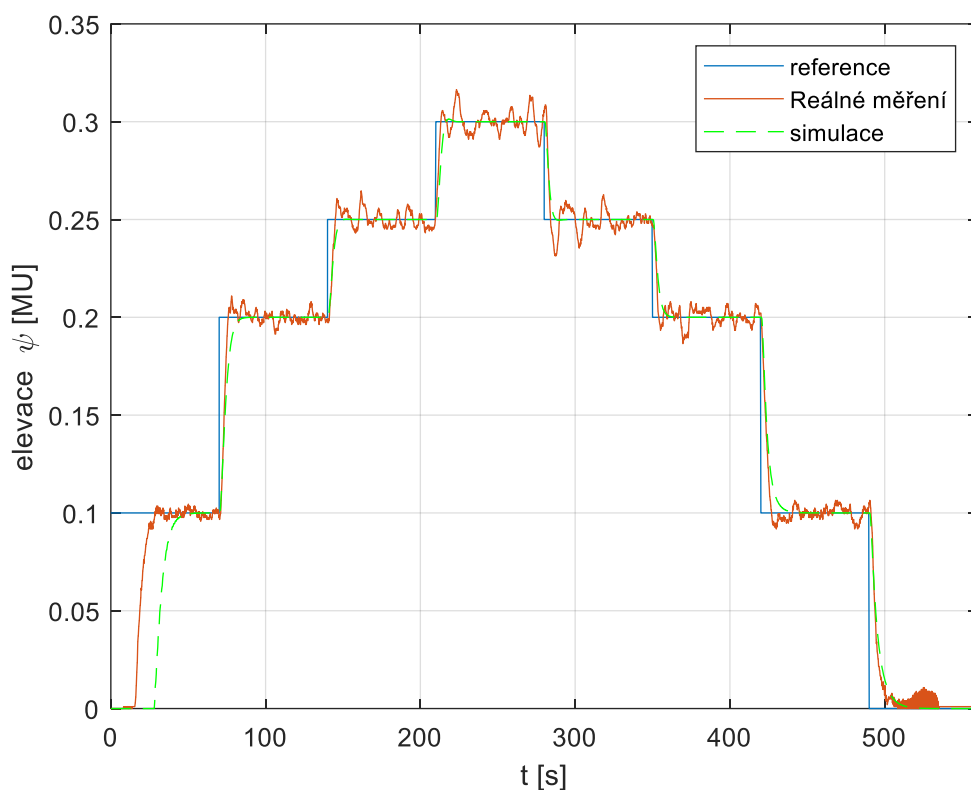


Obrázek 46. Realizace řízení zařízení CE150 v programu Simulink

6.3.1 Výsledky regulace

V prvním testu bylo požadováno, aby regulátor pro elevaci sledoval skokově měnící se referenční signál a u regulátoru azimutu, aby nedošlo od vychýlení od nastaveného úhlu 0° .

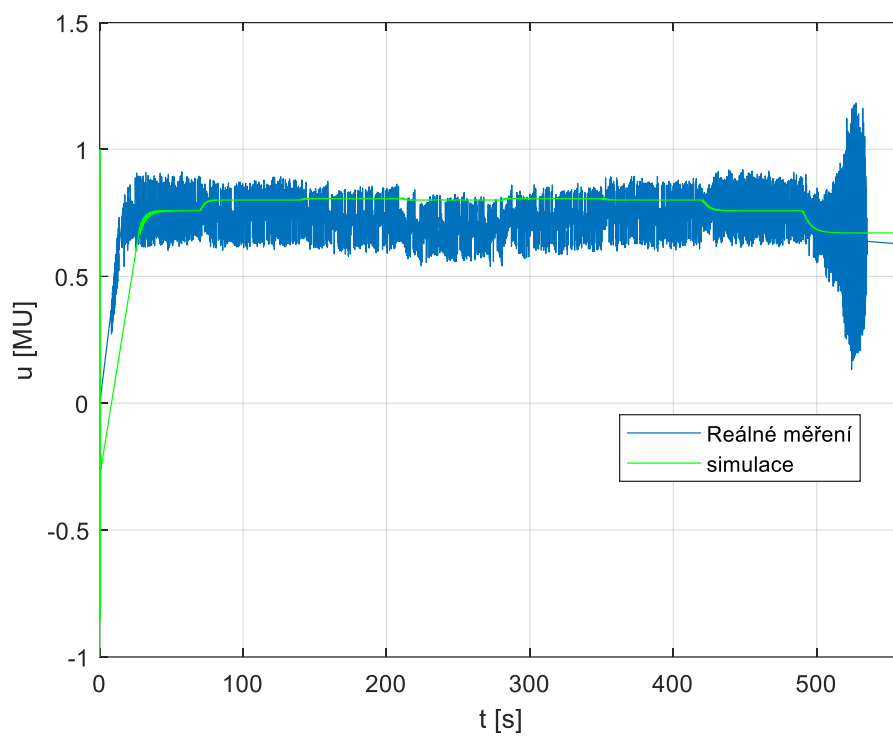
Obrázek 47 ukazuje výsledný průběh regulované veličiny elevace u reálného měření i u předcházející simulace. Regulovaná veličina poměrně přesně sleduje referenční signál, přičemž i v ustáleném stavu referenčního signálu dochází k mírnému kmitání kolem požadované hodnoty.



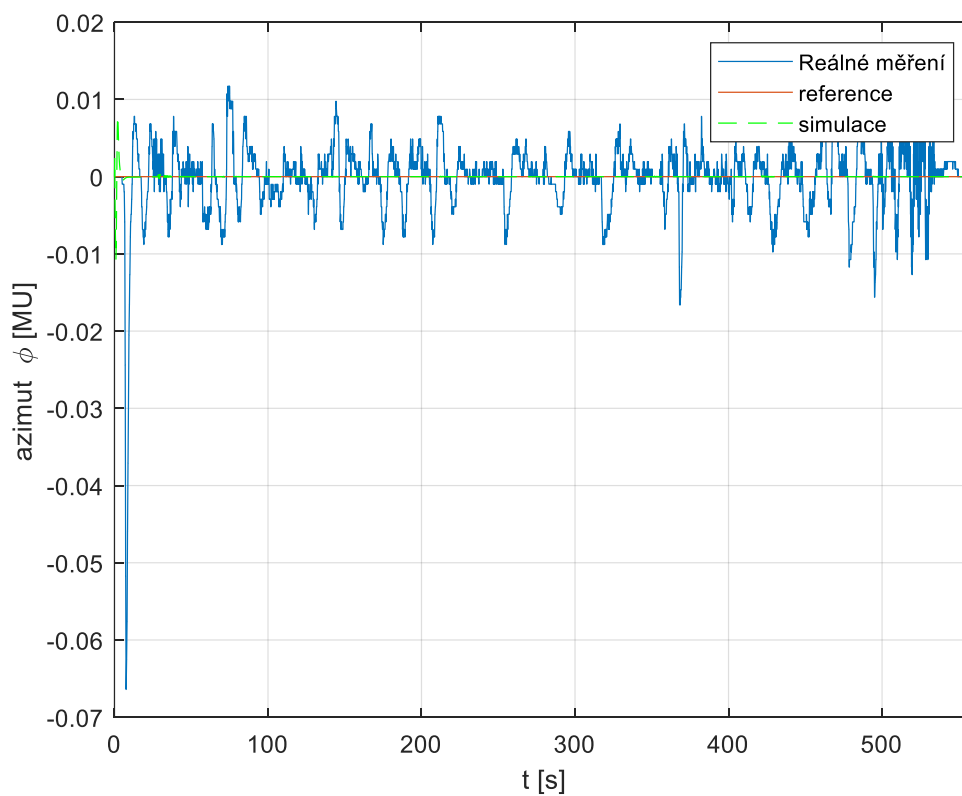
Obrázek 47. Regulace elevace – průběh regulované veličiny.

Obrázek 48 ukazuje akční zásah regulátoru pro elevaci. Obrázek 49 poté ukazuje průběh regulované veličiny azimutu.

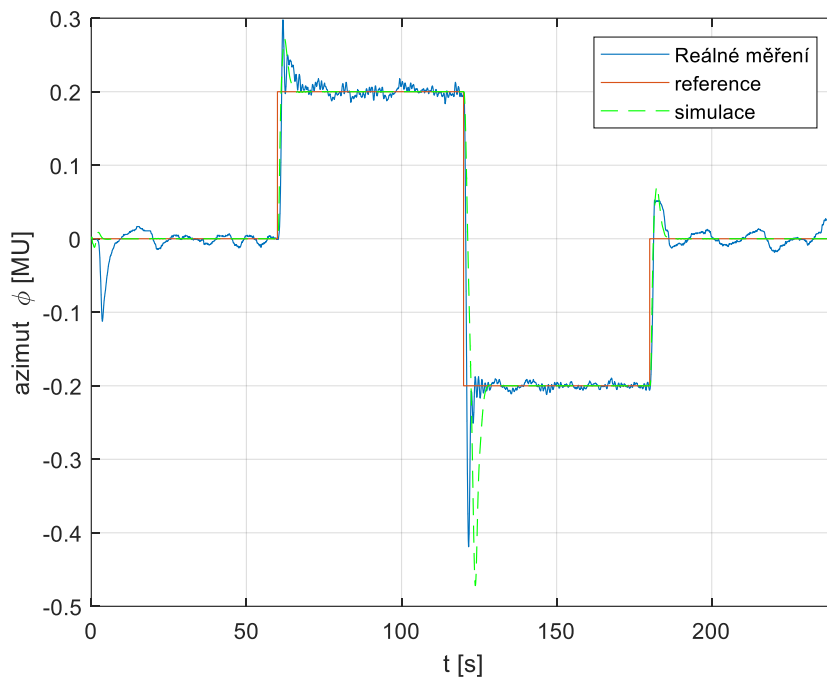
V druhém testu bylo požadováno, aby regulátor pro azimut sledoval skokově měnící se referenční signál a u regulátoru elevace, aby nedošlo k vychýlení od nastaveného úhlu $0,2$ MU (36°). Obrázek 50 ukazuje výsledný průběh regulované veličiny azimutu u reálného měření i u předcházející simulace. Regulovaná veličina poměrně přesně sleduje referenční signál, ale při skokové změně dochází k výrazným, byť krátkým překmitům.



Obrázek 48. Regulace elevace – akční zásah regulátoru.

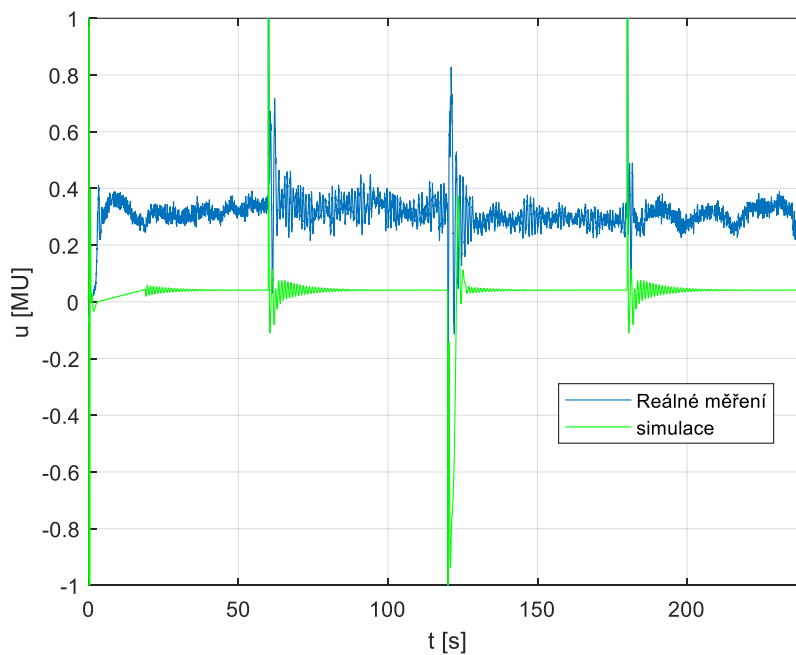


Obrázek 49. Regulace elevace – vliv na změnu azimutu.

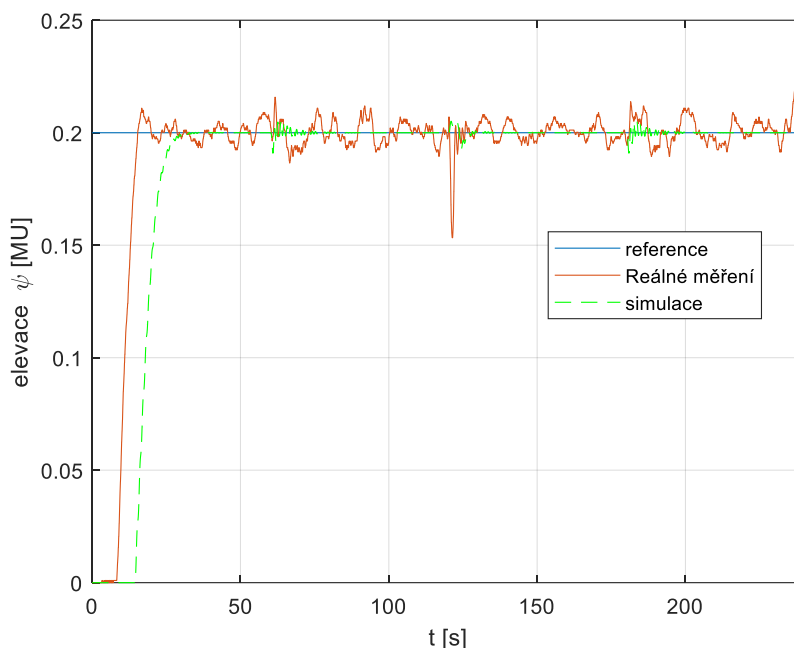


Obrázek 50. Regulace azimutu – průběh regulované veličiny.

Obrázek 51 ukazuje akční zásah regulátoru pro elevaci, zde dochází k určitému rozdílu mezi reálným zařízením a modelem. Obrázek 52 poté ukazuje průběh regulované veličiny elevace, kdy regulátor udržuje stanovenou úroveň, v čase cca 120 s, je vidět krátký pokles nastaveného náklonu, vlivem prudké změny azimutu, který je ale rychle vyrovnán.



Obrázek 51. Regulace azimutu – akční zásah regulátoru.



Obrázek 52. Regulace azimutu – vliv na změnu elevace.

Na základě provedených testů, vzhledem k vlastnostem regulované soustavy, které byly popsány v kapitole 6.2., by se dal regulátor elevace považovat za relativně vhodně navržený. Poměrně dobrou shodu v rámci elevace vykazuje i v kapitole 5.5.2 navržený simulační model. V rámci azimutu je potřeba daný regulátor ještě více doladit s ohledem na velké přeskmy, optimální by bylo asi jeho nahrazení vhodně nastaveným 2DOF regulátorem. Simulační model v rámci azimutu se dobře shoduje se svým reálným protějškem při simulaci průběhu regulované veličiny, naopak se poněkud rozchází v hladině akčního zásahu. Prakticky funkční se též ukázal, koncept dvou samostatných regulátorů.

Detailní proces identifikace a návrhu řízení včetně jeho řádného otestování pro uvedený konkrétní reálný model vrtulníku CE 150 od fy Humusoft by si zasloužilo zpracování v separátní diplomové práci, což nebylo primárním cílem této předkládané práce. Zde šlo jen o závěrečnou ukázkou možností vybraného (nestabilního) modelu a jeho možného řízení. Nad rámec zadání této práce také proběhlo jeho kompletní zprovoznění a oživení v laboratoři reálných procesů FAI UTB ve Zlíně, jelikož tento model nebyl řadu let používán a jeho ovladače a SW vybavení již nebylo podporované současným SW vybavením dané laboratoře.

ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zaměřila na tvorbu simulačních modelů vybraných reálných nestabilních systémů s cílem rozšířit a zkvalitnit existující Webovou databázi nestabilních systémů[1]. V prostředí MATLAB/Simulink bylo vytvořeno celkem šest modelů reprezentujících různé typy dynamicky nestabilních soustav:

- kulička na ploše,
- dvoukolový robot
- dvojité kyvadlo,
- chemický průtočný reaktor s pláštěm (CSTR),
- systém orientace družice,
- model laboratorního vrtulníku CE150.

Všechny modely jsou nelineární a vycházejí z matematického popisu daného reálného systému. Tyto modely jsou navrženy tak, aby jejich fyzikální parametry bylo možné jednoduše upravovat prostřednictvím přehledného grafického rozhraní v Simulinku. Výchozí nastavení fyzikálních parametrů je přednastaveno tak, aby přibližně odpovídalo reálným technickým hodnotám daných zařízení.

Součástí práce bylo také vytvoření dokumentační karty pro každý model, a to v českém i anglickém jazyce. Tyto karty slouží jako jednotný záznam pro databázi a obsahují stručný popis systému, jeho fyzikální parametry a matematický popis dynamického chování systému včetně vhodného schematického obrázku a zdroje relevantních informací.

U modelu laboratorního vrtulníku CE150 byl dále proveden návrh regulace a její úspěšné ověření v simulačním i reálném prostředí. Výsledky testování potvrdily funkčnost navrženého regulátoru a poměrně dobrou shodu mezi vytvořeným simulačním modelem a reálným zařízením.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] F., Gazdoš a J., Kolařík. *Databáze nestabilních systémů*. Online. 2012, Aktualizováno 24.10.2013. Dostupné z: <http://www.unstable-systems.cz>. [cit. 2025-04-21].
- [2] G., STEIN. Respect the unstable. Online. *IEEE Control Systems*. 2003, roč. 23, č. 4, s. 12-25. ISSN 1066-033X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1109/MCS.2003.1213600>. [cit. 2025-04-21].
- [3] SKOGESTAD, Sigurd; HAVRE, Kjetil a LARSSON, Truls. CONTROL LIMITATIONS FOR UNSTABLE PLANTS. Online. *IFAC Proceedings Volumes*. 2002, roč. 35, č. 1, s. 485-490. ISSN 14746670. Dostupné z: <https://doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.00330>. [cit. 2025-04-21].
- [4] R., PADMA SREE a M., CHIDAMBARAM. *Control of unstable systems*. Oxford: Alpha Science Int., 2006. ISBN 1-84265-287-7.
- [5] FORMALSKII, Alexander M. *Stabilisation and motion control of unstable objects*. De Gruyter Studies in Mathematical Physics. Berlin, Germany: De Gruyter, 2015. ISBN 978-3-11-037589-3. Dostupné také z: <http://ebookcentral.proquest.com/lib/natl-ebooks/detail.action?docID=4338447>.
- [6] BEQUETTE, B. Wayne. *Process Control: Modeling, Design, and Simulation*. 2. Pearson Education, 2023. ISBN 978-0-13-403375-4.
- [7] CORRIOU, Jean-Pierre. *Process control: theory and applications*. London: Springer, 2004. ISBN 1-85233-776-1.
- [8] YANG, Yaguang. *Spacecraft modeling, attitude determination, and control : quaternion-based approach*. CRC Press, 2019. ISBN 978-1-138-33150-1.
- [9] CORKE, Peter. *Robotics and control: Fundamental Algorithms in MATLAB®*. Springer, 2022. ISBN 978-3-030-79178-0.
- [10] MARHOLT, Jiří. *Nestabilní systémy: robustní řízení s omezenou akční veličinou*. Disertace. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky, Ústav řízení procesů, 2014. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/30808>.
- [11] PELIKÁN, Radek. *Magnetická levitace - modelování, simulace a řízení*. Diplomová práce, vedoucí Gazdoš, František. Zlín: Tomas Bata University in Zlín. Faculty of Applied Informatics, Ústav řízení procesů, 2006. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/1448>.
- [12] GAZDOŠ, František. Introducing a New Tool for Studying Unstable Systems. Online. *International Journal of Automation and Computing*. 2014, roč. 11, č. 6, s. 580-587. ISSN 1476-8186. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s11633-014-0844-z>. [cit. 2025-04-20].
- [13] KOLAŘÍK, Jaroslav. *Webová databáze nestabilních systémů*. Bakalářská práce, vedoucí Gazdoš, František. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky, Ústav automatizace a řídicí techniky, 2012. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/22172>.
- [14] ŠVARC, Ivan; MATOUŠEK, Radomil; ŠEDA, Miloš a VÍTEČKOVÁ, Miluše. *Automatické řízení*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4398-3.

- [15] VÍTEČKOVÁ, Miluše a VÍTEČEK, Antonín. *Základy automatické regulace*. Přepřac. 2. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1924-2.
- [16] ŠTECHA, Jan a HAVLENA, Vladimír. *Teorie dynamických systémů: přednášky*. Vyd. 2. Praha: ČVUT, 2002. ISBN 80-01-01971-3. Dostupné také z: <https://kramerus.techlib.cz/kramerus-web-client/uuid/uuid:f6dac175-649e-4c46-a4bd-2176f531da25>.
- [17] GARAN, Martin. *Modelovanie a simulácia mechatronických systémov* 2. Edícia vysokoškolských učebníc (Slovenská technická univerzita). Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2020. ISBN 9788022750349.
- [18] GERGELY, Takács; VACHÁLEK, Ján a ROHAĽ-ILKIV, Boris. *Identifikácia sústav*. Bratislava: STU, 2014. ISBN 978-80-227-4288-7.
- [19] BALÁTEĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. 2., přeprac. vyd. Praha: BEN, 2004. ISBN 80-7300-148-9.
- [20] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace: Vybrané statě*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2011. ISBN 978-80-7318-935-8.
- [21] HÁBA, David. *Aplikace polynomiální metody v různých konfiguracích systému řízení*. Diplomová práce, vedoucí Dostál, Petr. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta technologická, Institut řízení procesů a aplikované informatiky, 2005. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/36148>.
- [22] DOSTÁL, Petr a MATUŠŮ, Radek. *Stavová a algebraická teorie řízení*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010. ISBN 978 - 80 - 7318 - 991 - 4.
- [23] BABÍK, Zdeněk. *Metoda přiřazení pólů v řízení lineárních spojitého SISO systémů*. Diplomová práce, vedoucí Dostál, Petr. Zlín: Tomas Bata University in Zlín. Faculty of Applied Informatics, Ústav automatizace a řídicí techniky, 2009. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/9746>.
- [24] HUMUSOFT S.R.O. *CE 151 BALL & PLATE APPARATUS: User's manual*. 3.1. 2006.
- [25] NOSKIEVIČ, Petr. *Modelování a identifikace systémů*. Ostrava: Montanex, 1999. ISBN 80-7225-030-2.
- [26] HUMUSOFT S.R.O. *Legacy educational models*. Online. CE 151 Ball. 2025. Dostupné z: <https://www.humusoft.cz/en/discontinued/ce151/>. [cit. 2025-05-15].
- [27] DOSTÁL, Marek. *Simulace průtočného chemického reaktoru pro různé typy reakcí*. Diplomová práce, vedoucí Vojtěšek, Jiří. Zlín: Tomas Bata University in Zlín. Faculty of Applied Informatics, Ústav řízení procesů, 2006. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/1412>.
- [28] HRABOVSKÝ, Jan. *Nelineární řízení v Matlabu*. Diplomová práce, vedoucí Vojtěšek, Jiří. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Fakulta aplikované informatiky, Ústav automatizace a řídicí techniky, 2013. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/10563/25240>.
- [29] BEŇO, Dominik. *Robust attitude control of cubesat spacecraft*. MASTER'S THESIS, vedoucí doc. Ing. Martin Hromčík, Ph.D. Praha: Czech Technical University in Prague, 2024.
- [30] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Robotika*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Academia centrum, 2012. ISBN 978-80-7454-223-7.

- [31] HORÁČEK, P. *CE 150 Helicopter Model*, výukový manuál k modelu vrtulníku,. Online. Praha, 2002. Dostupné z: http://www.ing.unisi.it/~control/cmr/altro/heli_ce150_manual.pdf. [cit. 2025-03-04].
- [32] VOJČINÁK, Petr. *Návrh a realizace robustního regulátoru pro laboratorní model vrtulníku s využitím platformy .NET Framework a prostředí MATLAB & Simulink + .NET Builder*. DIPLOMOVÁ PRÁCE, vedoucí Ing. Štěpán Ožana PhD. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2009.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1. Úvodní strana databáze nestabilních systémů	15
Obrázek 2. Část záznamu pro systém magnetická levitace.	16
Obrázek 3. Oblast stability lineárních spojitých systémů.	21
Obrázek 4. Přechodové charakteristiky vybraných typů soustav	22
Obrázek 5. Rozložení pólů vybraných spojitých přenosů v komplexní rovině.	22
Obrázek 6. Rozdělení kritérií stability	24
Obrázek 7. Michajlovo-Leonhardovo kritérium - příklady	26
Obrázek 8. Nyquistovi křivky pro stabilní otevřený regulační obvod.	28
Obrázek 9. Nyquistova křivka pro nestabilní otevřený regulační obvod.	29
Obrázek 10. Oblast stability lineárních diskrétních systémů.	30
Obrázek 11. Rozložení pólů vybraných diskrétních přenosů v komplexní rovině.	31
Obrázek 12. systém kulička na ploše.	37
Obrázek 13. Systém kulička na ploše – Simulinkový model.	40
Obrázek 14. Systém kulička na ploše – nelineární model v prostředí Simulink.	41
Obrázek 15. Systém kulička na ploše – nastavení modelu.	42
Obrázek 16. CE 151 Ball & Plate Model firmy Humusoft	42
Obrázek 17. CE 151 Simulinkový model	43
Obrázek 18. Srovnání simulačního a reálného modelu CE 151 pro uhel $\beta = 0,6$ MU	43
Obrázek 19. Systém dvoukolového nestabilního robota	44
Obrázek 20. Systém dvoukolového robota – Simulinkový model.	47
Obrázek 21. Systém dvoukolový robot – nelineární model v prostředí Simulink.	48
Obrázek 22. Systém dvoukolový robot – nastavení modelu.	49
Obrázek 23. systém průtočný chemický reaktor s pláštěm	50
Obrázek 24. Systém průtočný reaktor – Simulinkový model	53
Obrázek 25. Systém průtočný reaktor – nelineární model v prostředí Simulink	54
Obrázek 26. Systém průtočný reaktor – nastavení modelu	54
Obrázek 27. systém orientace družice	55
Obrázek 28. Systém orientace družice – Simulinkový model.	57
Obrázek 29. Systém orientace družice – nelineární model v prostředí Simulink.	58
Obrázek 30. Systém orientace družice – nastavení modelu.	58
Obrázek 31. Fotografie modelu helikoptéry CE150	59
Obrázek 32. Schéma modelu helikoptéry CE150	60
Obrázek 33. Systém model helikoptéry CE150 – Simulinkový model	63
Obrázek 34. Systém model helikoptéry CE150 – nelineární model v prostředí Simulink ..	64

Obrázek 35. Systém model helikoptéry CE150 – nastavení modelu.....	65
Obrázek 36. Schéma systému dvojitého kyvadla	66
Obrázek 37. Dvojité kyvadlo, Simulinkový model	69
Obrázek 38. Dvojité kyvadlo – nelineární model v prostředí Simulink	69
Obrázek 39. Systém dvojité kyvadlo – nastavení parametrů modelu.....	70
Obrázek 40. Statická charakteristika – elevace	72
Obrázek 41. Přechodová charakteristika – elevace	72
Obrázek 42. Přechodová charakteristika – azimut.....	73
Obrázek 43. Linearizace pro náklon 45°. Jednotkový skok.	74
Obrázek 44. Linearizace pro náklon 90°. Jednotkový skok.	75
Obrázek 45. Linearizace pro náklon 135°. Jednotkový skok.	75
Obrázek 46. Realizace řízení zařízení CE150 v programu Simulink	77
Obrázek 47. Regulace elevace – průběh regulované veličiny.	78
Obrázek 48. Regulace elevace – akční zásah regulátoru.	79
Obrázek 49. Regulace elevace – vliv na změnu azimutu.	79
Obrázek 50. Regulace azimutu – průběh regulované veličiny.	80
Obrázek 51. Regulace azimutu – akční zásah regulátoru.	80
Obrázek 52. Regulace azimutu – vliv na změnu elevace.	81

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1. Fyzikální veličiny pro matematický model systému kulička na ploše	37
Tabulka 2. Fyzikální veličiny pro matematický model dvoukolového robota	44
Tabulka 3. Fyzikální veličiny pro matematický model průtočného reaktoru	51
Tabulka 4. Fyzikální veličiny pro matematický model orientace družice	56
Tabulka 5. Fyzikální veličiny pro matematický model systému helikoptéra CE150	60
Tabulka 6. Parametry pro empirický model systému helikoptéra CE150	62
Tabulka 7. Fyzikální veličiny pro matematický model systému dvojité kyvadlo	66

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

CE150, CE151 – označení edukačních zařízení firmy Humusoft

CSTR – Continuous Stirred Tank Reactor (průtočný chemický reaktor)

MATLAB – softwarové prostředí pro výpočty a simulace

MF624 – typ multifunkční I/O karty (Humusoft)

MIMO, SISO – typy systémů (mnohorozměrový – s více vstupy/výstupy, jednorozměrový – s jedním vstupem/výstupem)

MU – „machine unit“, jednotka používaná v komunikačním rozhraní MATLAB/Simulink a reálné zařízení přes danou vstupně/výstupní kartu..

PD, PID – typy regulátorů (Proporciálně–Derivační, Proporciálně–Integračně–Derivační)

PWM – Pulse Width Modulation (pulzně šířková modulace)

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I: Modely. Adresář simulačních modelů pro program Matlab/simulink.

double_pendulum_2020b.slx

CE150_2020b.slx

CSTR2_2020b.slx

kol2_rob_2020b.slx

BallOnPlateCe_non2_v2020b.slx

BallOnPlateCe152_2020b.slx

satelite2_2020b.slx

Příloha P II: Karty. Adresář karet pro databázi nestabilních systémů.

double_pendulum.pdf

CE150.pdf

CSTR2.pdf

kol2_rob.pdf

BallOnPlate.pdf

satelite2.pdf

double_pendulum_EN.pdf

CE150_EN.pdf

CSTR2_EN.pdf

kol2_rob_EN.pdf

BallOnPlate_EN.pdf

satelite2_EN.pdf

PŘÍLOHA P I: NÁZEV PRVNÍ PŘÍLOHY