

Fourierova transformace a její využití při analýze a syntéze akustických signálů

Tomáš Mareček

Bakalářská práce
2025



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

Ústav automatizace a řídicí techniky

Akademický rok: 2024/2025

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	Tomáš Mareček
Osobní číslo:	A22668
Studijní program:	B0714A150006 Aplikovaná informatika v průmyslové automatizaci
Specializace:	Průmyslová automatizace
Forma studia:	Prezenční
Téma práce:	Fourierova transformace a její využití při analýze a syntéze akustických signálů
Téma práce anglicky:	Fourier transform and its use in the analysis and synthesis of acoustic signals

Zásady pro vypracování

- Vypracujte literární rešerši na dané téma.
- Popište Fourierovu řadu, Fourierovu transformaci a jejich využití v technické praxi.
- Provedte frekvenční analýzu vybraných akustických signálů reálného původu.
- Prostudujte metody zvukové syntézy a zpracujte přehled dostupných nástrojů pro číslicovou syntézu.
- Provedte syntézu méně komplexních vzorků pomocí vybraných softwarových syntetizátorů.
- Dosažené výsledky zhodnotte a navrhněte možnosti dalšího pokračování.

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. SYROVÝ, Václav. *Hudební akustika. Akustická knihovna Zvukového studia Hudební fakulty AMU*. Praha: Akademie múzických umění v Praze, 2003. ISBN 80-7331-901-2.
2. TAN, Li a JIANG, Jean. *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Third edition. London: Elsevier, Academic Press, 2019. ISBN 978-0-12-815071-9.
3. KIDO, K., *Digital Fourier Analysis: Fundamentals*. New York, NY: Springer, 2014. ISBN 978-1461492610. JAN, Jiří. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. uprav. a rozšíř. vyd. Brno: VUTUM, 2002. ISBN 80-214-1558-4.
4. JAMES, J.F. *A Student's Guide to Fourier Transform: With Applications in Physics and Engineering*. Third edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0521176835.
5. MAREŠ, Jiří. *Časově-frekvenční analýza nestacionárních signálů*. Online, Disertační práce. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009. Dostupné z: <https://dspace.tul.cz/items/429b8b0d-7e79-4c2b-96a5-4698cff9e666>. [cit. 2024-10-14].
6. GINSBERG, Jerry H. *Acoustics-A Textbook for Engineers and Physicists*. Online. Cham: Springer International Publishing, 2018. ISBN 978-3-319-56846-1. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56847-8>. [cit. 2024-10-21].

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Milan Navrátil, Ph.D.**
Ústav elektroniky a měření

Datum zadání bakalářské práce: **13. prosince 2024**
Termín odevzdání bakalářské práce: **27. května 2025**

doc. Ing. Jiří Vojtěšek, Ph.D. v.r.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc. v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 13. prosince 2024

PROHLÁŠENÍ AUTORA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Beru na vědomí, že

- odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění bez ohledu na výsledek obhajoby;
- bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému a bude dostupná k nahlédnutí;
- jedno vyhotovení bakalářské práce v listinné podobě bude ponecháno Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně k uložení;
- na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- podle § 60 odst. 1 autorského zákona má Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- podle § 60 odst. 2 a 3 mohu užít své dílo – bakalářskou práci – nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tj. k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá; neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

- jsem na bakalářské práci pracoval(a) samostatně a použitou literaturu jsem řádně citoval(a); v případě publikace výsledků budu uveden(a) jako spoluautor;
- odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou obsahově totožné.

Ve Zlíně, dne

.....
podpis autora

ABSTRAKT

Fourierova transformace představuje základní metodu pro frekvenční analýzu signálů. Tato práce se zabývá jejím matematickým odvozením a aplikací při analýze spektrálního složení reálných zvukových nahrávek, z nichž dvě vybrané jsou následně syntetizovány.

Teoretická část vysvětluje původ transformace od trigonometrických funkcí přes Fourierovu řadu až k samotné Fourierově transformaci, a zároveň popisuje i její základní vlastnosti a prakticky používané varianty. Praktická část se věnuje nejprve metodám a nástrojům pro číslicovou syntézu, a následně analyzuje nahrávky zvuků vybraných vokalizací živočichů a hudebních nástrojů pomocí spektrogramů a spektrálních grafů. Dva zvuky s jednoduchou harmonickou strukturou – cvrkání cvrčka a zpěv sýkory koňadry, jsou poté syntetizovány pomocí digitálního syntezátoru s cílem věrohodně napodobit jejich charakteristické spektrální vlastnosti. Výsledky syntézy jsou analyzovány a diskutovány.

Klíčová slova: Fourierova transformace, frekvenční analýza, digitální syntéza zvuku

ABSTRACT

The Fourier transform represents a fundamental method for frequency analysis of signals. This thesis deals with its mathematical derivation and application in the analysis of the spectral composition of real sound recordings, two of which are subsequently synthesized.

The theoretical part explains the origin of the transform, beginning with trigonometric functions, proceeding through the Fourier series, and culminating in the Fourier transform itself. Its basic properties and commonly used variants are also described. The practical part firstly focuses on methods and tools for digital sound synthesis, followed by an analysis of recordings of selected animal vocalizations and musical instruments using spectrograms and spectral graphs, respectively. Two sounds with a simple harmonic structure – the chirping of a cricket and the song of the great tit, are then synthesized using a digital synthesizer in an effort to faithfully reproduce their characteristic spectral features. The synthesis results are analyzed and discussed.

Keywords: Fourier transform, frequency analysis, digital sound synthesis

Velmi rád bych vyjádřil poděkování a uznání především svému vedoucímu práce doc. Ing. Milanu Navrátilovi Ph.D. za jeho cenný dohled, množství praktických rad a obecnou zpětnou vazbu, kterou mi v průběhu zpracování této práce poskytl. Poděkování patří také všem vyučujícím fakulty, jejichž kurzy mi umožnily porozumět probírané problematice.

OBSAH

ÚVOD.....	11
HISTORIE.....	13
I TEORETICKÁ ČÁST	14
1 PŘEHLED ODBORNÉ LITERATURY	15
2 HARMONICKÁ FUNKCE	17
2.1 PŮVOD	17
2.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI.....	19
2.3 ZÁPIS	22
2.4 INTEGRACE	25
2.5 ORTOGONALITA.....	30
3 FOURIEROVA ŘADA	33
3.1 ZÁPIS HARMONICKOU FUNKCÍ.....	33
3.2 ROZVOJ DO FOURIEROVY ŘADY V HARMONICKÉM TVARU.....	35
3.3 ZÁPIS KOMPLEXNÍ EXPONENCIÁLNÍ FUNKCÍ	40
3.4 ROZVOJ DO FOURIEROVY ŘADY V EXPONENCIÁLNÍM TVARU	42
4 FOURIEROVA TRANSFORMACE	45
4.1 ODVOZENÍ	45
4.2 VLASTNOSTI	48
5 PRAKTICKÉ MODIFIKACE FOURIEROVY TRANSFORMACE	51
5.1 DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE.....	51
5.2 RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE	54
5.3 KRÁTKODOBÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE.....	55
5.4 DISKRÉTNÍ KOSINOVÁ TRANSFORMACE.....	58
II PRAKTICKÁ ČÁST.....	59
6 ZÁKLADY ZVUKOVÉ SYNTÉZY	60
6.1 PARAMETRY ZVUKU	60
6.2 METODY ZVUKOVÉ SYNTÉZY	64
6.3 NÁSTROJE PRO ČÍSLICOVOU SYNTÉZU	66
6.3.1 PROSTŘEDÍ SYNTÉZÁTORU SERUM	67
7 FREKVENČNÍ ANALÝZA REÁLNÝCH AKUSTICKÝCH SIGNÁLŮ.....	73
7.1 ZVÍŘECÍ VOKALIZACE	74
7.2 HUDEBNÍ NÁSTROJE	78

8 DIGITÁLNÍ SYNTÉZA ZVUKU.....	82
8.1 DIGITÁLNÍ SYNTÉZA.....	82
8.2 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ	89
ZÁVĚR.....	92
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	95
SEZNAM OBRÁZKŮ	98
SEZNAM TABULEK.....	100
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	101
SEZNAM PŘÍLOH.....	102

ÚVOD

Fourierova transformace (angl. *Fourier transform*, *FT*) je matematická metoda, která umožňuje rozložit libovolný signál na jeho jednotlivé frekvenční složky, čímž poskytuje informace o jeho spektrálním obsahu.

Využití *FT* vyžaduje velké množství numerických výpočtů, a proto byla tato metoda dříve ceněna spíše jako základ teoretického rozboru než jako praktický nástroj. S rozvojem digitálních technologií a optimalizací výpočetních metod se však *FT* stala nedílnou součástí nejen oblasti akustiky, ale také mnoha dalších oborů, jako je zpracování obrazu, telekomunikace či komprese dat [1].

Cílem této práce je matematicky popsat *FT* a demonstrovat její praktické využití při frekvenční analýze reálných zvukových nahrávek. Analýza v této práci je primárně zaměřená na identifikaci charakteristických spektrálních rysů prostřednictvím spektrálních grafů nebo spektrogramů, které dále slouží jako podklad pro digitální zvukovou syntézu dvou konkrétních nahrávek – cvrkání cvrčka a zpěvu sýkory koňadry.

Teoretická část práce nejprve představuje přehled odborné literatury, která poskytuje kontext a přispívá k hlubšímu pochopení tématu. Následně se věnuje samotnému matematickému odvození *FT*, které vychází z analýzy jejích základních stavebních prvků – trigonometrických funkcí sinus a kosinus, známých též jako harmonické funkce [2]. V práci jsou shrnuty jejich základní vlastnosti, které jsou pak doplněny o dvě pro *FT* zásadní matematické témata – Eulerův vzorec a ortogonalita harmonických funkcí.

Dále je představena Fourierova řada (angl. *Fourier series*, *FS*), pomocí které lze rozložit libovolnou periodickou funkci jako součet více harmonických funkcí. Pro její použití je třeba určit velikost příspěvků jednotlivých členů řady, což se provádí pomocí výpočtu, který je v této práci pojmenován jako rozvoj do Fourierovy řady. *FS* je zásadní pro pochopení frekvenční struktury periodických signálů a tvoří přirozený přechodový krok k samotné *FT*, která rozšiřuje tuto analýzu i na neperiodické signály.

Dále se práce zabývá vlastnostmi *FT* a jejími prakticky používanými variantami, které lze aplikovat pro analýzu a zpracování i diskrétních signálů.

Praktická část práce je zaměřena na aplikaci *FT* v oblasti akustiky. Pro úplnost je nejprve stručně shrnut přehled důležitých termínů pro orientaci v oboru – základní parametry zvuku včetně jejich klasifikace, tři hlavní přístupy k jeho syntéze a následně jsou zmíněny klíčové nástroje pro zvukovou syntézu, konkrétně syntežátory. U zvoleného digitálního syntežátoru Serum je také popsáno jeho pracovní prostředí.

Využitím diskrétních variant *FT* je dále provedena frekvenční analýza reálných zvukových nahrávek vybraných vokalizací živočichů a tónů hudebních nástrojů. Vokalizace živočichů jsou analyzovány formou spektrogramů, které přehledně zobrazují časový vývoj spektrálních složek, zatímco u hudebních nástrojů je pomocí spektrálních grafů zkoumána struktura harmonických složek hraného tónu, jež určuje barvu (témbr) nástroje.

Na závěr práce jsou dvě analyzované nahrávky živočichů syntetizovány využitím syntežátoru *Serum* v prostředí programu *FL Studio 21*. Konkrétně jde o nahrávky cvrkání cvrčka a zpěv sýkory koňadry, které byly zvoleny pro jejich méně komplexní spektrální strukturu. Výsledky syntézy jsou porovnány s originálními nahrávkami pomocí spektrogramu, následně jsou diskutovány jejich rozdíly a míra věrohodnosti výsledku.

HISTORIE

Francouzský matematik a inženýr **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830) je znám především pro svou práci na Fourierově analýze, kterou pozdější generace matematiků rozvinuly do podoby Fourierovy transformace, která dnes tvoří základ frekvenční analýzy signálů.

Za nejvýznamnější dílo jeho úspěšné kariéry je považována publikace „*Théorie analytique de la chaleur*“ (Analytická teorie tepla), vydaná v roce 1822. V ní se zabýval šířením tepla v pevných tělesech, avšak zároveň zde představil koncept rozkladu funkcí do trigonometrických řad, dnes známých jako Fourierovy řady.

Pomocí těchto řad Fourier dokázal modelovat složité šíření tepla z jeho počátečního rozložení pomocí jednoduchých trigonometrických funkcí, čímž podstatně zjednodušil řešení diferenciálních rovnic. Už v roce 1807 Fourier v nepublikovaném článku tvrdil, že libovolnou periodickou funkci lze aproximovat trigonometrickou řadou, toto tvrzení však zpočátku vyvolalo značný skepticismus.

Přesto jeho výzkum vzbudil u akademiků zájem – v rámci akademické soutěže „*Grand Prix de Mathématiques*“ pro rok 1812, pořádané Francouzskou akademií věd, bylo hlavním tématem zvoleno právě šíření tepla. Fourier tuto soutěž vyhrál, avšak jeho práce zůstala stále kritizována a nebyla přijata k publikaci v tehdejšími prestižním vědeckém periodiku „*Mémoires de l'Académie des Sciences*“.

Fourier ve své pozdější publikaci výsledky z roku 1807 zahrnul téměř bez změn, a to navzdory přetrvávající kritice. [3; 4]

I TEORETICKÁ ČÁST

1 PŘEHLED ODBORNÉ LITERATURY

Tato kapitola představuje přehled odborné literatury zaměřené na teoretické základy Fourierovy transformace, její obecné praktické aplikace a specifické využití v akustice.

Struktura teoretické části této práce čerpá inspiraci z knihy *Digital Fourier Analysis: Fundamentals* (Kido, 2014), která byla vydána jako součást série *Undergraduate Lecture Notes in Physics*. Kniha nabízí detailní přehled teoretických základů *FT* a její aplikace na analýzu signálů. Autor se zaměřuje na jasné a intuitivní vysvětlení této problematiky pro čtenáře s pouze základními znalostmi vysokoškolské matematiky, a pro vysvětlení často využívá příklady nebo grafické znázornění, které usnadňují pochopení složitějších konceptů.

Naopak stručný a prakticky orientovaný úvod do *FT* nabízí čtvrtá kapitola knihy *Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications* (Tan a Jiang, 2019), která probírá pouze diskrétní variantu *DFT* s důrazem na její podstatné praktické vlastnosti. Kniha se také věnuje představení algoritmu pro efektivní výpočet *FFT* a významu okenních funkcí při zpracování signálu.

Pro lepší pochopení role *FT* v inženýrství a fyzice je cenným zdrojem publikace *A Student's Guide to Fourier Transform: With Applications in Physics and Engineering* (James, 2011), která je určena pro prohloubení teoretických znalostí problematiky *FT*. V knize jsou více rozebrány její užitečné vlastnosti včetně vícerozměrných variant, avšak jsou uvedeny i tři praktické aplikace:

- Fraunhoferova difrakce – v optice *FT* modeluje difrakci světla při průchodu štěrbinou za předpokladu dokonale rovnoběžných světelných paprsků.
- Analýza signálu v komunikaci – v této oblasti *FT* slouží k frekvenční analýze šumů a modulací, a také pro návrh efektivních filtrů pro potlačení rušení.
- Interferenční spektroskopie – využitím *FT* se převádí interferenční vzory na jejich spektra, což umožňuje analýzu chemického složení i jiných vlastností látek.

Dalším užitečnou publikací, která ukazuje praktické využití *FT*, je kniha *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT* (Tůma, 1997), která se podrobně věnuje druhům signálů snímaných senzory, jejich klasifikaci a následně i vyhodnocení pomocí frekvenční analýzy. Ta je zde demonstrována prakticky na diagnostice stavu strojních zařízení, zejména ozubených kol, valivých ložisek a převodovek, kde frekvenční spektrum umožňuje detekovat například zvlněné zuby nebo lokální poruchy materiálů.

V oblasti akustiky nachází *FT* uplatnění především při studiu harmonického složení zvukových signálů. Tématu se podrobně věnuje kniha *Hudební akustika* (Špelda, 1978), která mimo jiné vysvětluje i akustiku hudebních nástrojů a lidského hlasu.

Pro úvod do analýzy zvukových signálů se zaměřením na jejich reprodukci pomocí syntezátoru je užitečná kniha *Welsh's Synthesizer Cookbook* (Welsh, 2006). Autor na konkrétních případech objasňuje myšlenkový postup při analýze a syntéze reálných nebo uměle vytvořených zvuků, čímž poskytuje praktický rámec pro porozumění základům zvukové syntézy.

2 HARMONICKÁ FUNKCE

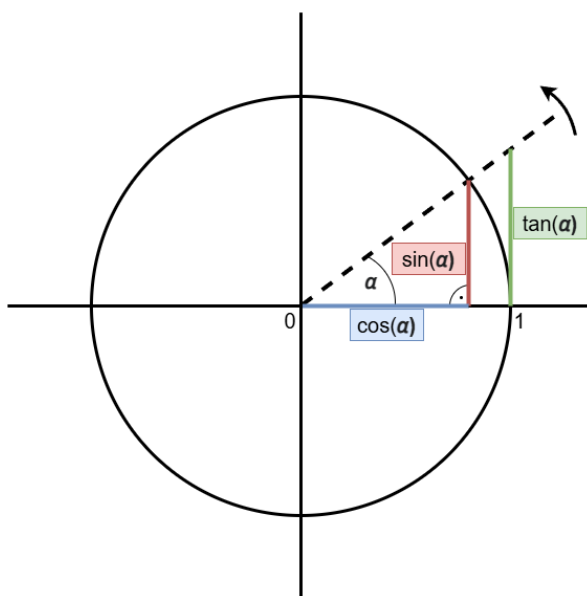
Cílem této kapitoly je představit trigonometrické funkce sinus a kosinus, které jsou dále souhrnně označovány jako harmonické funkce [2]. V akustice tyto průběhy (častěji je zmiňována pouze sinusoida) představují ideální model čistého tónu – tedy signálu s jedinou frekvencí bez přítomnosti vyšších harmonických složek. I když reálné akustické signály vždy obsahují více frekvenčních složek, průběh harmonických funkcí je analyticky nejjednodušší a proto je i základem pro popis chování akustických systémů [5].

V této kapitole jsou tedy popsány základní vlastnosti harmonických funkcí, jejich zápis a definující parametry. Následně jsou analyzovány výsledky integrací těchto funkcí a jejich součinů, přičemž je vysvětlena související ortogonalita harmonických funkcí.

2.1 Původ

Harmonické funkce jsou charakteristické plynulým průběhem, který velmi dobře vystihuje chování reálného vlnění. Harmonické funkce tvoří průběhy sinus a kosinus, které vychází ze vztahu mezi úhlem a poměrem dvou stran v pravoúhlém trojúhelníku.

Na Obr. 1 je ilustrováno, že všechny varianty takového trojúhelníku lze nalézt i v jednotkové kružnici, ve které jsou poměry určeny náklonem přímky otáčející se kolem jejího středu. Zvýrazněné strany trojúhelníku odpovídají hodnotám trigonometrických funkcí vzhledem k danému úhlu α .



Obrázek 1 Jednotková kružnice s vyznačenými trigonometrickými funkcemi
[zdroj: vlastní]

Délka celého obvodu jednotkové kružnice odpovídá tzv. *úhlové periodě* harmonických funkcí – tedy periodě ve smyslu úhlu natočení. Tuto periodu lze vyjádřit buď ve stupních [$^{\circ}$], kdy činí 360° , nebo v radiánech [rad], kdy odpovídá hodnotě 2π . Stupňové vyjádření je pro člověka intuitivnější, zatímco radiány vychází přímo z geometrie kružnice – jeden radián odpovídá délce oblouku rovnému délce poloměru.

Z kružnice na Obr. 1 pak vyplývají tyto základní vztahy:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{přilehlá strana}}{\text{přepona}} \quad (2.1)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{protilehlá strana}}{\text{přepona}} \quad (2.2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{protilehlá strana}}{\text{přilehlá strana}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (2.3)$$

Kromě harmonických funkcí je v trojúhelníku znázorněna i funkce tangens, která se za harmonickou ovšem nepovažuje. Má poloviční periodu rovnu 180° , neboli π radiánů, a je nedefinovaná na jejích hranicích, což jí dělá nespojitou. Nicméně je užitečná pro vyjádření poměru dvou harmonických funkcí a proto je i zmíněna.

2.2 Základní vlastnosti

Periodicita

Periodicita obecně označuje jev, který se opakuje v pravidelných intervalech. V kontextu této práce půjde vždy o opakování v čase, tedy o spojitě funkci $x(t)$ mluvíme jako o periodické funkci, pokud v čase existuje taková perioda T [s], pro kterou platí:

$$x(t) = x(t + kT), \quad k \in \mathbb{N}^0 (0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Perioda tedy určuje časovou délku právě jednoho cyklu funkce. Inverzní hodnotou periody je frekvence f [Hz], která vyjadřuje počet opakování cyklu za jednu sekundu:

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.5)$$

Parita

Obě harmonické funkce vykazují symetrii (paritu), což znamená, že jejich průběh na jedné straně časové osy je nějakým způsobem propojen s průběhem na straně druhé. Tato vlastnost umožňuje snadné odvození hodnot funkce i mimo pouze známý interval.

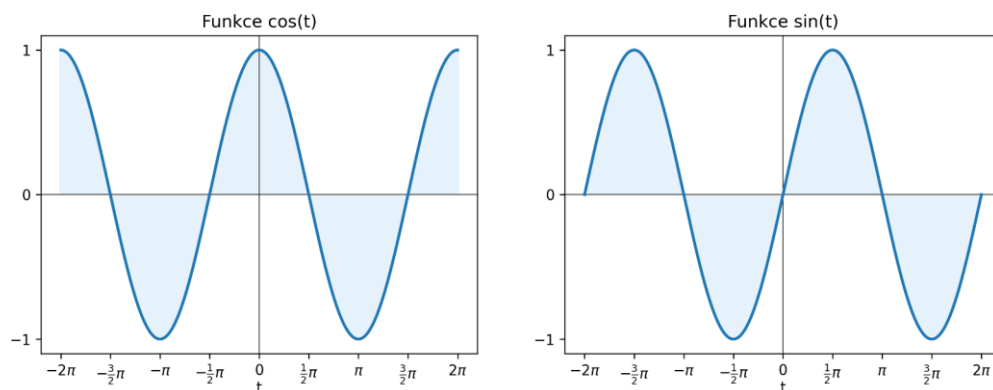
- Kosinusová funkce je sudá (angl. *even*), protože je osově symetrická podle ose y:

$$\cos(t) = \cos(-t) \quad (2.6)$$

- Sinusová funkce je lichá (angl. *odd*), protože je středově symetrická vzhledem k počátku souřadnicového systému:

$$\sin(t) = -\sin(-t) \quad (2.7)$$

Obě funkce jsou znázorněné na Obr. 2 s vykresleným průběh pro kladnou i zápornou časovou osu. Počátek časové osy lze analogicky chápat jako zrcadlo – funkce kosinus je odražená se stejnou fází, zatímco sinus se odráží s fází opačnou.



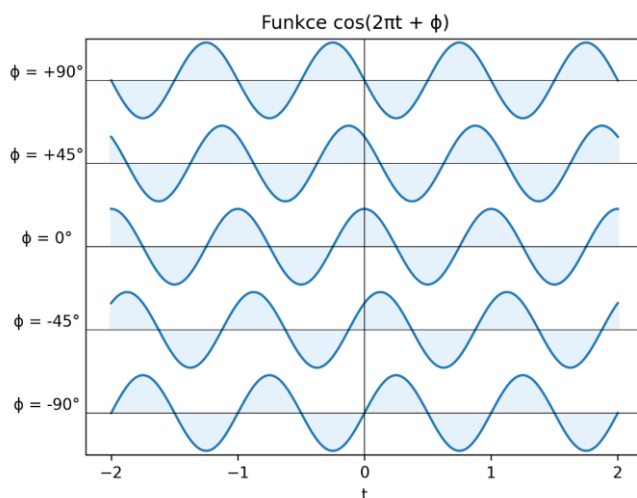
Obrázek 2 Průběh harmonických funkcí
[zdroj: vlastní]

Fázový posun

Fázový posun φ určuje, v jaké části průběhu se funkce nachází na počátku časové osy (tedy v čase $t = 0$), neboli jak je funkce posunuta relativně vůči časové ose:

- Kladný fázový posun způsobuje posun funkce směrem k záporné ose t , tedy funkce „předbíhá“.
- Záporný fázový posun způsobuje posun funkce směrem ke kladné ose t , tedy funkce „zaostává“.

Na Obr. 3 je znázorněn průběh kosinové funkce s kladným i záporným fázovým posunem. Z obrázku je patrné, že funkce $\cos(2\pi ft - 90^\circ) = \sin(2\pi ft)$, tedy harmonické funkce představují jeden průběh reprezentovaný dvěma funkcemi natočenými o pravý úhel.



Obrázek 3 Kosinusová funkce s počátečním fázovým posunem
[zdroj: vlastní]

Amplituda a fáze

Pokud se sečtou dvě harmonické funkce o stejné frekvenci, výsledkem bude vždy opět harmonická funkce o totožné frekvenci, avšak s jinou amplitudou a fází. Například součet kosinové a sinové funkce lze přepsat do jedné harmonické funkce s fázovým posunem.

Toto tvrzení lze dokázat matematickou úpravou uvedenou v Rov. 2.8, kde je součet dvou funkcí nahrazen jedinou funkcí kosinus o nové amplitudě i fázi:

$$\begin{aligned}
 A_c \cos(2\pi ft) + A_s \sin(2\pi ft) &= \\
 &= \sqrt{A_c^2 + A_s^2} \left(\frac{A_c}{\sqrt{A_c^2 + A_s^2}} \cos(2\pi ft) + \frac{A_s}{\sqrt{A_c^2 + A_s^2}} \sin(2\pi ft) \right) \\
 &= \sqrt{A_c^2 + A_s^2} (\cos(\varphi) \cos(2\pi ft) + \sin(\varphi) \sin(2\pi ft)) \\
 &= A \cdot \cos(2\pi ft + \varphi)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nová funkce má tedy amplitudu A a fázový posun φ roven:

$$A = \sqrt{A_s^2 + A_c^2} \tag{2.9}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{A_c}{\sqrt{A_s^2 + A_c^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{A_s}{\sqrt{A_s^2 + A_c^2}}\right) = \arctan\left(\frac{A_s}{A_c}\right) \tag{2.10}$$

2.3 Zápis

Pro zápis harmonických funkcí existují dva tvary: *trigonometrický* a *exponenciální*. Trigonometrický tvar využívá přímé formy funkcí sinus a kosinus, které jsou názornější a běžně používané při popisu reálných signálů. Exponenciální tvar, založený na Eulerově vzorci, je matematicky výhodnější zejména při matematické analýze a výpočtech díky své kompaktnosti, která je přehlednější zejména v diferenciálním počtu.

Trigonometrický zápis

Tento zápis je intuitivnější, protože explicitně vyjadřuje všechny základní parametry funkce:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi) \quad (2.11)$$

kde:

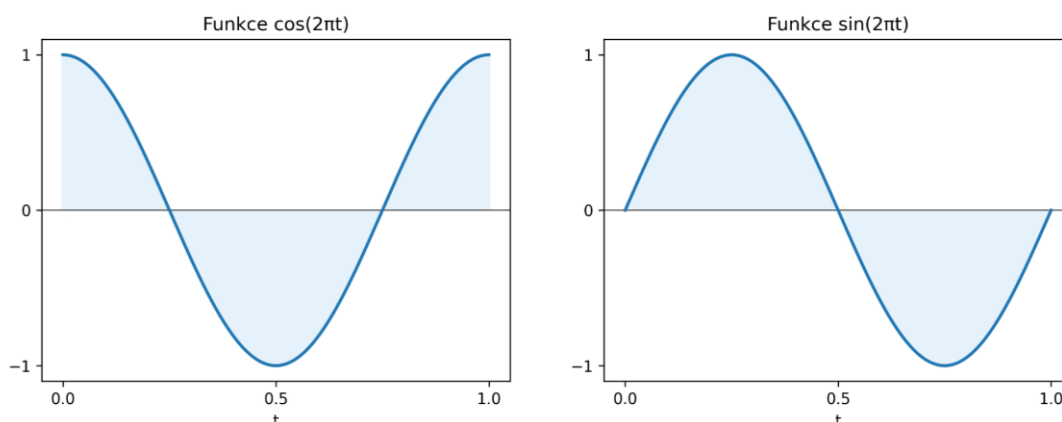
- A – amplituda, udává maximální velikost funkce.
- f [Hz] – frekvence, tj. počet cyklů zopakovaných za sekundu.
- 2π [rad] – konstanta, která frekvenci přidává úhlový rozměr.
- t [s] – čas, nezávislá vstupní proměnná.
- φ [rad] – fázový posun, určuje počáteční posun průběhu.

Člen $2\pi f$ se běžně zapisuje jako nová veličina – úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$ [rad/s]. Rozšíření frekvence o úhlový rozměr přináší principiálně stejnou výhodu jako při použití radiánů během práce s úhly – jednotka radián za sekundu přímo souvisí s periodou signálu:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \rightarrow f = \frac{1}{T} \quad (2.12)$$

Zápis úhlovou frekvencí má tedy praktickou výhodu, protože zachovává nepřímou úměru mezi periodou a frekvencí. V kontextu FT je úhlová frekvence nezbytná pro správnou matematickou analýzu [6], protože je ovšem zápis pomocí běžné frekvence f ve vzorcích více srozumitelný a intuitivní, je v práci použita její rozepsaná forma $2\pi f$.

Na Obr. 4 je ilustrován průběh obou harmonických funkcí zadaných pomocí úhlové frekvence. Na rozdíl od Obr. 2 je nyní perioda funkce s frekvencí $2\pi f$ rovna 1.



Obrázek 4 Průběh harmonických funkcí zadaných úhlovou frekvencí
[zdroj: vlastní]

Exponenciální zápis

Matematicky výhodnější je zápis harmonických funkcí pomocí komplexní exponenciální funkce, která se dá rozepsat pomocí vztahu známého jako *Eulerův vzorec*:

$$\exp(\pm iat) = \cos(at) \pm i \cdot \sin(at) \quad (2.13)$$

kde funkce $\exp(\pm iat)$ je přehlednější variantou zápisu $e^{\pm iat}$, a i je imaginární číslo.

Výraz vyjadřuje, že komplexní exponenciální funkce je složená s reálné (zkr. *Re*) a imaginární (zkr. *Im*) částí, z nichž každá odpovídá průběhu čistě kosinové a sinové funkce, respektive.

Vizualizací funkce pro všechny varianty úhlů v komplexní rovině vzniká jednotková kružnice totožná Obr. 1, neboť velikost (amplituda) funkce vypočítaná jako

$$|\exp(iat)| = \sqrt{\cos^2(at) + \sin^2(at)} = 1 \quad (2.14)$$

je stejná pro všechny hodnoty α . Protože jde ve výsledku pořád o reprezentaci úhlu, je pro přehlednost běžné místo bodu používat přímku – *rotační vektor*, který má počátek ve středu kružnice a konec v daném bodě, jak je znázorněné na Obr. 5.

Směr rotace (neboli pohybu v čase) komplexní funkce $\exp(\pm iat)$ s rostoucí fází závisí čistě na znaménku imaginární části exponentu:

- $\exp(+iat)$ – kladný exponent znamená, že rotační vektor se pohybuje proti směru hodinových ručiček (kladná rotace).
- $\exp(-iat)$ – záporný exponent znamená, že rotační vektor se pohybuje po směru hodinových ručiček (záporná rotace).

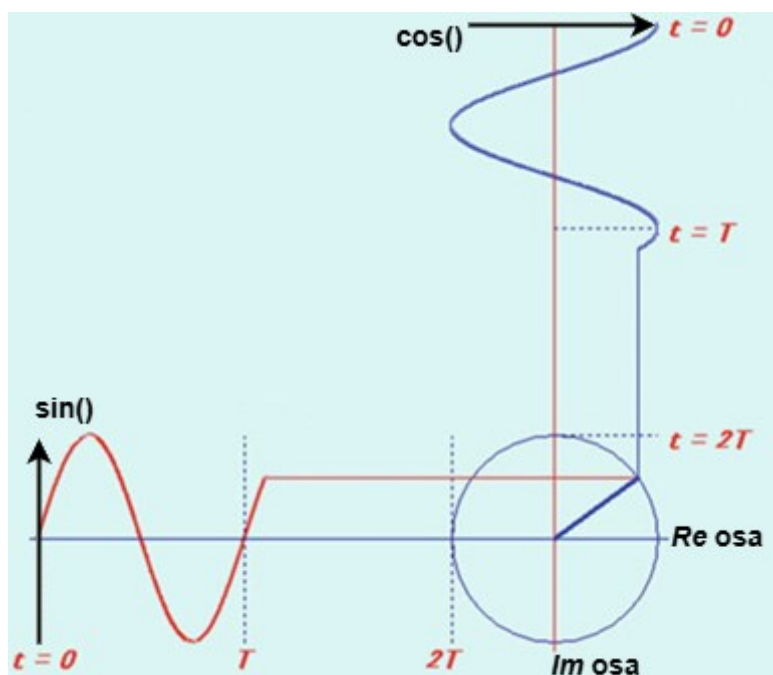
Obě harmonické funkce lze také vyjádřit čistě využitím exponenciálních funkcí:

$$\cos(at) = \frac{\exp(iat) + \exp(-iat)}{2} \quad (2.15)$$

$$\sin(at) = \frac{\exp(iat) - \exp(-iat)}{2i} \quad (2.16)$$

Důležitým důsledkem těchto rovnic je, že harmonické funkce jsou ve skutečnosti kombinací dvou exponenciálních funkcí, přičemž každá rotuje v jiném směru.

Na Obr. 5 je vizuálně znázorněn Eulerův vzorec, jehož velikost je reprezentována rotačním vektorem, který začíná svůj pohyb na kladné reálné ose. Projekcí tohoto pohybu na reálnou a imaginární osu vznikají odpovídající funkce kosinus a sinus, respektive.



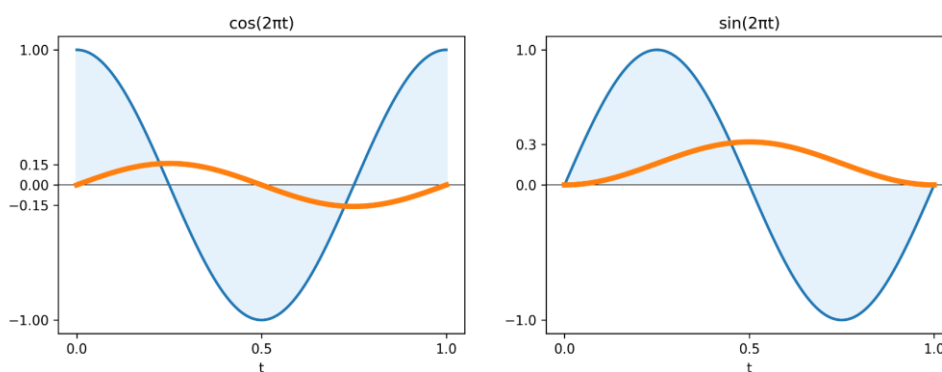
Obrázek 5 Vizualizace Eulerova vzorce v komplexní rovině
[zdroj: 1, upraveno – přeloženo z angl.]

2.4 Integrace

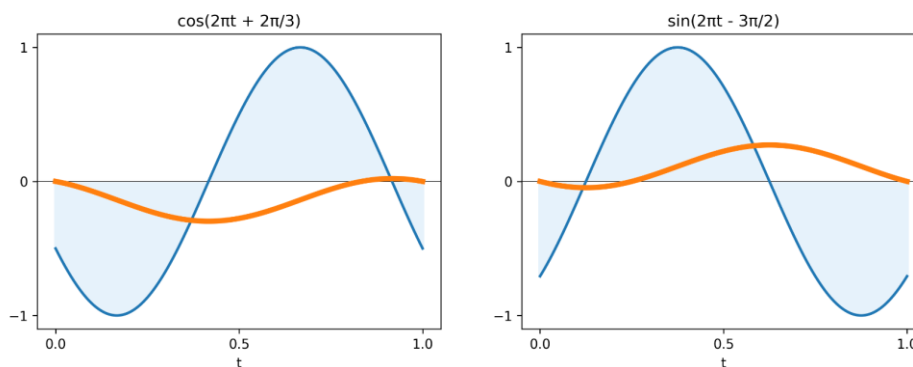
Vzhledem k tomu, že je Fourierova transformace založena na integraci harmonických funkcí, je pro její pochopení velmi užitečné porozumět tomu, jak se tyto funkce při integraci chovají.

Samotná harmonická funkce

Integrál samotné harmonické funkce přes celý interval jedné periody má vždy nulovou hodnotu. Důvodem je symetrie průběhu – kladná a záporná plocha se vždy vzájemně vyruší (Obr. 6), a to nezávisle na fázovém posunu funkce (Obr. 7).



Obrázek 6 Integrace harmonické funkce,
průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)
[zdroj: vlastní]



Obrázek 7 Integrace harmonické funkce s fázovým posunem,
průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)
[zdroj: vlastní]

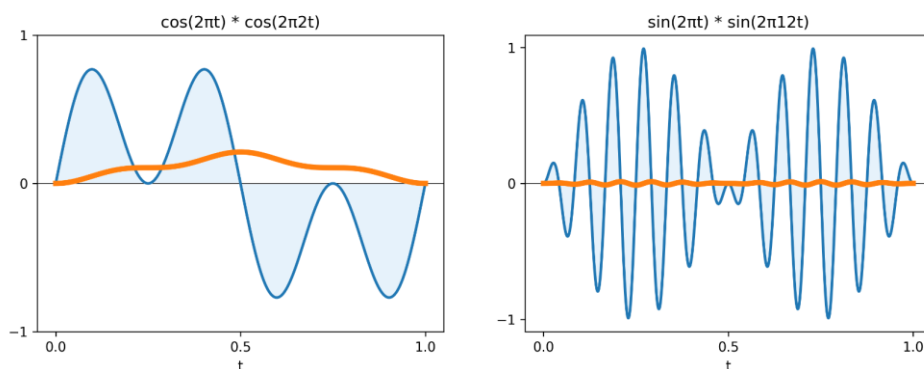
Součin harmonických funkcí

Při integraci součinu dvou harmonických funkcí je výsledek závislý na jejich vzájemné frekvenci a fázovém posunu. Pokud se integruje přes interval zahrnující celý počet period obou funkcí, integrál dosahuje:

- Největší hodnoty, pokud mají obě funkce stejnou frekvenci i fázi.
- Nulové hodnoty, pokud mají funkce rozdílnou frekvenci.
- Nejnižší hodnoty (tj. největší záporné hodnoty), pokud mají obě funkce stejnou frekvenci, ale opačnou fázi ($\Delta\varphi = \pi$ rad).

Pokud délka integrovaného intervalu odpovídá celočíselnému násobku nejmenšího společného násobku (angl. *least common multiple*, LCM) jejich period, výsledný integrál je nulový. Jinak řečeno je integrál nulový, pokud interval integrace obsahuje celočíselný počet period obou funkcí.

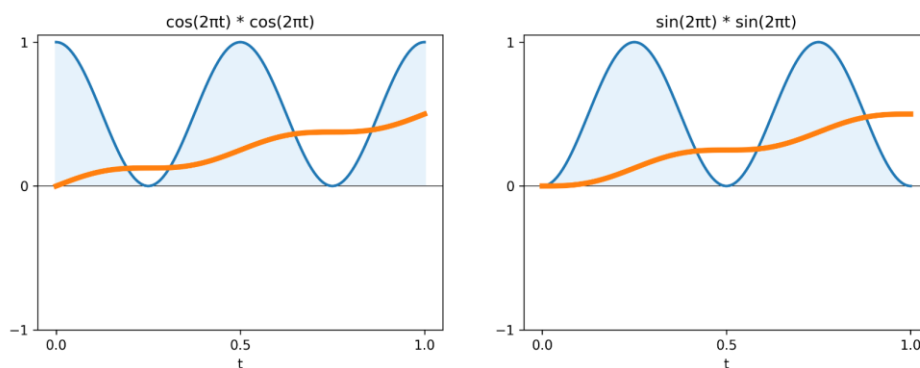
Na Obr. 8 jsou znázorněny dva příklady integrace součinu stejných funkcí s rozdílnými frekvencemi. Pro první průběh obrázku (vlevo) je $LCM(1, 1/2) = 1$, a pro druhý obrázek (vpravo) je $LCM(1, 1/12) = 1$. Integruje se přes interval o délce 1, a proto integrál vyjde nulový.



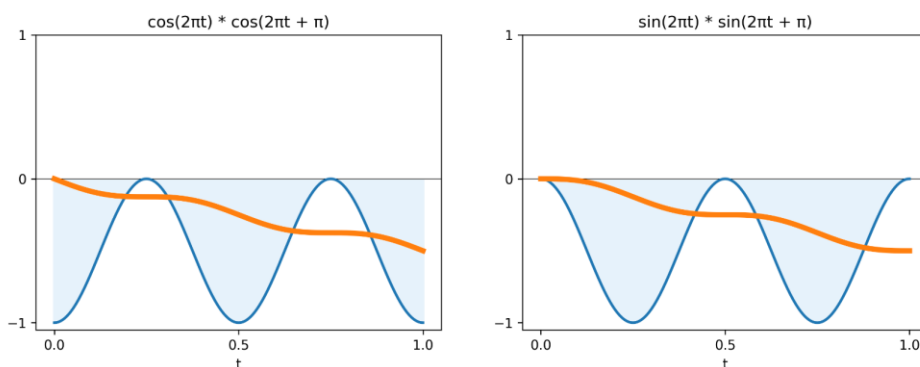
Obrázek 8 Integrace součinu harmonických funkcí s rozdílnou frekvencí, průběhy funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)

[zdroj: vlastní]

Pokud mají obě harmonické funkce stejnou frekvenci a totožnou (*synchronizovanou*) fázi, jejich součin je vždy kladný, což vede k průběžnému růstu integrálu (Obr. 9). Naopak, pokud mají stejnou frekvenci, ale opačnou fázi, jejich součin je vždy záporný a integrál klesá do záporných hodnot (Obr. 10).



Obrázek 9 Integrace součinu totožných harmonických funkcí,
průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)
[zdroj: vlastní]



Obrázek 10 Integrace součinu harmonických funkcí s opačnou fází,
průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)
[zdroj: vlastní]

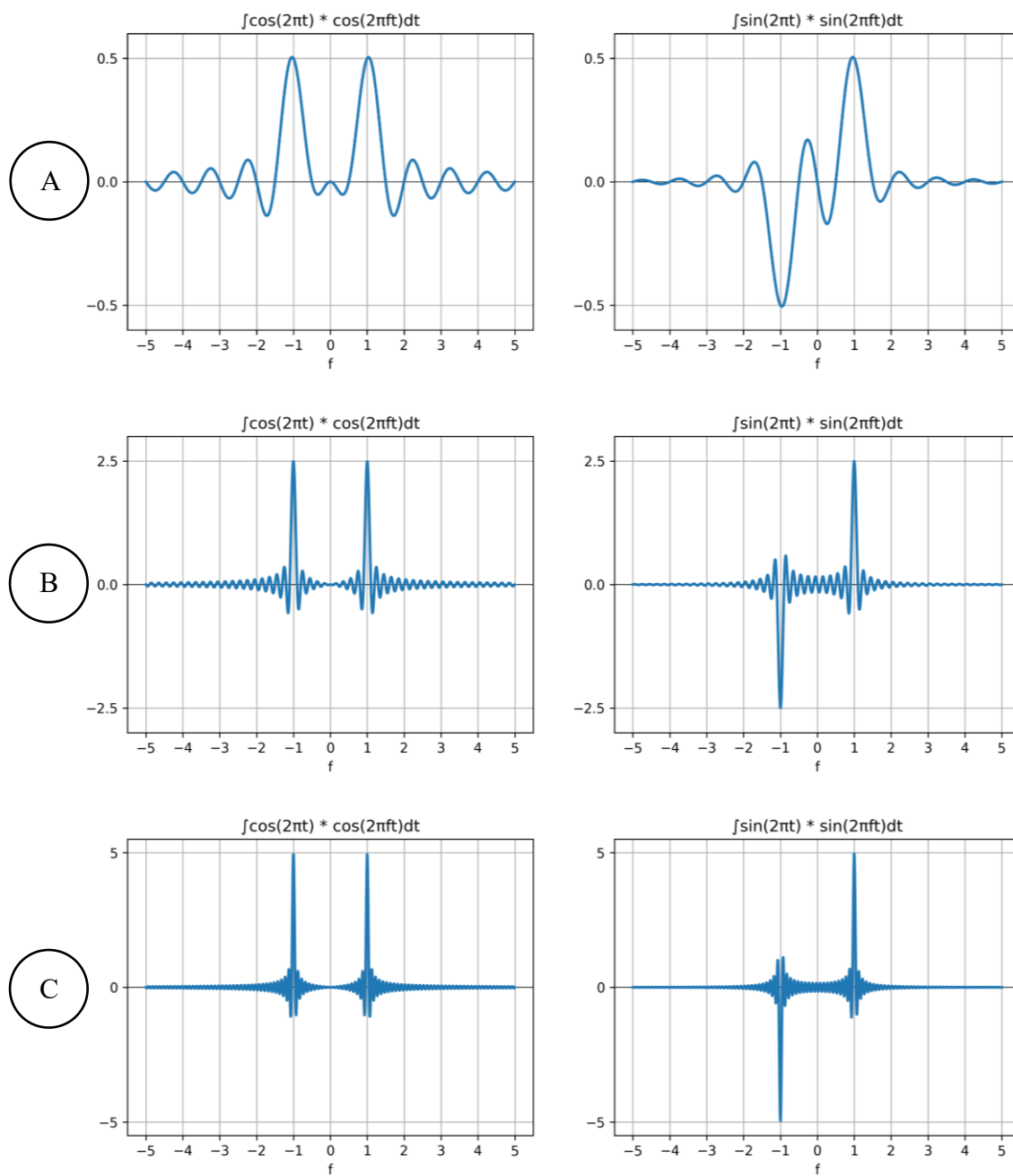
Obr. 11 představuje výsledky integrace součinu harmonických funkcí v závislosti na frekvenci jedné z těchto funkcí. Každý řádek obrázku odpovídá jiné velikosti intervalu integrace:

- **A:** Integrace přes interval *jedné periody* v intervalu (0, 1).
- **B:** Integrace přes interval *pěti period* v intervalu (0, 5).
- **C:** Integrace přes interval *deseti period* v intervalu (0, 10).

Prvním zjevnou a důležitou vlastností je, že si průběh integrálu zachovává paritní vlastnosti funkcí, ze kterých byl vytvořen. Tedy průběhy integrálu kosinových funkcí (vlevo) jsou sudé, zatímco průběhy integrálu sinových funkcí (vpravo) jsou liché.

Druhou podstatnou vlastností je poloha vrcholů maxima/minima (počeštěně také *peaků*) grafů při frekvenci $f = \pm 1 \text{ Hz}$, což odpovídá situaci, kdy jsou frekvence obou funkcí shodné. V jejich okolí však integrál klesá pozvolně, a tedy zejména pro blízké frekvence, jejichž perioda není celočíselný násobek integračního intervalu, zůstává velikost integrálu nenulová.

Třetím důležitý poznatkem je vliv délky integračního intervalu na výsledný integrál. S jeho růstem se průběh stává strmější, vykazuje více vysokofrekvenční charakter, a vrcholy dosahují větších hodnot. Obecně platí, že hodnota vrcholů odpovídá polovině součinu amplitud funkcí, násobenému počtem period v integračním intervalu.



Obrázek 11 Výsledek integrace součinu dvou harmonických funkcí
v závislosti na frekvenci jedné z nich
[zdroj: vlastní]

2.5 Ortogonalita

Pojem ortogonality pochází z geometrie, kde označuje vztah mezi přímkami protínajícími se v pravém úhlu. V kontextu analýzy funkcí se tento pojem vztahuje k jejich vzájemné *nezávislosti* ve smyslu skalárního součinu – pokud je tento součin nulový, funkce jsou navzájem nezávislé a každá přispívá do celkového vyjádření jiným způsobem.

Soubor funkcí je ortogonální, pokud integrál součinu dvou různých funkcí z tohoto systému na daném intervalu je roven nule. U jiných případů toto chování platit nemusí.

Pro soubor harmonických funkcí s frekvencí rovnou celočíselným násobkům nějaké základní frekvence tato ortogonalita platí při integraci přes jednu periodu základní frekvence. Výsledný integrál součinu dvou různých funkcí je v takovém případě nulový, což je důsledek právě jejich vzájemné nezávislosti na tomto intervalu [6].

Pokud je perioda dána jako $T = 1/k$, platí:

$$\langle \cos(2\pi kt), \sin(2\pi mt) \rangle_T = \int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot \sin(2\pi mt) dt = \begin{cases} c & \text{pro } k = m \\ 0 & \text{pro } k \neq m \end{cases} \quad (2.17)$$

V případě shodných frekvencí ($k = m$) závisí velikost výsledku c na dalších parametrech funkcí, konkrétně amplitudě a fázovém posunu – amplituda výsledek ovlivňuje úměrně svojí velikosti, zatímco u fázového posunu hraje roli míra synchronizace průběhů.

Protože lze kosinus vyjádřit i pomocí sinu jako:

$$\cos(t) = \sin(t + \pi/2), \quad (2.18)$$

je zřejmé, že jsou tyto funkce vůči sobě fázově posunuty právě o pravý úhel. Ortogonalita říká, že pro stejné funkce s fázovým rozdílem rovnému právě pravému úhlu ($\Delta\varphi = \pm 90^\circ$) je výsledek integrálu na daném intervalu roven nule:

$$\int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot \sin(2\pi kt) dt = 0 \quad (2.19)$$

Pro vyšetření závislosti výsledku integrálu $I(\varphi)$ na fázovém posunu stačí rozepsat funkci sinus a vypočítat integrál:

$$\begin{aligned}
 I(\varphi) &= \int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot \sin(2\pi kt + \varphi) dt \\
 &= \int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot [\sin(2\pi kt)\cos(\varphi) + \cos(2\pi kt)\sin(\varphi)] dt \\
 &= \cos(\varphi) \int_0^T \cos(2\pi kt)\sin(2\pi kt) dt + \sin(\varphi) \int_0^T \cos^2(2\pi kt) dt
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

První integrál je dle ortogonality (Rov. 2.19) roven nule, druhý lze dopočítat:

$$\begin{aligned}
 I(\varphi) &= 0 + \sin(\varphi) \int_0^T \cos^2(2\pi kt) dt = \sin(\varphi) \int_0^T \frac{1 + \cos(2 \cdot 2\pi kt)}{2} dt \\
 &= \frac{\sin(\varphi)}{2} \left\{ \int_0^T dt + \int_0^T \cos(4\pi kt) dt \right\} = \frac{\sin(\varphi)}{2} \left\{ T + \frac{1}{4\pi k} [\sin(4\pi kt)]_0^T \right\} \\
 &= \frac{\sin(\varphi)}{2} \left\{ T + \frac{1}{4\pi k} [0 - 0] \right\} = \frac{1}{2} T \sin(\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Výsledek integrace součinu harmonických funkcí v závislosti na fázovém posunu jedné z funkcí je tedy roven:

$$I(\varphi) = \int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot \sin(2\pi kt + \varphi) dt = \frac{1}{2} T \sin(\varphi) \tag{2.22}$$

Tabulka 1 Vliv fázového posunu na ortogonalitu harmonických funkcí

$I(\varphi) = \int_0^T \cos(2\pi kt) \cdot \sin(2\pi kt + \varphi) dt = \frac{1}{2} T \sin(\varphi)$									
$\varphi(^{\circ})$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$I(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4} T$	$\frac{1}{2} T$	$\frac{\sqrt{2}}{4} T$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4} T$	$-\frac{1}{2} T$	$-\frac{\sqrt{2}}{4} T$	0

[zdroj: vlastní]

Z tabulky lze vyčíst, že integrál dosahuje:

- Největší hodnoty, pokud jsou funkce fázově zcela synchronizované (totožná fáze).
- Je nulový, pokud je mezi stejnou funkcí fázový rozdíl roven pravému úhlu.
- Nejnižší hodnoty (tj. největší záporné hodnoty), pokud jsou stejné funkce v protifázi.

Pro úplnost lze výsledek integrace doplnit i amplitudami obou funkcí. Ty se při výpočtu pouze vytknou před integrál a jinak nemají na samotný postup vliv:

$$I(\varphi) = \int_0^T A_c \cos(2\pi kt) \cdot A_s \sin(2\pi kt + \varphi) dt = \frac{A_c A_s}{2} T \sin(\varphi) \quad (2.23)$$

3 FOURIEROVA ŘADA

Předchozí kapitola se věnovala harmonickým funkcím a jejich chování při integraci ve vhodném intervalu. Tyto vlastnosti jsou klíčové i pro princip Fourierovy řady.

Fourierova řada (angl. *Fourier series*, *FS*) představuje lineární kombinaci obou harmonických funkcí s rostoucí frekvencí, pomocí které lze reprezentovat jakýkoli periodický signál [5]. Ačkoli její praktické využití není univerzální, hraje zásadní roli při popisu oscilací a vlnění, a poskytuje důležitý náhled pro pochopení frekvenčního složení signálů.

Aby bylo možné *FS* prakticky aplikovat, je nezbytné správně určit příspěvky jednotlivých harmonických složek. Proces výpočtu velikostí těchto příspěvků se v této práci jmenuje jako rozvoj do Fourierovy řady (angl. *Fourier Series Expansion*, *FSE*) [1].

Rozvoj vychází ze zmíněných ortogonálních vlastností harmonických funkcí.

3.1 Zápis harmonickou funkcí

Fourierova řada se skládá z kombinace kosinových a sinusových funkcí, jejichž frekvence závisí na celočíselném harmonickém indexu $k \in \mathbb{N}^0$ ($0, 1, 2 \dots$).

První a nejmenší přítomná frekvence v řadě se obecně označuje jako fundamentální frekvence f_0 (angl. *fundamental*), dále také základní frekvence nebo pouze fundamentála. Její velikost je odvozená z velikosti periody aproximované funkce $x(t)$ jako její převrácená hodnota, získaná vztahem (díky využití úhlové frekvence):

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (3.1)$$

Všechny následující členy *FS* mají frekvenci odvozenou jako násobek této fundamentální frekvence s harmonickým indexem k jako $f_k = k \cdot f_0$.

Obecně se všechny nekonstantní členy řady označují za harmonické frekvence (angl. *harmonics*), přičemž ty, jejichž frekvence převyšují základní, se označují jako vyšší harmonické (angl. *overtones*) [5].

Každý člen řady má vlastní amplitudu A_k nebo B_k , patřící kosinové a sinové funkci, respektive. Obecně se na všechny členy odkazuje jako na Fourierovy koeficienty (angl. *Fourier coefficients*).

Obecný tvar Fourierovy řady FS lze zapsat jako:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \cos(2\pi \cdot 2 \cdot f_0 t) + A_3 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot f_0 t) + \dots \\ &\quad + B_1 \sin(2\pi f_0 t) + B_2 \sin(2\pi \cdot 2 \cdot f_0 t) + B_3 \sin(2\pi \cdot 3 \cdot f_0 t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2\pi k f_0 t) + B_k \sin(2\pi k f_0 t)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pro lepší přehlednost je ovšem běžnější frekvenci f_0 reprezentovat periodou T :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) + A_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{T} t\right) + A_3 \cos\left(2\pi \frac{3}{T} t\right) + \dots \\ &\quad + B_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) + B_2 \sin\left(2\pi \frac{2}{T} t\right) + B_3 \sin\left(2\pi \frac{3}{T} t\right) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nultý člen řady A_0 má nulovou frekvenci a jde tedy o konstantu, která se označuje jako stejnosměrná složka řady (angl. *DC component*). Je rovna průměrné hodnotě funkce během jedné periody, a jejím účelem je tedy posun celé aproximace relativně vůči ose y . Existuje, jelikož $\cos(0) = 1$, zatímco $\sin(0) = 0$ a komponent B_0 proto ani není zmíněn.

Ostatní koeficienty A_k a B_k , kde $k \in \mathbb{N}^+ (1, 2, \dots)$, určují amplitudu harmonických funkcí, a tím vlastně i intenzitu příspěvků jednotlivých složek k výsledné aproximaci.

Počet harmonických členů k vhodné aproximaci závisí na tvaru aproximované funkce a požadavcích na přesnost aproximace. Hladké průběhy podobné průběhu harmonických funkcí lze často popsat pouze několika složkami, zatímco pro nespojitě a hranaté tvary je i velké množství členů dostatečné pouze k přibližné aproximaci.

3.2 Rozvoj do Fourierovy řady v harmonickém tvaru

Aby se dala periodická funkce aproximovat Fourierovou řadou, je třeba vypočítat Fourierovy koeficienty. Metoda pro tento výpočet se výstižně nazývá rozvoj do Fourierovy řady (angl. *Fourier series expansion, FSE*).

Hlavním principem *FSE* je využití vlastností ortogonalit harmonických funkcí. Ty se projeví při vynásobení *FS* (Rov. 3.3) funkcemi $\cos(2\pi mt/T)$ nebo $\sin(2\pi mt/T)$, a následně integrací v intervalu periody T .

Díky ortogonalitě v takto upraveném výrazu zůstane vždy nenulový pouze ten člen, který odpovídá konkrétnímu harmonickému indexu – příspěvek ostatních je vlivem integrace vynulován.

Koeficient A_0

Pro výpočet velikosti *DC složky* násobení přidanou harmonickou funkcí není nutné, rovnici *FS* (Rov. 3.3) stačí pouze integrovat:

$$\int_0^T x(t)dt = \int_0^T \left[A_0 + A_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t\right) + A_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{T}t\right) + A_3 \cos\left(2\pi \frac{3}{T}t\right) + \dots \right. \\ \left. + B_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{T}t\right) + B_2 \sin\left(2\pi \frac{2}{T}t\right) + B_3 \sin\left(2\pi \frac{3}{T}t\right) + \dots \right] dt \quad (3.4)$$

Výsledky integrace na pravé straně rovnice člen po členu (výsledek integrálu pro harmonické funkce byl vyšetřen i graficky na Obr. 6):

$$\int_0^T A_0 dt = TA_0 \quad (3.5)$$

$$\int_0^T A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) dt = A_k \frac{T}{2\pi k} \left[\sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) \right]_0^T = A_k \frac{T}{2\pi k} [0 - 0] = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_0^T B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) dt = B_k \frac{(-1)T}{2\pi k} \left[\cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) \right]_0^T = B_k \frac{(-1)T}{2\pi k} [1 - 1] = 0 \quad (3.7)$$

Na pravé straně rovnice zůstal nenulový pouze koeficient A_0 . Výsledek integrace stačí dosadit zpět na pravou stranu integrované Rov. 3.4 a úpravou koeficient vyjádřit:

$$\int_0^T x(t) dt = T A_0$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.8)$$

Koeficientu A_0 je tedy roven integrálu aproximované funkce v intervalu její periody vydělený velikostí této periody. Výraz $1/T$ se nazývá jako *normalizační faktor*, a jeho funkcí je zajistit nezávislost velikosti koeficientu vzhledem k počtu period v integračním intervalu (růst koeficientu vlivem velikosti integrovaného intervalu lze vidět na Obr. 11).

Koeficienty A_k

Před integrováním se obě strany FS (Rov. 3.3) vynásobí harmonickou funkcí $\cos(2\pi mt/T)$. Dle vlastnosti ortogonalit bude po integraci jediným nenulovým členem na pravé straně rovnice výraz, ve kterém je součin dvou stejných funkcí se stejnou frekvencí.

Vynásobená rovnice FS :

$$\int_0^T x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt = \int_0^T \left[A_0 \cos\left(2\pi \frac{m}{T} t\right) + A_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{T} t\right) + \dots \right. \\ \left. + A_k \cos^2\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + \dots + B_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{T} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{T} t\right) + \dots \right. \\ \left. + B_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \cos\left(2\pi \frac{m}{T} t\right) + \dots \right] dt \quad (3.9)$$

Vyplývá tedy, že jediným nenulovým členem na pravé straně rovnice bude člen $A_k \cos^2(2\pi kt/T)$. Pro získání výsledku tedy stačí pouze vyřešit integrál na pravé straně.

Výpočet integrace na pravé straně rovnice:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T A_k \cos^2 \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt &= A_k \int_0^T \frac{1 + \cos \left(2 \cdot 2\pi \frac{k}{T} t \right)}{2} dt \\
 &= \frac{A_k}{2} \left\{ \int_0^T dt + \int_0^T \cos \left(4\pi \frac{k}{T} t \right) dt \right\} = \frac{A_k}{2} \left\{ T + \frac{T}{4\pi k} \left[\sin \left(4\pi \frac{k}{T} t \right) \right]_0^T \right\} \\
 &= \frac{A_k}{2} \left\{ T + \frac{T}{4\pi k} [0 - 0] \right\} = \frac{1}{2} A_k T
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dosažení a vyjádření koeficientu:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T x(t) \cos \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt &= \frac{1}{2} A_k T \\
 A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Koeficienty B_k

Obě strany FS (Rov. 3.3) se před integrováním vynásobí funkcí $\sin(2\pi mt/T)$ a následuje stejný postup jako při výpočtu koeficientu A_k .

Upravená rovnice FS :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T x(t) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} t \right) dt &= \int_0^T \left[A_0 \sin \left(2\pi \frac{m}{T} t \right) + A_1 \cos \left(2\pi \frac{1}{T} t \right) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} t \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + A_k \cos \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} t \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + B_1 \sin \left(2\pi \frac{1}{T} t \right) \sin \left(2\pi \frac{m}{T} t \right) + \dots + B_k \sin^2 \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) + \dots \right] dt
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vypočet integrace na pravé straně rovnice:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T B_k \sin^2 \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt &= B_k \int_0^T \frac{1 - \cos \left(2 \cdot 2\pi \frac{k}{T} t \right)}{2} dt \\
 &= \frac{B_k}{2} \left\{ \int_0^T dt - \int_0^T \cos \left(4\pi \frac{k}{T} t \right) dt \right\} = \frac{B_k}{2} \left\{ T - \frac{T}{4\pi k} \left[\sin \left(4\pi \frac{k}{T} t \right) \right]_0^T \right\} \\
 &= \frac{B_k}{2} \left\{ T - \frac{T}{4\pi k} [0 - 0] \right\} = \frac{1}{2} B_k T
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dosazení a vyjádření koeficientu:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T x(t) \sin \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt &= \frac{1}{2} B_k T \\
 B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Set výsledných rovnic

Všechny Fourierovy koeficienty pro danou periodickou funkci $x(t)$ tedy lze určit integrací jejího součinu s hledanou harmonickou funkcí o hledané frekvenci.

Získané set rovnic pro Rozvoj do Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\
 A_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt \\
 B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \left(2\pi \frac{k}{T} t \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Protože při zápisu integračního intervalu záleží pouze na jeho délce, je v odborné literatuře často používanější zápis intervalu se středem v nule [1]. Tento zápis lépe vystihuje symetrii rovnic, která hraje ve Fourierově analýze zásadní roli, a dělá i snadnější zpozorovat čistě sudé nebo liché složky.

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\A_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt \\B_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt\end{aligned}\tag{3.16}$$

Ve většině případů je ovšem za podstatnější znát, které frekvence v signálu jsou a s jakou intenzitou. Proto je v praxi běžnější pracovat s amplitudově-fázovým zápisem koeficientů, vyjádřeném v Rov. 3.17 a 3.18.

Přestože tento zápis nezachycuje zvlášť příspěvky kosinové a sinusové složky, nabízí přehledný pohled na intenzitu a fázi každé frekvenční složky:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}\tag{3.17}$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)\tag{3.18}$$

3.3 Zápis komplexní exponenciální funkcí

Harmonickou funkci lze zapsat i pomocí komplexní exponenciální funkce využitím Eulerova vzorce (Rov. 2.13). Tento zápis zpřístupňuje elegantnější a přehlednější možnost zápisu Fourierovy řady, pro jeho využití je však třeba definovat nové koeficienty *FSE*:

$$a_0 = TA_0 = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3.19)$$

$$a_k = \frac{1}{2}A_kT = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) dt \quad (3.20)$$

$$b_k = \frac{1}{2}B_kT = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) dt \quad (3.21)$$

A z nich vycházející nový tvar *FS*:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T} \left[a_0 + 2a_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t\right) + 2a_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{T}t\right) + 2a_3 \cos\left(2\pi \frac{3}{T}t\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + 2b_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{T}t\right) + 2b_2 \sin\left(2\pi \frac{2}{T}t\right) + 2b_3 \sin\left(2\pi \frac{3}{T}t\right) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{T}a_0 + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vztah uvnitř sumy lze rozepsat a upravit kombinací exponenciálních funkcí využitím Rov. (2.15 a 2.16) jako:

$$\begin{aligned} a_k \cos(a) + b_k \sin(a) &= \\ &= a_k \frac{\exp(ia) + \exp(-ia)}{2} + b_k \frac{\exp(ia) - \exp(-ia)}{2i} \\ &= \frac{1}{2} \left[a_k \exp(ia) + a_k \exp(-ia) + \frac{b_k}{i} \exp(ia) - \frac{b_k}{i} \exp(-ia) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(a_k + \frac{b_k}{i} \right) \exp(ia) + \left(a_k - \frac{b_k}{i} \right) \exp(-ia) \right] \\ &= \frac{1}{2} [(a_k - ib_k) \exp(ia) + (a_k + ib_k) \exp(-ia)] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Úpravu rovnice (3.23) lze použít pro rozšíření exponenciálního tvaru FS (Rov. 3.22):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{T}a_0 + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) \right] = \\
 &= \frac{1}{T}a_0 + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[(a_k - ib_k) \exp\left(i2\pi \frac{k}{T}t\right) + (a_k + ib_k) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{T}t\right) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k - ib_k) \exp\left(i2\pi \frac{k}{T}t\right) + (a_k + ib_k) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{T}t\right) \right] \right\} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Hlavním rozdílem mezi zápisem Fourierovy řady pomocí harmonických funkcí (Rov. 3.3) a komplexní exponenciální funkcí (Rov. 3.24) je zavedení záporných frekvencí výrazem $\exp(-i2\pi kt/T)$. Tento zápis je sice na první pohled složitější, ale protože rozdíl mezi kladnými a zápornými frekvencemi spočívá pouze v jejich rozdílném znaménku imaginární složky, je možné tyto členy sjednotit jako komplexně sdružená čísla.

Za tímto účelem je zaveden nový *komplexní* Fourierův koeficient X_k , jehož index k je rozšířen i o záporná čísla: $k \in \mathbb{Z} (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$. Nulový index stále představuje *DC složku*, kladné indexy reprezentují kladné frekvence a záporné indexy záporné frekvence. Platí vztah $X_{-k} = X_k^*$, ze kterého pro nový koeficient plyne:

$$X_k = \begin{cases} a_k - ib_k, & k > 0 \\ a_k + ib_k, & k < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nový a elegantní zápis FS pomocí komplexně exponenciální funkce má tvar:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\left(i2\pi \frac{k}{T}t\right) \quad (3.26)$$

Tento zápis zahrnuje všechny frekvenční složky využitím komplexního koeficientu X_k , který zjednodušuje Rov. 3.24 do výrazně kratšího výrazu.

3.4 Rozvoj do Fourierovy řady v exponenciálním tvaru

Pro nalezení velikosti nových komplexních Fourierových koeficientů se používá principem stejná metoda *FSE* jako pro harmonický tvar – obě strany rovnice komplexní *FS* (3.26) se vynásobí komplexní funkcí $\exp(-i2\pi mt/T)$ a následně integrují:

$$\int_0^T x(t) \exp\left(-i2\pi \frac{m}{T} t\right) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k}{T} t\right) \exp\left(-i2\pi \frac{m}{T} t\right) dt \quad (3.27)$$

Integraci na pravé straně lze rozepsat jako:

$$\begin{aligned} \int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k}{T} t\right) \exp\left(-i2\pi \frac{m}{T} t\right) dt &= \int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k-m}{T} t\right) dt \\ &= \int_0^T \left\{ \cos\left(2\pi \frac{k-m}{T} t\right) + i \sin\left(2\pi \frac{k-m}{T} t\right) \right\} dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

V případě rovnosti $k = m$ se indexy argumentu vzájemně odečtou a zůstane nula. Ve všech případech nerovnosti indexů $k \neq m$ harmonické funkce v argumentu zůstane vždy celé číslo, což znamená, že exponenciální funkce vykoná vždy celý počet period, a tedy integrace v intervalu periody bude vždy rovna nule [1].

Výsledek integrace pro $k = m$:

$$\int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k-k}{T} t\right) dt = \int_0^T \exp(0) dt = \int_0^T dt = T \quad (3.29)$$

Vyjádření výsledného vzorce pro rozvoj do *FS* v exponenciálním tvaru:

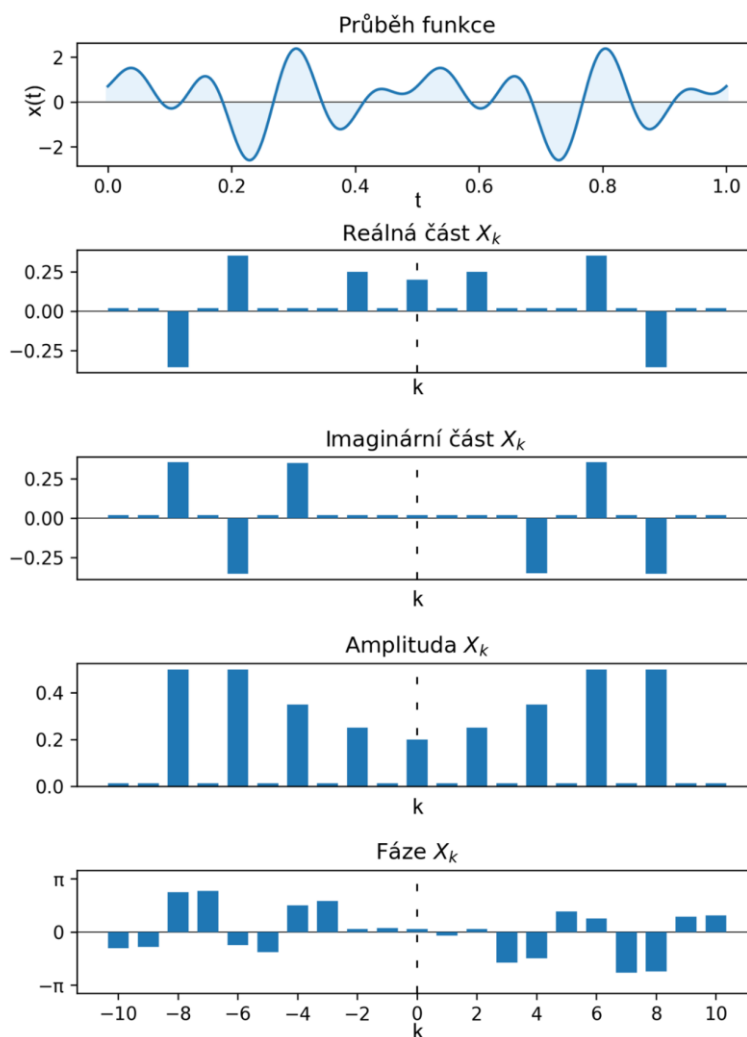
$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{T} t\right) dt &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k T \\ X_k &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{T} t\right) dt \end{aligned} \quad (3.30)$$

Na Obr. 12 je zobrazený rozklad jednoduché složené periodické funkce $x(t)$ do Fourierovy řady v exponenciálním tvaru:

$$x(t) = 0,2 + 0,5\cos(2\pi 2t) + 0,7\sin(2\pi 4t) + \cos(2\pi 6t + \pi/4) + \sin(2\pi 8t - \pi/4)$$

V grafu lze vidět, že konstanta se projevila pouze v reálné části X_k , a čistě kosinové a sinové funkce se projeví pouze v příslušných částech X_k (Re a Im , respektive). Poslední dvě funkce jsou fázově posunuty tak, aby jejich reprezentace přispívala do reálné a imaginární části X_k stejnou měrou, a navíc jsou vůči sobě přesně v protifázi. Reprezentované koeficienty mají stejnou velikost, ale jinou polaritu.

Zatímco reprezentace funkce pomocí reálné a imaginární složky působí mírně chaoticky, v amplitudově-fázovém zápisu jsou všechny přítomné složky přehledně zobrazeny v jediném grafu.



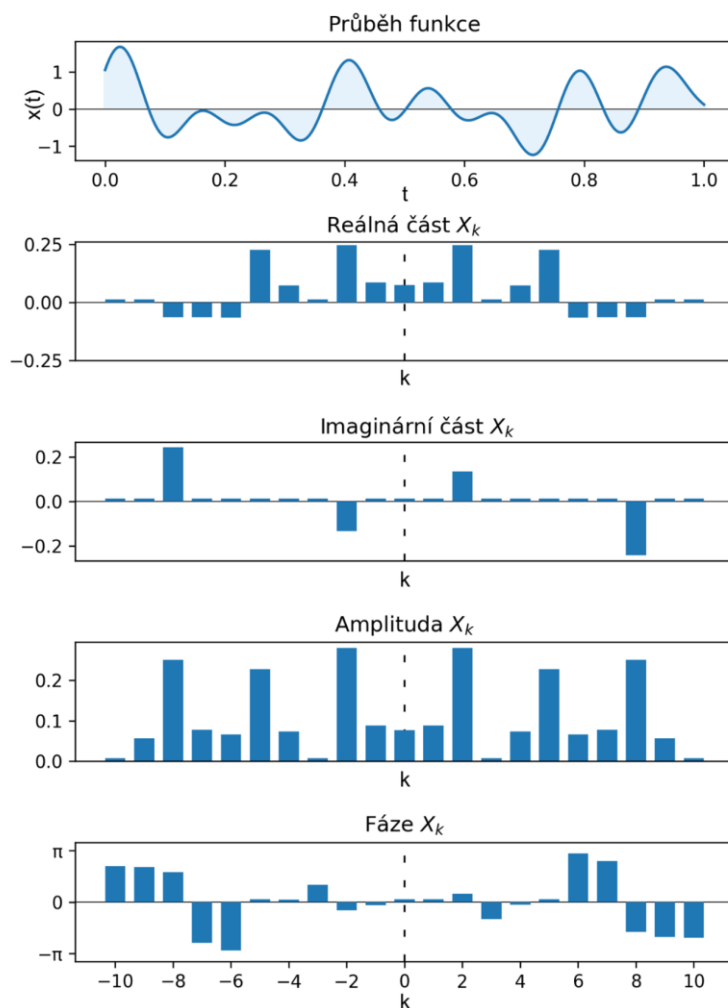
Obrázek 12 Složená funkce bez diskontinuity
rozložená do Fourierovy řady
[zdroj: vlastní]

Obr. 13 ilustruje rozklad složené periodické funkce podobně jako v předchozím obrázku. V tomto případě však některé složky nemají celočíselnou frekvenci, což znamená, že integrační interval neobsahuje celočíselný počet jejich period (důsledkem je na hranicích aproximované funkce patrná diskontinuita). Rozkládaná funkce má tvar:

$$x(t) = 0,5\cos(2\pi 2,2t) + 0,7\sin(2\pi 5,5t) + 0,3\cos(2\pi 6t) + 0,5\sin(2\pi 7,8t + \pi/6)$$

Jak je z grafu patrné, jednotlivé frekvenční složky už nelze zcela jednotlivě rozlišit, protože složky s neceločíselnou frekvencí se rozprostírají do více koeficientů. Tento efekt se nazývá spektrální protékání (angl. *spectral leakage*), u spojitých signálů však nemá příliš výrazný dopad na interpretaci spektra – na základě velikostí amplitud lze stále přibližně určit odpovídající frekvence.

Hlavní nevýhodou je, že silnější složky tak mohou přetečením zcela zakrýt slabší složky, čímž dochází ke ztrátě zejména detailnějších informací o spektru.



Obrázek 13 Složená funkce s diskontinuitou
rozložená do Fourierovy řady
[zdroj: vlastní]

4 FOURIEROVA TRANSFORMACE

V předchozí kapitole byla popsána Fourierova řada (FS), kterou lze reprezentovat periodické funkce jako lineární kombinaci funkcí harmonických s rostoucí frekvencí. Výpočet koeficientů této řady se provádí pomocí metody rozvoje do Fourierovy řady (FSE), který využívá ortogonálních vlastností harmonických funkcí.

Výsledkem tohoto výpočtu jsou informace o zastoupení jednotlivých frekvenčních složek v daném signálu, což lze interpretovat jako formu frekvenční analýzy. Nevýhodou FSE je však jeho omezení na pouze diskrétní frekvence, které jsou dány celočíselným násobkem základní frekvence f_0 , společně s limitací na pouze periodické signály.

Fourierova transformace (angl. *Fourier transform*, FT) tyto omezení překonává. Výstupem FT jsou stále komplexní koeficienty X_k (nebo ekvivalentní amplituda a fáze) jako v případě FSE , avšak nyní jsou koeficienty definovány pro celé frekvenční spektrum. Jinými slovy, FT převádí časovou reprezentaci signálu do frekvenční domény (tzv. spektrum), tedy výstupem je komplexní funkce frekvence [7].

Ačkoli FT stále vychází z průběhů harmonických (a tedy periodických) funkcí, její matematická formulace umožňuje její využití i pro neperiodické signály.

4.1 Odvození

Pro získání spojitého frekvenčního spektra, obvykle značeného stříškou jako $\hat{X}(f)$, je nutné zvýšit rozlišení frekvenční osy, tedy zmenšit vzdálenost mezi jednotlivými spektrálními body.

Ve Fourierově řadě je tato vzdálenost rovna $\Delta f = 1/T$, řešením je tedy prodloužit periodu analyzované funkce, aniž by se změnil její spektrální obsah. Toho lze elegantně dosáhnout tzv. nulovým vyplněním (angl. *zero-padding*) – tedy rozšířením jednoho periodického intervalu analyzované funkce o úseky vyplněné pouze nulami [1].

Díky této úpravě se efektivně zvětšuje délka integračního intervalu, čímž dochází ke zmenšení vzdáleností mezi jednotlivými frekvenčními koeficienty. S každým prodloužením intervalu se tedy frekvenční rozlišení zvyšuje úměrně jeho délce.

Teoreticky lze tuto myšlenku aplikovat přidáním nekonečného množství period, což lze matematicky vyjádřit limitem jako:

$$\hat{X}(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-mT}^{mT} x(t) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{2mT} t\right) dt,$$

$$\text{kde } x(t) = \begin{cases} x(t), & -T/2 \leq t < T/2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (4.1)$$

Limitem $m \rightarrow \infty$ se integrační interval rozšiřuje do $(-\infty \leq t < \infty)$, a výraz $k/2mT$, kde je harmonický index k dělený nekonečnem, se tak přímo stává frekvencí f . Fourierovy koeficienty jsou stále diskrétními body, ale protože je vzdálenost mezi nimi limitována k nule, množina komplexních koeficientů X_k je plynule přetransformována ve spojitou komplexní funkci $\hat{X}(f)$ [8].

Fourierovy transformace, získaná řešením limity v Rov. (4.1), má finální tvar:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (4.2)$$

K této rovnici, jednoznačněji pojmenované jako *přímá* Fourierova transformace, existuje i inverzní vztah, známý jako *inverzní* Fourierova transformace. Ten lze odvodit jednoduchou úpravou – prohozením proměnných času a frekvence v přímé variantě, a změnou znaménka v exponentu komplexní harmonické funkce:

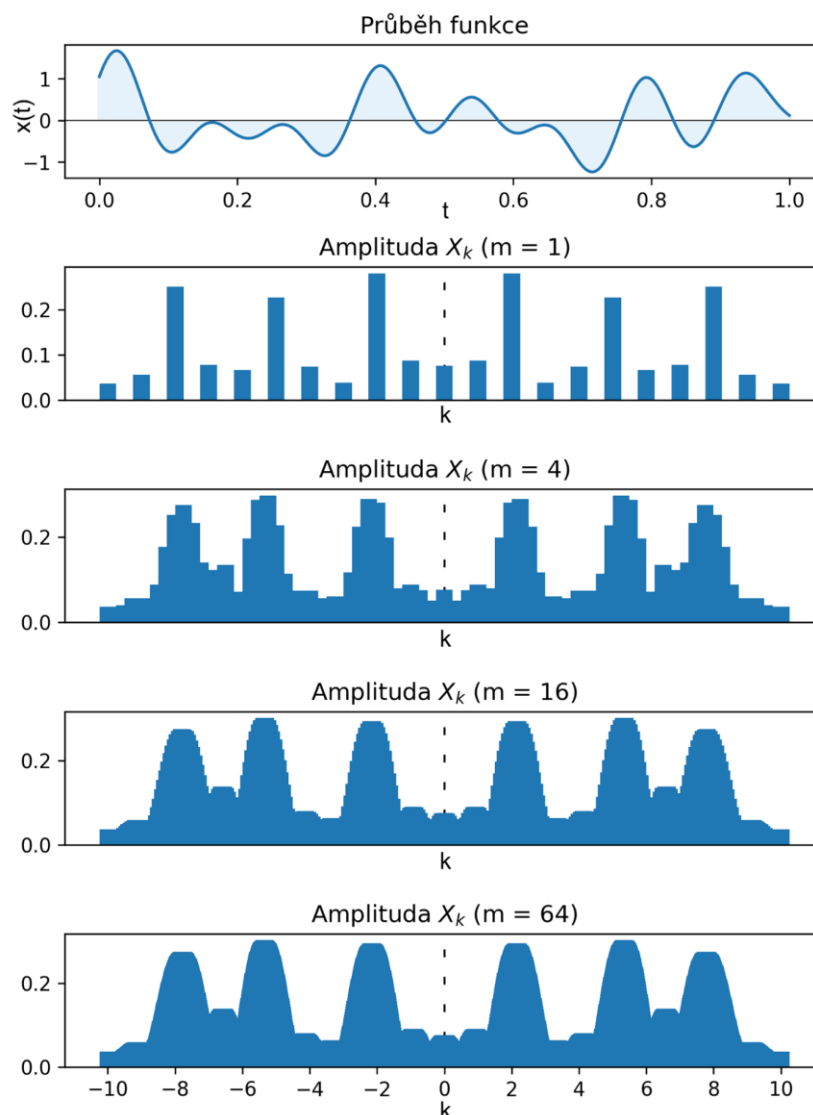
$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{X}(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f) \exp(i2\pi ft) df \quad (4.3)$$

Dvojice těchto transformačních rovnic se označuje jako Fourierův pár (angl. *Fourier transform pair*). Návrat do časové oblasti ve své podstatě probíhá opětovnou aplikací *FT* na frekvenční spektrum, což je klíčové, neboť lze frekvenční spektrum zpětně a deterministicky rekonstruovat do časového signálu.

Díky tomuto principu lze například aplikovat frekvenční filtr na spektrum signálu, odstranit nežádoucí vysokofrekvenční složky, a následně získat nazpět upravený signál v časové doméně.

Na Obr. 14 je graficky znázorněné, jaký vliv má zvětšení integračního intervalu vyplněním nulami na tvar spektra. Analyzovaná funkce je převzata z Obr. 13 (diskontinuita na hranicích). Proměnná m představuje celkový počet period v integraci, tedy pro $m = 1$ se integruje pouze samotná funkce, pro $m = 4$ jsou přidány tři periody vyplněné nulami atd. Lze pozorovat, že už pro $m = 16$ je výsledné spektrum znatelně hladší. Výsledné vrcholy jsou sice znatelně široké, ale to je pouze důsledek malé velikosti intervalu pokrývajícího průběh funkcí.

Doplněním nul však do spektra nepřibývá žádná nová informace — dochází pouze k jeho vyhlazení a zjemnění jeho vizuálního zobrazení. V digitálních nástrojích pro vizualizaci spektra může být převzorkování, neboli tzv. *oversampling* technicky realizován právě pomocí této metody.



Obrázek 14 Přejít z Fourierovy řady na Fourierovu transformaci
[zdroj: vlastní]

4.2 Vlastnosti

FT má několik základních matematických vlastností, které umožňují efektivní manipulaci se signály mezi časovou a frekvenční oblastí. Níže jsou uvedeny vybrané nejdůležitější.

Linearita (lineární kombinace)

Fourierova transformace je *lineární* operátor, což znamená, že platí:

$$\mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\} = a\mathcal{F}\{x(t)\} + b\mathcal{F}\{y(t)\} \quad (4.4)$$

kde a, b jsou skaláry, a $x(t), y(t)$ jsou funkce.

Tato vlastnost dovoluje vypočítat FT součtu dvou a více funkcí separovaně pro každou z nich. Násobení signálu reálnou konstantou tedy nemění fázové spektrum, neboť zachovává poměr reálné a imaginární části stejný [8].

Posun signálu v čase a frekvenci

Časová a frekvenční doména vykazují symetrické chování při posunutí signálu:

- *Posun v čase* způsobuje fázový posun ve frekvenční doméně:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \hat{X}(f) \cdot \exp(-i2\pi f t_0) \quad (4.5)$$

Posun signálu o t_0 v časové oblasti tedy odpovídá vynásobení jeho spektra komplexní harmonickou funkcí, která ovlivňuje pouze fázi, zatímco amplituda zůstává nezměněná (amplituda exponenciálního členu je pro všechny frekvence rovna 1).

- *Posun ve frekvenci* způsobuje posun celé frekvenční domény:

$$\mathcal{F}\{\exp(-i2\pi f_0 t)x(t)\} = \hat{X}(f - f_0) \quad (4.6)$$

To znamená, že modulace signálu komplexní harmonickou funkcí $\exp(-i2\pi f_0 t)$ v časové oblasti odpovídá posunutí celého spektra.

Parsevalova věta

Obecněji známa také jako *teorém o výkonu* (angl. *power theorem*), věta vyjadřuje ekvivalenci energie signálu pro časovou a frekvenční doménu [6]. Celková energie signálu $x(t)$ v časové oblasti je definována jako integrál čtverce amplitudy signálu, což odpovídá:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt \quad (4.7)$$

kde $x^*(t)$ je komplexně sdružené číslo k $x(t)$.

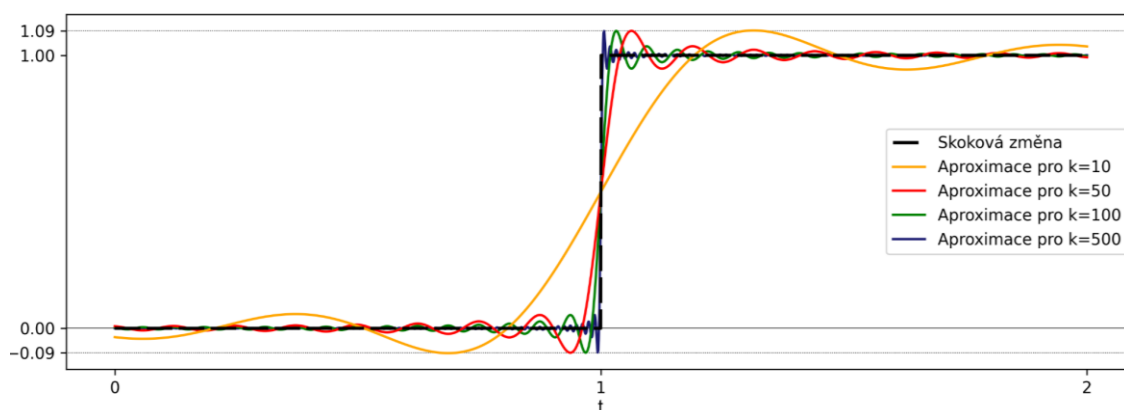
Parsevalova věta říká, že tato energie je zachována i ve frekvenční doméně:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(f)|^2 df \quad (4.8)$$

Tato vlastnost ukazuje, že *FT* pouze mění formu zvoleného transformovaného signálu, avšak jeho celkovou energii zachovává nezměněnou.

Gibbsův jev

Tento jev se projevuje při aproximaci skokové změny signálu pomocí *FS*. V blízkosti skoku se objeví oscilace, která sice s rostoucím počtem harmonických složek slábne, ale nikdy zcela nezmizí, a to ani při nekonečném počtu složek. Maximální chyba aproximace je omezená na přibližně 9 % velikosti skoku.



Obrázek 15 Vizualizace Gibbsova jevu při skokové změně
[zdroj: vlastní]

Derivace a integrace signálu v časové doméně

FT derivace a integrace signálu má předvídatelný vliv na jeho frekvenční doménu.

- Transformace derivace signálu odpovídá násobení spektra komplexní frekvencí:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (i2\pi f)^n \hat{X}(f) \quad (4.9)$$

Velikost změny spektra se mění v závislosti na počtu derivací n , což znamená, že jsou s vyššími derivacemi výrazněji zesilovány vyšší frekvence. Například pro $n = 1$ je spektrum zesílené faktorem $2\pi f$, a navíc imaginární hodnota i způsobí fázový posun o 90° .

- Transformace integrace signálu odpovídá dělení spektra komplexní frekvencí:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\tau} x(t)dt\right\} = \frac{\hat{X}(f)}{i2\pi f} + C\delta(f) \quad (4.10)$$

kde τ je časový okamžik do kterého je signál akumulován, C je konstanta závislá na počátečních podmínkách, a $\delta(f)$ je Diracova funkce (také Diracův impuls), definována jako:

$$\delta(f) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } f = 0 \\ 0 & \text{pro } f \neq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Přidaný výraz $C\delta(f)$ je pro vztah důležitý, protože zajišťuje správný koeficient spektra pro nulovou frekvenci (*DC* složku). Například pro konstantu platí:

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f) \quad (4.12)$$

Pokud je však tato funkce integrována, podle Rov. (4.10) její spektrum pro $f = 0$ diverguje do nekonečna – horní mez integrálu je sice konečná, ale spodní mez $-\infty$ integrálu umožňuje neomezený růst. Z toho důvodu je pro nulovou frekvenci spektrum definované dodatečným členem ve formě Diracovy funkce. Pro *FT* integrované funkce tedy platí:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\tau} 1dt\right\} = \frac{\delta(f)}{i2\pi f} + C\delta(f) = \begin{cases} C\delta(f) & \text{pro } f = 0 \\ \delta(f)/i2\pi f & \text{pro } f \neq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

5 PRAKTICKÉ MODIFIKACE FOURIEROVY TRANSFORMACE

Fourierova transformace představuje skvělý nástroj pro analýzu frekvenčního složení i složitějších signálů. Ve své spojitě formě však zůstává čistě teoretickou metodou, kterou nelze aplikovat na reálný svět. Teprve s rozvojem digitálních technologií vznikl prostor pro rozvoj prakticky využitelných variant, které staletí po Fourierově době začaly hrát klíčovou, byť většinou nenápadnou roli v moderním světě. Tato kapitola stručně představuje nejpoužívanější modifikace *FT*, jejíž základy byly položeny již v roce 1822 [3].

5.1 Diskrétní Fourierova transformace

Fourierova transformace ve své původní podobě předpokládá spojitý signál definovaný v každém časovém okamžiku, tedy signál s *nekonečně mnoha body* popisující jeho průběh. Tento předpoklad je pro reálně naměřené signály nesplnitelný, což činí původní podobu *FT* jen obtížně aplikovatelnou.

Řešením tohoto problému je prakticky aplikovatelná modifikace *FT* pojmenována jako *diskrétní Fourierova transformace* (angl. *discrete Fourier transform*, *DFT*), která pracuje s konečným počtem N vzorků diskrétního signálu. *DFT* rozkládá diskrétní signál do N diskrétních frekvenčních intervalů, označovaných počestně jako *frekvenční biny* (angl. *frequency bins*) – s rostoucím počtem vzorků tedy roste i rozlišení spektra.

DFT zahrnuje stejně jako *FT* přímou i inverzní variantu, kterou lze aplikovat na diskrétní časovou nebo frekvenční řadu vzorků, respektive.

Pár rovnic diskrétní Fourierovy transformace vypadá následovně (přímá varianta se odborněji označuje také jako *N-point-DFT* [1]):

$$\text{DFT}\{x_n\} = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad (5.1)$$

$$\text{IDFT}\{X_k\} = x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(i2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad (5.2)$$

kde N je celkový počet vzorků signálu a n s k je časový a frekvenční index, respektive, pro které platí $n, k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Výsledné spektrum *DFT* je diskrétní a zahrnuje jak kladné, tak i záporné frekvence. Jelikož amplitudové i fázové spektrum stále vykazují vlastnost symetrie, stačí pro jejich výpočet znát například pouze kladné koeficienty, přičemž záporné jsou symetrií odvoditelné.

Rozlišení spektra, neboli vzdálenost mezi dvěma sousedními frekvenčními složkami ve spektru, je dáno vztahem:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \quad (5.3)$$

kde f_s představuje vzorkovací frekvenci (angl. *sampling frequency*). Lepšího rozlišení tedy lze docílit použitím většího počtu vzorků [9].

Spektrum získané *DFT* začíná na frekvenčním indexu 0 (*DC* složka), pak roste nejprve přes kladné a pak záporné frekvence. Pro přehlednost je proto běžné, že se výstupní spektrum po aplikaci *DFT* přeorganizuje do běžného pořadí od záporných frekvencí po kladné. Tato operace se často označuje jako frekvenční posuv (angl. *frequency shift*), přičemž v prostředí *MATLAB* nebo *Python* (knihovna *NumPy*) se používá funkce *fftshift()*.

Diskretizace *FT*s sebou ovšem přináší i nevýhody. Kromě vysoké výpočetní náročnosti se ve spektru objevují artefakty – nežádoucí zkreslení, které komplikují interpretaci spektra:

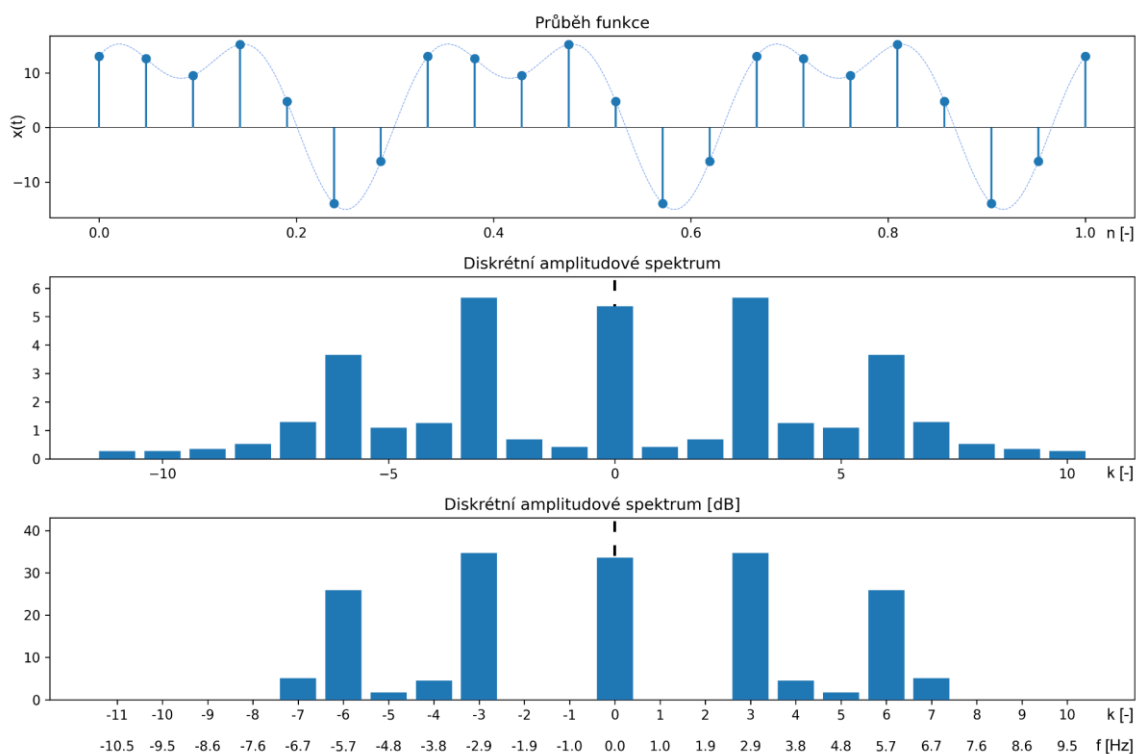
- **Protékání spektra** (angl. *spectral leakage*) může výrazně zkreslovat spektrum. Tento jev se ovšem dá účinně minimalizovat metodou „okénkování“ (angl. *time windowing*), která spočívá ve vynásobení signálu okenní funkcí před aplikací *DFT*. Okenní funkce tlumí amplitudu signálu zejména na jeho hranicích, čímž zmírňuje jeho diskontinuitu a přibližuje ho tak periodickému průběhu. Tím dochází k potlačení skokových změn, které tento jev způsobují, a tedy i zlepšení čitelnosti spektra za cenu malé ztráty informace.
- **Aliasing** nastává při nedostatečné vzorkovací frekvenci při převodu spojitého signálu na diskrétní. Pokud některé frekvenční složky signálu přesahují *Nyquistovu frekvenci* ($f_{Ny} = f_s/2$), dochází k jejich „překlopení“ (angl. *spectrum folding*) relativně k f_{Ny} zpět do nižších frekvencí, což vede ke zkreslení spektra.

- **Výpočetní náročnost** je velkou překážkou v aplikaci *DFT*, jelikož je pro každý frekvenční bin nutné všechny vzorky vynásobit komplexní harmonickou funkcí a sečíst je. Výpočetní složitost *N-point-DFT* je rovna přibližně $O(N^2)$, tedy počet operací roste kvadraticky s počtem vzorků.

Obr. 16 zobrazuje spektrum spojitě funkce, která byla diskretizována na 22 vzorků. Spojitá funkce je definována jako:

$$x(t) = 5 + 12\sin(2\pi 3t) + 8\cos(2\pi 6t)$$

Z grafu je patrné, že bez použití okenní funkce dochází k viditelnému protékání spektra. Kromě amplitudového spektra v lineární škále je většinou užitečné spektrum pro širší rozsahy amplitud zobrazit i v decibelech. Decibely používají logaritmickou škálu, která zajišťuje konzistentní reprezentaci *změn* amplitud pro velké i malé hodnoty, což usnadňuje orientaci v přítomných frekvenčních složkách (obzvláště pokud je signál znečištěný šumem).



Obrázek 16 Diskrétní Fourierova transformace
[zdroj: vlastní]

5.2 Rychlá Fourierova transformace

Rychlá Fourierova transformace (angl. *Fast Fourier transform, FFT*) zahrnuje algoritmy, které řeší problém s výpočetní náročností *DFT*. Hlavním principem *FFT* algoritmů je rozdělení celkového počtu vzorků N na menší skupiny:

$$N = M \times L \quad (5.4)$$

kde M je počet skupin, a L je počet vzorků v každé skupině.

Tímto dělením lze výpočet přímé N -point-*DFT* rozdělit na méně náročný výpočet $M \times L$ -point-*DFT*. Postup lze navíc aplikovat rekurzivně znova na každou z menších L -point-*DFT*, dokud je počet vzorků v podskupině dále nedělitelný podle M . Dělení vzorků může být aplikováno buď v časové doméně (angl. *decimation in time, DIT*), nebo frekvenční doméně (angl. *decimation in frequency, DIF*).

Existuje několik různých *FFT* algoritmů, ovšem za historicky první a nejznámější je považován *Cooley-Tukey* algoritmus, publikovaný v Americe roku 1965 [10]. Původní motivací byla analýza dat ze seismometrů pro detekci jaderných testů v *SSSR*.

Cooley-Tukey algoritmus je konkrétněji označován jako *Radix-2 DIT* algoritmus, což znamená, že se vzorky dělí na skupiny M o základu 2 v časové doméně. Vzorky jsou tedy rozděleny na sudé a liché indexy, dvakrát se provede L -point-*DFT*, a zkombinují se výsledky. Pro maximální účinnost algoritmu je vhodné, aby byl počet vzorků celočíselnou mocninou dvou, jinak jsou vzorky do správného počtu doplněny nulami.

Obecně lze *Radix-2 DIT* algoritmus zapsat jako:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \exp(-i2\pi \frac{(2m)k}{N}) + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \exp(-i2\pi \frac{(2m+1)k}{N}) \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \exp(-i2\pi \frac{mk}{N/2}) + \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N}\right) \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \exp(-i2\pi \frac{mk}{N/2}) \\ &= E_k + W_k \cdot O_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

kde E_k, O_k jsou komplexní koeficienty pro sudé a liché vzorky, a W_k je „kývací“ faktor (angl. *twiddle factor*).

Výpočetní složitost *Radix-2 DIT* algoritmu aplikovaného rekurzivně na počet vzorků rovný $N = 2^q$, $q \in \mathbb{N}^+$ je $O(N \cdot \log N)$ – tedy s rostoucím počtem vzorků se výpočet výrazně zefektivňuje. V současnosti je navíc i tento algoritmus dále optimalizovaný.

5.3 Krátkodobá Fourierova transformace

Krátkodobá Fourierova transformace (angl. *Short-time Fourier transform, STFT*) je dalším rozšířením *FT*, které umožňuje přehledněji analyzovat časově proměnné signály. Principem je rozdělení signálu na krátké časové úseky, označované jako „časová okna“, na která je následně aplikována *FFT*, čímž je získáno frekvenční spektrum odpovídající pouze danému okamžiku. Posouváním okna podél celé časové osy vzniká sada spekter, která jsou zkombinována do jednoho grafu – *spektrogramu*. Jelikož je *STFT* často počítána *Radix-2 DIT* algoritmem, velikost okna se ve většině programů volí v násobcích dvou.

Spektrogram je tedy časově-frekvenční vizualizací signálu, která zobrazuje tři rozměry: čas, frekvenci a intenzitu. Nejběžnější je mapovat *čas* na ose x , *frekvenci* na ose y , a *intenzitu* znázorňovat pomocí barvy (3D grafy jsou méně přehledné).

Obecný tvar nemodifikované spojité varianty *STFT*:

$$STFT\{x(t)\} = \hat{X}(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)\exp(-i2\pi ft)dt \quad (5.6)$$

kde τ je čas pro posouvání okna, a $w(t - \tau)$ je okenní funkce.

Protože je cílem analyzovat reálné signály, pojmem *STFT* se většinou myslí její diskretizovaná varianta, která má tvar:

$$STFT\{x_n\} = X_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w(n - m) \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad (5.7)$$

kde m je diskretní čas pro posouvání okna, a $w(n - m)$ je okenní funkce.

Jelikož je cílem spektrogramu reprezentovat energii signálu, reprezentované hodnoty jsou určeny využitím teorému o výkonu (Rov. 4.7):

$$STFT\{x_n\}(f, m) = |X_k(f, m)|^2 \quad (5.8)$$

Klíčovou nevýhodou *STFT* je pevné časově-frekvenční rozlišení, které je dáno délkou časového okna. Krátké okno poskytuje vysoké časové rozlišení, ale špatné frekvenční rozlišení. Naopak pro delší okna je sice frekvenční rozlišení lepší, ale zase je omezené časové rozlišení. Při analýze signálu je proto nutné buď volit vhodný kompromis, nebo zpracovat více spektrogramů s různými délkami oken, aby bylo možné zachytit detaily v časové i frekvenční doméně.

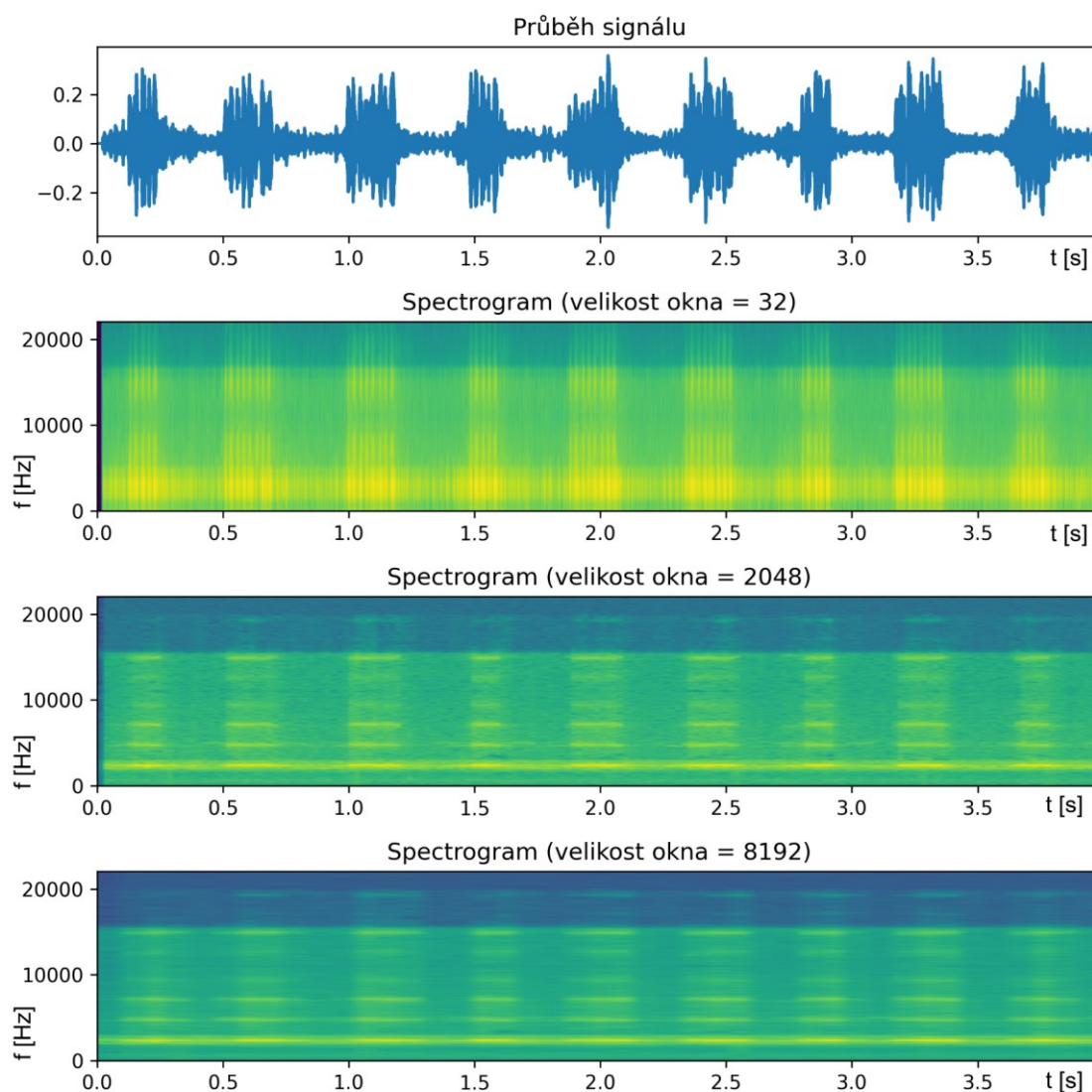
V následující tabulce jsou stručně popsány základní nastavení při generování spektrogramu:

Tabulka 2 Základní parametry pro nastavení spektrogramu

Název parametru	Stručný popis
Barevné zobrazení (angl. <i>Colour property</i>)	Určuje barevné schéma pro reprezentaci intenzit. Nejčastěji jsou používány styly jako <i>Green</i> , <i>Sunset</i> , <i>Banded</i> , <i>Inferno</i> nebo <i>Black on White</i> .
Stupnice pro intenzitu (angl. <i>Colour scale</i>)	Definuje škálu stupnice pro intenzitu. Lineární škála je často nevhodná kvůli širokému dynamickému rozsahu, proto se používá decibelová (dB) škála, která lépe zvýrazňuje i slabší složky signálu.
Velikost okna (angl. <i>Window size</i>)	Určuje počet vzorků v časovém okně pro výpočet <i>FFT</i> . Volba optimální velikosti závisí na charakteru analyzovaného signálu, obecně je kompromisem velikost okna 1024 nebo 2048.
Překrývání (angl. <i>Overlap</i>)	Udává míru překryvu mezi sousedními okny. Vyšší překryv zajišťuje plynulejší přechody i lepší rozlišení přechodových jevů, ale mírně zvyšuje výpočetní náročnost. Běžně je dostupný překryv od 50% po až 100%.
Převzorkování (angl. <i>Oversampling</i>)	Zvyšuje počet vzorků pro <i>FFT</i> jejich rozšířením o časové okno vyplněné nulovými vzorky (angl. <i>zero-padding</i>). Výsledkem je hladší spektrum bez zlepšení skutečného rozlišení. Nejvhodnější volbou je 2x nebo 4x, vyšší hodnoty jako 8x nebo 16x už přinášejí menší zlepšení za cenu vysoké výpočetní náročnosti.
Stupnice pro frekvenci (angl. <i>Frequency scale</i>)	Definuje škálu stupnice pro frekvenční osu. Může být lineární, nebo logaritmická. Velkou výhodou decibelů je zachování stejné vizuální vzdálenosti mezi harmonickými složkami po celém spektru.

[zdroj: vlastní]

Na Obr. 17 je zobrazena analýza nahrávky cvrkajícího cvrčka pomocí tří spektrogramů. První spektrogram, který používá okno o 32 vzorcích, efektivně zachycuje délku jednotlivých cvrků. Spektrogram s oknem o 8192 vzorcích pak zdůrazňuje frekvenční složky cvrkání, což však platí pouze pro signály s konstantním frekvenčním složením. Spektrogram s oknem o 2048 vzorcích představuje vyvážený kompromis, který je ideální pro celkovou orientaci v grafu.



Obrázek 17 Krátkodobá Fourierova transformace
[zdroj: 11]

5.4 Diskrétní Kosinová transformace

Diskrétní Kosinová transformace (ang. *discrete Cosine transform, DCT*) je speciální variantou *DFT*, která vypočítává pouze reálné koeficienty X_k . Toho je dosaženo symetrickým rozšířením analyzovaného signálu, čímž se kompletně eliminuje imaginární složka spektra [1].

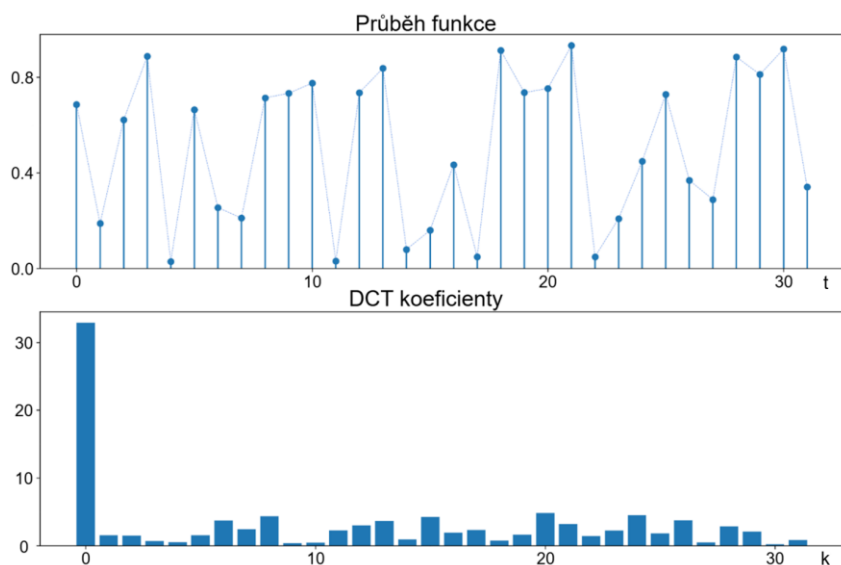
Klíčovou vlastností *DCT* je však její schopnost koncentrovat většinu energie signálu do několika prvních koeficientů, což je zvláště výhodné pro kompresi dat, protože lze méně významné koeficienty zanedbat bez výrazné ztráty na kvalitě zrekonstruovaných dat.

Existuje několik variant *DCT*, přičemž nejčastěji používaná je *DCT-II*, jejíž inverzní transformací je *DCT-III* (zapisuje se jako přímá transformace, ale stačí pouze prohodit koeficienty pro časovou a frekvenční doménu). Matematicky lze rovnice vyjádřit jako:

$$DCT_{II}\{x_n\} = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\pi \frac{(n+0,5)k}{N} \right] \quad (5.9)$$

$$DCT_{III}\{x_n\} = X_k = \frac{1}{2}x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cos \left[\pi \frac{n(k+0,5)}{N} \right] \quad (5.10)$$

Praktickým využitím *DCT* je primárně digitální komprese zvuku, obrazu i videa. Mezi hlavní aplikace patří komprese zvukových stop ve formátu *.mp3*, komprese obrazu ve formátu *.jpeg* a video komprese ve formátech *MPEG*, *H.264* a *H.245*.



Obrázek 18 Diskrétní Kosinová transformace
[zdroj: vlastní]

II PRAKTICKÁ ČÁST

6 ZÁKLADY ZVUKOVÉ SYNTÉZY

Zvuková syntéza představuje proces tvorby zvuku prostřednictvím analogových nebo digitálních technologií. Umožňuje napodobit reálné zvuky, jako jsou hlasy živočichů, přírodních jevů či tónů hudebních nástrojů, ale i vytvořit zcela originální zvukové textury.

Historicky se nejprve rozšířila analogová syntéza, která dominovala především před příchodem digitálních technologií, avšak i ta má stále své příznivce. Ti oceňují její osobitý a „živější“ zvuk, který je způsoben fyzickými nedokonalostmi analogových obvodů – drobné a nepravidelné kolísání parametrů společně s bohatší zvukovou texturou způsobené nedokonalostí součástek. Analogové syntezátory navíc nijak nevzorkují signál, tedy jsou zcela imunní vůči aliasingu [12]. V dnešní době je však digitální syntéza hlavním a výrazně pohodlnějším nástrojem pro tvorbu zvuku, neboť nabízí větší flexibilitu, přesnou kontrolu nad parametry i širší možnosti modulace v přehlednějším prostředí.

V této kapitole jsou stručně představeny čtyři základní parametry zvuku, tři hlavní přístupy k jeho syntéze a dále je pojednáno o nejdůležitějších nástrojích pro zvukovou syntézu – syntezátorech.

6.1 Parametry zvuku

Pro účely zvukové syntézy jsou nejpodstatnější čtyři fundamentální parametry zvuku – *hlasitost*, *výška*, *obálka* a *témbr*. Tyto vlastnosti výrazně ovlivňují vnímání akustického signálu a zároveň jsou i dobře technicky definovatelné. Mezi podrobnější charakteristiky by mohly patřit například jeho prostorové vlastnosti nebo spektrální šířka.

Hlasitost (angl. volume/sound level)

Hlasitost určuje intenzitu zvukové vlny, která souvisí s velikostí výchylky (amplitudy) tlakových vln v čase. V digitální záznamu se hlasitost obvykle zobrazuje v normalizovaném rozsahu od -1 do 1. Obecně platí, že čím větší je amplituda, tím více energie vlna přenáší a tím hlasitěji je tedy i vnímána. *Vnímaná hlasitost* je však ovlivněna také frekvenčním složením zvuku, protože citlivost lidského sluchu se liší v závislosti na frekvenci [13].

Pro objektivní měření hlasitosti se nejčastěji používají decibely, které lépe odpovídají lidskému vnímání.

Tabulka 3 Přehled nejpoužívanější logaritmických škál pro hlasitost zvuku

Označení	Vzorec	Referenční hodnota
dB SPL (angl. <i>Sound Pressure Level</i>)	$A_{SPL} = 20 \log \left(\frac{p}{20 \mu Pa} \right)$	Nejnižší hladina zvuku slyšitelná lidským sluchem.
dBA (angl. <i>A-weighted decibels</i>)	$A_{dBA} = 20 \log \left(\frac{p}{20 \mu Pa} \right) + A(f)$	Stejná <i>dB SPL</i> , ale s přidanou korekční křivkou odpovídající lidskému frekven. vnímání.
dBFS (angl. <i>relative to Full Scale</i>)	$A_{dBFS} = 20 \log \left(\frac{A}{A_{max}} \right)$	Maximální možná digitální amplituda.
dBV (angl. <i>relative to 1 Volt</i>)	$A_{dBV} = 20 \log \left(\frac{V}{1 V} \right)$	1 V RMS, běžně používaná škála v audio technice.

[zdroj: vlastní]

Výška (angl. *pitch*)

Udává frekvenci kmitání tlakové vlny v čase, která ovlivňuje jak „vysoko“ je daný zvuk vnímán. U tónů s jasnou periodickou strukturou se výškou většinou myslí jejich fundamentální frekvence, tedy nejnižší přítomná frekvenci v jejich spektru.

Lidské ucho je schopné vnímat frekvence přibližně v rozsahu 20 Hz až 20 kHz (zejména v mladém věku), přičemž jeho citlivost v tomto spektru není stejná – nejcitlivější je v pásmu kolem 2 až 5 kHz. Pro praktické vyjádření vnímané výšky však nejsou absolutní hodnoty frekvence intuitivní nebo vhodné, neboť člověk výšku vnímá primárně relativně, nikoliv absolutně (výjimku tvoří pouze velmi malá část populace s tzv. *perfektním* sluchem). Tato relativní výška, daná poměrem dvou frekvencí, se označuje jako (hudební) *interval*.

Na základě inspirace intervaly, které se v přírodě přirozeně vyskytují ve formě harmonické řady (tedy poměrové vzdálenosti harmonických složek) jsou sestaveny *ladící systémy*, které ve spektru definují specifické diskrétní frekvence, značené jako *tóny*. Výběrem těchto tónů v rámci jedné oktávy (2-násobku frekvence) pak vznikají *tónové systémy* (např. pentatonický – 5 tónů, diatonický – 7 tónů, chromatický – 12 půltónů).

V současnosti jsou nejvíce relevantní dva systémy ladění:

- Čisté ladění (angl. *Just Intonation*) – vychází z přirozených akustických zákonitostí. Základní hudební intervaly jsou založeny na jednoduchých poměrech celých čísel, které nejsou nijak vázány na pevně stanovený počet (např. 2, 3/2, 4/3, 5/4, ...).
- Temperované ladění *12-TET* (angl. *12-Tone Equal Temperament*) – nejrozšířenější systém ladění v západní hudbě. Všechny intervaly jsou z praktických důvodů slabě „rozladěny“ tak, aby byl nástroj univerzálně použitelný pro všechny základní tóny. Interval oktávy je rozdělen na dvanáct stejně vzdálených půltónů, přičemž každý půltón představuje změnu frekvence o přibližně 6 % (např. $\sqrt[12]{2}$, $\sqrt[12]{2^2}$, $\sqrt[12]{2^3}$, ...).

Zatímco čisté ladění přesně odráží poměry mezi harmonickými složkami, temperované ladění umožňuje univerzální využití díky rovnoměrnému rozdělení oktávy. Proto se v současnosti *12-TET* stal standardem pro ladění hudebních nástrojů (např. kytara nebo piano) [13].

Největší jednotkou temperovaného ladění *12-TET* jsou zmíněné *oktávy* (angl. *octave*), které představují celočíselné násobky referenčního tónu a proto se také značí stejným písmenem (např. tón A4 je o oktávu výše než A3). Každá oktáva je rovnoměrně rozdělena na 12 *půltónů* (angl. *semitone*), přičemž každý půltón je dále dělitelný na 100 *centů* (angl. *cent*). V digitální podobě je tento systém realizován standardem *MIDI* (angl. *Musical Instrument Digital Interface*), který přiřazuje každému půltónu specifické číslo.

Protože je *12-TET* ladění relativní, je nutné definovat jeden referenční tón, vůči kterému je ladění odvozeno. V západní hudbě je tímto standardem tón *A4* s frekvencí 440 Hz. Pro přepočítání frekvence v Hz na počet půltónů v temperovaném ladění stačí použít následující vzorec:

$$n_{SEM} = 12 \cdot \log_2 \left(\frac{f}{f_0} \right) \quad (6.1)$$

kde n_{SEM} je počet půltónů, který odpovídá frekvenci f , a f_0 je frekvence referenční noty (např. pro *A4* zmíněných 440 Hz).

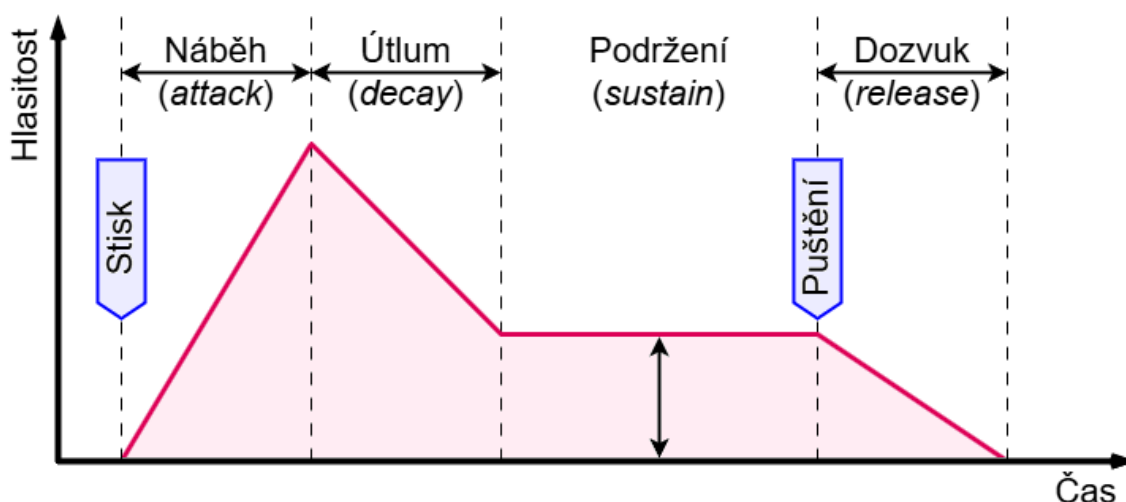
Obálka (angl. *envelope*)

Obálka zvuku popisuje časový průběh hlasitosti při jeho vzniku a zániku (např. stisk a puštění klávesy). Standardem je čtyřfázový model označovaný zkratkou *ADSR*, který zahrnuje následující fáze:

- Náběh (angl. *Attack*) – doba, za kterou zvuk dosáhne své maximální hlasitosti po vzniku.
- Útlum (angl. *Decay*) – doba, během které hlasitost klesne z maxima na úroveň podržení.
- Podržení (angl. *Sustain*) – úroveň hlasitosti, která se drží po dobu stisku klávesy.
- Dozvuk (angl. *Release*) – doba, za kterou hlasitost klesne zpět k nule po uvolnění klávesy.

Při nastavování parametrů je klíčové, aby náběh a dozvuk byly dlouhé alespoň přibližně *15 ms* – příliš krátký časový úsek způsobuje prudkou změnu amplitudy, s kterou se generují doprovodné spektrální složky, které lze vnímat jako nežádoucí slabé prasknutí.

Kromě klasické *ADSR* obálky existují i pokročilejší varianty, které mohou umožňovat i detailnější kontrolu nad dynamikou zvuku. Obálka přitom nemusí sloužit pouze pro řízení hlasitosti – v syntezátorech se její průběh často propojuje také pro modulaci dalších parametrů.



Obrázek 19 Schéma ADSR obálky s vyznačenými parametry
[zdroj: vlastní]

Témbr – barva zvuku (angl. timbre)

Témbr zvuku je jeho fundamentální vlastností, která umožňuje rozlišit zvuky pocházející z jiných zdrojů – například housle od flétny, i když hrají stejný tón se stejnou hlasitostí. Zatímco hlasitost vypovídá o celkové intenzitě zvuku, témbr určuje rozložení hlasitosti mezi jednotlivými harmonickými složkami. Welsh tvrdí, že „*užitečnost vlnového průběhu spočívá v harmonických složkách které ho tvoří, a není vlastní samotnému tvaru vlny*“ [14, přeloženo z angl., s. 7].

Frekvenční složky harmonického zvuku lze obecně rozdělit na tři základní složky:

- Fundamentální frekvence (H_1) – nejnižší přítomná (stabilní) frekvenční složka.
- Harmonické frekvence (H_k) – celočíselné násobky fundamentální frekvence.
- Inharmonické frekvence (I_k) – neceločíselné násobky fundamentální frekvence.

Vyšší harmonické složky přitom nemusí pouze kopírovat chování fundamentály, ale mohou se samovolně měnit v čase nebo během znění tónu vnikat či zanikat. Témbr je rovněž silně ovlivněn samotným způsobem vzniku zvuku – nejen použitým nástrojem, ale i průběhem jeho excitace (drnknutí, vdech, úder).

6.2 Metody zvukové syntézy

Metody zvukové syntézy slouží k elektronickému vytváření tónů s požadovanými vlastnostmi, především témbrem zvuku. Cílem je vytvořit spektrálně bohatší zvuk obsahující více frekvenčních složek (harmonických nebo inharmonických). Jednotlivé metody se liší způsobem vzniku těchto složek – například jejich skládáním nebo filtrováním.

Aditivní syntéza

Aditivní syntéza (angl. *Additive synthesis*) je založená na skládání jednoduchých sinusových vln s nastavitelnou amplitudou a fází, jejichž kombinováním vznikají složitější vlnové průběhy [15]. Principiálně tedy vychází z Fourierovy řady, přičemž v praxi se většinou pracuje pouze s průběhy sinusové funkce.

Pro její realizaci je teoreticky zapotřebí větší počet samostatných generátorů, z nichž každý tvoří jednu konkrétní harmonickou složku. Právě tato náročnost činí aditivní syntézu v prostředí analogové techniky velmi neatraktivní. Naopak moderní digitální syntežátory umožňují definovat výsledné spektrum přímo – uživatel pouze navolí intenzity požadovaných harmonických složek, ty syntežátor přepočítá do zcela nového vlnového průběhu, a ten potom generuje využitím jediného oscilátoru.

Velikou výhodou této metody je dokonalá kontrola nad spektrálním složením, což je zvláště výhodné pro syntézu reálných zvuků, které jsou většinou tvořeny pouze limitovaným počtem harmonických složek.

Subtraktivní syntéza

Subtraktivní syntéza (angl. *Subtractive synthesis*) je založená na principu odebrání (subtrakce) vybraných frekvenčních složek z výchozího signálu se spektrálně bohatým obsahem – například pilový, trojúhelníkový nebo čtvercový průběh. Tyto vlny jsou tvarovány pomocí frekvenčních filtrů, které umožňují selektivně potlačit nebo zcela odstranit nežádoucí frekvenční složky.

Tato metoda patří mezi nejrozšířenější a nejdéle používané techniky zvukové syntézy, a tvoří základ mnoha analogových i digitálních syntežátorů. Díky své jednoduchosti a efektivitě je vhodná pro tvorbu široké škály klasických elektronických zvuků – basové linky, leady, atmosférické pady a jiné uměle vytvořené zvukové textury.

Wavetable syntéza

Wavetable syntéza (angl. *Wavetable synthesis*), neboli syntéza s vlnovou tabulkou, využívá předdefinované tabulky vlnových průběhů (angl. *wavetables*), z nichž každá může obsahovat větší počet zcela nezávislých vlnových průběhů. Mezi průběhy pak lze plynule přecházet, čímž vzniká dynamická změna zvukového charakteru. Na rozdíl od subtraktivní syntézy, která filtruje průběhem neměnný signál, tato syntéza nabízí výrazně zajímavější a komplexnější výsledky.

6.3 Nástroje pro číslicovou syntézu

Tato podkapitola se věnuje nástrojům pro pokročilou digitální syntézu zvuku, konkrétně softwarovými syntezátory.

V oblasti digitální hudební produkce jsou dnes široce používané nástroje ve formátu *VST* pluginů (angl. *Virtual Studio Technology*). Ty jsou v této podobě snadno integrovatelné do více programů, primárně zaměřených na manipulaci a produkci hudby, které se obecně označují zkratkou *DAW* (angl. *Digital Audio Workstation*). Moderní *DAW*, jako jsou například populární *FL Studio 21* nebo *Ableton Live*, kombinují širokou škálu funkcí a předinstalovaných („nativních“) nástrojů, jako jsou editory zvukových a *MIDI* souborů, efektové procesory a několik syntezátorů.

Samotné syntezátory lze kategorizovat podle metody aplikované syntézy nebo cenové dostupnosti. Například *FL Studio* v edici „*Producer*“ obsahuje přes 20 různých syntezátorů, z nichž jsou ovšem některé pokročilejší uzamknuté pouze ve zkušební verzi, a v případě zájmu je možné je samostatně dokoupit v oficiálním obchodě (online).

Mezi klíčové nativní syntezátory *DAW FL Studio 21* patří například:

- **3x Osc:** jednoduchý generátor se třemi nezávislými oscilátory, vhodný pro rychlou tvorbu doprovodných hlasů. Umožňuje vytvářet pouze základní předdefinované vlnové tvary, avšak díky jeho nízké výkonové náročnosti a jednoduchosti zůstává oblíbený i přes velmi limitované nastavení parametrů.
- **Harmless:** Pokročilý syntezátor kombinující aditivní a subtraktivní syntézu s dalšími spektrálními manipulátory. Jeho intuitivní rozhraní usnadňuje úpravu harmonické struktury zvuku a tvorbu unikátních zvukových textur.
- **FLEX:** Flexibilní syntezátor založený na přehrávání přednastavených *presetů*, využívající kombinaci různých syntetických metod. Umožňuje rychlé vyhledávání hotových zvukových textur, jejichž nabídka se díky oficiálním i komunitním balíčkům neustále rozšiřuje.

Tyto nástroje jsou plně integrovány do *FL Studia* a představují ideální vstup do světa syntézy. Umožňují jak základní, tak i pokročilou tvorbu zvuků bez potřeby instalace externích pluginů.

Kromě nativních syntezátorů dostupných v rámci *FL Studio* však existuje i celá řada komerčních *VST* variant, které dále rozšiřují možnosti digitální syntézy. Mezi v současnosti nejvýznamnější komerční syntezátory patří například:

- **Phase Plant:** Pokročilý semi-modulární syntezátor kombinující subtraktivní, wavetable i granulární syntézu. Syntezátor dovoluje uživateli volně vybírat, přidávat a propojovat jeho jednotlivé části (moduly) bez omezení na jejich počet.
- **Vital:** Moderní wavetable syntezátor s vizuálně přívětivým rozhraním. Existuje ve více verzích, přičemž bezplatná poskytuje přístup ke všem klíčovým funkcím, což přispělo k jeho velké popularitě mezi nezávislými producenty i profesionály.
- **Serum:** Wavetable syntezátor, který se stal s trochou nadsázky neoficiálním průmyslovým standardem pro tvorbu elektronické hudby. Vyznačuje se čistým zvukem, intuitivním vizuálním rozhraním s integrovanými efekty.

Tyto syntezátory reprezentují špičku v oblasti současné digitální syntézy.

6.3.1 Prostředí syntezátoru Serum

Jako příklad moderního digitálního syntezátoru je v této podkapitole stručně představený výše zmíněný syntezátor *Serum*, vydaný v roce 2014 společností *Xfer Records*.

Okno pro oscilátory (OSC)

Oscilátory jsou základním zdrojem zvuku každého syntezátoru. Serum disponuje dvěma hlavními oscilátory – *OSC A* a *OSC B*, jejichž vlnový průběh je možné definovat prostřednictvím vlnové tabulky (představena níže). Jejich klíčové parametry zahrnuje:

- **Unison:** možnost nastavení vícehlasého režimu s možností jejich rozladění (*DETUNE*) a směšování (*BLEND*).
- **Fáze:** volba počáteční fáze (*PHASE*) generované vlny a nastavení rozsahu, ve kterém je fáze náhodně zvolena pro každou oscilaci (*RAND*).
- **Pozice vlnové tabulky:** volba generované vlny z vlnové tabulky (*WTPos*).
- **Warp:** možnost nastavení modulace, ve výchozím nastavení vypnuté (*OFF*).
- **Pan a Level:** Řízení stereopozice (*PAN*) a hlasitosti (*LEVEL*).

Kromě hlavních oscilátorů je Serum vybaven i podpůrnými oscilátory *SUB* a *NOISE*, které mohou doplňovat výsledný zvuk o basovou nebo šumovou složku, respektive.

Využitím **Obálky** (angl. *envelope*) se ovládá chování parametrů při stisku a uvolnění klávesy. Serum využívá rozšířený typ obálky *AHDSR*, který oproti klasickému typu *ADSR* obsahuje navíc i fázi držení (angl. *hold*), která definuje časovou délku podržení maximální úrovně po náběhu. K dispozici je více instancí obálek, přičemž první (*ENV1*) řídí hlasitost všech oscilátorů produkující zvuk.

LFO, neboli nízkofrekvenční oscilátor (angl. *Low Frequency Oscillator*), nevytváří žádný zvuk, ale slouží ke konzistentní modulaci parametrů s plně nastavitelným průběhem. Výchozí frekvence oscilací je synchronizovaná s tempem *DAW*, ovšem je možné ji definovat i manuálně, a to do hodnoty až 100 Hz. K dispozici je opět více instancí.

Filtr slouží k tvarování frekvenčního spektra výsledného zvuku. Serum nabízí široký výběr typu filtrů včetně základní dolní, horní a pásmové propusti. Jejich pojmenování ve většině případů vychází ze značek nebo typů analogových obvodů, které simulují (například *MG* se odkazuje na rodinu obvodů značky *Moog*).



Obrázek 20 Přehled hlavních nástrojů v okně OSC syntezátoru Serum

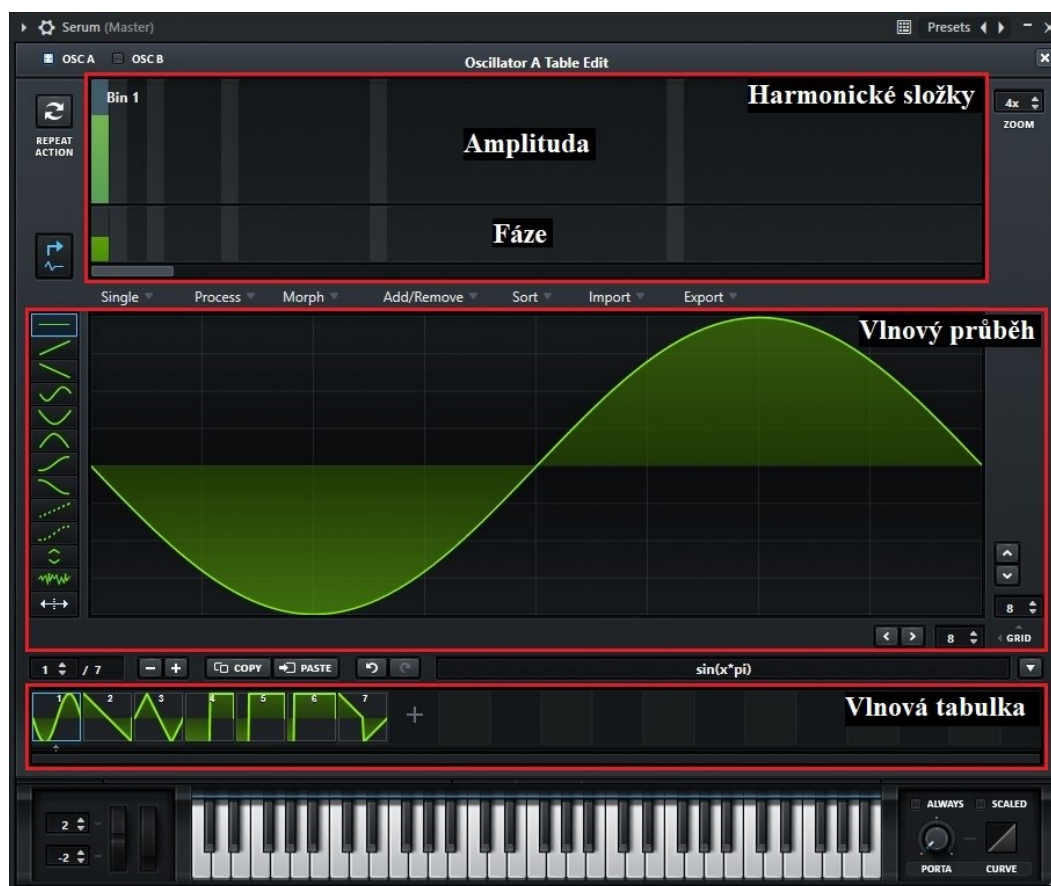
[zdroj: vlastní]

Okno editoru vlnové tabulky

Editor vlnové tabulky (angl. *Wavetable Editor*) umožňuje vytvářet nebo modifikovat vlnové průběhy pro hlavní oscilátory. V syntezátoru Serum je do jedné tabulky možné zařadit až 256 průběhů, s tím že v případě menšího počtu je také možné vyplnit mezery využitím „Morph“ funkcí, které vytváří plynulé přechody mezi jednotlivými průběhy [16]. Individuální průběhy pak lze definovat několika způsoby:

- Určením intenzity a fáze pro všechny požadované harmonické složky.
- Mapováním průběhu pomocí přednastavených křivek v mřížce vlnového průběhu.
- Popisem matematickou funkcí.

Na Obr. 21 je zobrazeno samostatně otevřené editační okno s tabulkou zahrnující základní průběhy zvanou „Basic Shapes“. Počátek vlny je vždy pozicovaný ve středu průběhu, tedy v okně je zobrazena sinusová funkce bez fázového posunu.



Obrázek 21 Editace vlnové tabulky syntezátoru Serum
[zdroj: vlastní]

Okno s efekty (FX)

Efekty se aplikují po vygenerování zvuku, přičemž účelem je zvuk dále obohatit a tvarovat. Serum má k dispozici deset základních efektů s plně modifikovatelnými parametry, které lze prakticky rozdělit do čtyř kategorií: *dynamické*, *prostorové*, *modulační* a *filtrační*.

Dynamické efekty upravují hlasitost a intenzitu zvuku:

- *Compression*: vyrovnává rozdíly mezi nehlasitějšími a nejtiššími částmi zvuku, čímž pomáhá udržet konzistentní hladinu hlasitosti.
- *Distortion*: zkresluje zvuk úpravou jeho vlnového průběhu, čímž ho obohacuje o vyšší harmonické složky, které zvuku dodávají agresivnější a surovější charakter.

Prostorové efekty simulují různé akustické prostředí a vytváří tak hloubku:

- *Reverb*: napodobuje dozvuk reálný místností a hal, čímž zvuku dodává prostorovou atmosféru a přirozenější charakter.
- *Delay*: vytváří zpožděné opakování signálu, čímž vznikají ozvěny.
- *Dimensions* (speciální efekt): přidává jemné zpoždění mezi levým a pravým kanálem, čímž rozšiřuje stereo rozložení bez výrazného vnímání ozvěny.

Modulační efekty ovlivňují časové a frekvenční vlastnosti zvuku, čímž mu dodávají pocit pohybu a variability:

- *Chorus*: vytváří více kopií originálního zvuku s mírným zpožděním a rozladěním, čímž vzniká dojem vícenásobného hlasu podobný smyčcovému orchestru.
- *Hyper*: (speciální efekt) funguje podobně jako chorus, avšak s méně výraznou modulací, širším stereo rozložením a možností reaktivace s každou notou [16].
- *Phaser*: posílá část signálu přes celopropustný filtr s nelineární fázovou odezvou, a ten pak kombinuje s nemodulovaným signálem. Výsledkem je vznik interferencí, jejichž výška v čase roste a klesá (pozice peaků je často modulována pomocí *LFO*).
- *Flanger*: je velmi podobný phaseru, ovšem místo fázového posunu využívá velmi krátké časové zpoždění (<20 ms). Výsledkem je opět vznik interference, avšak s hustší prezencí a peaky rozmístěnými ve frekvencích harmonické řady.

Filtrační efekty pomáhají tvarovat výsledný zvuk, který je použitím ostatních efektů často více rozložen po spektru:

- *Filtr*: je zcela totožný variantě z *OSC* sekce.
- *EQ* (ekvalizér): slouží k úpravě mezních frekvencí zvuku s menší flexibilitou.

Většina nefiltračních efektů navíc obsahuje alespoň jedno-parametrový filtr nebo i EQ pro větší kontrolu.

Na Obr. 22 je zobrazeno *FX* okno s přehledem všech dostupných efektů na levé straně. Efekty jsou aplikovány jak jsou seřazeny, přičemž jejich pořadí je libovolně měnitelné. Všechny parametry efektů jsou stále plně modulovatelné jako parametry sekce *OSC*.



Obrázek 22 Přehled efektů v okně FX syntezátoru Serum
[zdroj: vlastní]

Okno s modulační maticí (MATRIX)

Modulační matice slouží jako přehledná tabulka obsahující všechny aktivní modulace, doplněné i o vizuální reprezentaci velikosti aktuální modulace (modrá křivka). Umožňuje nejen správu existujících modulací, ale i vytváření pokročilejších vztahů, které jsou nastavitelné pouze zde – například modulace parametrů mezi dvěma *LFO* (ovlivnění frekvence) nebo využití generátoru náhodných hodnot zvaného jako „Chaos“.

V matici lze také pro jednotlivé modulace nastavit její parametry. Například typ modulace (unipolární nebo bipolární), tvar jejího průběhu (výchozí lineární, ale ostrost lze měnit až k téměř skokové změně) a *AUX* zdroj (řídí intenzitu nastavené modulace využitím dalšího parametru).

Na Obr. 23 je zobrazeno okno modulační matice během stisknuté klávesy C5.



Obrázek 23 Modulační matice v okně Matrix syntezátoru Serum
[zdroj: vlastní]

7 FREKVENČNÍ ANALÝZA REÁLNÝCH AKUSTICKÝCH SIGNÁLŮ

Pro analýzu frekvenčního spektra zvukových signálů byl využit open-source software *Sonic Visualizer* (dále *Sonic*), vyvíjený výzkumným ústavem „*Centre for Digital Music*“ na Univerzitě královny Marie v Londýně. Tento program je specializovaný pro detailní frekvenční analýzu zvukových nahrávek s širokou škálou nastavitelných parametrů [17].

V této kapitole jsou analyzovány nahrávky živočichů i hudebních prostřednictvím spektrogramů a spektrálních grafů, respektive. Při výběru konkrétních akustických nahrávek hrál hlavní roli jejich zajímavý akustický charakter nebo výstřední průběh. Dalším praktickým kritériem byla také dostupnost nahrávek na internetu, zejména prostřednictvím platformy *YouTube*, ve které lze mnohdy získat profesionální záznamy s limitovaným šumem.

Analýza vždy vychází z relativního vztahu spektrálních složek k fundamentální frekvenci H_1 . U inharmonických složek je proto uveden také *násobitel*, který vyjadřuje, o kolik je daná složka vyšší oproti fundamentále.

Každý graf obsahuje kromě popisu obsahu i specifikaci použitých parametrů při generování. Pro okno je uvedena jeho *velikost*, míra *překryvu* (v procentech) a stupeň *převzorkování* (v násobcích). Velikost okna je volena na základě přehlednosti po srovnání více variant, zatímco překryv a převzorkování jsou vždy nastaveny na maximum. Nastavení *intenzity* a (frekvenčních) *binů* se vztahuje ke zvolené škále zobrazení, která ovlivňuje čitelnost a interpretaci výsledků. V rámci analýzy byly využity tři různé typy škál:

- Standardní logaritmická stupnice *dB* (*Sonic* používá škálu *dBV*).
- Kvadratická logaritmická stupnice dB^2 , která oproti *dB* ještě lépe rozděluje relevantní frekvenční složky od šumu.
- Melodická stupnice *Mel*, jejíž rozlišení odpovídá psychoakustickému vnímání výšky tónu lidským sluchem (využita pro rozložení frekvenční osy).

Všechny grafy jsou zpracovány využitím okenní funkce *Hannova* okna, která zajišťuje optimální rovnováhu mezi rozlišením frekvencí a potlačením protékání.

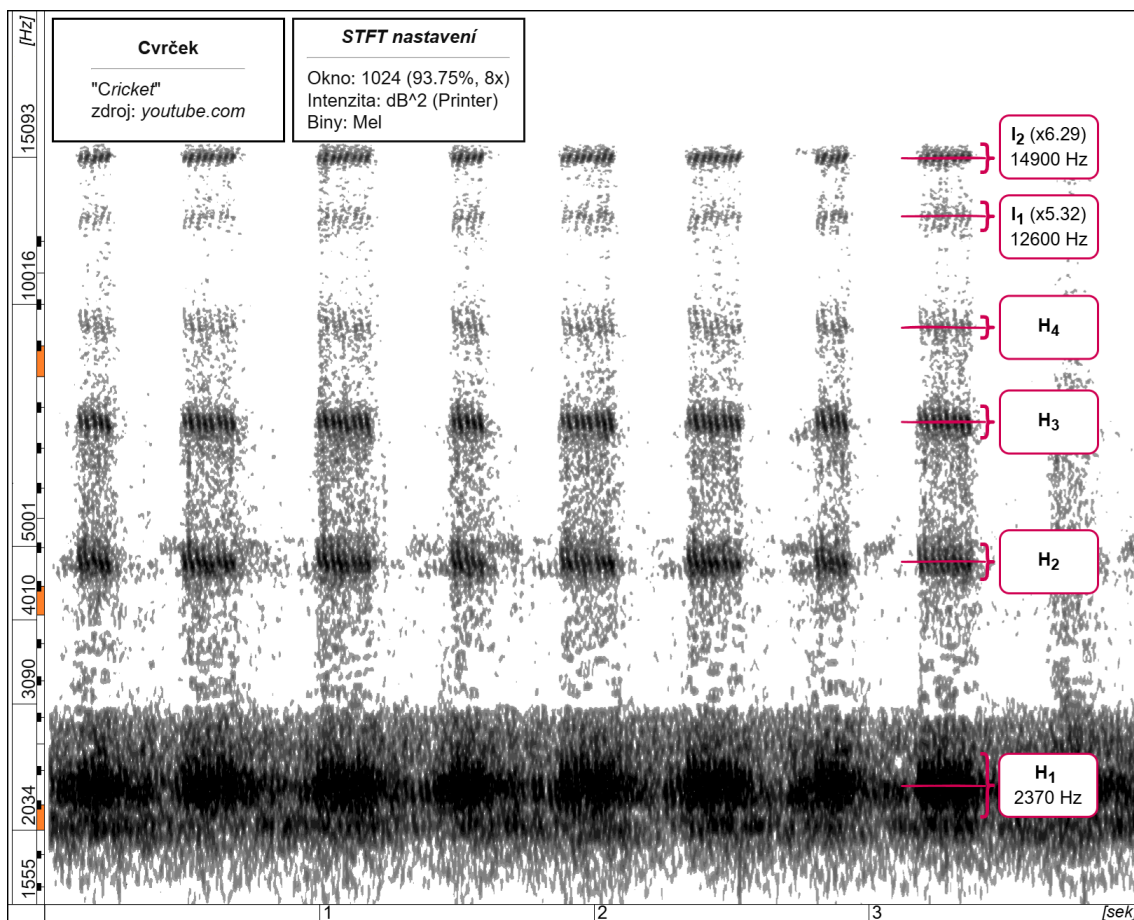
7.1 Zvířecí vokalizace

Neboli zvuky živočichů jsou vizualizovány formou spektrogramů využitím více motivů. V grafech jsou vizuálně naznačeny přítomné spektrální složky.

Cvrček

Cvrček ke komunikaci se svými vrstevníky využívá charakteristický repetitivní zvuk, známý jako cvrkání. Ten vzniká procesem stridulace – třením jeho křídel.

Na Obr. 24 je zobrazen spektrogram cvrkání cvrčka, ze kterého lze vyčíst, že cvrkot je složen alespoň ze šesti spektrálních složek, z nichž poslední dvě jsou inharmonické. Vzhledem k jejich proměnlivosti v čase jsou frekvence jednotlivých složek určeny jako průměrné hodnoty. Z analýzy dále vyplývá, že jedno cvrkání je složené vždy z buď pěti, nebo osmi jednotlivých pulzů (cvrků), přičemž harmonické složky během cvrků ve výšce klesají, zatímco inharmonické složky stoupají, což dále tvoří charakter zvuku.

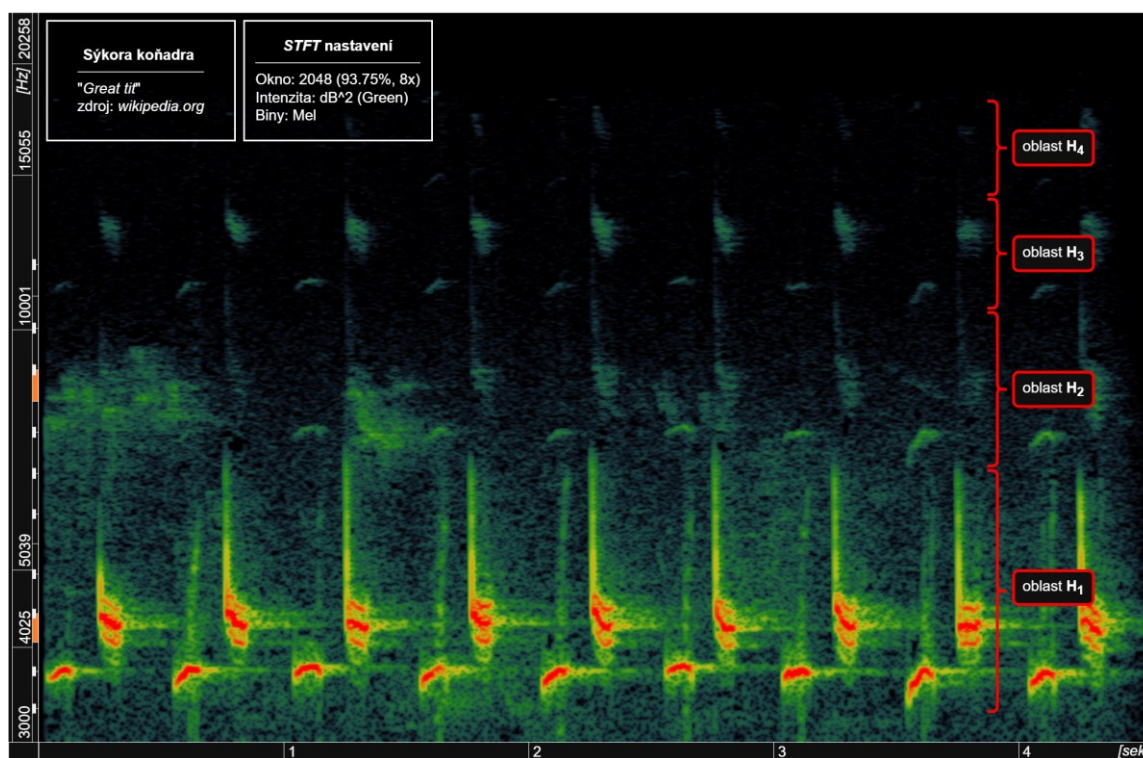


Obrázek 24 Spektrogram cvrkání cvrčka
[zdroj: 11]

Sýkora koňadra

Zvuky sýkory koňadry jsou značně rozmanité. Lze je charakterizovat jako krátké, avšak výrazně artikulované vokalizace, často založené na „dvouslabičném“ motivu. Na rozdíl od lidských hlasivek produkují ptáci zvuk pomocí hlasového orgánu zvaného jako *syrinx*, který jim umožňuje generovat současně dva zcela nezávislé hlasy. Ty mohou tvořit samostatné melodické linky, nebo můžou být jeden hlas modulován druhým.

Spektrogram na Obr. 25 zachycuje jeden z typických zpěvů sýkory koňadry, složený ze dvou slabik. Druhá slabika vykazuje efekt připomínající frekvenční modulaci, kdy dvě nezávislé výšky vzájemně interferují, což na spektrogramu vytváří dojem více hlasů. Kromě základní frekvence jsou patrné i vyšší harmonické složky, které dosahují až čtvrté harmonické.



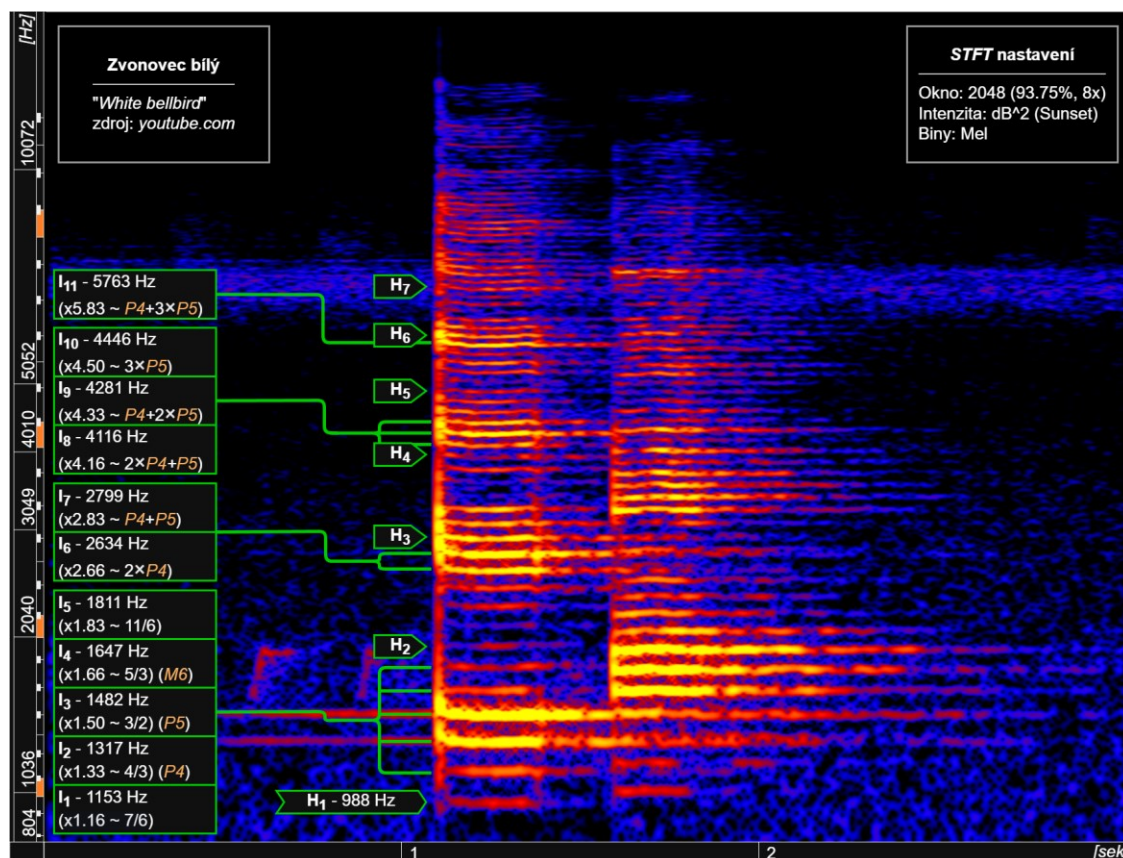
Obrázek 25 Spektrogram zpěvu sýkory koňadry
[zdroj: 18]

Zvonovec bílý

Zvonovec bílý, pocházející z deštných pralesů Jižní Ameriky, je celosvětově nejhlasitějším ptákem vůbec. Jeho zpěv dosahuje hlasitosti až 125 dB SPL , což odpovídá více než milionkrát větší intenzitě než je práh lidského sluchu – hlasitost je srovnatelná například se startem tryskového letadla ze vzdálenosti jen několika metrů.

Na Obr. 26 je zobrazen spektrogram jeho zpěvu, který odhaluje velmi bohatý frekvenční obsah s velkým množstvím inharmonických složek. Výška a intervaly těchto nejvýraznějších složek jsou uvedeny v tabulce nalevo. Analýza ukazuje, že vysoká intenzita zpěvu není tvořena malým množstvím silných harmonických složek, ale je rozprostřena mezi přes padesát viditelných složek rozložených napříč širokým frekvenčním rozsahem.

Nejvýraznější složky spektra odpovídají tzv. čistým (perfektním) intervalům, zejména kvartě ($P4$) a kvintě ($P5$) společně s jejich kombinacemi. Tyto kombinace vznikají v důsledku akustických jevů vzniklých v syrinxu.

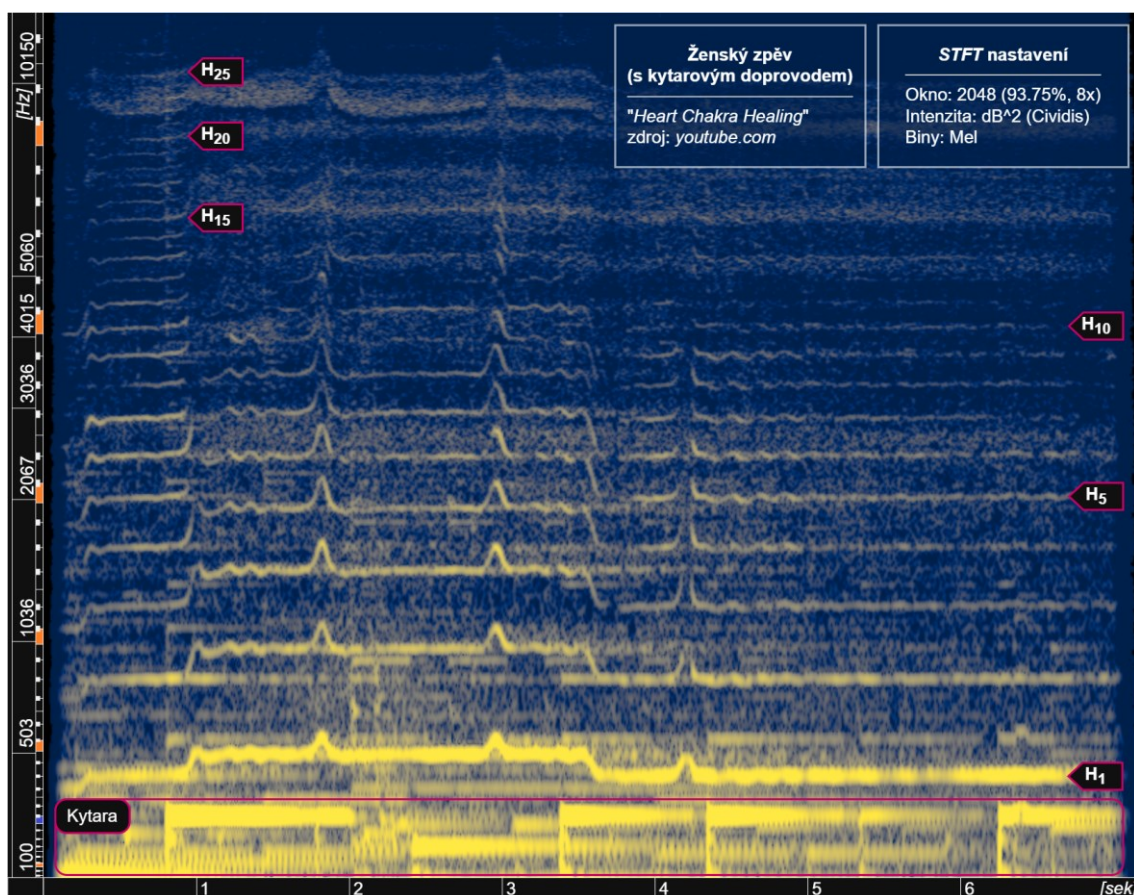


Obrázek 26 Spektrogram zpěvu zvonovce bílého
[zdroj: 19]

Člověk (ženský zpěv s kytarovým doprovodem)

Lidský zpěv je, na rozdíl od řeči, charakterizován větší kontrolou nad výškou tónu (intonací), rozsahem i strukturou. Z akustického hlediska se jedná o signál s výraznými vyššími harmonickými složkami a výškou s výstředně proměnlivým průběhem, což ho dělá oproti hudebním nástrojům dobře rozeznatelným ve spektrogramu. Mužský zpěv se obvykle vyznačuje nižší základní frekvencí, zatímco ženský zpěv dosahuje alespoň znatelně výše.

Na Obr. 27 je zachycen spektrogram ženského zpěvu s doprovodem akustické kytary, nahraného v rámci uklidňující meditační hudby. Největší počet zřetelných harmonických složek lze pozorovat na začátku zpěvu. Základní frekvence zpěvu po celou nahrávku neklesne pod 300 Hz, čímž pro ucho vzniká znatelně chudší prostor, který je vnímán jako prázdný – tato mezera je proto často kompenzována doprovodnými nástroji, jako je právě kytara, díky které výsledek působí výrazně více kompletní.



Obrázek 27 Spektrogram zpěvu ženy (s kytarovým doprovodem)
[zdroj: 20]

7.2 Hudební nástroje

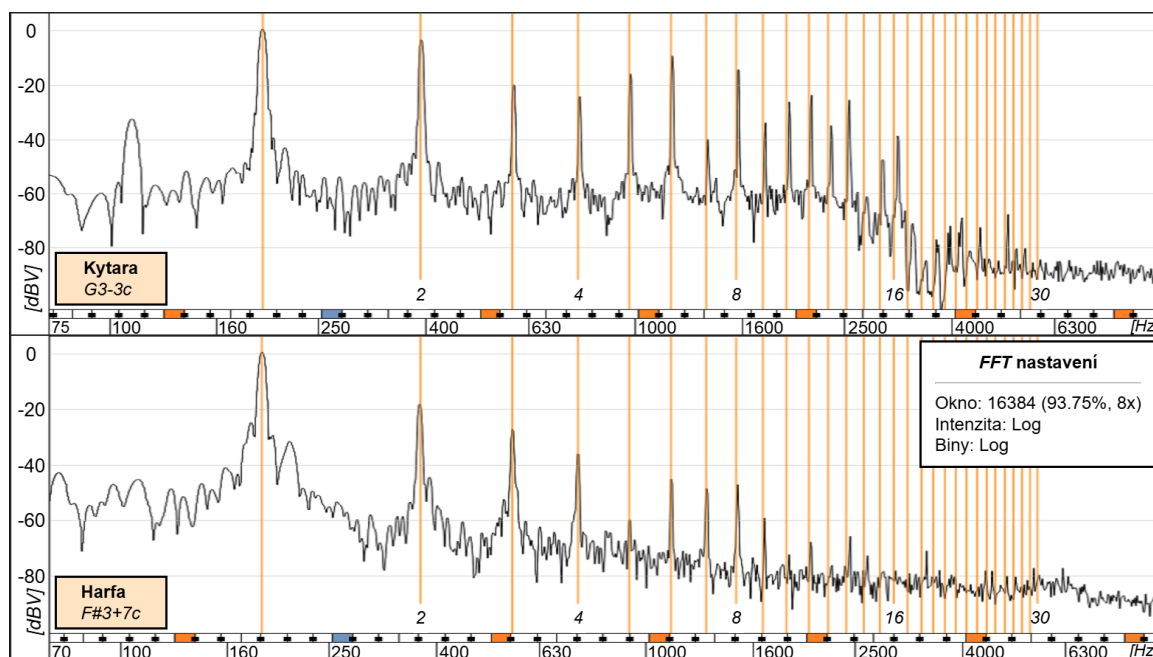
Tato podkapitola se věnuje analýze tónu vybraných hudebních nástrojů prostřednictvím spektrálních grafů, ve kterých jsou oranžovými čarami vyznačeny pozice čistě harmonických frekvencí. Zobrazená spektra zachycují znění jediného tónu, který je dobře reprezentovaný díky velké velikosti *FFT* okna (nastavení vždy platí pro celý obrázek).

Nástroje jsou rozděleny do čtyř skupin podle způsobu vzniku tónu, přičemž každou skupinu reprezentují její dva až tři nejznámější instrumenty. Teoreticky by vyšší harmonické dechových nástrojů měli odpovídat harmonické řadě, zatímco u strunných nástrojů by se měla projevit *inharmonicita* – vlivem tuhosti strun dochází k mírnému zrychlení frekvencí vyšších harmonických složek oproti idealizované harmonické řadě.

Strunné nástroje drnkací – kytara a harfa

Drnkací nástroje, jako je kytara a harfa, vytvářejí zvuk rozechvěním strun prsty nebo trsátkem. Tón je charakteristický rychlým náběhem, přičemž intenzita spektrálních složek tónu závisí na místě rozechvění struny.

Na Obr. 28 je zobrazeno spektrum tónů klasické kytary a koncertní harfy. Zatímco spektrum harfy pozvolna klesá s rostoucí frekvencí, spektrum kytary díky rezonančnímu tělu obsahuje plnější zastoupení i vyšších harmonických složek. Jev *inharmonicita* je patrný u obou nástrojů.



Obrázek 28 Spektrum strunných nástrojů drnkacích (kytara a harfa)

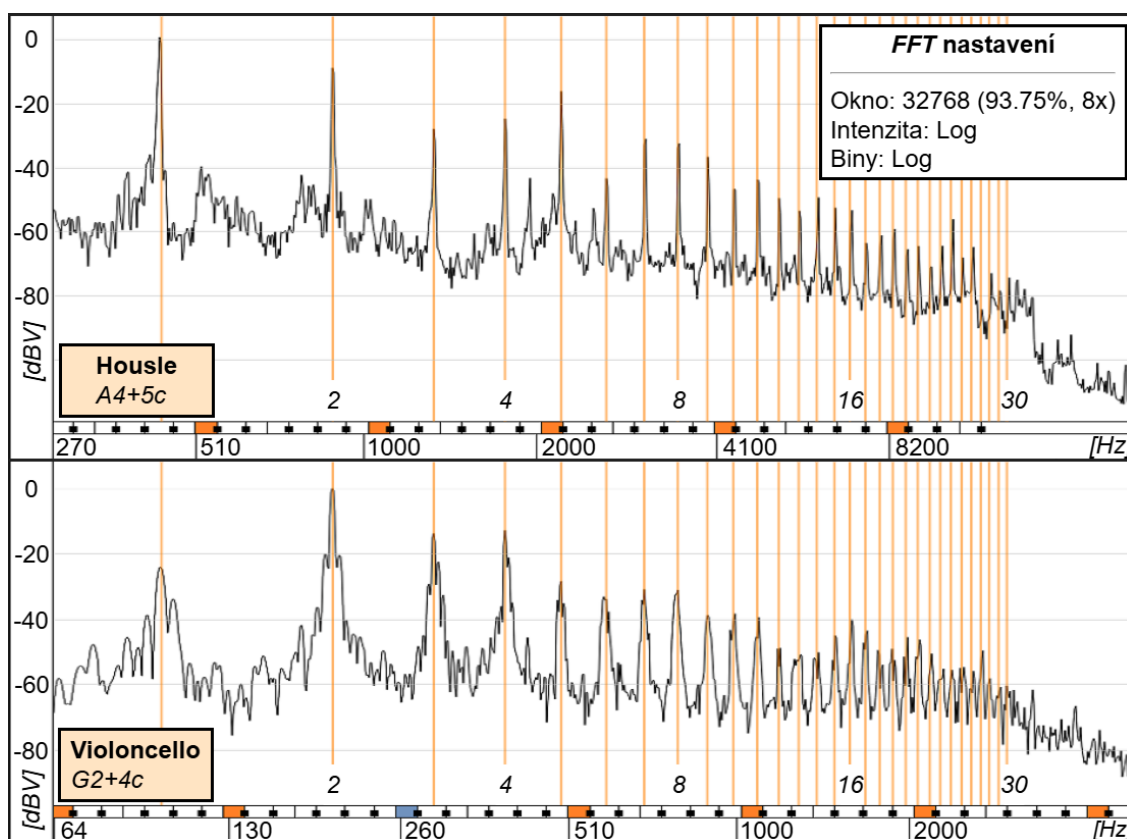
[zdroj: 21; 22]

Strunné nástroje smyčcové – housle, violoncello

Smyčcové nástroje, jako housle a violoncello, produkují zvuk rozechvíváním strun pomocí smyčce. Vibrace strun se přenášejí na rezonanční desku nástroje, která zvuk nejen zesiluje, ale i ovlivňuje jeho barvu [13].

Na Obr. 29 je zachyceno spektrum tónů houslí a violoncella. Housle patří mezi nástroje vyššího rejstříku, zatímco violoncello plní roli hlubšího (basového) nástroje. Přestože se výšky tónů obou nástrojů liší o dvě oktávy, počet harmonických složek je u obou podobný.

Stejně jako u jiných strunných nástrojů, i zde se projevuje inharmonicita, která je však u smyčcových nástrojů méně výrazná díky nižší tuhosti strun a téměř konstantnímu buzení smyčcem. Porovnáním grafů si lze všimnout také méně ostrých frekvenčních složek violoncella, což je nejspíše způsobeno silnějšími (tlustšími) strunami, což způsobuje větší nepravidelnost ve spojení s buzením smyčcem (*stick-slip* efekt).



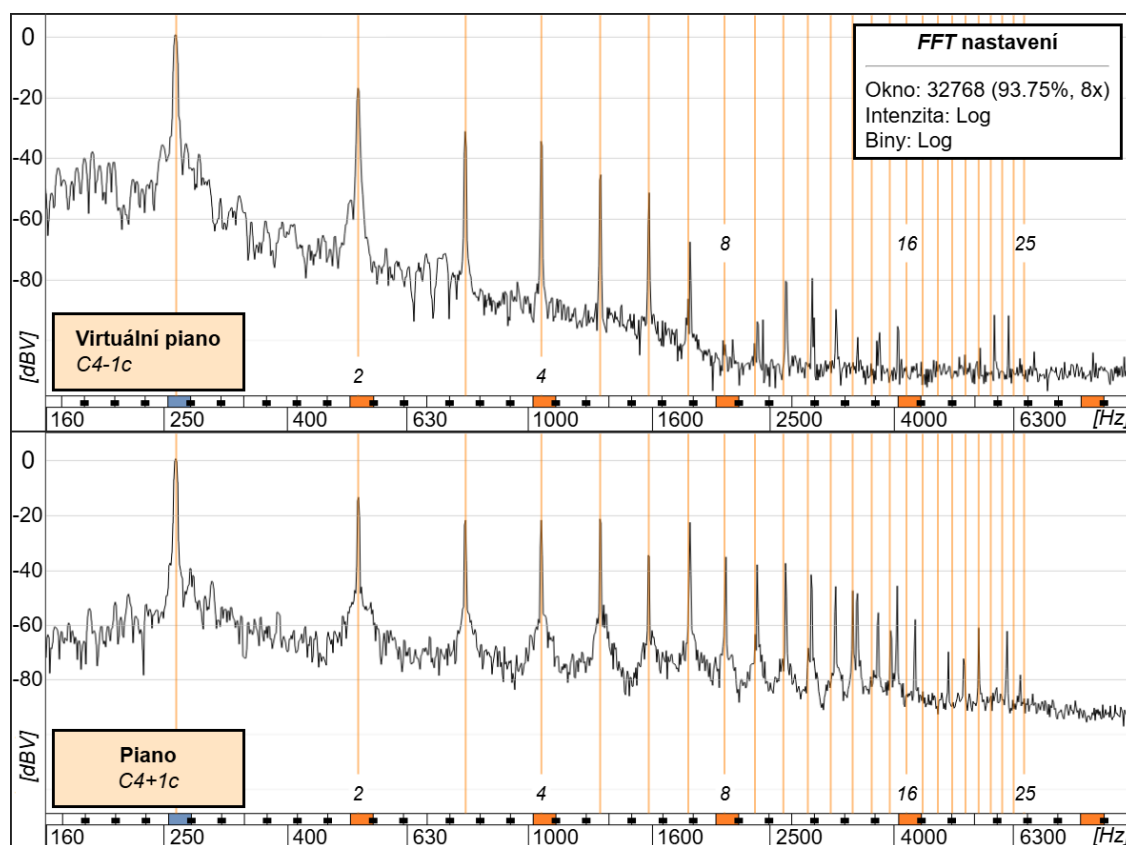
Obrázek 29 Spektrum strunných nástrojů smyčcových (housle a violoncello)
[zdroj: 23; 24]

Strunné nástroje klávesové – virtuální piano a piano

Klávesové nástroje, jako klavír, generují zvuk úderem kladívka na struny, které rozechvívají rezonanční desku nástroje. V případě virtuálního piano jde o digitální emulaci akustického nástroje, v tomto případě založenou na matematickém modelování.

Na Obr. 30 je porovnáno spektrum tónu virtuálního a akustického piano. U obou nástrojů je patrná bohatá harmonická struktura, avšak zatímco virtuální nástroj vykazuje kontrolovaný útlum vyšších harmonických složek, vyšší harmonické akustického klavíru mají přirozenější a komplexnější rozložení amplitud.

Jev inharmonicity strun se u klavíru projevuje výrazně díky jeho silným a tuhým strunám, což přispívá k jeho charakteristicky „živému“ tónu.

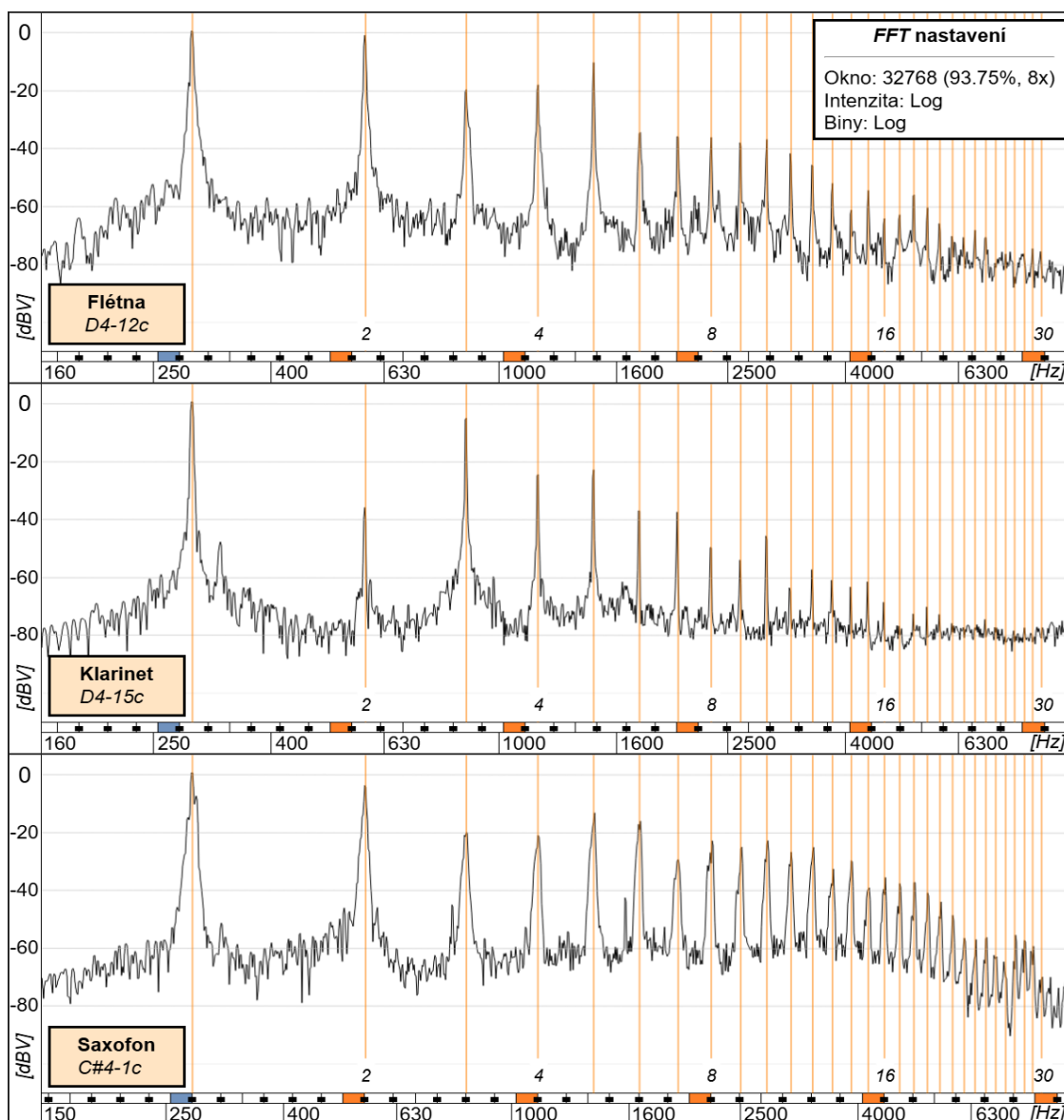


Obrázek 30 Spektrum strunných nástrojů klávesových (virtuální piano a piano)
[zdroj: 25; 26]

Dechové nástroje – flétna, klarinet a saxofon

Dechové nástroje vytváří zvuk rozechvíváním vzduchového sloupce, přičemž flétna využívá pouze úzký otvor, zatímco klarinet a saxofon pracují s jazýčkem, který nástroji umožňuje mimo jiné pracovat s větším dynamickým rozsahem.

Na Obr. 31 jsou porovnány spektra těchto tří nástrojů. Zatímco flétna a saxofon vykazují bohaté spektrum s výraznými sudými i lichými harmonickými složkami, ve spektru klarinetu jsou zřejmé výraznější liché harmonické složky. Tento efekt je způsoben umístěním jazýčku, který u klarinetu leží přímo nad hlavním vzduchovým sloupcem, čímž vzniká efekt polouzavřené trubice, ve které obecně dominují liché harmonické [27]. Na rozdíl od strunných nástrojů pozice harmonických přesně kopírují harmonickou řadu.



Obrázek 31 Spektrum dechových hudebních nástrojů (flétna, klarinet a saxofon)

[zdroj: 28; 29; 30]

8 DIGITÁLNÍ SYNTÉZA ZVUKU

Digitální syntéza zvuku představuje proces jeho generování prostřednictvím digitální techniky, nejčastěji počítače, v němž je zvuk reprezentován jako signál existující pouze v diskrétních časových okamžicích.

Kapitola prezentuje dva příklady syntézy založené na aditivní metodě, realizované na základě spektrogramové analýzy reálných akustických vzorů, které byly představeny v předchozí kapitole – konkrétně se jedná o cvrkání cvrčka a zpěv sýkory koňadry. Tyto zvuky byly vybrány pro jejich harmonicky méně komplexní strukturu a přehlednou možnost syntézy bez nutnosti komplikovaných modulací.

Syntéza byla provedena v prostředí populárního *DAW* programu *FL Studio 21* s využitím softwarového syntezátoru *Serum*. Oba příklady jsou zpracovány formou digitálního nástroje vytvořeného pomocí pluginu *Patcher* (součást *FL Studio*), který umožňuje vizualizovat tok signálů mezi generátory a efekty v jednom schématu.

Výsledkem každé syntézy je zvuková stopa obsahující originální i syntetizovanou podobu zvuku, doplněnou o jejich grafickou reprezentaci ve formě spektrogramu. Obsahem kapitoly je shrnutí nejpodstatnějších nastavení v projektech a porovnání syntetizovaných zvuků s originálními nahrávkami pomocí spektrogramu.

8.1 Digitální syntéza

Cvrkání cvrčka

Cvrkání cvrčka je charakteristické rytmickým zvukem s pravidelně proměnlivou strukturou. Z analýzy spektrogramu cvrkání (Obr. 24) vyplývá:

- Cvrkání se skládá ze skupin impulzů, počtem uspořádaných po pěti nebo osmi.
- Každý impulz tvoří šest frekvenčních složek – čtyři harmonické a dvě inharmonické.
- Výška harmonických složek v každém impulzu klesá, zatímco u inharmonických složek výška stoupá.
- Fundamentální frekvence je v nějaké podobě přítomna po celou dobu cvrkání, zatímco vyšší harmonické doprovází pouze skutečný impulz (cvrknutí).

Vzhledem k tomu, že u hlavních oscilátorů syntezátoru *Serum* je možné harmonické složky definovat přímo, byly dvakrát dvě podobné frekvenční složky sloučeny do stejné instance syntezátoru. Výsledný nástroj Cvrček tedy obsahuje celkem čtyři instance syntezátoru *Serum* (praktickým přínosem sloučení je pouze úspora výpočetního výkonu).

Kromě samotných impulsů je součástí zvuku také doprovodný šum, který je nejvýraznější především v oblasti základní frekvence. Tato složka zvuku je vytvořena kombinací modulačního efektu chorus a samostatně přidaného generátoru šumu, který výrazně podporuje realistický charakter výsledku syntézy.

Tabulka 4 Přehled použitých instancí syntezátoru *Serum* v projektu Cvrček

	Označení syntezátorů	Generované složky
Nástroj Cvrček	SYNTH 1	H_1 (2370 Hz)
	SYNTH 2	H_2, H_3
	SYNTH 3	H_4
	SYNTH 4	I_1 (12 600 Hz), I_2 (14 900 Hz)
Šum	SYNTH 5	šum

[zdroj: vlastní]

Protože syntezátor *Serum* pracuje s relativní výškou vůči vstupní notě, generovaná frekvence musí být určena relativně vůči tomuto tónu. V projektu byla za výchozí notu zvolena klávesa *C4* (261,63 Hz), a tedy všechny spektrální složky jsou určeny relativně vůči této referenci formou temperovaného ladění.

Výška harmonických složek (H_{1-4}) je vždy vztažena k fundamentální frekvenci H_1 , a pro jejich definování tedy stačí pouze jediný výpočet podle Rov. (6.1):

$$H_1 = 12 \cdot \log_2 \left(\frac{2370}{261,63} \right) = 38,15 \text{ sem} = 3 \text{ oct} + 2 \text{ sem} + 15 \text{ cent} \quad (8.1)$$

Výška inharmonických složek (I_{1-2}) se nachází ve vysokých frekvenčních pásmech, kde rozdíly až desítek hertz mají jen minimální vliv na vnímanou výšku tónu. Proto byly hodnoty zaokrouhleny, díky čemuž pro jejich realizaci stačí opět pouze jedna instance syntezátoru s fundamentálou 100 Hz a aktivovanými příslušnými harmonickými.

Výpočet výšky základní frekvence pro *SYNTH 4*:

$$n_{100Hz} = 12 \cdot \log_2 \left(\frac{100}{261,63} \right) = -16,65 \text{ sem} = -1 \text{ okt} - 4 \text{ sem} - 65 \text{ cent} \quad (8.2)$$

Na Obr. 32 je zobrazeno blokové schéma nástroje *Cvrček* zpracováno v pluginu *Patcher*. Vstupem do nástroje jsou *MIDI* data, která jsou definována notou *C4* o specifické délce. Zvuk generovaný syntezátory je dále upravován pomocí připojených efektů:

- FX EQ (ekvalizér) – zesiluje frekvenční pásma odpovídající generovaným složkám a zeslabuje ostatní. Frekvenční odezvy obou instancí jsou zobrazeny na Obr. 34.
- FX Chorus – vytváří jemný vícehlasý charakter kolem hlavních spektrálních složek.

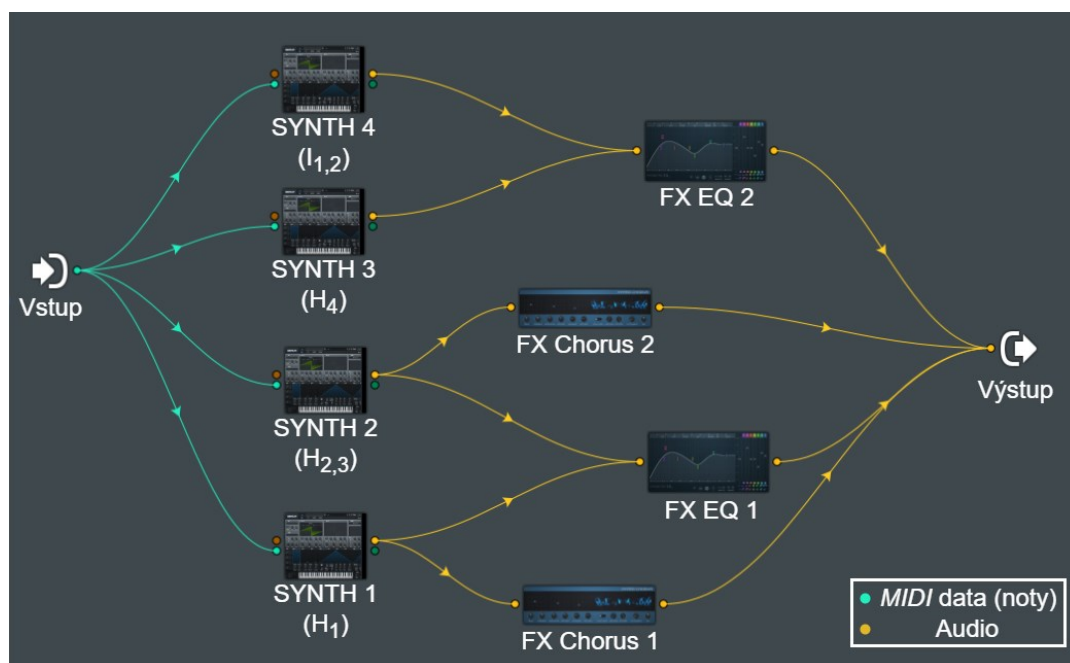
Na Obr. 33 jsou zobrazeny průběhy *LFO* oscilátorů, které modulují hlasitost a výšku fundamentální frekvence (*SYNTH 1*) a vyšších harmonických (*SYNTH 4*) s frekvencí 5 Hz. Zatímco modulace fundamentály má více chaotický a výstřední průběh, modulaci vyšších harmonických tvoří téměř pravidelné impulzy.

Protože se všechny složky objevují a mizí bez jakéhokoli průtahu, obálka všech syntezátorů má aktivovaný pouze náběh a dozvuk dlouhý nepostřehnutelný okamžik 22 ms – doba postačující pro minimalizaci skokové změny.

Výstupem nástroje je stabilní cvrkání, jehož intenzita se v čase ovšem dále nijak nemění. Aby bylo možné vytvořit charakteristické skupiny impulzů společně s jejich přirozenou obálkou, je hlasitost výstupu nástroje v *DAW* dále upravována.

Protože se fundamentála a vyšší harmonické objevují nezávisle, je nutné řídit jejich hlasitost zvlášť – v projektu je proto využitím filtračního efektu *Frequency Splitter* rozdělen výstup nástroje na dvě spektrální pásma, jejichž hlasitost je samostatně řízena pomocí tzv. automatizačních klipů (angl. *automation clip*). Jedná se o plně modifikovatelné křivky, pomocí kterých lze řídit jakékoli parametry v čase. Jejich průběh se nastavuje v hlavním pracovní okně projektu nazývaném *Playlist*, kde je kromě řízení hlasitosti cvrkání v projektu řízena i hlasitost přidaného šumu, který zvuk dále doplňuje.

Podoba *Playlistu* se třemi automatizačními klipy je zobrazena na Obr. 35.



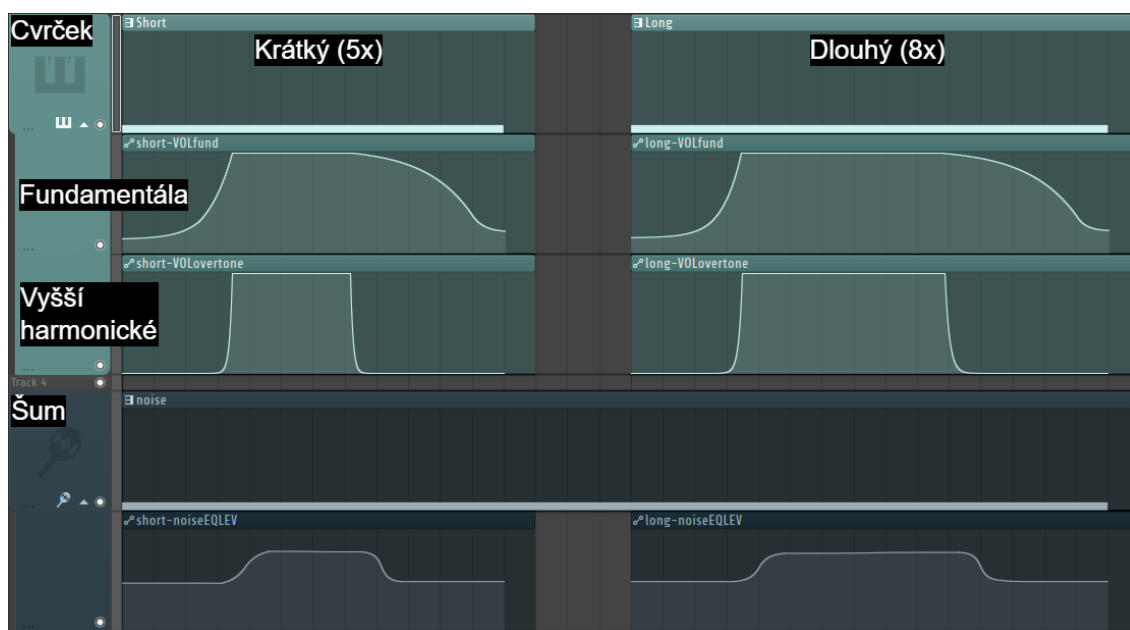
Obrázek 32 Schéma nástroje Cvrček zpracovaném v pluginu Patcher
[zdroj: vlastní]



Obrázek 33 Průběhy LFO pro modulaci hlasitosti a výšky v nástroji Cvrček
[zdroj: vlastní]



Obrázek 34 Frekvenční odezva filtračních efektů EQ použitých v nástroji Cvrček
[zdroj: vlastní]



Obrázek 35 Okno Playlistu v projektu Cvrček
[zdroj: vlastní]

Výsledkem jsou tedy dle originální nahrávky dva různé typy cvrkání – krátké (5 impulzů) a dlouhé (8 impulzů), které lze v projektu pro replikování jednoduše překopírovat společně s automatizačními stopami dle potřeby.

Zpěv sýkory koňadry

Analyzovaný zpěv sýkory koňadry (viz. Obr. 25) se skládá ze dvou výrazných „slabik“, přičemž druhá z nich je tvořena vícehlasem (3 hlasy). Tato vlastnost je snadno napodobitelná syntezátorem *Serum* díky jeho funkci *UNISON*, která umožňuje generovat více hlasů současně s nastavitelným rozdílem ve výškové vzdálenosti (rozladění) a síle.

Na spektrogramu je dále vidět slabá přítomnost vyšších harmonických složek, ty však pouze kopírují průběh základní frekvence a akusticky tedy nejsou nijak zásadní pro rozpoznání zvuku. Na základě těchto poznatků bylo možné nástroj *Sýkora* realizovat s jedinou instancí syntezátoru *Serum*, doplněnou jednou další pro šumový podklad.

Tabulka 5 Přehled použitých instancí syntezátoru Serum v projektu Sýkora

	Označení syntezátoru	Generované složky
Nástroj <i>Sýkora</i>	SYNTH 1	H_1 (3660 Hz), H_2 , H_3 , H_4
Šum	SYNTH 2	<i>šum</i>

[zdroj: vlastní]

Protože se výška fundamentální frekvence během zpěvu mění, jako referenční výška byla zvolena nejnižší přítomná frekvence, která zároveň odpovídá i začátku první slabiky.

V rámci projektu byla za výchozí notu opět zvolena klávesa *C4* (261,63 Hz), ke které jsou všechny harmonické složky vztaženy. Aplikováním Rov. (6.1) je výška první harmonické dána jako:

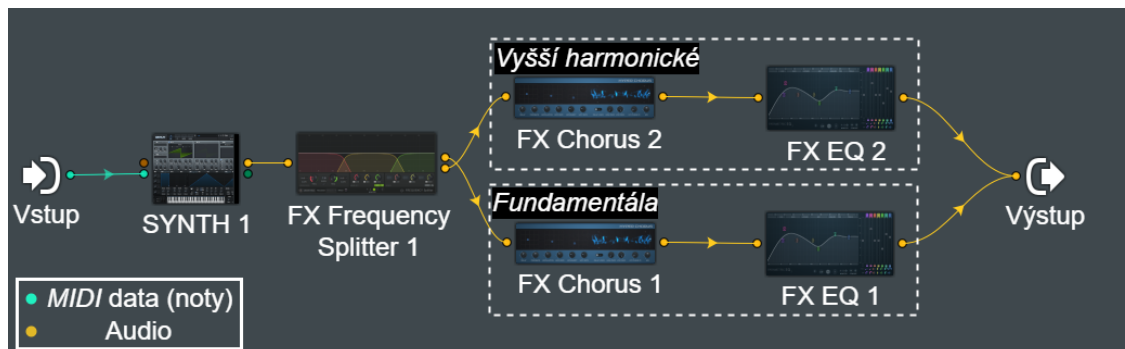
$$H_1 = 12 \cdot \log_2 \left(\frac{3660}{261,63} \right) = 45,62 \text{ sem} = 3 \text{ oct} + 9 \text{ sem} + 62 \text{ cent} \quad (8.3)$$

Na Obr. 36 je zobrazené blokové schéma nástroje *Sýkora*, zpracovaném opět v pluginu *Patcher*. Zvuk je generován jedinou instancí syntezátoru Serum a dále tvarován pomocí efektů chorus a EQ. Zvuk generovaný syntezátorem je však první rozdělen na dvě oddělená frekvenční pásma – fundamentální složku a vyšší harmonické.

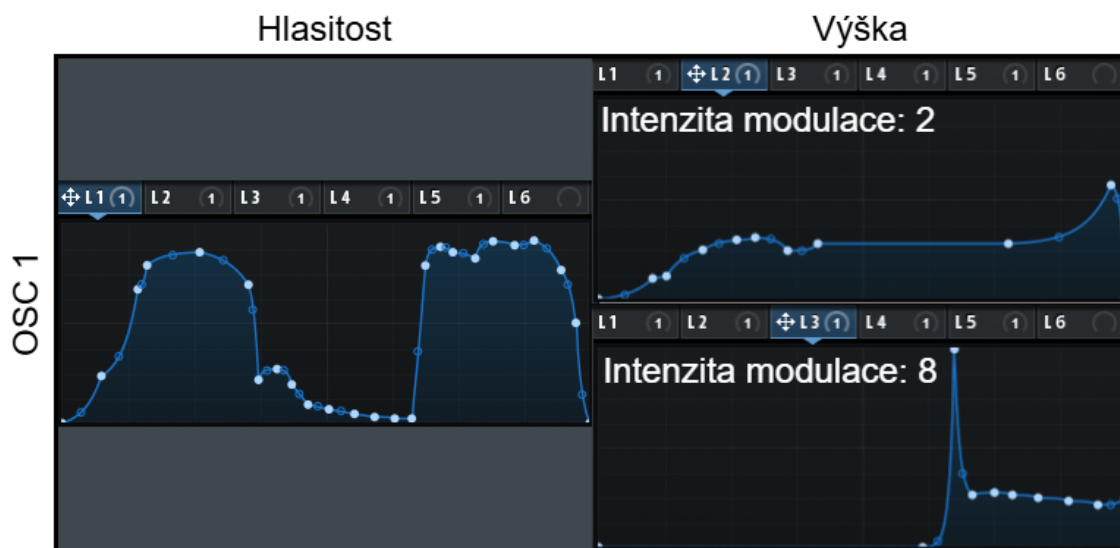
Toto rozdělení je v tomto případě též nezbytné kvůli odlišnému požadavku na intenzitu efektu chorus – zatímco u fundamentální složky má chorus je mírný vliv se zachovalou čitelností tónu, u vyšších harmonických způsobuje efekt větší rozprostření spektrálních složek i do okolních frekvencí. Závěrečný efekt EQ slouží k vymezení frekvenční oblasti, ve které chorus působí.

Na Obr. 37 je ukázán průběh *LFO* modulací nastavených s frekvencí 3,1 Hz. Zatímco pro modulaci hlasitosti stačí pouze jedna instance pro obě slabiky zároveň, výška je pro přesnější tvarování modulována dvěma instancemi s jinou úrovní intenzity zároveň. Poslední dvě nezobrazené instance *LFO* jsou pro modulaci rozladění a intenzity přidáných hlasů, které mají jednoduchý tvar zaobleného čtvercového průběhu.

Dále je na Obr. 38 zobrazeno okno *MATRIX* pro *SYNTH 1*, tedy modulační matice shrnující všechny aktivní modulační. Kromě zmíněných *LFO* je zde využit i zdroj náhodného signálu *Chaos 1*, který primárně modulací výšky přidává generovanému zvuku mírnou, avšak spektrogramem viditelnou variabilitu.



Obrázek 36 Schéma nástroje Sýkora zpracovaném v pluginu Patcher
[zdroj: vlastní]



Obrázek 37 Průběhy LFO pro modulaci hlasitosti a výšky v nástroji Sýkora
[zdroj: vlastní]

SOURCE	CURVE	AMOUNT	DESTINATION	TYPE	MOD	AUX SOURCE	CURVE	OUTPUT
LFO 1			A Vol	→	*	---		
LFO 2			A CoarsePit	→	*	---		
LFO 3			A CoarsePit	→	*	---		
LFO 4			A UniDet	→	*	---		
LFO 5			A UniBlend	→	*	---		
Chaos1			A CoarsePit	↔	*	---		
Chaos1			A Vol	↔	*	---		
Chaos1			A UniDet	↔	*	---		

Obrázek 38 Modulační matice pro syntezátor SYNTH 1 v nástroji Sýkora
[zdroj: vlastní]

Výstupem nástroje Sýkora je zvuk, pro jehož správnou aplikaci už je třeba pouze nastavit správnou délku noty *C4*. Další modulace hlasitosti nebo i jiných parametrů v *DAW* pro realistický výsledek už není potřeba.

8.2 Porovnání výsledků

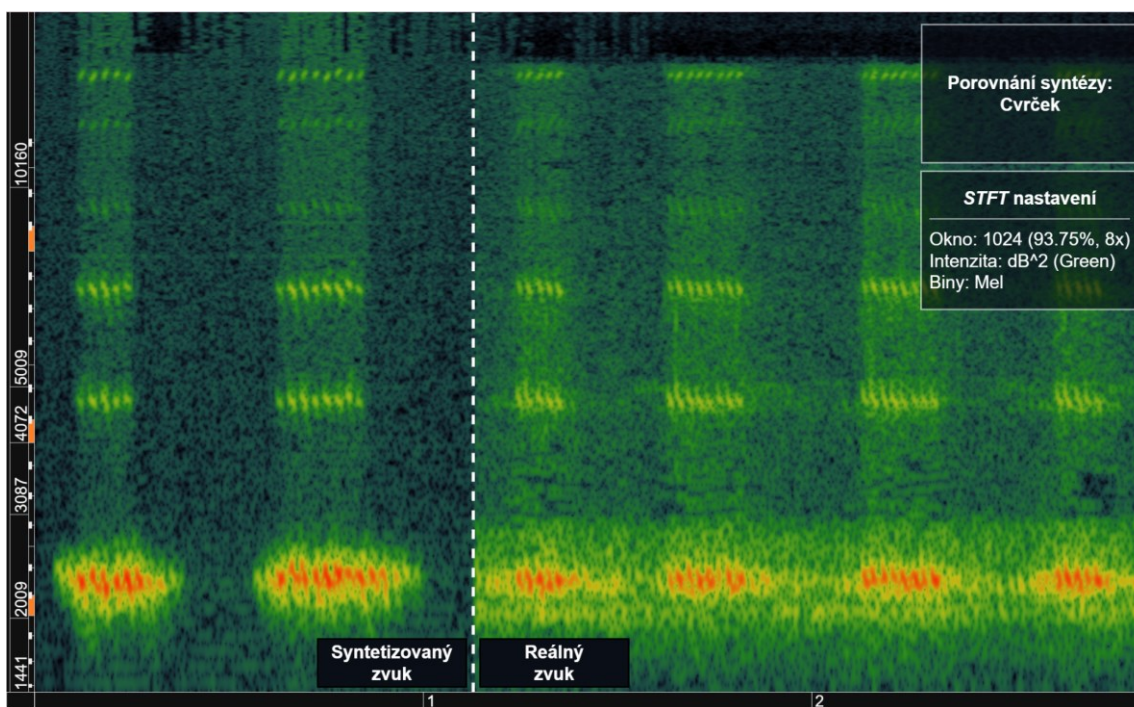
Vzhledem k povaze dosažených výsledků porovnání originálních a syntetizovaných zvuků nelze provést prostřednictvím jednoznačně kvantifikovatelných metrik, jak je tomu například u přesnosti měření. Zvuk je fenomén do značné míry subjektivní, a proto zůstává samotný poslech nejzásadnějším nástrojem pro jeho hodnocení.

Vyhodnocení však lze písemnou formou provést pomocí podpůrných prostředků, jako je například spektrogram, na jehož základě byly syntetizované zvuky vytvořeny. Porovnání je tedy provedeno především vizuální komparací prostřednictvím spektrogramů, které zachycují časově-frekvenční strukturu signálů. Tyto grafické reprezentace zvuku lze použít jako objektivní podklad pro ověření, zda se syntetizované signály skutečně podobají svým reálným předlohám z hlediska jejich charakteristických spektrálních rysů.

Porovnání výsledků: Cvrček

Níže na Obr. 39 je zobrazený spektrogram obsahující syntetizovanou a reálnou podobu cvrkání cvrčka. Z vizuální analýzy je patrné, že syntetizovaný zvuk (vlevo) si zachovává základní rytmus i spektrální strukturu velmi podobnou vzoru reálnému zvuku (vpravo).

V obou verzích intenzitou dominuje první harmonická složka, jejíž impulzy jsou však v syntetizované podobě výraznější a s více chaotickým průběhem. Naopak okolí jejího spektra rychle ztrácí na intenzitě, zatímco v reálné nahrávce zůstává přítomen širší a časově stabilní spektrální šum. Rozdíly jsou však patrné i u vyšších harmonických složek – jednotlivé impulzy reálného zvuku jsou velmi podobné, zatímco v syntetizované podobě impulzy působí rozostřeně a více proměnlivě. Místy se dokonce objevují pouze fragmenty impulzu. Časová struktura obou verzí je srovnatelná – impulzy jsou proměnlivé, ale s odpovídající rytmickou strukturou.



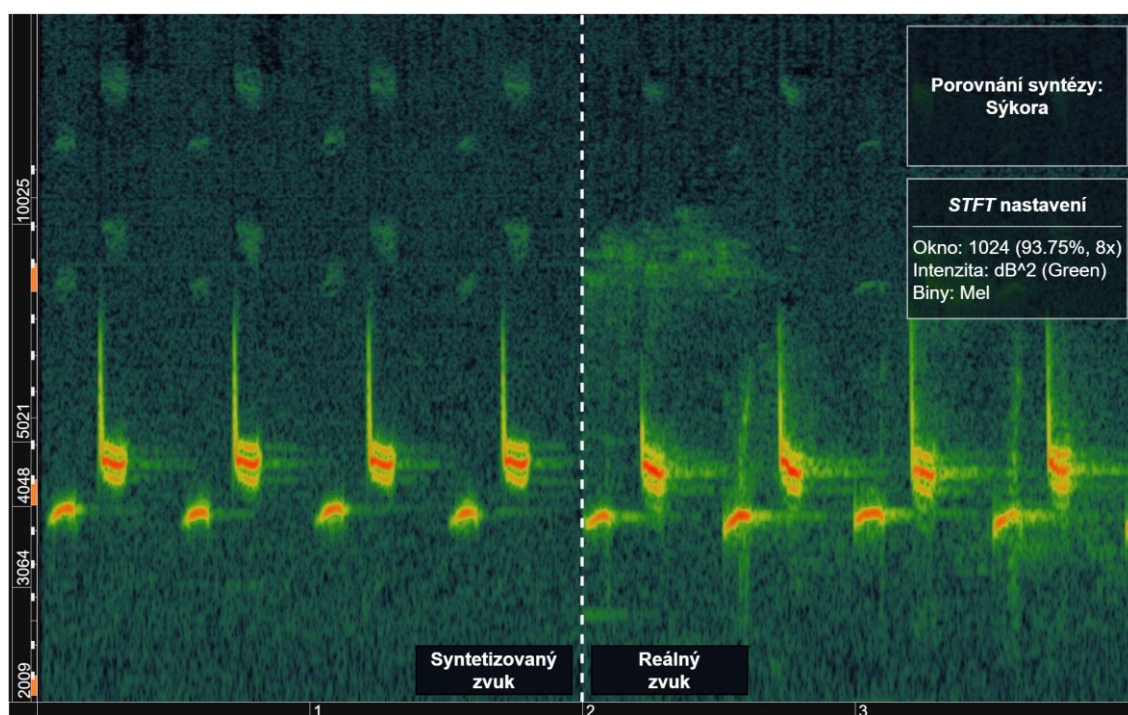
Obrázek 39 Porovnání výsledků syntézy cvrkání cvrčka pomocí spektrogramu
[zdroj: vlastní]

Celkově lze říct, že zmíněné nedostatky nepředstavují žádné selhání a jde spíše o detaily, které jsou poslechem jen těžko postřehnutelné. Navzdory rozdílům ve spektrální bohatosti či nepřesnosti tvarů harmonických složek syntéza věrně napodobuje charakteristické rysy originálního vzoru – tedy jeho frekvenční obsah, periodicitu i typické rytmy. Poslechem je syntetizovaná verze rozeznatelná jako cvrkání cvrčka.

Porovnání výsledků: Sýkora

Na Obr. 40 je zobrazený spektrogram porovnávající syntetizovaný (vlevo) a reálný (vpravo) zpěv sýkory koňadry, složený z opakovaného dvouslabičného motivu. Oba zvuky vykazují velmi podobnou rytmickou strukturu i variaci výšky.

Syntetizovaná verze zachovává všechny charakteristické prvky hlasu, rozdíly jsou však patrné v několika ohledech. V reálné nahrávce je patrný více proměnlivý, místy až roztrhaný hlas, zatímco u syntetizované verze je průběh více sjednocený a předvídatelný, což platí i pro vícehlasou složku. Její syntetizovaná podoba je jednotná, díky čemuž sice působí čistěji, ale méně přirozeně.



Obrázek 40 Porovnání výsledků syntézy zpěvu sýkory pomocí spektrogramu
[zdroj: vlastní]

Celkově lze říct, že syntetizovaný signál opět úspěšně reprodukuje hlavní rysy původního zvuku, a to jak z hlediska frekvenční struktury, tak rytmu. Odchytky, které spektrogram odhalil jsou relevantní, ale nijak zásadní nebo výrazné, aby narušily vnímanou podobnost.

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce byla zaměřena na Fourierovu transformaci, která patří mezi jednu z nejčastěji využívaných metod frekvenční analýzy, a její aplikaci v oblasti akustiky. V práci byly popsány teoretické základy transformace včetně jejich diskrétních variant, které byly následně využity při praktické analýze a syntéze zvukových signálů.

Teoretická část stručně představila základní principy, na nichž je Fourierova transformace postavena – zejména vlastnosti harmonických funkcí, Eulerův vzorec, vlastnost ortogonalit harmonických funkcí a možnost rozkladu periodických průběhů pomocí Fourierovy řady. Následně byl matematicky odvozen výpočet pro rozvoj do Fourierovy řady s využitím zmíněných ortogonálních vlastností. V návaznosti na tento výpočet byl odvozen i vzorec definující přímou Fourierovu transformaci, přičemž byly uvedeny její základní vlastnosti a matematické varianty, které jsou dnes běžně používány pro pokročilejší zpracování digitálního signálu.

Praktická část se již zaměřila výhradně na oblast akustiky. Úvodem byly popsány hlavní parametry zvuku, metody jeho syntézy a dále byl i vytvořen přehled současných nástrojů pro číslicovou syntézu – syntezeátorů. V této souvislosti byl také alespoň obecně představen digitální syntezeátor *Serum* včetně jeho oscilátorů, vlnové tabulky, efektů a modulační matice.

V další části práce byly analyzovány reálné zvukové nahrávky – konkrétně vokalizace živočichů (cvrček, sýkora, zvonovec a člověk) pomocí spektrogramů a tóny konkrétních hudebních nástrojů zastupujících čtyři skupiny nástrojů (drnkací, smyčcové, klávesové a dechové), analyzované pomocí spektrálních grafů.

Zvířecí vokalizace vykazovaly značnou rozmanitost ve frekvenčním i časovém průběhu – zvuky mohou obsahovat jak harmonické, tak inharmonické složky a například ptáci často využívají frekvenční modulace, což výrazně zvyšuje variabilitu jejich zpěvu. Lidský hlas dokáže při zpěvu vytvářet zvuk s mimořádně bohatým spektrem a precizní výškovou kontrolou.

Hudební nástroje se vyznačují výrazným harmonickým řádem, jehož stabilita závisí na konstrukci nástroje a způsobu buzení. Spektrální grafy strunných nástrojů potvrdily inharmonicitu způsobenou tuhostí strun, zatímco harmonické složky dechových nástrojů přesně kopírovaly harmonickou řadu.

V závěru praktické části byla provedena syntéza vokalizací dvou analyzovaných zvířat – cvrkání cvrčka a zpěv sýkory koňadry. Syntéza proběhla prostřednictvím digitálního syntezátoru *Serum* načteném v prostředí programu *FL Studio 21*, kde byly vytvořeny digitální nástroje „Cvrček“ a „Sýkora“. V práci je popsáno složení těchto nástrojů včetně blokového schématu zahrnující použité syntezátory, efekty, použité modulace pro hlasitost a výšku nebo závěrnou úpravu hlasitosti výstupu pro lepší výsledek.

Následně byly výsledky syntézy porovnány s originály a vyhodnoceny vizuálně formou spektrogramů. Vyhodnocení ukázalo, že syntetizované zvuky jsou velmi podobné svým předlohám se zvukově pouze nevýraznými odchylkami ve spektrálním průběhu. Mezi pozorované rozdíly patřila například expresivnější fundamentální složka nebo méně variabilní průběh v čase. Všechny nedostatky jsou však pouze detailního charakteru a charakteristické spektrální rysy předloh se podařilo úspěšně zachytit – při subjektivním poslechu jsou oba syntetizované zvuky rozpoznatelné jako varianty svých originálů.

Výsledky práce potvrdily, že Fourierova transformace je nejen dobrým prostředkem pro rozklad pouze teoretických signálů, ale také prakticky využitelným nástrojem pro pochopení a replikaci akustických signálů. Podstatné omezení časově-frekvenčního rozlišení spektrogramu v této práci nehrálo žádnou roli, a to především díky pečlivě zvoleným zvukovým nahrávkám (bez výrazných rušivých elementů), díky čemuž bylo možné získat dostatečně čistá spektra pro účely analýzy i syntézy s pouze kompromisem délky FFT okna.

Do budoucna by bylo možné na tuto práci navázat například studiem dalších metod frekvenční analýzy, jako je například Wavelet nebo S transformace, jejichž propracovanější myšlenky mohou přinášet lepší výsledky pro pochopení i komplikovanějších signálů. Zajímavým rozšířením by také mohl být pokus o syntézu například právě hudebních nástrojů, které jsou pro syntézu z pohledu časového vývoje spektra nesrovnatelně komplikovanější.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] KIDO, Ken'iti. *Digital Fourier Analysis: Fundamentals*. New York: Springer, 2014. ISBN 978-1-4614-9259-7.
- [2] SMITH, Steven W. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. 2nd ed. San Diego: California Technical Publishing, 1999. ISBN 978-0966017632.
- [3] KNOTEK, Michal. *Fourier a jeho řady* [online]. 3pol.cz, 2015 [cit. 2025-03-02]. Dostupné z: <https://www.3pol.cz/cz/rubriky/biografie/2165-fourier-a-jeho-rady>.
- [4] HERRMANN, Leopold. *Fourierovy řady: komentované přednášky*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 978-80-01-02603-8.
- [5] GINSBERG, Jerry H. *Acoustics: A Textbook for Engineers and Physicists*. 1st ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. ISBN 0-442-20788-5.
- [6] JAMES, J.F. *A Student's Guide to Fourier Transform*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0-521-17963-3.
- [7] MAREŠ, Jiří. *Časově-frekvenční analýza nestacionárních signálů* [online]. Disertační práce. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009 [cit. 2025-03-09]. Dostupné z: <https://dspace.tul.cz/items/429b8b0d-7e79-4c2b-96a5-4698cff9e666>.
- [8] BROKESOVÁ, Johana. *Teoretické základy Fourierovy spektrální analýzy* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2024 [cit. 2025-04-01]. Dostupné z: <https://geo.mff.cuni.cz/studium/Brokesova-FourierovaSpektralniAnalyza.pdf>.
- [9] TAN, Li a JIANG, Jean. *Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications*. 3. vydání. Cambridge, MA: Academic Press, 2018. ISBN 978-0-12-815071-9.
- [10] COOLEY, James W. a John W. TUKEY. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* [online]. Stanford University, 1965 [cit. 2025-04-06]. Dostupné z: <https://web.stanford.edu/class/cme324/classics/cooley-tukey.pdf>.
- [11] Nientjah. *Cricket sound* [online video]. 2008 [cit. 2025-04-11]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=K8E_zMLCRNg.
- [12] FISHER, Daniel. *Analog vs. Digital Synthesizers*. InSync [online]. Fort Wayne: Sweetwater, [cit. 2025-04-06]. Dostupné z: <https://www.sweetwater.com/insync/analog-vs-digital-synthesizers/>.

- [13] ŠPELDA, Antonín. *Hudební akustika: pro posluchače filosofických a pedagogických fakult a akademií múzických umění*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978. ISBN 14-792-78.
- [14] Fred Welsh. *Welsh's Synthesizer Cookbook: Synthesizer Programming, Sound Analysis, and Universal Patch Book*. Vlastním nákladem, 2006. ISBN 5800044380275.
- [15] REID, Gordon. *An Introduction To Additive Synthesis*. Sound On Sound [online]. June 2000 [cit. 2025-04-08]. Dostupné z: <https://www.soundonsound.com/techniques/introduction-additive-synthesis>.
- [16] STEVE Duda. *Serum User Manual* [online]. Xfer Records, 2014 [cit. 2025-04-08]. Dostupné z: https://s3.amazonaws.com/decembercymatics/Serum_Manual.pdf.
- [17] SONIC VISUALISER. *Sonic Visualiser: Reference Manual Version 5.0.1* [online]. 2006–2024 [cit. 2025-04-09]. Dostupné z: <https://www.sonicvisualiser.org/doc/reference/5.0.1/en/>.
- [18] DENGIS, Chantal. *Parus major 15mars2011.ogg* [online zvukový záznam]. 2011 [cit. 2025-04-11]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Parus_major_15mars2011.ogg.
- [19] New Scientist. *The Amazon's white bellbirds are the world's loudest birds* [online video]. 2019 [cit. 2025-04-11]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=ROZNvROUcRA>.
- [20] Chantress Seba. *Sacred Peace (1hr) – Heart Chakra Healing for Rest And Rejuvenation – 432hz Universal Frequency* [online video]. 2024 [cit. 2025-04-11]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=D-cT15K_Gts.
- [21] ZAPP, Willa. *Tuning a Guitar – Standard tuning for 6 string guitar* [online video]. 2011 [cit. 2025-04-15]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=jJxRjWtwmEE>.
- [22] GRANGER, Emily. *The Nightingale by Deborah Henson-Conant | Emily Granger, harp* [online video]. 2020 [cit. 2025-04-15]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=Ie48KdxaLVU>.
- [23] VITERBO, Davide. *Schindler's List Violin Solo* [online video]. 2021 [cit. 2025-04-15]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=fOVhq4EMtus>.

- [24] MAISKY, Mischa. *Mischa Maisky plays Bach Cello Suite No.1 in G (full)* [online video]. 2011 [cit. 2025-04-16]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=mGQLXRTI3Z0>.
- [25] Gifted Hands Music. *Best Felt VSTs (Free vs. Paid) | Keyscape & Spitfire Labs* [online video]. 2023 [cit. 2025-04-16]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=vimTkt5JBEw>.
- [26] PARKER, Serene. *Middle C Pitch – On the Piano* [online video]. 2020 [cit. 2025-04-16]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=BthndY5hv4E>.
- [27] KAY, Kevin M. *Harmonic analysis of the soprano clarinet*. Williamsburg: College of William and Mary, 2017. Dostupné z: https://physics.wm.edu/Seniorthesis/Senior%20Theses%202017/kay_kevin.pdf.
- [28] WENTLAND, Elisabeth. *Kuhlau fantasy for flute solo op.38 D major* [online video]. 2014 [cit. 2025-04-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=be1jJCH32OU>.
- [29] Utah Symphony & Utah Opera (USUO). *What does a clarinet sound like? (Ode to Joy)* [online video]. 2017 [cit. 2025-04-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=kSfEDb1cMAw>.
- [30] STOT, Juru. *Freestyling, Sax only* [online video]. 2012 [cit. 2025-04-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=VCUYEI49XgI>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 Jednotková kružnice s vyznačenými trigonometrickými funkcemi	17
Obrázek 2 Průběh harmonických funkcí.....	20
Obrázek 3 Kosinusová funkce s počátečním fázovým posunem.....	20
Obrázek 4 Průběh harmonických funkcí zadaných úhlovou frekvencí	23
Obrázek 5 Vizualizace Eulerova vzorce v komplexní rovině.....	24
Obrázek 6 Integrace harmonické funkce, průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)	25
Obrázek 7 Integrace harmonické funkce s fázovým posunem, průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)	25
Obrázek 8 Integrace součinu harmonických funkcí s rozdílnou frekvencí, průběhy funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)	26
Obrázek 9 Integrace součinu totožných harmonických funkcí, průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)	27
Obrázek 10 Integrace součinu harmonických funkcí s opačnou fází, průběh funkce (modře) a průběh integrálu (oranžově)	27
Obrázek 11 Výsledek integrace součinu dvou harmonických funkcí v závislosti na frekvenci jedné z nich	29
Obrázek 12 Složená funkce bez diskontinuity rozložená do Fourierovy řady	43
Obrázek 13 Složená funkce s diskontinuitou rozložená do Fourierovy řady	44
Obrázek 14 Přechod z Fourierovy řady na Fourierovu transformaci.....	47
Obrázek 15 Vizualizace Gibbsova jevu při skokové změně.....	49
Obrázek 16 Diskrétní Fourierova transformace.....	53
Obrázek 17 Krátkodobá Fourierova transformace.....	57
Obrázek 18 Diskrétní Kosinová transformace	58
Obrázek 19 Schéma ADSR obálky s vyznačenými parametry.....	63
Obrázek 20 Přehled hlavních nástrojů v okně OSC syntezátoru Serum.....	68
Obrázek 21 Editační okno vlnové tabulky syntezátoru Serum.....	69
Obrázek 22 Přehled efektů v okně FX syntezátoru Serum	71
Obrázek 23 Modulační matice v okně Matrix syntezátoru Serum.....	72
Obrázek 24 Spektrogram cvrkání cvrčka.....	74
Obrázek 25 Spektrogram zpěvu sýkory koňadry	75
Obrázek 26 Spektrogram zpěvu zvonovce bílého.....	76
Obrázek 27 Spektrogram zpěvu ženy (s kytarovým doprovodem).....	77
Obrázek 28 Spektrum strunných nástrojů drnkacích (kytara a harfa)	78
Obrázek 29 Spektrum strunných nástrojů smyčcových (housle a violoncello)	79

Obrázek 30 Spektrum strunných nástrojů klávesových (virtuální piano a piano)	80
Obrázek 31 Spektrum dechových hudebních nástrojů (flétna, klarinet a saxofon)	81
Obrázek 32 Schéma nástroje Cvrček zpracovaném v pluginu Patcher	85
Obrázek 33 Průběhy LFO pro modulaci hlasitosti a výšky v nástroji Cvrček	85
Obrázek 34 Frekvenční odezva filtračních efektů EQ použitých v nástroji Cvrček	85
Obrázek 35 Okno Playlistu v projektu Cvrček	86
Obrázek 36 Schéma nástroje Sýkora zpracovaném v pluginu Patcher	88
Obrázek 37 Průběhy LFO pro modulaci hlasitosti a výšky v nástroji Sýkora	88
Obrázek 38 Modulační matice pro syntezátor SYNTH 1 v nástroji Sýkora	88
Obrázek 39 Porovnání výsledků syntézy cvrkání cvrčka pomocí spektrogramu	90
Obrázek 40 Porovnání výsledků syntézy zpěvu sýkory pomocí spektrogramu	91

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 Vliv fázového posunu na ortogonalitu harmonických funkcí.....	32
Tabulka 2 Základní parametry pro nastavení spektrogramu.....	56
Tabulka 3 Přehled nepoužívanější logaritmických škál pro hlasitost zvuku	61
Tabulka 4 Přehled použitých instancí syntezátoru Serum v projektu Cvrček	83
Tabulka 5 Přehled použitých instancí syntezátoru Serum v projektu Sýkora.....	87

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

12-TET	12 Tone Equal Temperament (dvanáctitónové rovnoměrné ladění)
A_0	Koeficient konstantního členu Fourierovy řady
A_k	Koeficienty kosinových členů Fourierovy řady
B_k	Koeficienty sinových členů Fourierovy řady
DAW	Digital Audio Workstation (digitální zvuková pracovní stanice)
DCT	Discrete Cosine Transform (diskrétní kosinová transformace)
DFT	Discrete Fourier Transform (diskrétní Fourierova transformace)
EQ	Equalizer (ekvalizér)
FFT	Fast Fourier Transform (rychlá Fourierova transformace)
FS	Fourier Series (Fourierova řada)
FSE	Fourier Series Expansion (rozvoj do Fourierovy řady)
FT	Fourier Transform (Fourierova transformace)
FX	Effect (efekt)
H_k	Harmonické frekvence
I_k	Inharmonické frekvence
k	Harmonický index
LCM	Least Common Multiple (nejmenší společný násobek)
LFO	Low Frequency Oscillator (nizkofrekvenční oscilátor)
MIDI	Musical Instrument Digital Interface (digitální rozhraní hudebních nástrojů)
OCT	Octave (oktáva)
SEM	Semitone (půltón)
STFT	Short-Time Fourier Transform (krátkodobá Fourierova transformace)
SYNTH	Synthesizer (syntezátor)
VST	Virtual Studio Technology (virtuální studiová technologie)
X_k	Komplexní koeficient Fourierovy řady

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I: Projekt s vytvořenými digitálními nástroji

PŘÍLOHA P I: PROJEKT S VYTVOŘENÝMI DIGITÁLNÍMI NÁSTROJI

Obsahem přílohy je projekt ve formátu FL Studia 21 (*.flp*) obsahující vytvořené digitální nástroje pro syntézu cvrkání cvrčka a zpěvu sýkory koňadry, společně s automatizačními klipy, které zajišťují jejich zamyšlenou podobu. Součástí jsou také dva zvukové soubory (*.wav*), obsahující nejprve reálnou, a pak syntetizovanou podobu syntetizovaných zvuků.