# Návrh rychlostního servopohonu s indukčním el. strojem s vektorovým řízením momentu pro řízení pohybu mechanické soustavy

Bc. Aleksandr Rozhnov

Diplomová práce
2022

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav automatizace a řídicí techniky

Akademický rok: 2021/2022

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení: | **Bc. Aleksandr Rozhnov** |
| Osobní číslo: | **A19732** |
| Studijní program: | **N3902 Inženýrská informatika** |
| Studijní obor: | **Automatické řízení a informatika** |
| Forma studia: | **Prezenční** |
| Téma práce: | **Návrh rychlostního servopohonu s indukčním el. strojem s vektorovým řízením momentu pro řízení pohybu mechanické soustavy.** |
| Téma práce anglicky: | **Design of a Speed Servo Actuator with Vector Torque-Controlled Induction Motor for Mechanical System Motion Control** |

## Zásady pro vypracování

1. Odvoďte dynamické rovnice indukčního stroje el. stroje v rozlišovací úrovni potřebné pro řízení pohybu hmotných objektů (elektromechanická transformace).
2. Odvoďte modifikaci modelu indukčního stroje umožňující určit vektorový způsob řízení jeho momentu.
3. Navrhněte na základě předchozího blokové schéma vektorového řízení indukčního el. stroje.
4. V simulačním prostředí pro simulační experimenty s fyzikálními modely mechatronických systémů vypracujte simulační model momentového servopohonu s indukčním strojem.
5. Vytvořte simulační model použití navrženého servomechanismu s indukčním strojem na řízení rychlosti pohybu dvou vázaných hmot v rovině.

Rozsah diplomové práce: **do 100 stran**
Rozsah příloh: **do 30 obrázků**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:


1. Úředníček, Z.: Elektromechanické akční členy, Univerzita T. Bati ve Zlíně, Zlín 2009, ISBN 978-80-7318-835-1
2. Mann, H.,. Modelling and Simulation, DynLab, Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled System, Computing and Information Centre Czech Technical University in Prague. 2006
3. Šolc, F., Václavek, P., Vavřín, P., . Řízení a regulace II, VUT Brno, Fakulta automatizace a měřící techniky, Skripta, Leden 2011.
4. VanAntwerp, J.,G. Braatz, R., D., Sahinidis, N., V., Globally optimal robust control for systems with nonlinear time-varying perturbation. Comp&Chem. Eng., 1977.
5. Safonov , M. G. Stability and Robustness of Multivarible Feedback systems. Cambridge, MA: MIT Press, 1980.
6. Skalický, J.: Elektrické regulované pohony,
7. Černý, M.: Elektrické pohony, skripta VUT FE Brno, 1986
8. Pavelka, J. a J.: Elektrické pohony, skripta ČVUT Praha, FEL, 1996
9. Šubrt, J.: Elektrické regulační pohony, skripta VUT Brno, FE, 1987
10. Leonhard, W.: Control of Electrical Drives, Springer, Berlin, 1996


Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Ing. Zdeněk Úředníček, CSc.**
Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce: **15. ledna 2022**
Termín odevzdání diplomové práce: **20. května 2022**

L.S.

**doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.** v.r.
děkan

**prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.** v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 15. ledna 2021

**Jméno, příjmení: Aleksandr Rozhnov**
**Název bakalářské/diplomové práce: Návrh rychlostního servopohonu s indukčním el. strojem s vektorovým řízením momentu pro řízení pohybu mechanické soustavy**
**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

Aleksandr Rozhnov v.r.
podpis diplomanta

## ABSTRAKT

Tématem této práce je návrh rychlostního servopohonu na základě vektorově řízeného asynchronního stroje. Navržený servopohon se pak používá pro řízení pohybu mechanické soustavy v rovině. Zmíněná mechanická soustava představuje zjednodušený model manipulátoru typu SCARA. Cílem práce je zjistit možné chování servopohonů na základě asynchronních motorů při řízení pohybu robotických manipulátorů.

Klíčová slova: asynchronní motor, indukční stroj, vektorové řízení, rychlostní servopohon, robotika.

## ABSTRACT

The subject of this paper is the design of a speed servo actuator based on a vector-controlled asynchronous machine. The designed actuator is then used to control the movement of the mechanical system in the two-dimensional plane. The mentioned mechanical system represents a simplified model of the SCARA type manipulator. The aim of this paper is to determine the possible behavior of actuators based on asynchronous motors in controlling the movement of robotic manipulators.

Keywords: asynchronous motor, induction motor, vector control, speed servo actuator, robotics.

Především bych chtěl vyjádřit poděkování panu doc. RNDr. Ing. Zdeňku Úředníčkovi, CSc., za odbornou pomoc při vedení dané práce, a také za trpělivost a cenné rady.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině a blízkým kamarádům, kteří mě podporovali během celého studia na vysoké škole.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

# OBSAH

# ÚVOD

Asynchronní motor, rovněž známý jako indukční stroj, je dnes nejpoužívanějším typem elektrického stroje. Indukční stroje, pro své vlastnosti jako jsou levnost, robustnost a relativní nenáročnost jejich údržby, představují logickou volbu pro většinu aplikací.

Na druhé straně existují obory, ve kterých se kladou velké požadavky na přesnost a rychlost polohování objektů nebo na kontrolu množství odebírané energie. Jedním z takových oborů je průmyslová robotika, která v dnešní době představuje rozsáhlou disciplínu. Jedním ze základních problémů, jež robotika musí řešit, je přesné řízení pohybu objektů různých tvarů v prostoru. V takových aplikacích se většinou používají synchronní motory s permanentním magnetem. Existuji také aplikace s krokovými motory, jejichž přesnost řízení může být tak vysoká, že robot nebo manipulátor, poháněný krokovým motorem, bude schopen vykonávat velmi jemnou práci v oborech jako chirurgie nebo mikroelektronika. Zápornou stránkou krokových motorů je ovšem velké omezení rychlosti pohybu.

Proč v takových aplikacích není vhodné používat indukční stroje? Na první pohled snaha o vytvoření nějaké robotické aplikace s velkými požadavky na přesnost pohybu, ve které se používá asynchronní stroj, může působit jako špatný nápad. Nehledě na spoustu kladů, indukční stroje mají jeden velmi zásadní problém – přesné řízení rychlosti otáček rotoru, nebo jeho případné polohování.

Ovšem existuje poměrně přesný koncept řízení rychlosti otáčení rotoru, a to vektorové řízení asynchronních motorů. Stručně řečeno, tento koncept vytváří abstrakční vrstvu mezi skutečným motorem a regulátorem, která umožnuje sledovat a řídit asynchronní stroj, jako by to byl stejnosměrný stroj. Poslední je znám jako snadno řiditelný typ stroje. Bonusem takového přístupu je likvidace nadstandardních hodnot proudů při rozběhu stroje.

Cílem této práce je vytvořit počítačový model rychlostního servopohonu, založeného na indukčním stroji s vektorovým řízením jeho točivého momentu, následně aplikovat daný servopohon na řízení rychlosti pohybu mechanické soustavy a provést potřebné simulace. Na základě výsledků simulací bude pak zjištěno, jestli použití asynchronních strojů je vhodné pro řešení problémů robotiky.

# I. TEORETICKÁ ČÁST

# 1 KINEMATIKA TUHÝCH TĚLES

Úkolem kinematiky je matematický popis geometrie pohybu částice nebo tělesa v prostoru. Jedná se pouze o popis pohybu, nikoliv o jeho příčinu. Pomocí kinematiky lze spočítat pozici objektu v prostoru v určitém čase, případně zjistit jeho rychlost a zrychlení.

## 1.1 Souřadnicový systém

Souřadnicový systém je důležitým pojmem v kinematice, na němž je založen princip popisu polohy tělesa v prostoru.

### 1.1.1 Obecné zavedení

Nechť $U = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \in V$ je bázi vektorového prostoru $V$. Platí-li $\vec{u} \in V$, pak

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{u_n} \tag{1.1.1.1}$$

čísla $\alpha_i$ vektoru $\vec{u} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ představují souřadnice vektoru $\vec{u}$ v bází $U$. [1]

Kartézská prostorová soustava souřadnic, která bude použita v této práci, je definována podle těchto parametrů:

- soustava souřadnic je umístěna v trojrozměrném euklidovském prostoru $E^3$,
- jednotkové vektory $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ tvoří pravotočivou ortonormální bázi,
- vektory $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ jsou zároveň navzájem kolmé,
- osy $x$, $y$, $z$ souřadnicového systému splývají s vektory $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ ,
- počátek souřadnicové soustavy je definován v bodě, kde se osy $x$, $y$, $z$ protínají a tento bod má souřadnice $(0, 0, 0)$ [2].

Pak každý vektor $\vec{u}$ v této soustavě souřadnic lze vyjádřit ve tvaru:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{u} \cdot \hat{\jmath})\hat{\jmath} + \left(\vec{u} \cdot \hat{k}\right)\hat{k} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{1.1.1.2}$$

Vektor $\vec{u}$ taky určuje polohu bodu $P$, který bude mít souřadnice $P = [x \quad y \quad z]^T$. [2]

### 1.1.2 Globální a lokální souřadnicový systém

Důležitou součástí dané práce jsou operace s robotickým manipulátorem. Proto je vhodné aplikovat postup používaný v robotice, kde v okolí robota a na něm se zavádí několik souřadnicových systémů. Jeden z nich bude definován jako hlavní (globální) referenční nepohyblivý souřadnicový systém $G$, obvykle spojeny s rámem robota. Další referenční souřadnicové systémy budou spojený s články robota a objekty v jeho okolí, proto tyto systémy budou definovány jako pohyblivé a každý z nich bude nazýván lokální referenční systém [2].

## 1.2 Obecná transformace a přímá kinematická úloha

Tento pojem je nezbytný při práci s několika souřadnicovými soustavami najednou, protože poměrně často je potřeba vědět, jaké souřadnice má objekt v různých souřadnicových soustavách.

### 1.2.1 Matice rotace

Pro trojrozměrný euklidovský prostor $E^3$ existují tři základní rotační matice. Každá z nich popisuje transformaci polohy objektu mezi souřadnicovými systémy při otočení tohoto objektu kolem jedné ze stojících (globálních) os o určitý úhel. Tyto matice jsou: $R_{X,\gamma}$- pro rotaci kolem osy $x$ o úhel $\gamma$, $R_{Y,\beta}$- pro rotaci kolem osy $y$ o úhel $\beta$, $R_{Z,\alpha}$- pro rotaci kolem osy $z$ o úhel $\alpha$. Tvary matic jsou následující:

$$R_{X,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$
$$R_{Y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \qquad (1.2.1.1)$$
$$R_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sekvenci postupných rotací $R_1$, $R_2$, …, $R_n$ lze zkombinovat do jedné matice, ovšem je důležité zachovat pořadí těchto rotací při výpočtu výsledné matice $R$:

$$R = R_n \cdot R_{n-1} \cdot \ldots \cdot R_2 \cdot R_1 \qquad (1.2.1.2)$$

[2]

Nechť existuje tuhé těleso $B$ a dvě soustavy souřadnic, které splývají, a jejich počátky jsou ve stejném bodě. Soustava č. 1 je globální a soustava č. 2 lokální a je spojena s tělesem $B$. Na povrchu tělesa $B$ existuje bod $P$, jehož souřadnice jsou určeny polohovým vektorem $\vec{u}$ v lokální soustavě: ${}^{B}\vec{u} = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$. Když soustavy souřadnic splývají, pak souřadnice bodu $P$ v globální soustavě budou stejné jako v lokální. Pokud na těleso $B$ bude aplikována minimálně jedna rotace podle libovolné z os globální soustavy, změní se souřadnice bodu $P$ v globální soustavě souřadnic. Tyto souřadnice lze určit podle následujícího vztahu:

$$^{G}\vec{u} = {}^{G}R_B \cdot {}^{B}\vec{u} \tag{1.2.1.3}$$

kde $^{G}R_B$ je výsledná matice rotace neboli globální matice rotace. [2]

V opačném případě, pokud jsou známy souřadnice bodu $P$ v globální soustavě souřadnic a je potřeba zjistit jeho souřadnice v lokální soustavě, platí tento vztah:

$$^{B}\vec{u} = \left({}^{G}R_B\right)^{-1} \cdot {}^{G}\vec{u} = {}^{B}R_G \cdot {}^{G}\vec{u} \tag{1.2.1.4}$$

kde $^{B}R_G$ je lokální matice rotace. Matici $^{B}R_G$ lze získat z kombinací matic otočení tělesa $B$ podle os lokálního souřadnicového systému. Vzhledem k tomu, že matice $^{G}R_B$ a $^{B}R_G$ jsou ortogonální, platí následující vztahy:

$$^{G}R_B = \left({}^{B}R_G\right)^{-1} = \left({}^{B}R_G\right)^{T} \tag{1.2.1.5}$$

$$^{B}R_G = \left({}^{G}R_B\right)^{-1} = \left({}^{G}R_B\right)^{T} \tag{1.2.1.6}$$

[2]

### 1.2.2 Homogenní matice transformace

Vedle rotačního pohybu tuhé těleso $B$ může také vykonávat translační pohyb. V tomto případě počátek lokální soustavy souřadnic, vyjádřený bodem $o$, přestane splývat s počátkem globální soustavy souřadnic. Ovšem pořád existuje možnost zjistit souřadnice bodu $P$ při transformaci mezi dvěma přiléhajícími souřadnými soustavami, stačí jen doplnit již známý vztah:

$$^{G}\vec{u} = {}^{G}R_B \cdot {}^{B}\vec{u} + {}^{G}\vec{d} \tag{1.2.2.1}$$

kde $^{G}\vec{d} = [x_G \quad y_G \quad z_G]^T$ vyjadřuje posunutí bodu $o$ v globální soustavě souřadnic. Kombinací matice rotace $^{G}R_B$ a vektoru $^{G}\vec{d}$ lze vytvořit homogenní matici transformace $^{G}T_B$:

$$^{G}T_B = \begin{bmatrix} & {}^{G}R_B & & {}^{G}\vec{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & x_G \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & y_G \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & z_G \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.2}$$

[2]

Je vhodné poznamenat, že matice ${}^{G}T_{B}$ není ortogonální, a proto:

$$\left({}^{G}T_{B}\right)^{-1} \neq \left({}^{G}R_{B}\right)^{T} \tag{1.2.2.3}$$

Inverzní matici k ${}^{G}T_{B}$ lze najít pomocí následujícího vztahu:

$$\left({}^{G}T_{B}\right)^{-1} = {}^{B}T_{G} = \begin{bmatrix} & {}^{G}R_{B} & & {}^{G}\vec{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left({}^{G}R_{B}\right)^{T} & & & -\left({}^{G}R_{B}\right)^{T} \cdot {}^{G}\vec{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.2.4}$$

[2]

### 1.2.3 Denavit-Hartenbergova notace

Při práci s robotickým manipulátorem je potřeba neustále vykovávat transformace jednotlivých bodů mezi souřadnicovými soustavami, většinou jde o zjištění polohy efektoru v globální soustavě souřadnic. Jelikož se robot skládá ze článků a každý z nich má vlastní lokální soustavu souřadnic, je nutné znát matice homogenních transformací. Denavit-Hartenbergova notace je metoda či algoritmus sloužící ke zavedení kartézských souřadných soustav robota a následně ke snadnému zjištění parametrů jednotlivých matic. Princip jeho aplikace je následující:

- je uvažováno, že robot s $n$ klouby má $n + 1$ článků,
- číslování článků začíná od 0 pro nepohyblivý rám robota a končí číslem $n$ pro článek s efektorem,
- osa $z_i$ je spojena s osou $i + 1$ kloubu,
- osa $x_i$ je pak definována podél společné normály os $z_{i-1}$ a $z_i$ a má směr od $z_{i-1}$ k $z_i$,
- osu $y_i$ potom lze určit pomocí pravidla pravé ruky [2].

Pak je DH soustava souřadnic určena čtyřmi parametry:

- délkou článku $a_i$ – vzdáleností mezi osami $z_{i-1}$ a $z_i$ podél osy $x_i$,
- zkroucením článku $\alpha_i$ – rotací osy $z_{i-1}$ okolo osy $x_i$ do momentu, než se $z_{i-1}$ stane paralelní s osou $z_i$,
- offsetem článku $d_i$ – vzdáleností mezi osami $x_{i-1}$ a $x_i$ podél osy $z_{i-1}$,
- úhlem článku $\theta_i$ – otočením osy $x_{i-1}$ okolo osy $z_{i-1}$ do momentu, než se $x_{i-1}$ stane paralelní s osou $x_i$ [2].

Po zjištění všech parametrů lze získat homogenní transformační matici mezi dvěma přiléhajícími souřadnými soustavami:

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.3.1} $$

[2]

Stále platí tvrzení, že vhodnou kombinací těchto matic lze zjistit globální souřadnice libovolného bodu patřícího do určité lokální souřadnicové soustavy. Pomocí těchto matic lze také zjistit souřadnice koncového bodu efektoru, pokud jsou známy úhly natočení jednotlivých článků vůči sobě, tzn. řešení přímé kinematické úlohy [2].

## 1.3 Inverzní kinematická úloha

Cílem inverzní kinematické úlohy je zjištění takových kloubových souřadnic robota, při kterých jeho libovolný bod, např. a nejčastěji efektor bude mít požadované souřadnice a orientaci tělesa v globální soustavě souřadnic. Matematicky se jedna o hledání prvků vektoru $\bar{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$, kde $n$ je počet neznámých kloubových souřadnic vázaných nelineárními algebraickými rovnicemi $u_{ij}$, získanými z matice homogenní transformací:

$$ T(\bar{q}) = {}^0T_n = {}^0T_1(q_1) \cdot {}^1T_2(q_2) \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}T_n(q_n) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1} $$

[2]

Maximální počet lineárně nezávislých rovnic je šest, lze je použít k hledání kloubových souřadnic $\bar{q}$. Existuje několik metod řešení těchto rovnic, jejichž pomocí lze také zjistit, že může existovat více konfigurací určité polohy robota. Pro hledání kloubových souřadnic lze rovněž použít iterativní techniky, založené na numerických metodách [2].

### 1.3.1 Inverzní kinematika polohy a orientace (metoda rozpojení)

Principem této metody je rozpojení matice homogenní rotace na translační a rotační částí:

$$ {}^0T_n = {}^0D_n \, {}^0R_n = \begin{bmatrix} I & {}^0\bar{d}_n \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0R_n & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_n & {}^0\bar{d}_n \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1.1} $$

Výsledkem je rozdělení jednoho problému na dva samostatné nezávislé jednodušší, z nichž každý má pouze tři nezávislé proměnné [2].

### 1.3.2 Metoda inverzní transformace

Tato metoda je založena na řešení daných rovnic s kloubovými souřadnicemi jako neznámými (příklad pro $n = 6$):

$$
{}^{0}T_6 = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2\,{}^{2}T_3\,{}^{3}T_4\,{}^{4}T_5\,{}^{5}T_6 \rightarrow
\begin{array}{c}
{}^{1}T_6 = \left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6 \\
{}^{2}T_6 = \left({}^{1}T_2\right)^{-1}\left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6 \\
{}^{3}T_6 = \left({}^{2}T_3\right)^{-1}\left({}^{1}T_2\right)^{-1}\left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6 \\
{}^{4}T_6 = \left({}^{3}T_4\right)^{-1}\left({}^{2}T_3\right)^{-1}\left({}^{1}T_2\right)^{-1}\left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6 \\
{}^{5}T_6 = \left({}^{4}T_5\right)^{-1}\left({}^{3}T_4\right)^{-1}\left({}^{2}T_3\right)^{-1}\left({}^{1}T_2\right)^{-1}\left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6 \\
I = \left({}^{5}T_6\right)^{-1}\left({}^{4}T_5\right)^{-1}\left({}^{3}T_4\right)^{-1}\left({}^{2}T_3\right)^{-1}\left({}^{1}T_2\right)^{-1}\left({}^{0}T_1\right)^{-1}\,{}^{0}T_6
\end{array}
\tag{1.3.2.1}
$$

při uvažování, že matice transformace ${}^{i-1}T_i(q_i)$ jsou dány funkcemi kloubových souřadnic [2].

# 2 DYNAMIKA TUHÝCH TĚLES

Mechanika tuhých těles je obecný pojem, zahrnující jak kinematiku, tak dynamiku, přičemž mechanika spojuje tyto dva obory a studuje pohyby tělesa a síly, jež na něj působí, jako jediný celek.

## 2.1 Mechanická energie soustavy

Mechanická energie soustavy určuje její schopnost konat práci. Je to energie pohybu a působení na ostatní objekty v okolí dané soustavy.

### 2.1.1 Kinetická energie soustavy

Změna kinetické energie je definována jako práce vykonaná při posunu hmotnostního bodu (částice) z bodu 1 do bodu 2:

$$\Delta T \equiv T_2 - T_1 = \int_1^2 F\, dr \equiv W(1 \to 2) \tag{2.1.1.1}$$

kde $T$ je kinetická energie částice, $F$ je síla působící na částici, $dr$ je změna její pozice, $W$ je práce. [3]

Podle druhého Newtonova zákona je síla působící na částici definovaná jako:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{2.1.1.2}$$

kde $m$ je hmotnost částice, $a$ a $v$ jsou její zrychlení a rychlost. [3]

Kombinováním těchto vztahů lze získat definici kinetické energie částice:

$$\Delta T = \int_1^2 F\, dr = \int_1^2 m\frac{dv}{dt} dr = m\int_1^2 \frac{dv}{dt} dr = m\int_1^2 \frac{dr}{dt} dv = m\int_1^2 v\, dv \tag{2.1.1.3}$$

Integrováním lze dostat následující vztah:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m({v_2}^2 - {v_1}^2) \tag{2.1.1.4}$$

Pokud se porovnávají rychlosti částice v pohybu a klidu ($v_1 = 0, v_2 > 0$), výsledný vztah určuje kinetickou energii této částice:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1.1.5}$$

[4]

Kinetická energie soustavy hmotných bodů $N$, jejichž vzájemné polohy se nemění:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2 \quad (i = 1,2,\dots,N) \tag{2.1.1.6}$$

Stejný vzorec platí i při výpočtu kinetické energie tělesa, rotujícího kolem osy $z$:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i {r_i}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (i = 1,2,\dots,N) \tag{2.1.1.7}$$

kde $r_i$ je vzdálenost hmotnostního bodu od osy $z$, $\omega$ je úhlová rychlost, $J_z$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose $z$ [3].

Pro těleso se spojitým rozložením hmoty o hustotě $\rho(x, y, z)$ je nejdříve nutné spočítat jeho moment setrvačnosti pomocí matice setrvačnosti:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \tag{2.1.1.8}$$

kde

$$\begin{gathered} I_{XX} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV \\ I_{YY} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)(x^2 + z^2)dV \\ I_{ZZ} = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)(y^2 + z^2)dV \\ I_{XY} = I_{YX} = -\iiint\limits_V \rho(x, y, z)(xy)dV \\ I_{XZ} = I_{ZX} = -\iiint\limits_V \rho(x, y, z)(xz)dV \\ I_{YZ} = I_{ZY} = -\iiint\limits_V \rho(x, y, z)(yz)dV \end{gathered} \tag{2.1.1.9}$$

Matice setrvačnosti určuje celkovou míru setrvačnosti tělesa vzhledem k počátku zvoleného kartézského souřadnicového systému. Pokud se těleso otáčí kolem os tohoto systému s úhlovými rychlostmi $\omega_x$, $\omega_y$ a $\omega_z$ jeho moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ je:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX}\omega_x + I_{XY}\omega_y + I_{XZ}\omega_z \\ I_{YX}\omega_x + I_{YY}\omega_y + I_{XZ}\omega_z \\ I_{ZX}\omega_x + I_{ZY}\omega_y + I_{ZZ}\omega_z \end{bmatrix} \quad (2.1.1.10)$$

Hodnota celkové kinetické energie rotujícího tělesa je pak:

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{L} \quad (2.1.1.11)$$

[3]

### 2.1.2 Potenciální energie soustavy

Pojem potenciální energie je spojen s pojmem konzervativní síly. Konzervativní sílou $F$ působící na částici je taková síla, která splňuje dvě podmínky:

- $F$ je závislá pouze na pozici částice: $F = F(r)$
- pro každé dva body 1 a 2 platí, že práce $W(1 \to 2)$ vykonaná silou $F$ je stejná pro jakoukoliv cestu mezi body 1 a 2.

Pokud jsou všechny síly působící na částici konzervativní, lze definovat pojem potenciální energie $U(r)$, jejíž hodnota je závislá pouze na pozici částice. Celková mechanická energie je pak definována jako konstantní:

$$E = T + U(r) \quad (2.1.2.1)$$

Je důležité definovat referenční pozici $r_0$ ve které hodnota potenciální energie bude nulová:

$$U(r) = -W(r_0 \to r_1) \equiv -\int_{r_0}^{r_1} F(r)\, dr \quad (2.1.2.2)$$

Pak při zavedení dalšího bodu $r_2$ platí následující vztahy:

$$W(r_0 \to r_2) = W(r_0 \to r_1) + W(r_1 \to r_2) \quad (2.1.2.3)$$

$$W(r_1 \to r_2) = W(r_0 \to r_2) - W(r_0 \to r_1) = -\big(U(r_2) - U(r_1)\big) = -\Delta U \quad (2.1.2.4)$$

Při porovnání se vztahem $\Delta T = W(r_1 \to r_2)$ je vidět, že platí:

$$\Delta T = -\Delta U \to \Delta(T + U) = 0 \to E = T + U \quad (2.1.2.5)$$

což znamená, že celková mechanická energie částice při pohybu z bodu $r_1$ do $r_2$ se nemění, pokud síly působící na částici jsou konzervativní [3].

## 2.2 Rovnice pohybu

Jak již bylo zmíněno, jedním ze základních pojmů mechaniky je hmotný bod. Jeho pozice v 3D prostoru je definovánsa rádius-vektorem $\vec{r}$, jehož složky tvoří jeho kartézské souřadnice $x$, $y$ a $z$. Pokud lze tvrdit, že tyto souřadnice jednoznačně definují pozici bodu $a$ jsou vzájemně nezávislé, pak počtu takových souřadnic se říká počet stupňů volnosti $N$ daného tělesa. Tudíž sada $q$ souřadnic $q_1, q_2, \dots, q_N$, která jednoznačně definuje pozici soustavy, se nazývá zobecněné souřadnice soustavy a jejich časové derivace $\dot{q} = [\dot{q_1}, \dot{q_2}, \dots, \dot{q_N}]$ jsou zobecněné rychlosti [5].

Nicméně pokud jsou známy pouze zobecněné souřadnice soustavy v nějakém časovém okamžiku, není možné z nich určit její stav a její pozici v nějakém jiném čase. Proto je také nutné znát zobecněné rychlosti soustavy v určitém čase, aby bylo možné určit její pozici po čase $dt$. Pokud jsou definovány zobecněné souřadnice a rychlosti, lze tvrdit, že stav soustavy je plně určeny a proto lze spočítat následující pohyb této soustavy. Zobecněné souřadnice, rychlosti a zrychlení ($\ddot{q} = [\ddot{q_1}, \ddot{q_2}, \dots, \ddot{q_N}]$) jsou vázány mezi sebou vztahy, jimž se říká rovnice pohybu [5].

### 2.2.1 Lagrangeova diferenciální rovnice II. druhu

Hamiltonovská mechanika představuje přístup k popisu pohybu mechanických soustav. Podle něj je každá taková soustava charakterizována jednoznačnou funkcí $L(q, \dot{q}, t)$ a pohyb této soustavy splňuje určitou podmínku. [5]

Nechť jsou určité pozice soustavy definovaný v čase $t_1$ a $t_2$ pomocí hodnot souřadnic $q^{(1)}$ a $q^{(2)}$. Pak je podmínkou, že při pohybu soustavy mezi těmito pozicemi následující integrál bude mít minimální možnou hodnotu:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad (2.2.1.1)$$

kde $L$ je lagrangián zkoumané soustavy. Pro zjednodušení dalšího odvození je uvažováno, že daná soustava má pouze jeden stupeň volnosti: $q = q(t)$. [5]

Nechť $q = q(t)$ je funkce, při níž má integrál $S$ minimální hodnotu. Jestliže funkce $q(t)$ je nahrazena funkcí $q(t) + \delta q(t)$, hodnota integrálu $S$ se zvýší, přesto že $\delta q(t)$ představuje velmi malou změnu funkce $q(t)$ na časovém intervalu $< t_1,\ t_2 >$. Vzhledem k tomu, že funkce $q(t) + \delta q(t)$ v čase $t_1$ a $t_2$ je definována podle hodnot $q^{(1)}$ a $q^{(2)}$, hodnoty variací $\delta q(t)$ budou nulové:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (2.2.1.2)$$

Změna hodnoty $S$ podle podmínky musí být nulová, a proto je definována jako:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \qquad (2.2.1.3)$$

Daný integrál lze přepsat podle principu variačního počtu:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) dt \qquad (2.2.1.4)$$

Po úpravách pomocí metody per partes a při uvažování, že $\delta\dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$, hodnota integrálu $\delta S$ bude následující:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\, dt = 0 \qquad (2.2.1.5)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\, dt + [uv]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v\, du = 0 \qquad (2.2.1.6)$$

kde

$$\left\{\begin{matrix} u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} & dv = \delta\dot{q} \\ du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) & v = \delta q \end{matrix}\right\} \rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) dt = 0 \qquad (2.2.1.7)$$

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) dt = 0 \qquad (2.2.1.8)$$

Podle podmínky $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ musí být hodnota $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}$ nulová. Zbude integrál, který by měl být nulový pro jakoukoliv hodnotu $\delta q$. To platí, když jeho integrand se rovná nule:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2.2.1.9)$$

Pro soustavu s počtem stupňů volnosti $N$ lze dostat soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,N) \tag{2.2.1.10}$$

Tyto diferenciální rovnice se nazývají Lagrangeovy diferenciální rovnice II. druhu. Pokud je známa hodnota lagrangiánu zkoumané soustavy, tyto rovnice pak představují její rovnice pohybu [5].

Hodnota lagrangiánu uzavřené soustavy množství částic $M$ je určena podle následujícího vzorce:

$$L = \frac{1}{2}\sum m_j {v_j}^2 - U(r_1, r_2, \dots, r_M) \quad (j = 1,2,\dots,M) \tag{2.2.1.11}$$

kde $r_j$ je rádius-vektor $j$-té částice, výraz $\sum \frac{1}{2} m_j {v_j}^2$ představuje kinetickou energii soustavy a $U$ je potenciální energie soustavy [5].

Pokud částice mají možnost měnit své pozice vůči sobě, toto může ovlivnit potenciální (případně i kinetickou) energii celkového systému. Pro popis pohybu částice $a$ v kartézských souřadnicích lze použít tyto vztahy (příklad pro osu x):

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (i = 1,2,\dots,N) \tag{2.2.1.12}$$

$$\dot{x}_a = \sum_N \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (k = 1,2,\dots,N) \tag{2.2.1.13}$$

Substitucí těchto vztahů do rovnice $L = \frac{1}{2}\sum m_a\left({\dot{x}_a}^2 + {\dot{y}_a}^2 + {\dot{z}_a}^2\right) - U$ lze získat lagrangián pro částici $a$ ve formě:

$$L = \frac{1}{2}\sum a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q) \quad (i,k = 1,2,\dots,N) \tag{2.2.1.14}$$

[5]

Stručně řečeno, lagrangián celého uzavřeného systému, složeného z několika částí se rovna sumě lagrangiánů jednotlivých částí:

$$L = \sum_M T_i - U_i \tag{2.2.1.15}$$

Tento vztah platí, pokud jsou části systému mezi sebou vázány kinetickými vazbami.

# 3 INDUKČNÍ STROJE

Indukční stroj, též zvaný asynchronní motor, je jedním z nejčastěji používaných elektrických motorů. Pro jeho napájení se používá střídavý proud, většinou trojfázový. Poměrně jednoduchá konstrukce indukčního motoru spolu s vlastnostmi, jako je například možnost jeho napájení přímo ze sítě, z něj vytváří robustní a poměrně levné řešení pro aplikaci v průmyslu. Navíc, trojfázové indukční stroje jsou samočinně spouštěcí – nepotřebují další pomůcky k roztočení. Stejně jak i ostatní elektromechanické stroje lze indukční stroj využit jako generátor elektrického proudu. Ovšem matematický model tohoto stroje je poměrně složitý, proto ve většině aplikací bývá jeho řízení založeno buď na použití frekvenčních měničů, nebo na změně vstupního napětí.

## 3.1 Fyzikální pojmy

Než bude možné odvodit matematický model indukčního stroje, je potřeba definovat řadu fyzikálních pojmů a zákonů.

### 3.1.1 Elektromagnetické pole

Celý svět si lze představit jako obrovské množství částic, jež na sebe působí silami různé podstaty. Jedním z nejznámějších druhů těchto sil jsou síly elektromagnetické. Ty se projevují mezi částicemi, které jsou nositeli elektrického náboje, přičemž existují jenom dva druhy elektrického náboje opačné polarity – kladný a záporný [6].

Elektromagnetické pole lze definovat jako vektorové pole, jež je zdrojem silových účinků na náboje v klidu a pohybu [6].

### 3.1.2 Magnetické pole

Magnetické pole je jednou ze součástí elektromagnetického pole. V magnetickém poli existuje silové působení na pohybující se náboj, jež lze charakterizovat pomocí vektorové veličiny – magnetické indukce:

$$d\overrightarrow{F_m} = dq(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{3.1.2.1}$$

Daný vzorec vyjadřuje sílu $\overrightarrow{F_m}$ působící na náboj $q$, který se pohybuje rychlostí $\vec{v}$ v magnetickém poli o indukci $\vec{B}$. Vektor reprezentující směr a velikost magnetické indukce lze nazývat indukční čára. Jednotkou magnetické indukce je tesla $[T]$ [6].

Tento vztah je odvozen z Ampérova zákona magnetické síly, který popisuje, jakou silou působí magnetické pole na vodič s délkou $l$, kterým protéká proud $\vec{I}$:

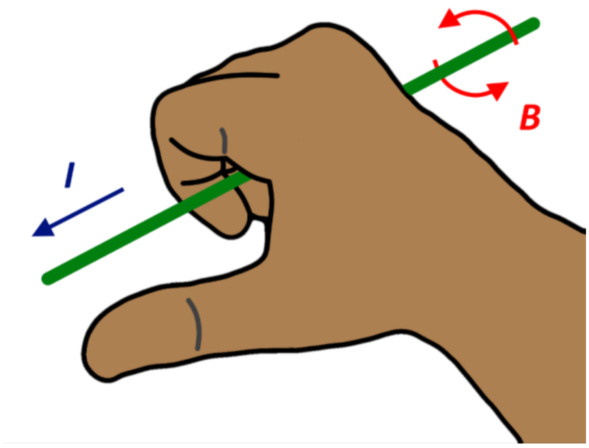
$$d\vec{F} = \vec{I}dl \times \vec{B} \tag{3.1.2.2}$$

kde velikost proudu $I$ je definována jako množství elektrického náboje $Q$, jež prošlo průřezem vodiče za jednotku času:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{3.1.2.3}$$

Je uvažováno, že náboje ve vodiči jsou záporně nabité částice – elektrony. [6]

Proud náboje je také zdrojem magnetického pole. Potom směr indukčních čar tohoto pole lze určit pomocí pravidla pravé ruky: jestliže pravá ruka bude držet vodič tak, že palec bude ukazovat směr proudu náboje $I$, pak ostatní prsty budou určovat směr indukčních čar $\vec{B}$(viz obrázek č. 1) [6].




*Obr. č. 1: Ukázka použití pravidla pravé ruky* (zdroj: vlastní)

Když je nutné kvantitativně určit působení magnetického pole na určitou plochu v prostoru, používá se pojem magnetický tok. Tato veličina se označuje řeckým písmenem $\Phi$ a její velikost je určena pomocí následujícího vztahu:

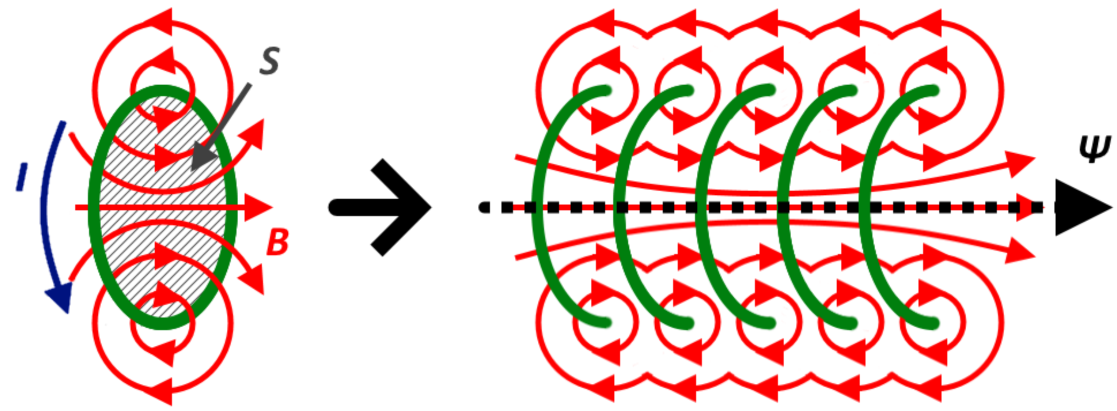
$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot dS = \vec{B} \cdot \vec{S} \tag{3.1.2.4}$$

Jednotkou magnetického toku je weber $[Wb]$. [6]

### 3.1.3 Cívka a její vlastnosti

Cívka představuje vodič několikrát ovinutý kolem izolantu. Každé vinutí vytváří plochu kruhového tvaru, jíž prochází indukční čáry, pokud cívkou prochází elektrický proud. Celkový magnetický tok cívkou $\Psi$ je úměrný počtu závitů vodiče:

$$\Psi = n\Phi \tag{3.1.3.1}$$




*Obr. č. 2: Formace spřaženého magnetického toku* (zdroj: vlastní)

Další vlastností cívky je indukčnost $L$ – jde o veličinu určující schopnost cívky vytvářet kolem sebe magnetické pole v závislosti na elektrickém proudu, který přes ni protéká:

$$L = \frac{\Psi}{I} \tag{3.1.3.2}$$

Jednotkou indukčnosti je henry $[H]$. [7]

### 3.1.4 Faradayův zákon elektromagnetické indukce a Lenzovo pravidlo

Faradayův zákon elektromagnetické indukce říká, že časově proměnlivý magnetický tok (v případě cívky celkový magnetický tok) vytváří elektromotorické napětí $u_e$ v uzavřeném elektrickém odvodu:

$$u_e = -\frac{d\Psi}{dt} \tag{3.1.4.1}$$

Záporné znaménko ukazuje, že elektromotorické napětí působí proti magnetickému toku, který ho vytváří [8].

Elektromotorické napětí lze taktéž definovat pomocí dynamické definice indukčnosti:

$$u_e = -L\frac{di(t)}{dt} \qquad (3.1.4.2)$$

[8]

Vznik elektromotorického napětí vyvolává indukovaný proud procházející elektrickým obvodem, jehož směr je určen podle Lenzova pravidla: směr indukovaného proudu je určen tak, aby magnetické pole jím vyvolané působilo proti změnám v původním magnetickém poli [8].

Vzhledem k tomu, že změna magnetického pole implicitně vytváří proud ve vodiči, na tento vodič začíná silově působit původní magnetické pole podle Ampérova zákona magnetické síly. Na základě tohoto jevu fungují všechny elektrické stroje, včetně indukčních.

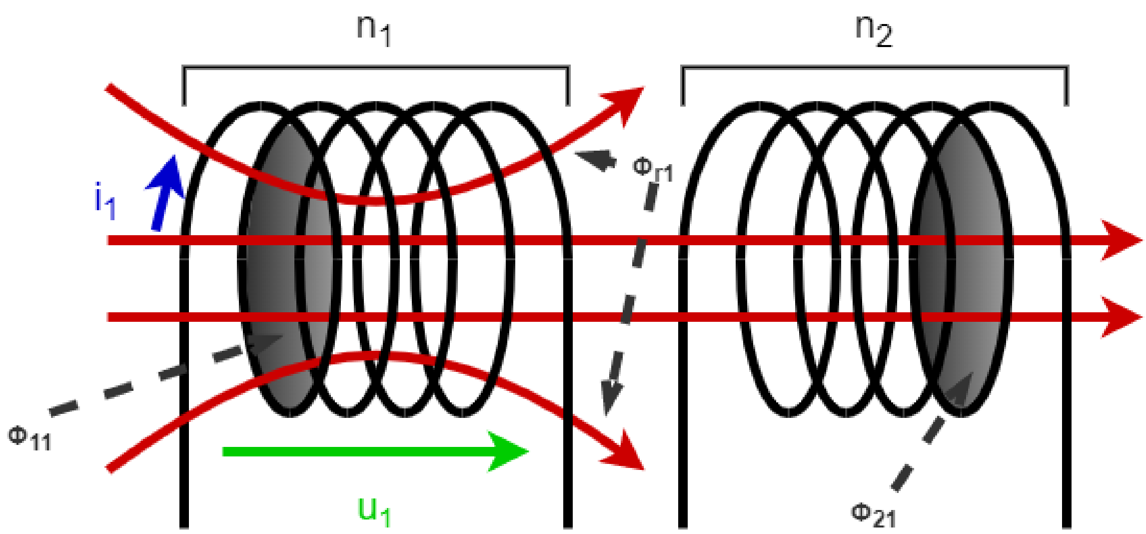
### 3.1.5 Magnetická interakce dvou cívek

Nechť dvě stejné cívky jsou umístěny vedle sebe a jednou z nich protéká proud $i_1$. Pak kolem první cívky vzniká magnetické pole a magnetický tok první cívkou je označen $\Phi_{11}$. Ten tok lze rozdělit na dvě části: na tok, který prochází i přes druhou cívku – $\Phi_{21}$ a tok, jenž druhou cívkou neprochází – $\Phi_{r1}$, viz obrázek č. 3. Na základě tohoto popisu lze odvodit vztah:

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{r1} \qquad (3.1.5.1)$$

Pokud druhou cívkou prochází proud $i_2$ a první cívka je rozpojena, platí podobný vztah:

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{r2} \qquad (3.1.5.2)$$




*Obr. č. 3: Znázornění magnetických toků mezi dvěma cívkami* (zdroj: vlastní)

Na základě počtu závitů každé cívky lze definovat jak celkové magnetické toky:

$$\Psi_{11} = n_1 \Phi_{11} \quad \Psi_{12} = n_1 \Phi_{12} \quad \Psi_{22} = n_2 \Phi_{22} \quad \Psi_{21} = n_2 \Phi_{21} \tag{3.1.5.3}$$

tak i indukčnosti cívek:

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \tag{3.1.5.4}$$

$M_{12}$ a $M_{21}$ představují vzájemné indukčnosti dvou cívek a při platnosti principu reciprocity platí vztah:

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{3.1.5.5}$$

Obdobně při použití předchozích vztahů lze odvodit rozptylové indukčnosti těchto dvou cívek:

$$L_{r1} = \frac{n_1 \Phi_{r1}}{i_1} = L_1 - \frac{n_1}{n_2} M \quad L_{r2} = \frac{n_2 \Phi_{r2}}{i_2} = L_2 - \frac{n_2}{n_1} M \tag{3.1.5.6}$$

kde $\frac{n_1}{n_2} M$ a $\frac{n_2}{n_1} M$ představují hlavní indukčnost první $L_{h1}$ a druhé $L_{h2}$ cívky. Celkovou indukčnost jedné cívky lze pak definovat jako součet její hlavní a rozptylové indukčnosti:

$$L = L_h + L_r \tag{3.1.5.7}$$

Pomocí dynamické definice indukčnosti lze pak soustavu dvou magneticky vázaných cívek popsat těmito rovnicemi:

$$u_1(t) = L_{r1} \frac{di_1(t)}{dt} + L_{h1} \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \tag{3.1.5.8}$$

$$u_2(t) = L_{r2} \frac{di_2(t)}{dt} + L_{h2} \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \tag{3.1.5.9}$$

[9]

## 3.2 Trojfázový indukční stroj

*„Indukční stroj představuje elektrický transformátor, jehož magnetické obvody jsou rozděleny vzduchovou mezerou na dvě vzájemně pohyblivé části, jedna z nich obsahuje hlavní vinutí (stator), druhá – sekundární (rotor). Vinutí na statoru jsou napájena střídavým proudem, který vyvolává proud opačného směru ve vinutích na rotoru na základě působení elektromagnetické indukce, přenášející energii ze statoru na rotor. Toto je typická vlastnost indukčních strojů na rozdíl od ostatních elektrických motorů, kde proudy do rotoru jsou*

*dodány přímo ze zdroje energie. Vinutí na statoru vytvářejí stejný počet pólů jako na rotoru.“* [10]

### 3.2.1 Princip činnosti

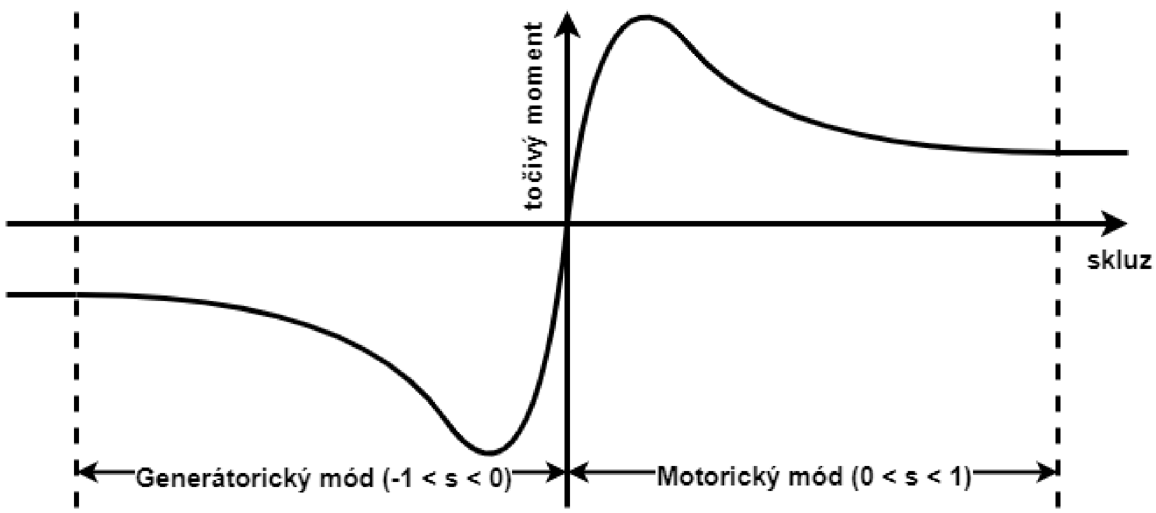
*„Na rozdíl od synchronního stroje rotor indukčního stroje rotuje jinou rychlostí, než jaká je rychlost otáčení magnetického pole statoru. Pokud se bude rotor otáčet stejnou rychlostí jako magnetické pole statoru, časová změna magnetického toku vůči rotoru bude nulová, což znamená, že na vinutí rotoru nebude působit žádná síla, protože v nich nepoteče elektrický proud. Výsledkem je snížení rychlosti otáčení rotoru. Jakmile se rotor bude otáčet nižší rychlostí než magnetické pole statoru, ve vinutích rotoru vznikne elektrický proud a na rotor znovu začne působit síla, která bude zvyšovat rychlost jeho otáčení. V rovnovážném stavu je rychlost otáčeni rotoru nižší nežli rychlost otáčení magnetického pole statoru, proto se indukční stroj také nazývá asynchronní stroj.“* [10]

*„Veličina vyjadřující poměr těchto rychlostí otáčení se nazývá skluz a je definována pomocí následujícího vztahu:*

$$s = \frac{N_s - N}{N_s} \tag{3.2.1.1}$$

*kde $N_s$ představuje otáčky magnetického pole statoru, $N$ – otáčky rotoru.“* [10]

Výše uvedený popis platí pro provoz asynchronního stroje v motorickém módu; pokud skluz má zápornou hodnotu, to znamená, že hodnota otáček rotoru $N$ má větší hodnotu než hodnota otáček magnetického pole statoru $N_s$ a stroj je v generátorickém módu. [10]




*Obr. č. 4: Závislost točivého momentu indukčního stroje na hodnotě skluzu* (zdroj: vlastní)

Točivý moment $M$ je pak určen podle vztahu:

$$M = F \times r \tag{3.2.1.2}$$

kde $F$je síla působící na vinutí rotoru, $r$ je rameno síly [11]. Průběh točivého momentu indukčního motoru je výrazně ovlivňován konstrukcí rotoru.

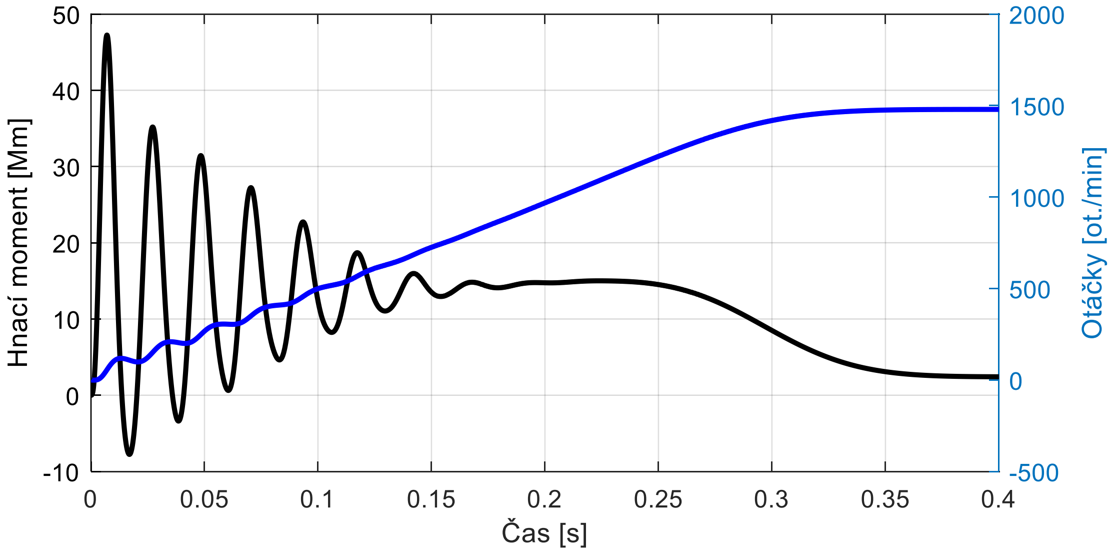
### 3.2.2 Konstrukce a vlastnosti provozu motoru s kotvou nakrátko

Typická konstrukce indukčního stoje představuje dutý cylindr z oceli – stator, do kterého je vložen rotor ve tvaru válce. Jedná se o řešení, které je výrobně levné, nenáročné na údržbu a vhodné pro použití v požárně nebezpečném prostředí. V tomto provedení je rotor sestaven z vodivých plechů a tyčí ze slitin hliníku nebo mědi. Tyče rotoru jsou šikmé a na čelních stranách spojeny nakrátko pomocí dvou zkratovacích kroužků. Tato konstrukce tvoří tzv. rotorovou klec [11].

Přechodový dej, probihající od připojení indukčního motoru ke zdrojí střídavého nápetí do jeho dosazení ustáleného stavu je znázorněn na obrázku č. 5. Po ukončení všech přechodových dějů hodnota hnacího momentu $M_H$ motoru se rovná momentu zátěže na rotoru $M_Z$, což vyplývá z pohybové rovnici motoru

$$M_H = M_Z + M_D \tag{3.2.2.1}$$

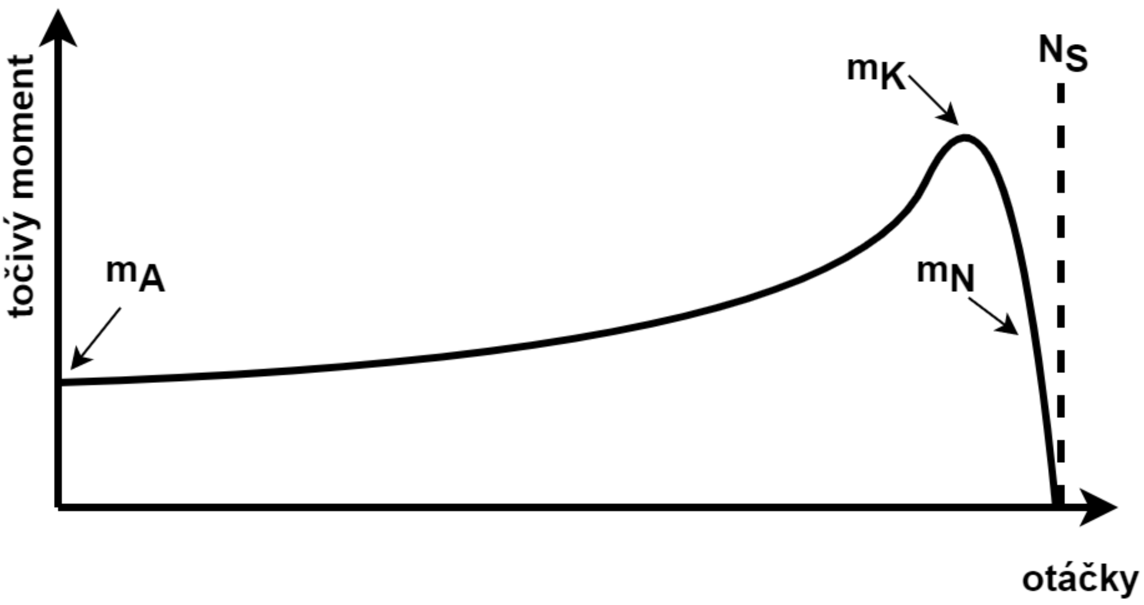
kde $M_D = J\frac{d\omega_r}{dt}$ je dynamický moment, který vyjadřuje snahu systému bránit se mechanickým změnám v něm. [12]




*Obr. č. 5: Přechodový děj indukčního stroje se zátěží na rotoru 2 Nm* (zdroj: vlastní)

Při spuštění motoru se na rotoru indukuje počet magnetických polí odpovídající počtu polí na statoru a rotor se začíná otáčet. Rotorová klec má malý činný odpor, proto rozběhový proud rotorem je mnohem větší než proud za běžného provozu, ovšem točivý moment motoru $m_A$ při jeho rozběhu je malý. Kmitavý průběh hnacího momentu v časovém intervalu $0 - 0{,}25\ s$ je způsoben rozdíly mezi rychlosti otáčení magnetického pole statoru a rotoru. Proud rotorem klesá s rostoucími otáčkami a točivý moment roste až do hodnoty tzv. momentu zvratu $m_K$, kde rychlost změny indukčního toku na rotoru bude tak malá, že klesne velikost sil, určujících točivý moment rotoru a hodnota momentu rotoru začne klesat také (časový interval $0{,}25 - 0{,}35\ s$). Hodnota $m_N$ na grafu odpovídá točivému momentu rotoru, když se otáčí při jmenovitých otáčkách. Pokud je motor nezatížený, bude rychlost otáčení rotoru téměř stejná jako rychlost otáčení magnetického pole statoru $N_s$ [11].

Průběh ustáleného točivého momentu rotoru v závislosti na jeho ustáleném počtu otáček lze vidět na obrázku č. 6.

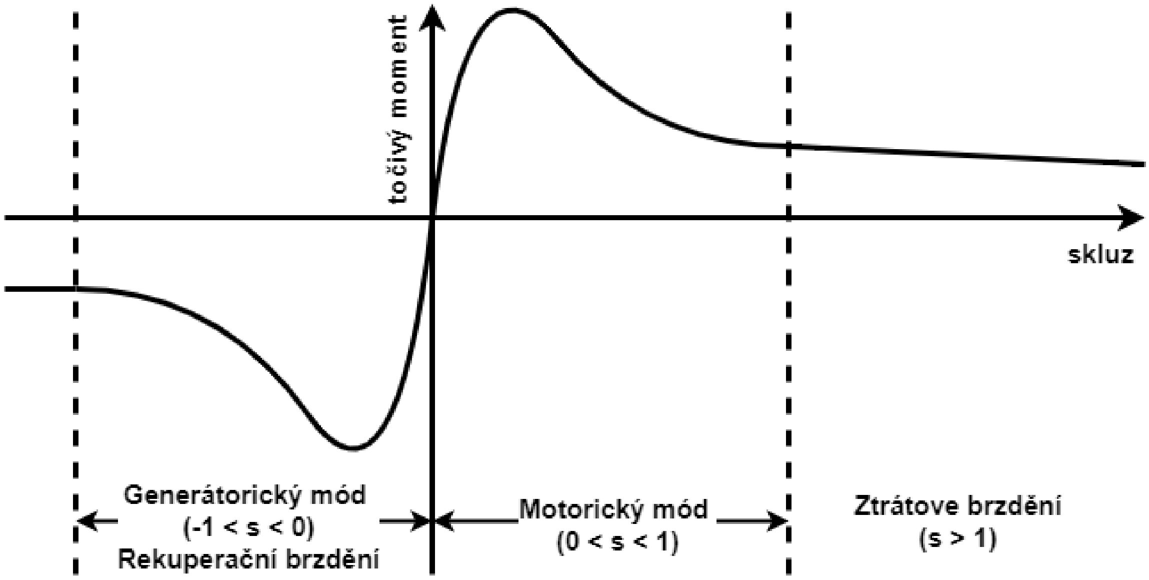



*Obr. č. 6: Momentová charakteristika indukčního stroje: motorický mód* (zdroj: vlastní)

Pro omezení spouštěcího proudu se používají speciální rozběhové režimy motoru, kde se snižuje napětí statoru, většinou o polovinu své standardní hodnoty. Takový režim lze použít pouze při žádném nebo sníženém zatížení motoru, protože při menších hodnotách napětí se současně zmenšuje točivý moment rotoru [11].

### 3.2.3 Brzdění indukčního stroje

Existují dva základní principy brzdění indukčních strojů: ztrátové a rekuperační brzdění [11].




*Obr. č. 7: Znázornění způsobů brzdění na momentové charakteristice indukčního stroje* (zdroj: vlastní)

Při ztrátovém brzdění dochází k přeměně kinetické energie v tepelnou energii. Principem je buď použití přítlakové pérové brzdy, nebo brzdění protiproudem (opačný směr točivého pole statoru), při kterém se obrací směr otáčení magnetického pole statoru na opačný a tím hodnota skluzu se stává větší než 1 [11].

U rekuperačního brzdění dochází k přeměně kinetické energie na elektrickou. Při nadsynchronním brzdění motor pracuje jako generátor, který je poháněn mechanicky spřaženým mechanismem. Energie, akumulovaná za rotorem, je vracená zpátky do sítě kvůli tomu, že rychlost otáčení magnetického pole rotoru je větší než u statoru, kterým začíná procházet indukovaný proud (záporná hodnota skluzu). [11]

### 3.2.4 Matematický model

Pro zjednodušení odvození matematického modelu dynamického chování indukčního stroje jsou zavedeny následující předpoklady:

- stroj je elektromechanicky symetrický,
- zanedbávají se ztráty v železných součástech motoru, hystereze a skin-efekt,

- vinutí jednotlivých fází jsou v prostoru symetricky rozložena v drážkách rotoru a statoru,
- vlastní a vzájemné indukčnosti statoru a rotoru nezávisí na proudech ve stroji.

Indukční stroj si lze pak představit jako systém $N$ elektrických obvodů, které jsou spolu magneticky svázány. Tyto vazby jsou definovány konstrukčním uspořádáním daného systému. Obecná rovnice takového elektrického obvodu je:

$$u_i(t) = R_i i_i(t) + \frac{d\Psi_i(t)}{dt} \tag{3.2.4.1}$$

kde $R_i$ představuje ohmický odpor jednotlivého obvodu [9].

Dále je uvažováno, že konstrukce indukčního stroje obsahuje tři cívky na statoru, uspořádané kruhově s rozestupem ve 120°, a zároveň i tři cívky na rotoru uspořádané stejným způsobem. Taková konstrukce dává celkem šest elektrických obvodů:

$$\begin{aligned} u_A(t) &= R_A i_A(t) + \frac{d\Psi_A(t)}{dt} & u_a(t) &= R_a i_a(t) + \frac{d\Psi_a(t)}{dt} \\ u_B(t) &= R_B i_B(t) + \frac{d\Psi_B(t)}{dt} & u_b(t) &= R_b i_b(t) + \frac{d\Psi_b(t)}{dt} \\ u_C(t) &= R_C i_C(t) + \frac{d\Psi_C(t)}{dt} & u_c(t) &= R_c i_c(t) + \frac{d\Psi_c(t)}{dt} \end{aligned} \tag{3.2.4.2}$$

kde rovnice s indexy $A$, $B$, $C$ představují obvody na rotoru a $a$, $b$, $c$ jsou indexy obvodů na statoru [9].

Jak již bylo zmíněno, celkovou indukčnost cívky lze brát jako sumu dvou složek: hlavní a rozptylové indukčnosti. Pokud bude uvažováno, že cívky na rotoru a statoru mají stejné vlastnosti, lze tvrdit, že jejich hlavní indukčnosti se rovnají vzájemné indukčnosti libovolné dvojice cívek rotoru a statoru (pokud jejich osy jsou totožné):

$$L_{hA} = L_{hB} = L_{hC} = L_{ha} = L_{hb} = L_{hc} = M \tag{3.2.4.3}$$

Na základě tohoto tvrzení lze definovat celkovou indukčnost jedné fáze statoru bez vlivu ostatních fází statoru a rotorového vinutí:

$$L_s = M + L_{rs} \tag{3.2.4.4}$$

Vzájemná indukčnost dvou libovolných fází statoru je pak:

$$-M_s = M \cos 120° = -\frac{M}{2} \rightarrow M_s = \frac{M}{2} \tag{3.2.4.5}$$

[13]

Záporná hodnota $M_s$ je následkem volby tzv. kladných smyslů – kladný směr elektrického proudu v cívce je definován od svorky k uzlu. Pokud v každé ze dvou fází prochází elektrický proud, vznikají magnetomotorická napětí. Vzhledem k tomu, že osy libovolných dvou fází jsou natočeny vůči sobě o 120° a elektrické proudy cívkami tečou v kladném smyslu, magnetomotorické napětí jedné fáze působí proti magnetomotorickému napětí druhé fáze, což se ve výsledku projevuje jako záporná vzájemná indukčnost těchto dvou fází [13].

Celková indukčnost jedné fáze trojfázového statoru, včetně vlivů ostatních fází statoru a bez vlivu rotorového vinutí, je:

$$L_d = L_s + M_s = \frac{3}{2}M + L_{rs} \tag{3.2.4.6}$$

Ovšem je vhodné počítat s tím, že cívky na statoru i rotoru mají jak různý počet vinutí, tak i různé vlastnosti. Proto může být vhodné redefinovat hodnoty $L_s$ a $M_s$:

$$L_s = M\frac{N_s k_{vs}}{N_r k_{vr}} \quad M_s = \frac{M}{2}\frac{N_s k_{vs}}{N_r k_{vr}} \tag{3.2.4.7}$$

kde $N_s$, $N_r$ je počet vinutí jedné cívky na statoru/rotoru; $k_{vs}$, $k_{vr}$ jsou činitele vinutí na statoru/rotoru [13].

Stejným postupem lze odvodit rovnice pro fáze rotoru:

$$\begin{array}{ccc} L_r = M + L_{rr} & & L_r = M\dfrac{N_r k_{vr}}{N_s k_{vs}} \\ M_r = \dfrac{M}{2} & nebo & M_r = \dfrac{M}{2}\dfrac{N_r k_{vr}}{N_s k_{vs}} \\ & L_D = \dfrac{3}{2}M + L_{rr} & \end{array} \tag{3.2.4.8}$$

Dále je nutné určit spřažené magnetické toky jednotlivých fází na statoru a rotoru. Tyto magnetické toky jsou složeny jak z toků generovaných vlastní cívkou, tak i z toků ostatních cívek. Například spřažený magnetický tok pro fázi $a$ na statoru je:

$$\Psi_a(t) = L_s i_a(t) - M_s i_b(t) - M_s i_c(t) + M\cos\alpha\, i_A(t) + M\cos\beta\, i_B(t) + M\cos\gamma\, i_C(t) \tag{3.2.4.9}$$

kde

$\alpha = \vartheta_e(t), \beta = \vartheta_e(t) + 120°, \gamma = \vartheta_e(t) - 120°, \vartheta_e(t)$ je elektrický úhel stroje.

$\vartheta_e(t) = p_p\vartheta(t)$, $p_p$ označuje počet pólových párů sever-jih. [13]

Derivace spřaženého magnetického toku fáze $a$ na statoru podle času je:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_a(t)}{dt} &= L_s \frac{di_a(t)}{dt} - M_s \frac{di_b(t)}{dt} - M_s \frac{di_c(t)}{dt} + A + B + C \\
A &= \frac{d(Mi_A(t)\cos\alpha)}{dt} = M \frac{di_A(t)}{dt}\cos\alpha - \omega_e(t) M i_A(t)\sin\alpha \\
B &= \frac{d(Mi_B(t)\cos\beta)}{dt} = M \frac{di_B(t)}{dt}\cos\beta - \omega_e(t) M i_B(t)\sin\beta \\
C &= \frac{d(Mi_C(t)\cos\gamma)}{dt} = M \frac{di_C(t)}{dt}\cos\gamma - \omega_e(t) M i_C(t)\sin\gamma
\end{aligned} \tag{3.2.4.10}$$

kde $\omega_e(t) = \frac{d\vartheta_e(t)}{dt}$ je elektrická otáčivá rychlost stroje.

Napětí fáze $a$ na statoru je pak:

$$u_a(t) = R_s i_a(t) + \frac{d\Psi_a(t)}{dt} = \left(R_s + \frac{dL_s}{dt}\right) i_a(t) - M_s \frac{di_b(t)}{dt} - M_s \frac{di_c(t)}{dt} + A + B + C \tag{3.2.4.11}$$

Jelikož ve zvolené konstrukci indukčního stroje se celkově používá šest cívek, jejich rovnice bude vhodné zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} u_s(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_{sr}(t) \\ Z_{sr}(t) & Z_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_s(t) \\ i_r(t) \end{bmatrix} \tag{3.2.4.12}$$

kde

$$u_s(t) = \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}; \quad u_r(t) = \begin{bmatrix} u_A(t) \\ u_B(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}; \quad i_s(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix}; \quad i_r(t) = \begin{bmatrix} i_A(t) \\ i_B(t) \\ i_C(t) \end{bmatrix}; \tag{3.2.4.13}$$

$$Z_s = \begin{bmatrix} R_s + \frac{dL_s}{dt} & -\frac{dM_s}{dt} & -\frac{dM_s}{dt} \\ -\frac{dM_s}{dt} & R_s + \frac{dL_s}{dt} & -\frac{dM_s}{dt} \\ -\frac{dM_s}{dt} & -\frac{dM_s}{dt} & R_s + \frac{dL_s}{dt} \end{bmatrix}; \quad Z_r = \begin{bmatrix} R_r + \frac{dL_r}{dt} & -\frac{dM_r}{dt} & -\frac{dM_r}{dt} \\ -\frac{dM_r}{dt} & R_r + \frac{dL_r}{dt} & -\frac{dM_r}{dt} \\ -\frac{dM_r}{dt} & -\frac{dM_r}{dt} & R_r + \frac{dL_r}{dt} \end{bmatrix}; \tag{3.2.4.14}$$

$$Z_{sr}(t) = \begin{bmatrix} M\cos\alpha\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\alpha & M\cos\beta\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\beta & M\cos\gamma\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\gamma \\ M\cos\gamma\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\gamma & M\cos\alpha\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\alpha & M\cos\beta\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\beta \\ M\cos\beta\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\beta & M\cos\gamma\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\gamma & M\cos\alpha\frac{d}{dt} - \omega_e M\sin\alpha \end{bmatrix}; \tag{3.2.4.15}$$

$R_s$, $R_r$ je odpor fáze statoru, resp. rotoru stroje [9].

### 3.2.5 Transformace trojfázového systému na dvoufázový

Vzhledem k tomu, že se jedná o symetrický stroj s harmonickým rozložením vinutí, lze zjednodušit uvedené rovnice odstraněním harmonických složek použitím Parkovy transformace neboli reálné lineární transformace do soustavy ortogonálních souřadných os $d - q$. Tím se trojfázový systém přemění na dvoufázový. Pro stator bude platit:

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_d \cos\vartheta_k & k_d \cos(\vartheta_k - 120°) & k_d \cos(\vartheta_k + 120°) \\ -k_q \sin\vartheta_k & -k_q \sin(\vartheta_k - 120°) & -k_q \sin(\vartheta_k + 120°) \\ k_o & k_o & k_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (3.2.5.1)$$

a pro rotor:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ x_Q \\ x_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_D \cos(\vartheta_k - \vartheta) & k_D \cos(\vartheta_k - \vartheta - 120°) & k_D \cos(\vartheta_k - \vartheta + 120°) \\ -k_Q \sin(\vartheta_k - \vartheta) & -k_Q \sin(\vartheta_k - \vartheta - 120°) & -k_Q \sin(\vartheta_k - \vartheta + 120°) \\ k_O & k_O & k_O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} \quad (3.2.5.2)$$

[13]

Tato transformace je jednoznačná, ale podmínkou je aby koeficienty $k_d$, $k_q$ a $k_o$ nebyly nulové. Jejich zvolené hodnoty mohou být libovolné, ale lepší bude volba $k_d = k_q = \frac{2}{3}$ a $k_o = \frac{1}{3}$ aby transformace hodnot byla výkonově invariantní. Totéž platí i pro transformační koeficienty rotoru. Hodnota $\vartheta_k$ představuje obecně volený úhel transformace $\vartheta_k = \omega_k t$, kterému odpovídá transformační úhlová rychlost $\omega_k$. Touto rychlostí rotuje soustava souřadnic $d, q$. Úhel $\vartheta_k$ lze volit libovolně, ale je potřeba si uvědomit, že tato volba má vliv na obtížnost řešení. Proměnná $x$ představuje fyzikální veličinu, u níž je provedena transformace [13].

Na základě uvedených transformačních matic lze odvodit spřažený magnetický tok statoru v ose $d$:

$$\Psi_d = k_d \left\{ \begin{matrix} [L_s i_a - M_s i_b - M_s i_c + M\cos\alpha\, i_A + M\cos\beta\, i_B + M\cos\gamma\, i_C] \cos\vartheta_k + \\ +[-M_s i_a + L_s i_b - M_s i_c + M\cos\gamma\, i_A + M\cos\alpha\, i_B + M\cos\beta\, i_C] \cos\left(\vartheta_k - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ +[-M_s i_a - M_s i_b + L_s i_c + M\cos\beta\, i_A + M\cos\gamma\, i_B + M\cos\alpha\, i_C] \cos\left(\vartheta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \end{matrix} \right\} \quad (3.2.5.3)$$

Danou rovnici lze zjednodušit pomocí následujících úprav a tvrzení:

- doplněním do rovnice členů $M_s i_i$ a $-M_s i_i$ pro proudy statoru,
- rovnice pro součin kosinů: $\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$,
- součet tří kosinů se rovná 0, pokud jejich úhly jsou posunuty o 120° vůči sobě.

Výsledkem bude upravená rovnice:

$$\Psi_d = k_d \left\{ \begin{matrix} (L_s + M_s)(i_a \cos\vartheta_k + i_b \cos(\vartheta_k - 120°) + i_c \cos(\vartheta_k + 120°)) + \\ +\frac{3}{2} M(i_A \cos(\vartheta_k - \vartheta) + i_B \cos(\vartheta_k - \vartheta - 120°) + i_C \cos(\vartheta_k - \vartheta + 120°)) \end{matrix} \right\} \quad (3.2.5.4)$$

Jednotlivé části této rovnice představují tyto pojmy:

- celková indukčnost transformovaného statorového vinutí $L_d$,

$$L_d = L_s + M_s \tag{3.2.5.5}$$

- vzájemná indukčnost transformovaných vinutí statoru a rotoru $L_{dD}$ a $L_{Dd}$

$$L_{dD} = L_{Dd} = L_m = \frac{3}{2}M \tag{3.2.5.6}$$

- transformovaný proud $i_d$

$$i_d = k_d(i_a \cos\vartheta_k + i_b \cos(\vartheta_k - 120°) + i_c \cos(\vartheta_k + 120°)) \tag{3.2.5.7}$$

- transformovaný proud $i_D$

$$i_D = k_d(i_A \cos(\vartheta_k - \vartheta) + i_B \cos(\vartheta_k - \vartheta - 120°) + i_C \cos(\vartheta_k - \vartheta + 120°)) \tag{3.2.5.8}$$

Výsledná rovnice pro spřažený magnetický tok statoru v ose $d$ se pak zjednoduší na tento výraz:

$$\Psi_d = L_d i_d + L_m i_D \tag{3.2.5.9}$$

Podobným způsobem lze získat rovnice pro spřažený magnetický tok jak pro rotor v ose $d$, tak i pro stator a rotor v ose $q$. Je také uvažováno, že $L_q = L_d$, $L_Q = L_D$ a $L_{qQ} = L_{Qq} = L_m$:

$$\Psi_D = L_m i_d + L_D i_D \tag{3.2.5.10}$$

$$\Psi_D = L_m i_d + L_D i_D \tag{3.2.5.11}$$

$$\Psi_q = L_d i_q + L_m i_Q \tag{3.2.5.12}$$

$$\Psi_Q = L_m i_q + L_D i_Q \tag{3.2.5.13}$$

$$\Psi_o = L_o i_o \tag{3.2.5.14}$$

$$\Psi_O = L_O i_O \tag{3.2.5.15}$$

[13]

Pro odvození stavových rovnic indukčního motoru je nutné uvést tvar zpětné Parkovy transformace:

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos\vartheta_k & -\frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin\vartheta_k & \frac{1}{k_o}\frac{1}{3} \\ \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos(\vartheta_k - 120°) & -\frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin(\vartheta_k - 120°) & \frac{1}{k_o}\frac{1}{3} \\ \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos(\vartheta_k + 120°) & -\frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin(\vartheta_k + 120°) & \frac{1}{k_o}\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_o \end{bmatrix} \tag{3.2.5.16}$$

Pak lze transformaci napěťových rovnic provést pomocí rovnice pro jednu fázi statoru:

$$u_a = R_s i_a + \frac{d\Psi_a}{dt} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos\vartheta_k\, u_d - \frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin\vartheta_k\, u_q + \frac{1}{k_o}\frac{1}{3}u_o = \\ &= R_s\left(\frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos\vartheta_k\, i_d - \frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin\vartheta_k\, i_q + \frac{1}{k_o}\frac{1}{3}i_o\right) + \\ &+ \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\left(\frac{d\Psi_d}{dt}\cos\vartheta_k - \Psi_d\sin\vartheta_k\,\omega_k\right) - \\ &- \frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\left(\frac{d\Psi_q}{dt}\cos\vartheta_k - \Psi_q\sin\vartheta_k\,\omega_k\right) + \\ &+ \frac{1}{k_o}\frac{1}{3}\frac{d\Psi_o}{dt} \end{aligned} \tag{3.2.5.17}$$

Z dané rovnice při porovnání členů s $\cos\vartheta_k$ a $\sin\vartheta_k$ lze vytvořit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos\vartheta_k\, u_d &= \frac{1}{k_d}\frac{2}{3}\cos\vartheta_k\left(R_s i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q\omega_k\right) \\ -\frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin\vartheta_k\, u_q &= -\frac{1}{k_q}\frac{2}{3}\sin\vartheta_k\left(R_s i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d\omega_k\right) \\ \frac{1}{k_o}\frac{1}{3}u_o &= \frac{1}{k_o}\frac{1}{3}\left(R_s i_o + \frac{d\Psi_o}{dt}\right) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_d &= R_s i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q\omega_k \\ u_q &= R_s i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d\omega_k \\ u_o &= R_s i_o + \frac{d\Psi_o}{dt} \end{aligned} \tag{3.2.5.18}$$

Podobným postupem v transformovaných osách lze odvodit napěťové rovnice i pro rotor:

$$\begin{aligned} u_D &= R_r i_D + \frac{d\Psi_D}{dt} - \Psi_Q(\omega_k - \omega_r) \\ u_Q &= R_r i_Q + \frac{d\Psi_Q}{dt} - \Psi_D(\omega_k - \omega_r) \\ u_O &= R_r i_O + \frac{d\Psi_O}{dt} \end{aligned} \tag{3.2.5.19}$$

kde $\omega_r$ je rychlost otáčení rotoru [13].

Výsledné rovnice indukčního stroje se zapojením nakrátko jsou:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= R_s i_d(t) + L_d\frac{di_d(t)}{dt} + L_m\frac{di_D(t)}{dt} - \omega_k\left(L_d i_q(t) + L_m i_Q(t)\right) \\ u_q(t) &= R_s i_q(t) + L_d\frac{di_q(t)}{dt} + L_m\frac{di_Q(t)}{dt} + \omega_k\left(L_d i_d(t) + L_m i_D(t)\right) \\ R_r i_D(t) + L_D\frac{di_D(t)}{dt} &+ L_m\frac{di_d(t)}{dt} - \left(\omega_k - \omega_e(t)\right)\left(L_D i_Q(t) + L_m i_q(t)\right) = 0 \\ R_r i_Q(t) + L_D\frac{di_Q(t)}{dt} &+ L_m\frac{di_q(t)}{dt} + \left(\omega_k - \omega_e(t)\right)\left(L_D i_D(t) + L_m i_d(t)\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.5.20}$$

kde hodnota $\omega_e$ představuje elektrickou rychlost otáčení stroje. Vnitřní moment stroje je pak určen vztahem:

$$m_{int}(t) = p_p L_m\left(i_D(t)i_q(t) - i_Q(t)i_d(t)\right) \tag{3.2.5.21}$$

Bude-li transformační úhlová rychlost $\omega_k$ nulová, rovnice indukčního stroje se zjednoduší na:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= R_s i_d(t) + L_d \frac{di_d(t)}{dt} + L_m \frac{di_D(t)}{dt} \\ u_q(t) &= R_s i_q(t) + L_d \frac{di_q(t)}{dt} + L_m \frac{di_Q(t)}{dt} \\ R_r i_D(t) + L_D \frac{di_D(t)}{dt} + L_m \frac{di_d(t)}{dt} &+ p_p \omega(t) \left( L_D i_Q(t) + L_m i_q(t) \right) = 0 \\ R_r i_Q(t) + L_D \frac{di_Q(t)}{dt} + L_m \frac{di_q(t)}{dt} &- p_p \omega(t) \left( L_D i_D(t) + L_m i_d(t) \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.5.22}$$

Dané rovnice jsou platné, pokud je stator indukčního stroje zapojen do hvězdy s nevyvedeným středem [9].

# 4 VEKTOROVÉ ŘÍZENÍ INDUKČNÍHO STROJE

Cílem volby vektorového řízeni je snaha zjednodušit proces řízení vnitřního mechanického točivého momentu indukčního stroje. Po určitých transformacích rovnice indukčního stroje budou podobné rovnicím stejnosměrného stroje, který je znám jako snadno řiditelný.

## 4.1 Definice rotujícího vektoru magnetického toku

Je uvažován model indukčního stroje obsahující tři vinutí pootočená vůči sobě o 120°. Stator je napájen trojfázovým střídavým proudem, jehož fáze jsou posunuty rovněž o 120° [14].

Nechť velikosti spřažených magnetických toků jako funkce času jsou:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\psi_1}(t)\right| &= \psi_m \sin(\omega t - 150°) \\ \left|\overrightarrow{\psi_2}(t)\right| &= \psi_m \sin(\omega t - 30°) \\ \left|\overrightarrow{\psi_3}(t)\right| &= \psi_m \sin(\omega t - 270°) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

kde $\omega$ je kruhová frekvence napájecího proudu, $\psi_m$ je amplituda délky spřažených magnetických toků.

Pak v souřadné soustavě $O_{x,y}$ budou vektory spřažených magnetických toků mít následující souřadnice:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi_1}(t) &= \left|\overrightarrow{\psi_1}(t)\right|(\cos(150°)\,\hat{\imath} + \sin(150°)\,\hat{\jmath}) = \left|\overrightarrow{\psi_1}(t)\right|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) \\ \overrightarrow{\psi_2}(t) &= \left|\overrightarrow{\psi_2}(t)\right|(\cos(30°)\,\hat{\imath} + \sin(30°)\,\hat{\jmath}) = \left|\overrightarrow{\psi_2}(t)\right|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) \\ \overrightarrow{\psi_3}(t) &= \left|\overrightarrow{\psi_3}(t)\right|(\cos(270°)\,\hat{\imath} + \sin(270°)\,\hat{\jmath}) = \left|\overrightarrow{\psi_3}(t)\right|(0\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

kde $\hat{\imath}$ a $\hat{\jmath}$ jsou jednotkové vektory v osách $x$ a $y$.

Výsledný vektor spřaženého toku je pak součtem těchto tří vektorů:

$$\vec{\psi}(t) = \overrightarrow{\psi_1}(t) + \overrightarrow{\psi_2}(t) + \overrightarrow{\psi_3}(t) \tag{4.1.3}$$

$$\vec{\psi}(t) = \left|\overrightarrow{\psi_1}(t)\right|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \left|\overrightarrow{\psi_2}(t)\right|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \left|\overrightarrow{\psi_3}(t)\right|(0\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}) \tag{4.1.4}$$

$$\vec{\psi}(t) = \psi_m \begin{pmatrix} \sin(\omega t - 150°)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \\ + \sin(\omega t - 30°)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \\ + \sin(\omega t - 270°)\,(0\hat{\imath} - 1\hat{\jmath}) \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

$$\vec{\psi}(t) = \psi_m \left( \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t - 150°) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t - 30°) + \\ +0\sin(\omega t - 270°) \end{pmatrix} \hat{\imath} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(\omega t - 150°) + \\ + \frac{1}{2}\sin(\omega t - 30°) - \\ -1\sin(\omega t - 270°) \end{pmatrix} \hat{\jmath} \right) =$$

$$= \psi_m \left( \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\omega t\cos 150° - \cos\omega t\sin 150°) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\omega t\cos 30° - \cos\omega t\sin 30°) \end{pmatrix} \hat{\imath} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sin\omega t\cos 150° - \cos\omega t\sin 150°) + \\ + \frac{1}{2}(\sin\omega t\cos 30° - \cos\omega t\sin 30°) - \\ -1(\sin\omega t\cos 270° - \cos\omega t\sin 270°) \end{pmatrix} \hat{\jmath} \right) = \tag{4.1.6}$$

$$= \psi_m \left( \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t - \frac{1}{2}\cos\omega t\right) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t - \frac{1}{2}\cos\omega t\right) \end{pmatrix} \hat{\imath} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t - \frac{1}{2}\cos\omega t\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega t - \frac{1}{2}\cos\omega t\right) - \\ -1\cos\omega t \end{pmatrix} \hat{\jmath} \right)$$

$$\vec{\psi}(t) = \psi_m \left( \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\sin\omega t + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t\right) + \\ + \left(\frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\omega t\right) \end{pmatrix} \hat{\imath} + \begin{pmatrix} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\cos\omega t\right) + \\ + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\cos\omega t\right) - \\ -\cos\omega t \end{pmatrix} \hat{\jmath} \right) \tag{4.1.7}$$

$$\vec{\psi}(t) = \psi_m \left( \left(\frac{3}{2}\sin\omega t\right)\hat{\imath} - \left(\frac{3}{2}\cos\omega t\right)\hat{\jmath} \right) = \frac{3}{2}\psi_m\big((\sin\omega t)\hat{\imath} - (\cos\omega t)\hat{\jmath}\big) \tag{4.1.8}$$

Délka tohoto vektoru je pak určena vztahem:

$$\left|\vec{\psi}(t)\right| = \sqrt{\frac{3}{2}\psi_m} \tag{4.1.9}$$

Pro úhel $\varphi$ vektoru $\vec{\psi}(t)$, počítaný od osy $x$, pak platí:

$$\varphi\left(\vec{\psi}(t)\right) = -\frac{\left|\overrightarrow{\psi_2}(t)\right|}{\left|\overrightarrow{\psi_1}(t)\right|} = -\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t} = -\tan\omega t \tag{4.1.10}$$

[14]

## 4.2 Převod do Gaussovy roviny komplexních čísel

Rovnice indukčního stroje, napsané v soustavě souřadnic $d - q$ lze převést do Gaussovy roviny komplexních čísel:

$$u_s(t) = u_d(t) + iu_q(t) \quad i_s(t) = i_d(t) + ii_q(t) \quad i_r(t) = i_D(t) + ii_Q(t) \tag{4.2.1}$$

Pro spřažené magnetické toky statoru a rotoru bude platit:

$$\begin{gathered} \Psi_s(t) = L_d i_s(t) + L_m i_r(t) = \left(L_d i_d(t) + L_m i_D(t)\right) + i\left(L_d i_q(t) + L_m i_Q(t)\right) \\ \Psi_s(t) = \Psi_d(t) + i\Psi_q(t) \end{gathered} \tag{4.2.2}$$

$$\begin{gathered} \Psi_r(t) = L_D i_r(t) + L_m i_s(t) = \left(L_D i_D(t) + L_m i_d(t)\right) + i\left(L_D i_Q(t) + L_m i_q(t)\right) \\ \Psi_r(t) = \Psi_D(t) + i\Psi_Q(t) \end{gathered} \tag{4.2.3}$$

Pak rovnice indukčního stroje napsané v soustavě souřadnic $d - q$ otáčející se rychlostí vektoru statorového toku $\omega_s$, budou následující:

$$u_s(t) = R_s i_s(t) + \frac{d\Psi_s(t)}{dt} + i\Psi_s(t)\omega_s(t) \tag{4.2.4}$$

$$R_r i_r(t) + \frac{d\Psi_r(t)}{dt} + is\Psi_s(t)\omega_s(t) = 0 \tag{4.2.5}$$

$$m_{int}(t) = p_p L_m Im\left(i_s(t) i_r^*(t)\right) \tag{4.2.6}$$

kde $s$ je komplexní proměnná a $i_r^*(t) = i_D(t) - ii_Q(t)$ – komplexně sdružené číslo k $i_r(t)$ [9].

## 4.3 Princip vektorového řízení indukčního stroje

Reálnou osu Gaussovy souřadnicové soustavy lze spojit s vektorem $\Psi_r(t)$ při uvažování, že tento vektor se otáčí rychlostí $\omega_s$ vůči absolutní soustavě souřadnic. To znamená, že pro proud rotorem $i_r(t)$ lze odvodit vztah:

$$\Psi_r(t) = Re\left(\Psi_r(t)\right) = L_D i_r(t) + L_m i_s(t) \rightarrow i_r(t) = \frac{Re\left(\Psi_r(t)\right) - L_m i_s(t)}{L_D} \tag{4.3.1}$$

Druhá rovnice indukčního stroje se změní na následující:

$$R_r \frac{Re\left(\Psi_r(t)\right) - L_m i_s(t)}{L_D} + \frac{dRe\left(\Psi_r(t)\right)}{dt} + isRe\left(\Psi_r(t)\right)\omega_s(t) = 0 \tag{4.3.2}$$

Z této rovnice lze porovnáváním reálných a imaginárních částí dostat další dva vztahy:

$$\frac{Re(\Psi_r(t))}{\tau_r} - \frac{L_m i_d(t)}{\tau_r} + \frac{dRe(\Psi_r(t))}{dt} = 0 \rightarrow i_d(t) = \tau_r \frac{di_{mr}(t)}{dt} + i_{mr}(t) \tag{4.3.3}$$

$$-\frac{L_m i_q(t)}{\tau_r} + sRe(\Psi_r(t))\omega_s(t) = 0 \rightarrow s\omega_s(t) = \frac{i_q(t)}{\tau_r i_{mr}(t)} \tag{4.3.4}$$

Je také uvažováno že:

- $\frac{L_D}{R_r} = \tau_r$, kde $\tau_r$ je elektrická časová konstanta rotorového obvodu,
- $Re(i_s(t)) = i_d(t)$ a $Im(i_s(t)) = i_q(t)$,
- $\frac{Re(\Psi_r(t))}{L_m} = i_{mr}(t)$, kde $i_{mr}(t)$ je magnetizační proud rotoru.

Vztah, který definuje proud rotorem, lze upravit a najít pro něj komplexně sdružené číslo:

$$i_r(t) = \frac{Re(\Psi_r(t)) - L_m\left(i_d(t) + i i_q(t)\right)}{L_D} = \frac{Re(\Psi_r(t)) - L_m(i_d(t))}{L_D} - i\frac{L_m i_q(t)}{L_D} \tag{4.3.5}$$

$$i_r{}^*(t) = \frac{Re(\Psi_r(t)) - L_m(i_d(t))}{L_D} + i\frac{L_m i_q(t)}{L_D} \tag{4.3.6}$$

Dosazením tohoto čísla do vztahu pro $m_{int}(t)$ a po několika úpravách vyjde rovnice:

$$m_{int}(t) = p_p \frac{L_m{}^2}{L_D} i_{mr}(t) i_q(t) \tag{4.3.7}$$

která je podobná rovnici vnitřního mechanického točivého momentu stejnosměrného stroje. Jednotlivé části této rovnice mají následující významy:

- $p_p \frac{L_m{}^2}{L_D}$ ve zvolené rozlišovací úrovni je konstantní a představuje konstantu motoru,
- $i_{mr}(t)$ je proud vytvářející magnetický tok stroje, řízený elektronicky pomocí proudu $i_d(t)$,
- proud $i_q(t)$ vytváří mechanický moment stroje a je říditelný elektronicky pomocí napětí na fázích statoru [9].

# II. PRAKTICKÁ ČÁST

# 5 ODVOZENÍ DYNAMICKÝCH ROVNIC INDUKČNÍHO STROJE

Modelování a simulace rychlostních servopohonů s indukčními stroji budou provedeny v simulačním systému DYNAST. Model indukčního stroje je vytvořen na základě částečně upravených rovnic indukčního stroje, uvedených na konci kapitoly 3.2.5.

## 5.1 Krátký popis simulačního systému DYNAST

DYNAST (DYNamika A STatika) – je softwarové řešení pro operační systém MS Windows, určené k simulaci a analýze chování dynamických soustav různých technických disciplín. Principem je složení dynamického systému ze základních prvků, kterými protéká energie, vyhodnocená na základě hodnot spadových a proudových veličin. Model dynamického systému může mít jak textový tvar, tak i grafický. Textový tvar má vlastní syntaxi pro popis systému, která je podrobně popsána v příručce k simulačnímu systému DYNAST. V grafickém tvaru lze systém definovat pomocí umístění jednotlivých prvků a jejích propojení mezi sebou. Princip propojení prvků je podobný jako při kreslení schémat elektrických obvodů.

*DYNAST dokáže simulovat nebo analyzovat nelineární dynamické soustavy zadané:*

- *implicitními algebraickými, diferenciálními nebo algebro-diferenciálními rovnicemi,*
- *fyzikálním schématem v grafické podobě charakterizující topologii reálných soustav (příslušné rovnice si pak DYNAST zformuluje automaticky sám),*
- *blokovým schématem s velmi univerzálními bloky včetně implicitních a s libovolnými algebraickými smyčkami,*
- *kombinacemi rovnic a fyzikálních i blokových schémat.*

*Pro takto zadané úlohy DYNAST umí vypočítat:*

- *přechodné odezvy na buzení a počáteční podmínky,*
- *statické nebo ustálené odezvy i jejich závislost na změnách parametrů,*
- *odezvy na malé i velké signály v okolí pracovního bodu,*
- *Fourierovu analýzu ustálených periodických odezev,*
- *linearizované modely v okolí pracovního bodu.*

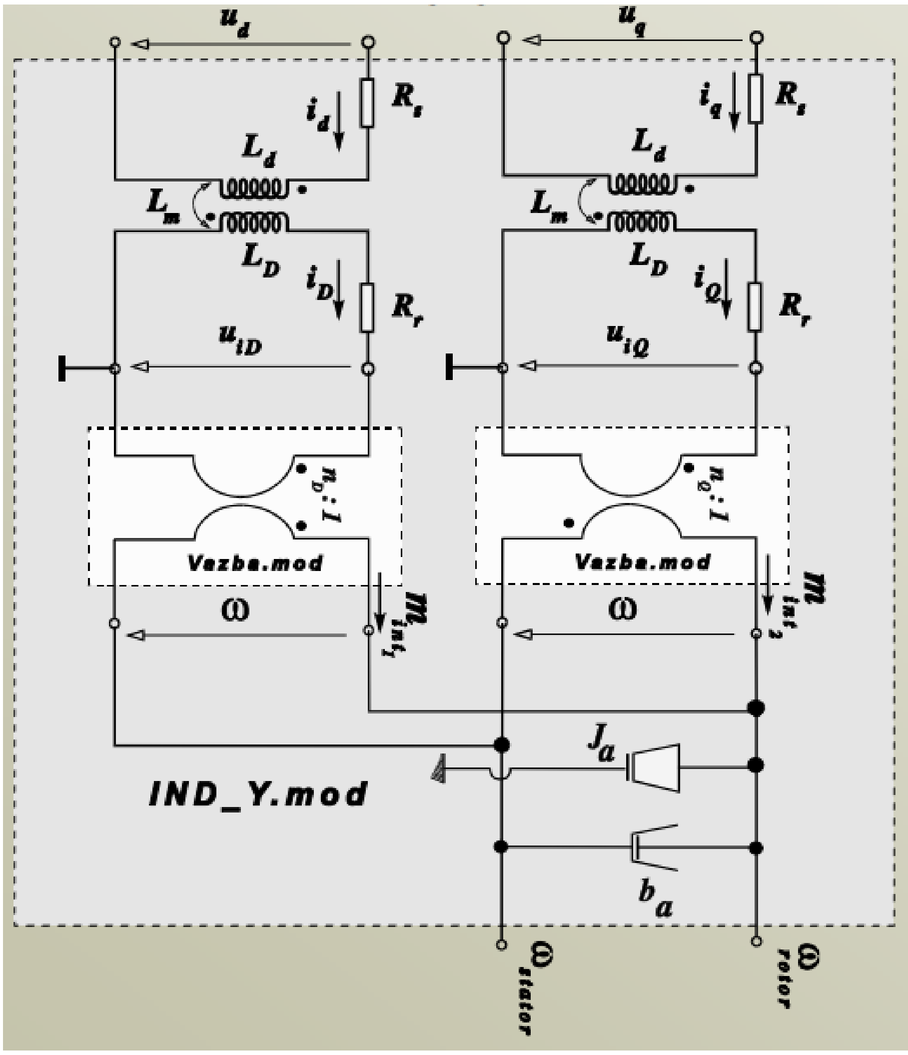
*Pro linearizované modely DYNAST vypočítá:*

- *Laplaceovy obrazy odezev na buzení i počáteční stav,*
- *časové charakteristiky a odezvy v semisymbolickém tvaru,*
- *přenosové funkce a jejich koeficienty i kořeny jejich polynomů,*
- *složky frekvenčních charakteristik přenosových funkcí* [15].

## 5.2 Model proudově napájeného indukčního stroje

Standardní model indukčního stroje v programu DYNAST obsahuje pět potenciálových pólů, z nichž tři jsou elektrické a představují vstupy pro trojfázový střídavý proud (póly *sa*, *sb* a *sc*) a dva zbývající jsou mechanické: úhlové rychlosti rotoru *wr* a statoru *ws*. Pól *ws* se v běžné aplikaci stroje používá jako referenční – tedy nulový. V robotických aplikacích je potřeba uvažovat oba potenciálové póly jako nenulové.

Výchozím bodem je bránové schéma indukčního stroje v $d - q$ osách:




*Obr. č. 8: Bránové schéma indukčního stroje v $d - q$ osách* (zdroj: [9])

Danému schématu odpovídá soustava rovnic indukčního stroje v $d$, $q$ osách při $\omega_k = 0$:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= R_s i_d(t) + L_d \frac{di_d(t)}{dt} + L_m \frac{di_D(t)}{dt} \\ u_q(t) &= R_s i_q(t) + L_d \frac{di_q(t)}{dt} + L_m \frac{di_Q(t)}{dt} \\ R_r i_D(t) + L_D \frac{di_D(t)}{dt} &+ L_m \frac{di_d(t)}{dt} + n_D(t)\omega(t) = 0 \\ R_r i_Q(t) + L_D \frac{di_Q(t)}{dt} &+ L_m \frac{di_q(t)}{dt} - n_Q(t)\omega(t) = 0 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

kde vazby mezi bránami jsou:

$$\begin{aligned} n_D(t) &= p_p \left(L_D i_Q(t) + L_m i_q(t)\right) \\ n_Q(t) &= p_p \left(L_D i_D(t) + L_m i_d(t)\right) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

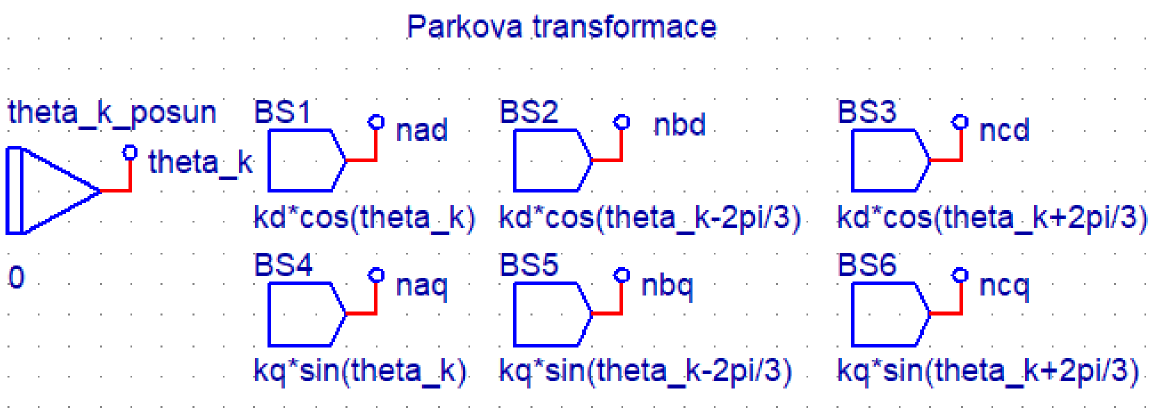
[9]

Vzhledem k tomu, že se jedná o proudově napájený stroj, bude vhodné upravit první a druhou rovnici ze soustavy:

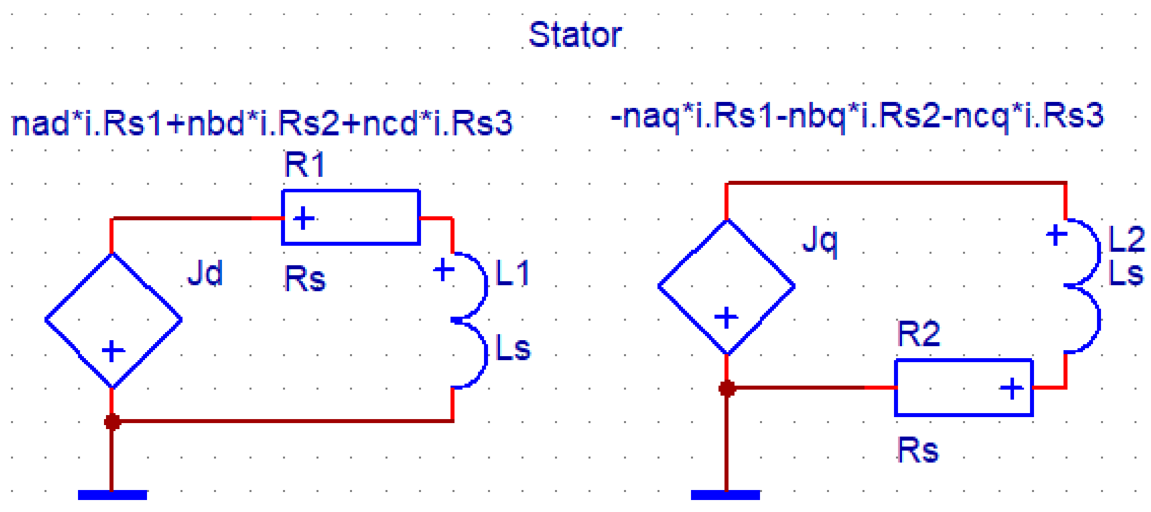
$$\begin{aligned} i_d(t) &= \frac{u_d(t)}{R_s} + \frac{\Psi_d(t)}{L_d} + \frac{\Psi_D(t)}{L_m} \\ i_q(t) &= \frac{u_q(t)}{R_s} + \frac{\Psi_q(t)}{L_d} + \frac{\Psi_Q(t)}{L_m} \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Proudy statorem v $d - q$ osách podle Parkovy transformace jsou (pro $\vartheta_k = 0°$):

$$\begin{aligned} i_d(t) &= \frac{2}{3}\cos(0°)\, i_a(t) + \frac{2}{3}\cos(-120°)\, i_b(t) + \frac{2}{3}\cos(120°)\, i_c(t) \\ i_q(t) &= -\frac{2}{3}\sin(0°)\, i_a(t) - \frac{2}{3}\sin(-120°)\, i_b(t) - \frac{2}{3}\sin(120°)\, i_c(t) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

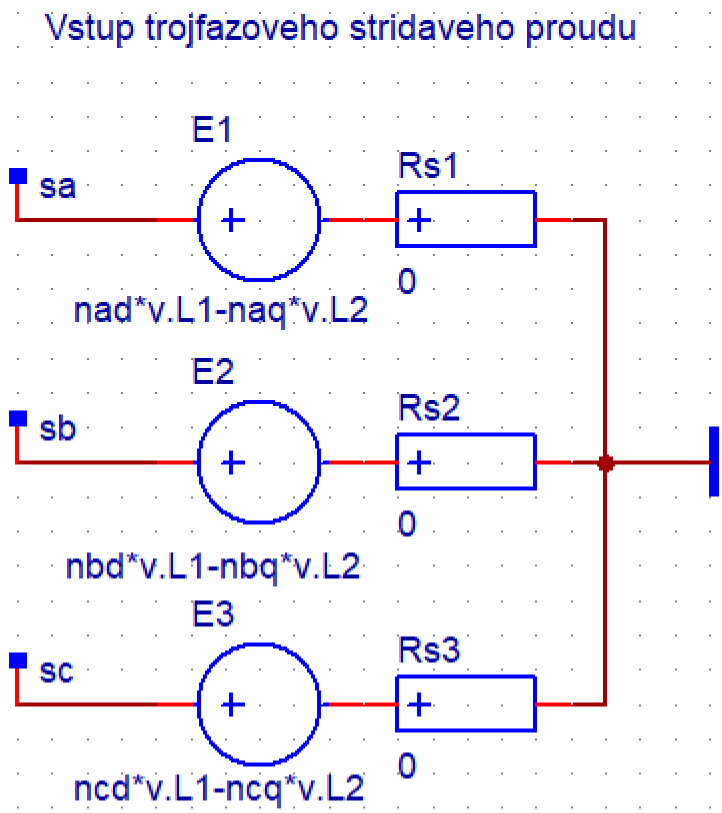



*Obr. č. 9: Parkova transformace – realizace v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)




*Obr. č. 10: Realizace rovnic statoru indukčního stroje v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

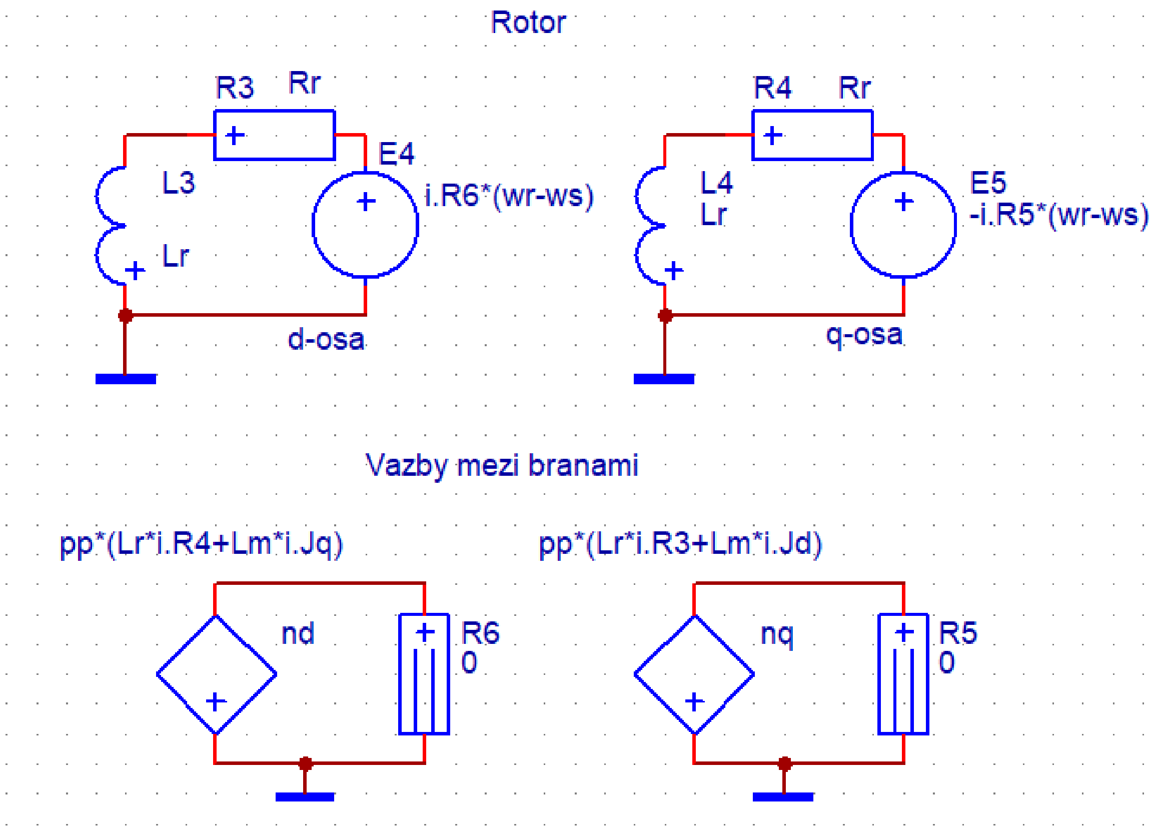
Dané obrázky představují realizaci elektromagnetických rovnic statoru indukčního stroje, uvedených na začátku této kapitoly, v programu DYNAST. Veličiny typu $nxy$ představuji jednotlivé rovnice Parkovy transformace. Na obrázku č. 10 jsou prvky typu $J_x$ brány jako zdroje proudu, které vyjadřují hodnotu proudu v příslušné ose, $R_x$ jsou odpory vinutí statoru, $L_s$- indukčnost statorového vinutí. Hodnotě $L_s$ odpovídá hodnota $L_d$.




*Obr. č. 11: Realizace vstupních proudů indukčního stroje v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

Pomocí daného schématu se určuje napětí na cívkách statoru, když jimi protékají proudy $i_a(t)$, $i_b(t)$ a $i_c(t)$.

Dále následuje realizace třetí a čtvrté rovnice ze soustavy rovnic indukčního stroje v programu DYNAST:

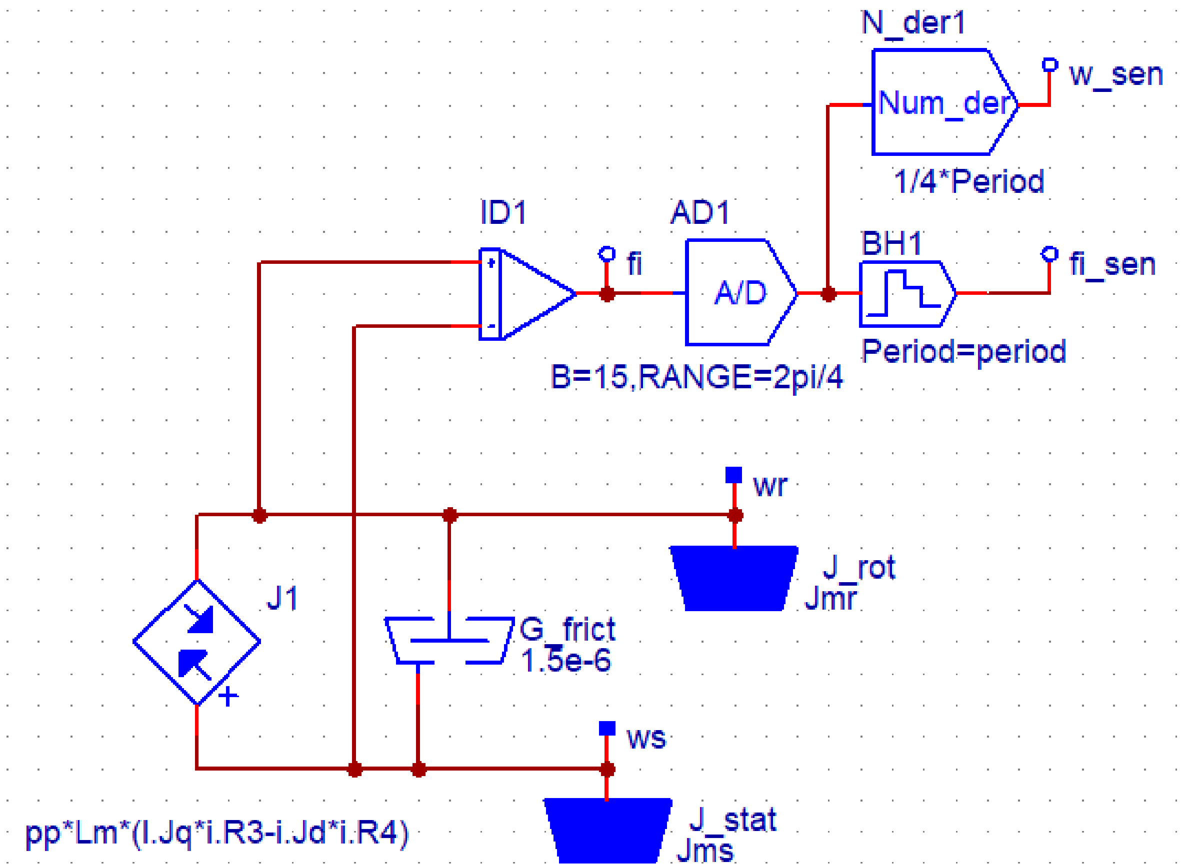



*Obr. č. 12: Realizace rovnic rotoru indukčního stroje a magnetické vazby mezi statorem a rotorem v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

V této části je realizována magnetická vazba mezi rotorem a statorem, a také vazba mezi elektrickou a mechanickou částí indukčního stroje. Prvky $R5$ a $R6$ představují nulový magnetický odpor, $L3$ a $L4$ jsou indukčnosti rotorového vinutí, které mají hodnotu $L_r$ ($L_D$).

Poslední částí modelu je výpočet vnitřního momentu stroje a rychlosti otáčení rotoru vůči statoru. Vnitřní moment stroje lze určit podle již uvedeného vztahu:

$$m_{int}(t) = p_p L_m \left(i_D(t) i_q(t) - i_Q(t) i_d(t)\right) \tag{5.2.5}$$




*Obr. č. 13: Realizace mechanické části rotoru a snímačů v programu DYNAST*
(zdroj: vlastní)

Tato část obsahuje výpočet vnitřního momentu stroje, vyjádřený jako zdroj momentu sil $J1$, pak výpočet rychlosti otáčení rotoru a statoru i realizaci digitálního snímače polohy rotoru. Frekvence snímání je 1 $kHz$. Další částí je také uvažování existence lineárního tření $G\_frict$ ve vzduchové mezeře mezi rotorem a statorem, jež lze spočítat podle vzorce:

$$m_{tr} = G(\omega_r - \omega_s) \tag{5.2.6}$$

Hodnoty $Jmr$ a $Jms$ určují momenty setrvačnosti rotoru a statoru.

Model v textovém formátu je uveden v příloze II.

## 5.3 Parametry modelu indukčního stroje

Pro návrh momentového servopohonu bude použit model indukčního stroje s těmito parametry:

*Tabulka 1: Parametry zvoleného indukčního stroje*

| **Název parametru** | **Označení** | **Hodnota [jednotka]** |
|---|---|---|
| Rozptylová indukčnost statorového vinutí | $L_{rs}$ | $1{,}2 \cdot 10^{-2}\ [H]$ |
| Rozptylová indukčnost rotorového vinutí | $L_{rr}$ | $1{,}7 \cdot 10^{-2}\ [H]$ |
| Vzájemná indukčnost vinutí rotoru a statoru | $L_m$ | $4{,}59\ \cdot 10^{-1}\ [H]$ |
| Odpor statorového vinutí | $R_s$ | $4{,}37\ [\Omega]$ |
| Odpor rotorového vinutí | $R_r$ | $2{,}95\ [\Omega]$ |
| Moment setrvačnosti rotoru | $J_{mr}$ | $1{,}5 \cdot 10^{-3}\ [kg \cdot m^2]$ |
| Moment setrvačnosti statoru | $J_{ms}$ | $1 \cdot 10^{-2}\ [kg \cdot m^2]$ |
| Počet pólových párů | $p_p$ | $2\ [-]$ |

Celkové indukčnosti statorového a rotorového vinutí jsou:

$$\begin{gathered} L_d = L_s = L_{rs} + L_m = 4{,}71 \cdot 10^{-1}\ [\mathrm{H}] \\ L_D = L_r = L_{rr} + L_m = 4{,}76 \cdot 10^{-1}\ [\mathrm{H}] \end{gathered} \tag{5.3.1}$$

Výpočet konstanty motoru a elektrické časové konstanty rotoru:

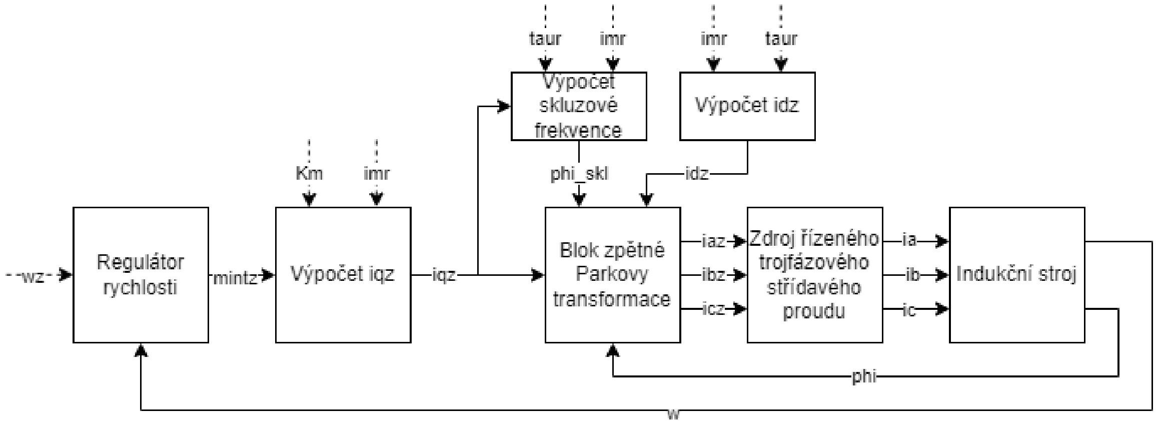
$$\begin{gathered} K_m = p_p \frac{{L_m}^2}{L_D} = 8{,}85 \cdot 10^{-1}\ [-] \\ \tau_r = \frac{L_D}{R_r} = 1{,}61 \cdot 10^{-1}\ [s] \end{gathered} \tag{5.3.2}$$

# 6 NÁVRH VEKTOROVÉHO ŘÍZENÍ MODELU INDUKČNÍHO STROJE

Při vektorovém řízení se ovládá rotující vektor magnetického toku na statoru na základě řízení proudů statorem, vypočtených podle žádané hodnoty vnitřního momentu stroje.

## 6.1 Blokové schéma vektorového řízení indukčního stroje

Následující blokové schéma ukazuje princip vektorového řízení indukčního stroje:




*Obr. č. 14: Blokové schéma vektorového řízení indukčního stroje* (zdroj: vlastní)

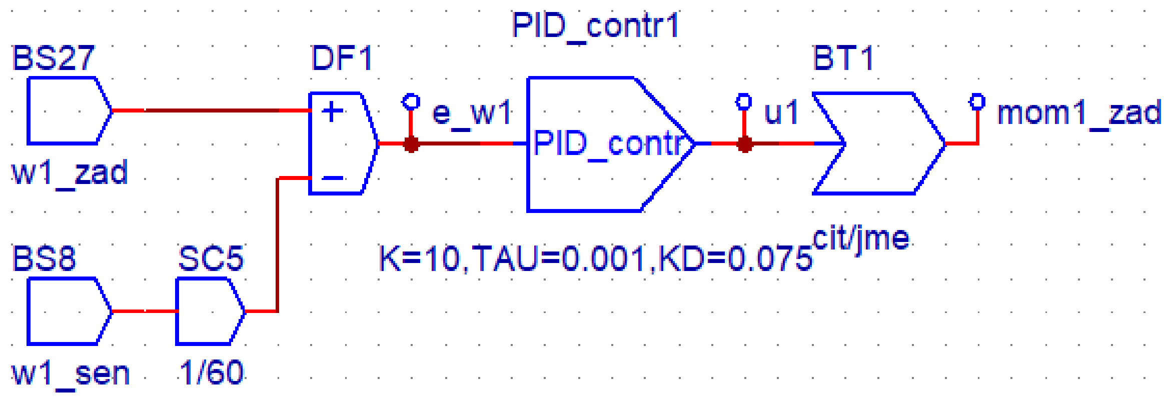
Předpokládá se, že blok odpovídající zdroji řízeného trojfázového střídavého proudu je schopen dodávat proudy do indukčního stroje přesně takové, jaké jsou potřeba.

## 6.2 Realizace vektorového řízení indukčního stroje v programu DYNAST

Výše uvedené blokové schéma se dá realizovat pomocí řady rovnic a blokových schémat.

### 6.2.1 Regulátor úhlové rychlosti

Regulace úhlové rychlosti je jednou z částí smyčky určené pro vektorové řízení stroje.




*Obr. č. 15: Realizace regulačního obvodu jednoho z indukčních strojů v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

Na obrázku č. 15 je znázorněno její blokové schéma v programu DYNAST. Toto schéma obsahuje PID regulátor a přenos, znázorňující náhradu zdroje momentu soustavou 1. řádu. Jedná se o systém, konvertující vstupní napěťový signál na točivý moment. Daný imaginární systém by měl mít lepší vlastnosti než reálný motor, aby regulátor byl schopen naplno využít potenciál reálného motoru.

Blok PID regulátoru představuje ideální spojitý PID regulátor, jehož přenos je:

$$G_R(s) = K + \frac{1}{\tau s} + K_D s \tag{6.2.1.1}$$

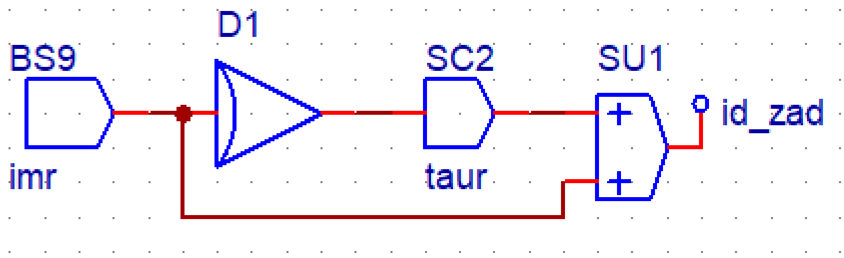
Výstup z tohoto regulátoru představuje analogový napěťový signál v rozmezí od $-10\ V$do $10\ V$. Regulační odchylka je vypočtena z rozdílu mezi požadovanou hodnotou úhlové rychlosti kinematické dvojice a její skutečnou úhlovou rychlostí. Blok $SC5$ upravuje požadovanou hodnotu úhlové rychlosti podle zvoleného převodového poměru. Výstupem z celkové regulační smyčky je požadovaná hodnota vnitřního momentu stroje – $m_{intž}$.

### 6.2.2 Výpočet žádaných proudů statorem

Rovnice pro výpočet hodnoty proudů $i_{dz}(t)$ je uvedena v kapitole 4.3:

$$i_{dž}(t) = \tau_r \frac{di_{mr}(t)}{dt} + i_{mr}(t) \tag{6.2.2.1}$$

V programu DYNAST jí odpovídá následující uspořádání bloků:




*Obr. č. 16: Realizace vztahu 6.2.2.1 v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

Blok $BS9$ představuje zvolenou hodnotu magnetizačního proudu rotoru. Pomocí bloku $D1$ je vypočtena časová změna proudu $i_{mr}$, která je v tomto modelu nulová, protože hodnota $i_{mr}$ je konstantní po celou dobu simulace.

Rovnici pro výpočet hodnoty proudu $i_{qz}(t)$ lze odvodit ze vztahu:

$$m_{int}(t) = K_m i_{mr}(t) i_q(t) \rightarrow i_q(t) = \frac{m_{int}(t)}{K_m i_{mr}(t)} \tag{6.2.2.2}$$

V programu DYNAST je tato rovnice definována ve formě textového příkazu:

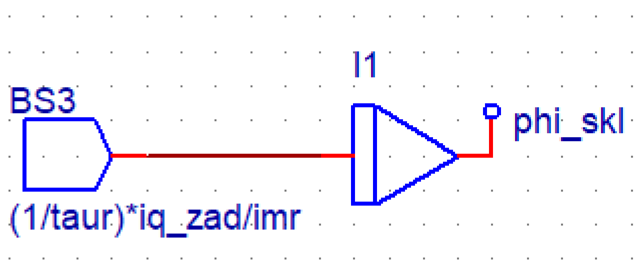
```
iq_zad = mom_zad/(Km*imr);
```

### 6.2.3 Výpočet skluzové frekvence

Skluzová frekvence může být vypočtena na základě hodnoty součinu skluzu a rychlosti otáčení fázoru statorového magnetického toku – $s \cdot \omega_s(t)$:

$$\varphi_{skl} = \int s \cdot \omega_s(t)\, dt = \int \frac{i_{dž}(t)}{\tau_r i_{mr}(t)} dt \tag{6.2.3.1}$$

Blokové schéma pro výpočet skluzové frekvence v programu DYNAST je:




Obr. č. 17: *Realizace vztahu 6.2.3.1 v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

Pomocí bloku $I1$ je provedeno integrování vztahu pro výpočet součinu $s \cdot \omega_s(t)$.

### 6.2.4 Zpětná Parkova transformace

Na základě výše odvozených veličin a vztahů pro zpětnou Parkovu transformaci lze spočítat hodnoty proudů $i_{až}(t)$, $i_{bž}(t)$ a $i_{cž}(t)$:

$$i_{až}(t) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\cos\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r\right) i_{dž}(t) - \frac{2}{3}\frac{3}{2}\sin\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r\right) i_{qž}(t) \qquad (6.2.4.1)$$

$$i_{bž}(t) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\cos\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r - 120°\right) i_{dž}(t) - \frac{2}{3}\frac{3}{2}\sin\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r - 120°\right) i_{qž}(t) \qquad (6.2.4.2)$$

$$i_{cž}(t) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\cos\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r + 120°\right) i_{dž}(t) - \frac{2}{3}\frac{3}{2}\sin\left(\varphi_{skl} + p_p\varphi_r + 120°\right) i_{qž}(t) \qquad (6.2.4.3)$$

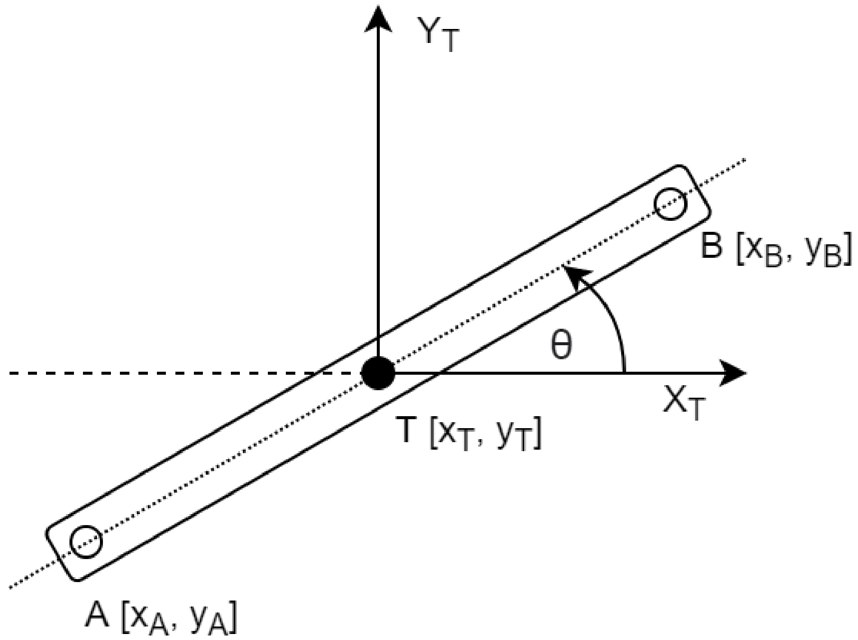
V programu DYNAST jsou tyto rovnice uvedeny v textovém tvaru:

```
ia = cos(phi_skl+pp*phi_mot)*id_zad-sin(phi_skl+
pp*phi_mot)*iq_zad;

ib = cos(phi_skl+pp*phi_mot-2pi/3)*id_zad-
sin(phi_skl+pp*phi_mot-2pi/3)*iq_zad;

ic = cos(phi_skl+pp*phi_mot+2pi/3)*id_zad-
sin(phi_skl+pp*phi_mot+2pi/3)*iq_zad;
```

# 7 NÁVRH A SIMULACE ŘÍZENÍ POHYBU KINEMATICKÉ DVOJICE

Mechanická soustava, jejíž rychlost pohybu bude řízena, je představena dvojicí ramen, jež jsou spojena v jednom bodě. Vzhledem k podobnému uspořádání ramen jako u SCARA robota bude modelování ramen provedeno ve 2D prostoru.

## 7.1 Zjednodušený model ramena




*Obr. č. 18: Model ramene ve 2D prostoru* (zdroj: vlastní)

Na obrázku je znázorněn model ramena v rovině, jehož těžiště je umístěno v bodě $T$. Moment setrvačnosti celého ramena je také vztažen k bodu $T$. Úseky $AT$ a $BT$ představují vzdálenosti bodů $A$ a $B$ od těžiště. Tyto vzdálenosti lze označit jako $l_A$ a $l_B$. Je uvažováno, že na body $A$ a $B$ lze připojovat další objekty, včetně referencí.

Souřadnice bodů $A$ a $B$ v soustavě souřadnic $[X_T, Y_T]$ jsou:

$$\begin{array}{ll} x_A(t) = l_A \cos\theta(t) & x_B(t) = l_B \cos\theta(t) \\ y_A(t) = l_A \sin\theta(t) & y_B(t) = l_B \sin\theta\,(t) \end{array} \qquad (7.1.1)$$

Jejich rychlosti pohybu podle jednotlivých os (časové derivace) jsou:

$$\begin{array}{ll} v_{xA}(t) = \dfrac{dx_A(t)}{dt} = -l_A \sin\theta(t) & v_{xB}(t) = \dfrac{dx_B(t)}{dt} = -l_B \sin\theta(t) \\ v_{yA}(t) = \dfrac{dy_A(t)}{dt} = l_A \cos\theta(t) & v_{yB}(t) = \dfrac{dy_B(t)}{dt} = l_B \cos\theta(t) \end{array} \qquad (7.1.2)$$

„Zdrojem" rychlosti bodu může být jak působení vnější síly na rameno tak i pohyb, způsobený rotací celého ramena kolem osy $z$, kolmé na osy roviny $x$ a $y$. Pokud osa $z$ bude procházet bodem $T$, který je navíc pevně zafixován, jakýkoliv vektor rychlosti bodu $A$ podle nějaké osy bude kompenzován vektorem rychlosti bodu $B$ stejné velikosti a podle stejné osy, ale tento vektor bude mít opačný směr. Toto tvrzení lze zapsat těmito rovniemi:

$$\begin{gathered} v_{xT}(t) = v_{yT}(t) = 0 \\ v_{xA}(t) = -v_{xB}(t) \\ v_{yA}(t) = -v_{yB}(t) \end{gathered} \tag{7.1.3}$$

Pomocí následujících vztahů lze propojit rychlost otáčení kolem osy $z$ s vektory rychlosti bodu podle jednotlivých os:

$$\begin{matrix} v_{xArot}(t) = -l_A\omega(t)\sin\theta(t) & v_{xBrot}(t) = -l_B\omega(t)\sin\theta(t) \\ v_{yArot}(t) = l_A\omega(t)\cos\theta(t) & v_{yBrot}(t) = l_B\omega(t)\cos\theta(t) \end{matrix} \tag{7.1.4}$$

Spojením těchto rovnic lze získat rovnice popisující rychlostní vazby mezi body $A$, $B$ a $T$:

$$\begin{matrix} v_{xA}(t) - v_{xT}(t) + v_{xArot}(t) = 0 & -v_{xB}(t) - v_{xT}(t) - v_{xBrot}(t) = 0 \\ v_{yA}(t) - v_{yT}(t) + v_{yArot}(t) = 0 & -v_{yB}(t) - v_{yT}(t) - v_{yBrot}(t) = 0 \end{matrix} \tag{7.1.5}$$

Stejný princip platí i pro síly působící na body $A$ a $B$ při stejných podmínkách:

$$\begin{gathered} F_{xA}(t) + F_{xB}(t) = 0 \\ F_{yA}(t) + F_{yB}(t) = 0 \end{gathered} \tag{7.1.6}$$

Působení sil na body $A$ a $B$ vyvolává v bodě $T$ výsledný moment síly:

$$M_T = \big(l_A F_{xA}(t) - l_B F_{xB}(t)\big)\sin\theta(t) - \Big(l_A F_{yA}(t) - l_B F_{yB}(t)\Big)\cos\theta(t) \tag{7.1.7}$$

Celková kinetická energie ramene vzhledem k zvolené ose je:

$$E_K = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2 \tag{7.1.8}$$

[7]

Pro zjednodušení odvození momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm ramene, je uvažováno, že rameno představuje tyč o hmotnosti $m$ s rovnoměrně rozloženou hmotou:

$$J = \sum m_i {r_i}^2 = \int_0^m r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \rho dr \tag{7.1.9}$$

kde

$$L = l_A + l_B \quad dm = \frac{m}{L}dr \quad \rho = \frac{m}{L} \tag{7.1.10}$$

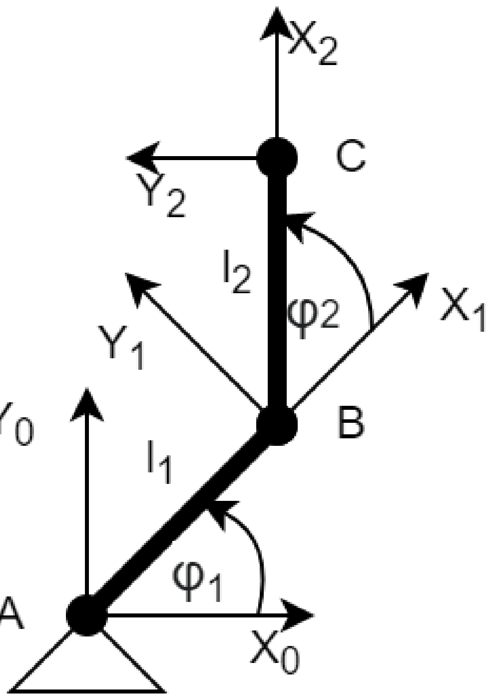
Veličina $\rho$ představuje lineární hustotu tyče a je pro celou tyč stejná:

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \frac{m}{L} dr = \frac{m}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{3L} \cdot \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} mL^2 \tag{7.1.11}$$

Na základě těchto rovnic byl vytvořen model ramena v programu DYNAST, který obsahuje póly propojení bodů $A$ a $B$ s dalšími objekty a také pól, jimž je posílána energie rotace. Textový tvar modelu je uveden v příloze III.

## 7.2 Kinematika modelu mechanické soustavy

Schematické uspořádání ramen simulované mechanické soustavy je znázorněno na následujícím obrázku:




*Obr. č. 19: Uspořádání kinematické dvojice v globální soustavě souřadnic* (zdroj: vlastní)

Uvedená soustava je připevněna na nepohyblivý rám v bodě $A$. Servopohony jsou umístěny v bodech $A$ a $B$. Souřadnice bodů $B$ a $C$ v globální soustavě souřadnic $[X_0; Y_0]$ lze určit pomocí homogenních transformačních matic, jejichž prvky jsou určeny podle pravidel DH-notace:

$$
{}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 \quad 0 & & 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.1}
$$

$$
{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 \quad 0 & & 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.2}
$$

$$
{}^{0}T_2 = {}^{0}T_1 \cdot {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 & l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \quad 0 & & 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.3}
$$

Tedy souřadnice bodů $B$ a $C$ jsou:

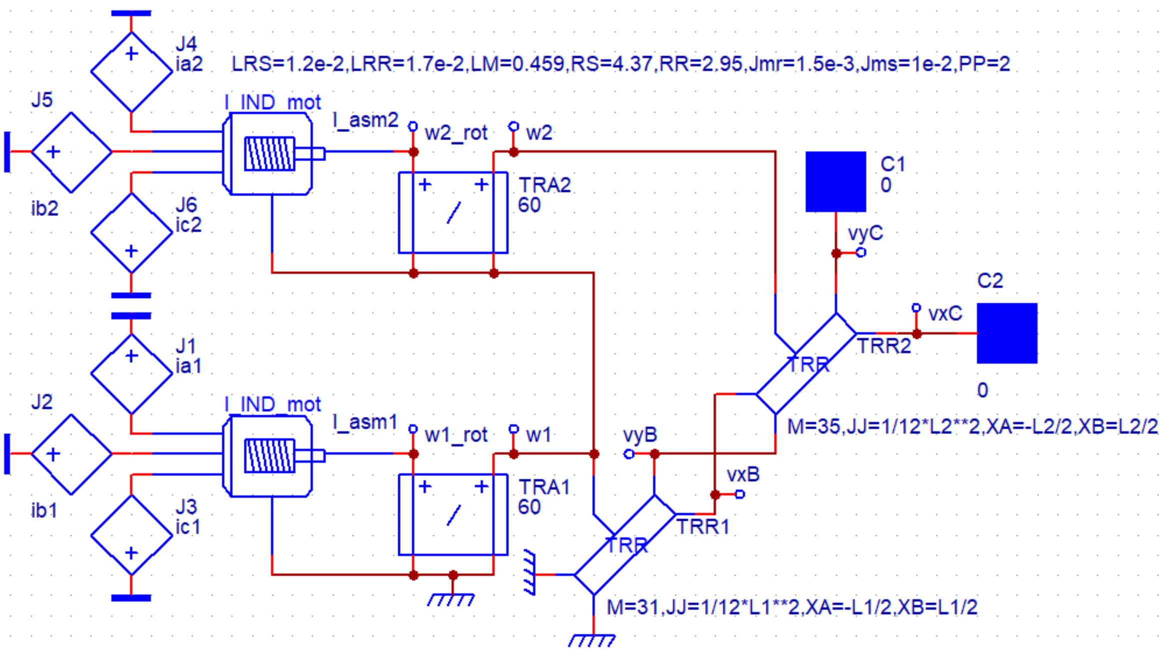
$$
\begin{aligned} x_B &= l_1\cos\theta_1 \quad & x_C &= l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B &= l_1\sin\theta_1 \quad & y_C &= l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \tag{7.2.4}
$$

Jejich derivace podle času jsou:

$$
\begin{aligned} v_{xB} &= -l_1\omega_1\sin\theta_1 \quad & v_{xC} &= -l_1\omega_1\sin\theta_1 - l_2(\omega_1+\omega_2)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ v_{yB} &= l_1\omega_1\cos\theta_1 \quad & v_{yC} &= l_1\omega_1\cos\theta_1 + l_2(\omega_1+\omega_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \tag{7.2.5}
$$

## 7.3 Model mechanické soustavy se servopohony

Model mechanické soustavy s rychlostními servopohony v programu DYNAST je znázorněn na následujícím obrázku:




*Obr. č. 20: Mechanická soustava s as. motory v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

Na daném schématu jsou dva proudově napájené indukční stroje $I\_asm1$ a $I\_asm2$, připojené ke kinematické dvojici $TRR1 - TRR2$ přes ideální převodovky $TRA1$ a $TRA2$ s převodovým poměrem $60:1$. Bloky $C0$ a $C1$ znázorňují nulovou hmotnou zátěž v bodě $C$. Parametry jednotlivých ramen soustavy jsou uvedeny v tabulce:

*Tabulka 2: Parametry ramen mechanické soustavy*

| **Parametr** | **Hodnota** |
|---|---|
| **Rameno č. 1 (koncové body A-B)** | |
| Vzdálenost od bodu $A$ do bodu $T$ | $0{,}6\ [m]$ |
| Vzdálenost od bodu $T$ do bodu $B$ | $0{,}6\ [m]$ |
| Hmotnost ramena (včetně motoru) | $31\ [kg]$ |
| Moment setrvačnosti ramena v bodě $T$ | $3{,}72\ [kg \cdot m^2]$ |
| **Rameno č. 2 (koncové body B-C)** | |
| Vzdálenost od bodu $A$ do bodu $T$ | $0{,}65\ [m]$ |
| Vzdálenost od bodu $T$ do bodu $B$ | $0{,}65\ [m]$ |
| Hmotnost ramena (včetně motoru) | $35\ [kg]$ |
| Moment setrvačnosti ramena v bodě $T$ | $4{,}93\ [kg \cdot m^2]$ |

Kompletní model v textové podobě je uveden v příloze IV.

## 7.4 Simulace průběhu řízení mechanické soustavy

### 7.4.1 Výpočet požadovaných rychlostí pohybu

Požadované úhlové rychlostí pro servomechanismy budou spočítány na základě zvolené trajektorie pohybu bodu $C$ kinematické soustavy na obrázku č. 19. Rovnice

$$(x - 1{,}2)^2 + (y - 1{,}8)^2 = 0{,}25^2 \tag{7.4.1.1}$$

popisuje kružnici o poloměru 0,25 m a se středem v bodě $S[1{,}2; 1{,}8]$ v globální soustavě souřadnic. Hodnoty souřadnic $x_ž$ a $y_ž$ v čase $t$ lze spočítat podle následujících rovnic:

$$x_ž(t) = 1{,}2 + 0{,}25 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \quad y_ž(t) = 1{,}8 + 0{,}25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \tag{7.4.1.2}$$

Pokud jsou v každém časovém okamžiku známy souřadnice bodu $C$, řešením následující soustavy rovnic lze najít požadované úhly natočení $\theta_{1ž}(t)$ a $\theta_{2ž}(t)$ jednotlivých ramen v globální soustavě souřadnic:

$$\begin{matrix} x_C(t) = x_ž(t) \\ y_C(t) = y_ž(t) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} l_1 \cos\theta_{1ž}(t) + l_2 \cos(\theta_{1ž}(t) + \theta_{2ž}(t)) = 1{,}2 + 0{,}25 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \\ l_1 \sin\theta_{1ž}(t) + l_2 \sin(\theta_{1ž}(t) + \theta_{2ž}(t)) = 1{,}8 + 0{,}25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \end{matrix} \tag{7.4.1.3}$$

V čase 0 s hodnoty $\theta_{1ž}$ a $\theta_{2ž}$ jsou:

$$\begin{matrix} \theta_{1ž}(0) = 1{,}3001\ [rad] = 74{,}4924° \\ \theta_{2ž}(0) = -0{,}7816\ [rad] = -44{,}7837° \end{matrix} \tag{7.4.1.4}$$

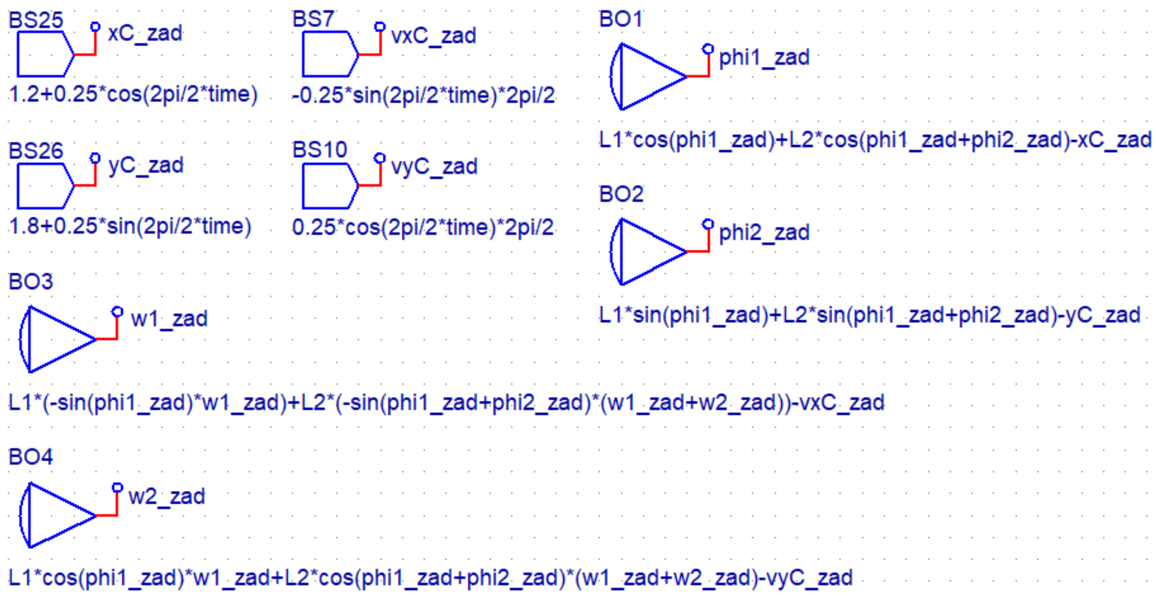
Vzhledem k tomu že se jedná o řízení úhlových rychlostí, u vztahů 7.4.1.3 je nutné provést derivaci podle času a výsledky pak použít pro výpočet $\omega_{1ž}(t)$ a $\omega_{2ž}(t)$:

$$\begin{matrix} v_{xž}(t) = \frac{d}{dt} x_ž(t) = -0{,}25\pi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \\ v_{yž}(t) = \frac{d}{dt} y_ž(t) = 0{,}25\pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \end{matrix} \tag{7.4.1.5}$$

$$\begin{matrix} v_{xC}(t) = v_{xž}(t) \\ v_{yC}(t) = v_{xž}(t) \\ \rightarrow \\ -l_1\omega_{1ž}(t) \sin\theta_{1ž}(t) - l_2(\omega_{1ž}(t) + \omega_{2ž}(t)) \sin(\theta_{1ž}(t) + \theta_{2ž}(t)) = -0{,}25\pi \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \\ l_1\omega_{1ž}(t) \cos\theta_{1ž}(t) + l_2(\omega_{1ž}(t) + \omega_{2ž}(t)) \cos(\theta_{1ž}(t) + \theta_{2ž}(t)) = 0{,}25\pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2} t\right) \end{matrix} \tag{7.4.1.6}$$

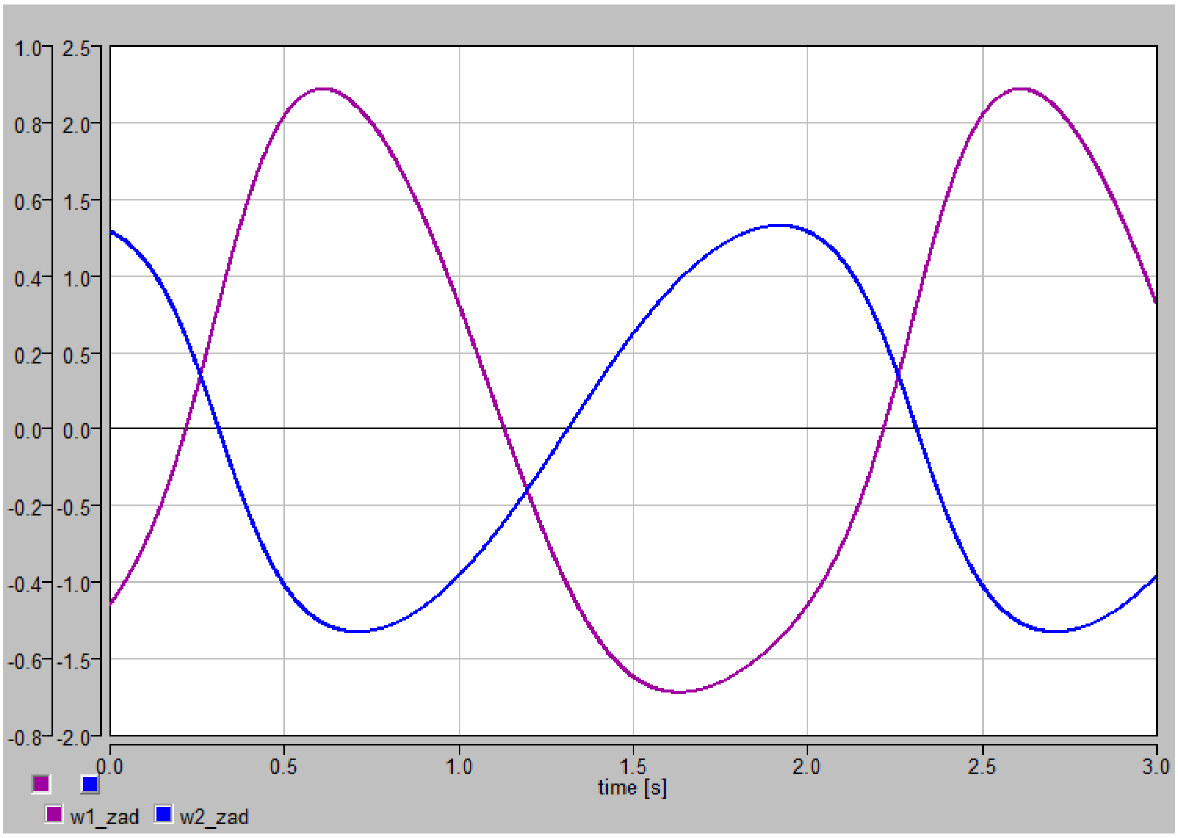
V čase 0 s hodnoty $\omega_{1ž}$ a $\omega_{2ž}$ jsou:

$$\begin{matrix} \omega_{1ž}(0) = -0{,}4586\ \left[\frac{rad}{s}\right] \\ \omega_{2ž}(0) = 1{,}2845\ \left[\frac{rad}{s}\right] \end{matrix} \tag{7.4.1.7}$$




*Obr. č. 21: Realizace vztahů 7.4.1.2 – 7.4.1.6 v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)

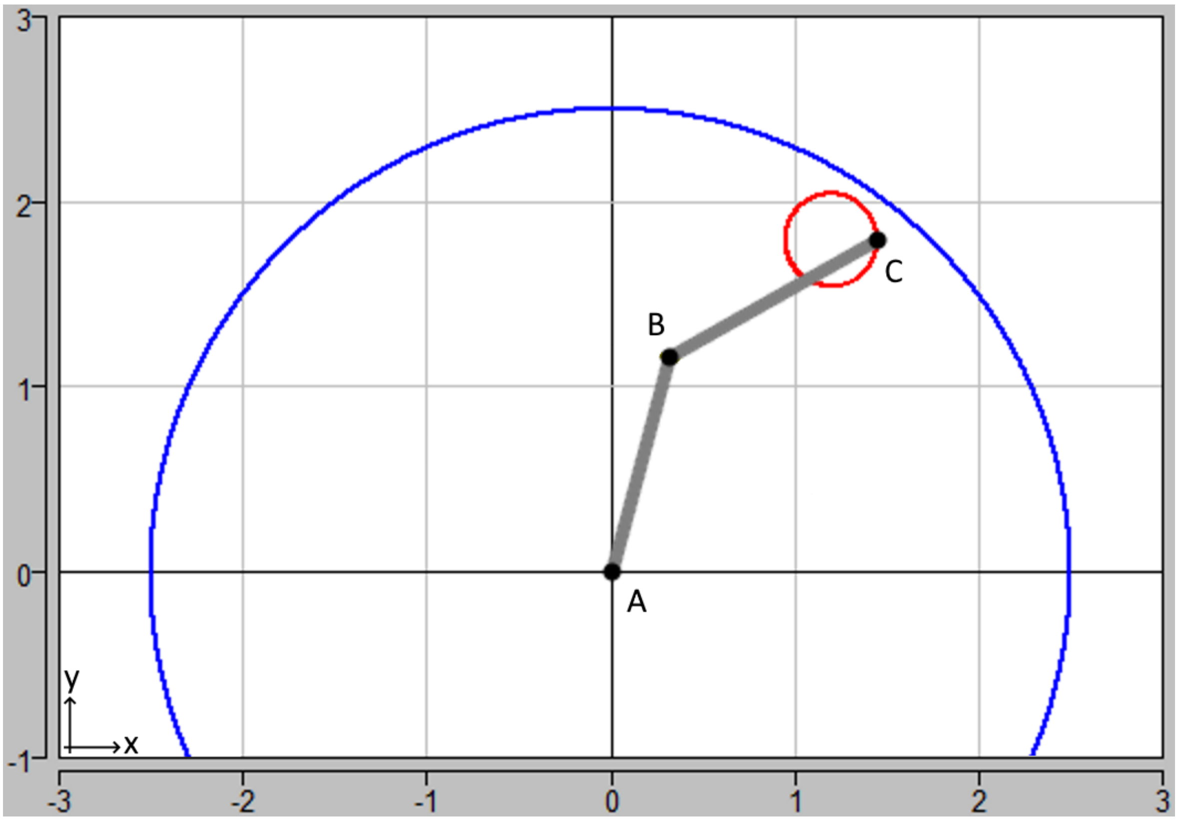
Pomocí výše uvedených informací lze spočítat požadované úhlové rychlosti pro simulaci řízení pohybu mechanické soustavy:




*Obr. č. 22: Průběhy žádaných úhlových rychlostí* (zdroj: vlastní)

Na obrázku níže je červeně znázorněna požadovaná trajektorie pohybu bodu $C$, na jejímž základě byly spočítány výše uvedené průběhy požadovaných úhlových rychlostí.

Šedé přímky znázorňují počáteční polohy ramen dané mechanické soustavy, modrou křivkou je označen její dosažitelný prostor.




*Obr. č. 23: Pozice ramen na začátku simulace* (zdroj: vlastní)

### 7.4.2 Parametry simulace

Na základě dynamických vlastností mechanické soustavy byly zvoleny tyto parametry simulace:

*Tabulka 3: Parametry simulace v programu DYNAST*

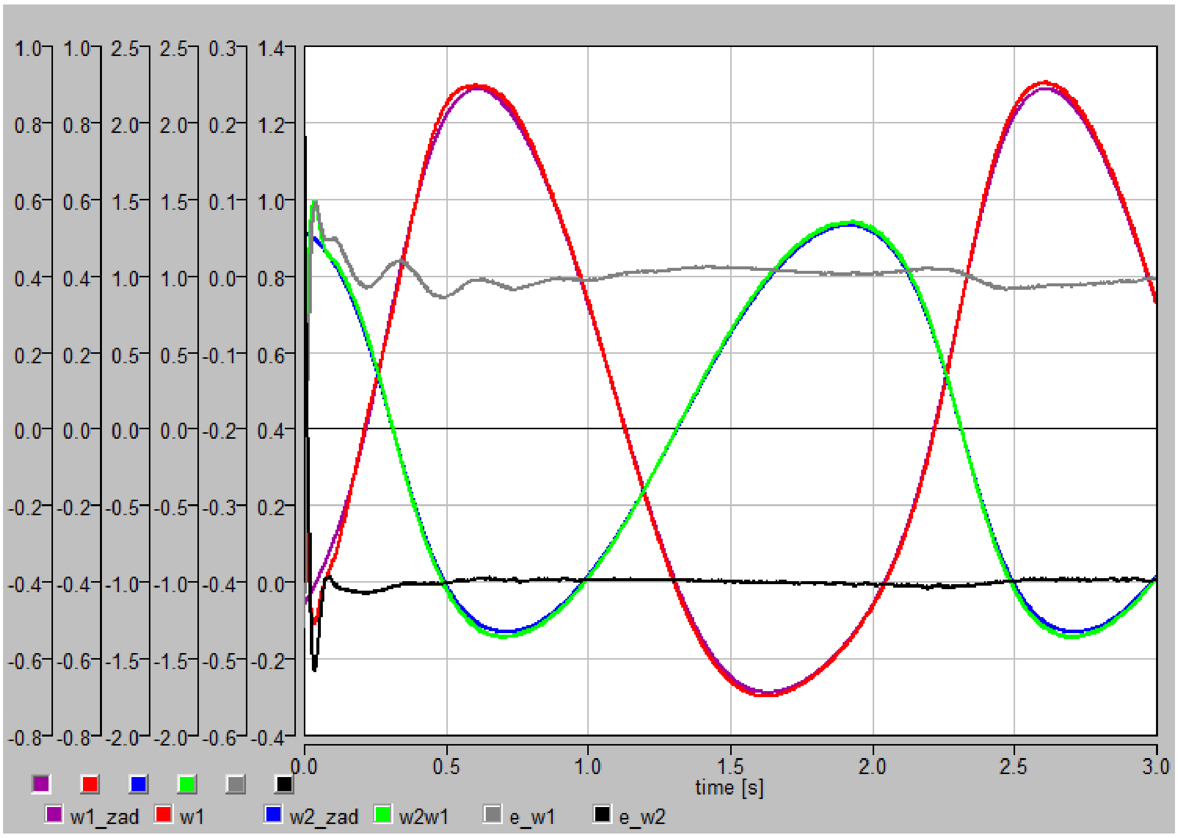
| **Parametr** | **Hodnota** |
|---|---|
| Délka simulace | $5\ [s]$ |
| Přenos ideálního zdroje momentu | $\frac{m_{intž}(s)}{u_r(s)} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{500}s + 1}$ |
| Parametry PID regulátoru prvního servomotoru | $P = 10\ [-] \quad \tau = 0{,}001[s] \quad K_D = 0{,}075[-]$ |
| Parametry PID regulátoru druhého servomotoru | $P = 10\ [-] \quad \tau = 0{,}001[s] \quad K_D = 0{,}075[-]$ |

| Parametr | Hodnota |
|---|---|
| Magnetizační proud rotoru, $i_{mr}$ | $10\ [A]$ |
| Frekvence snímání úhlových rychlostí rotorů | $1000\ [Hz]$ |

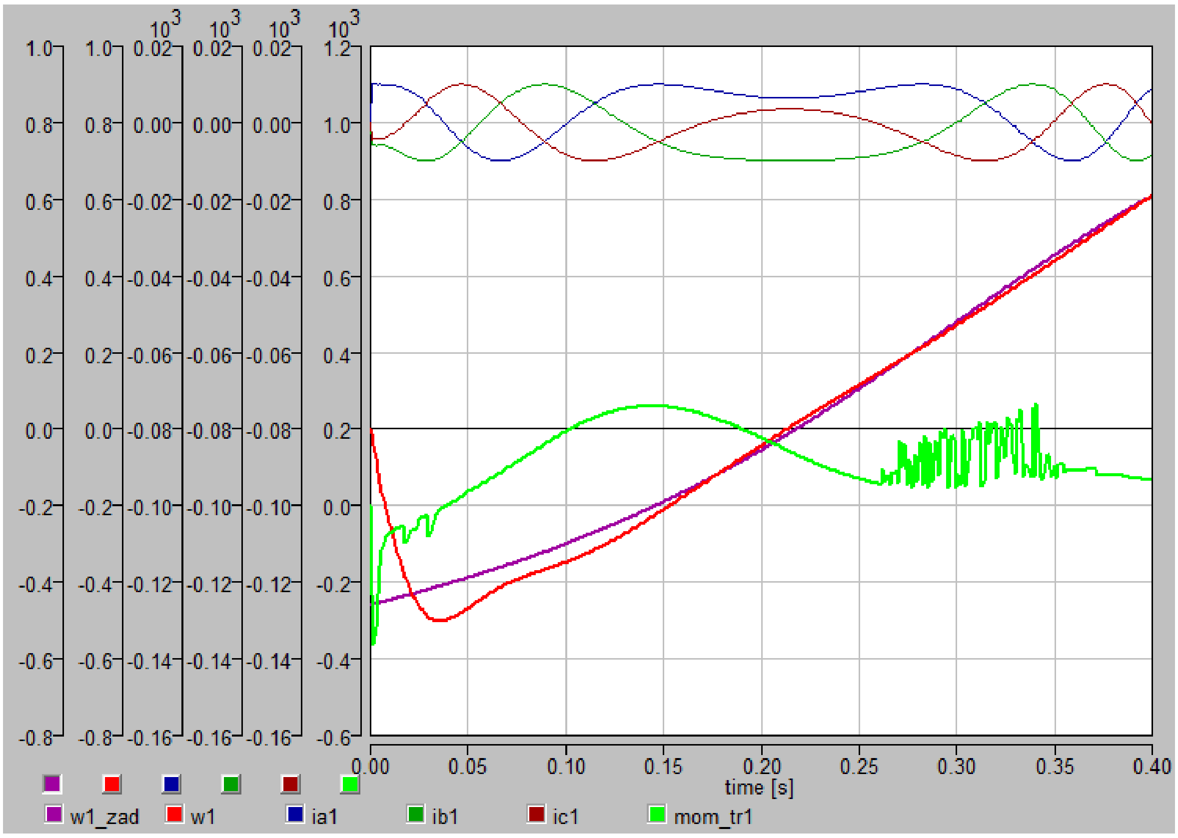
Zvolená délka simulace umožnuje zachytit jak náběhy jednotlivých servopohonů tak i „vykresleni“ plné trajektorie bodu $C$. Parametry regulátorů byly nastaveny na základě odezvy soustavy, a to postupným zavedením jednotlivých složek: nejdřív P-složky, pak I a D.

### 7.4.3 Simulace průběhu řízení

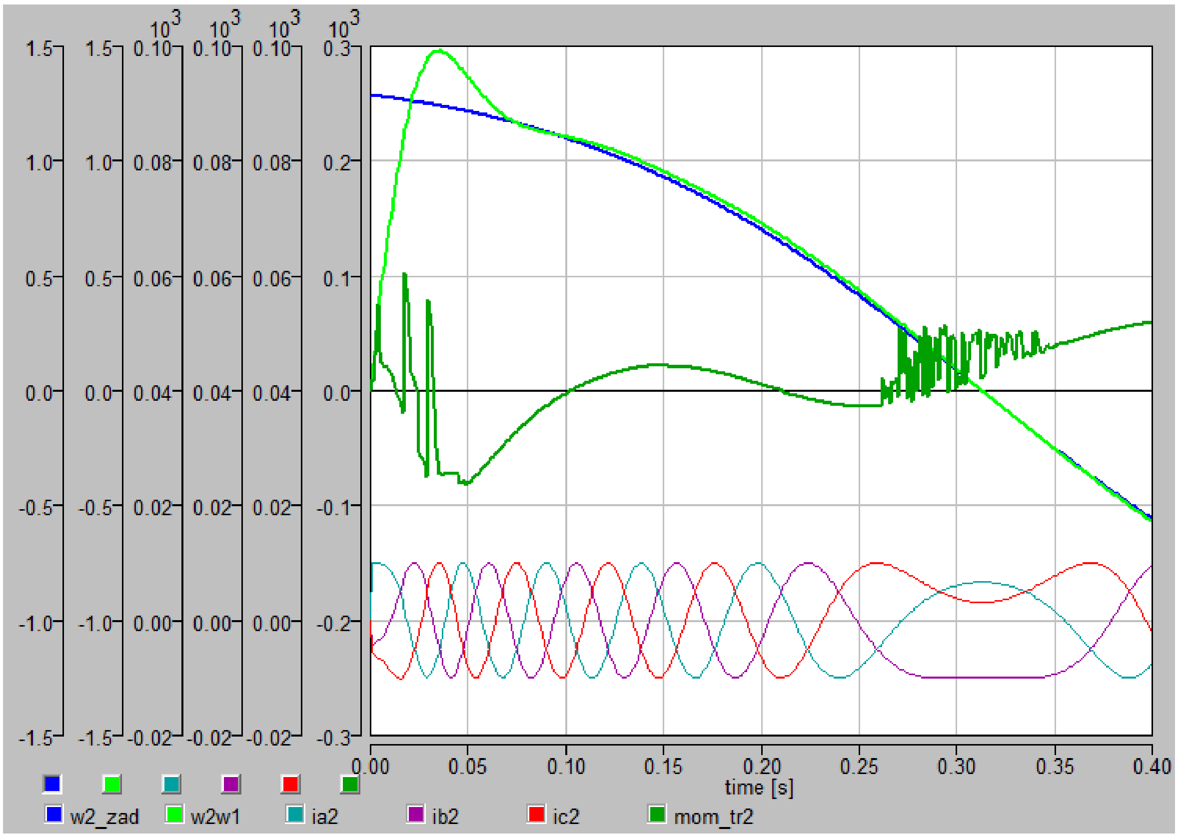
Průběhy žádaných a „naměřených“ rychlostí jsou znázorněny na obrázku č. 24. Úhlová rychlost druhého ramene $\omega_2\omega_1$ je měřena vůči úhlové rychlosti prvního ramena $\omega_1$. Regulační odchylky $e_{\omega_1}$ a $e_{\omega_2}$ po rozběhu motorů mají hodnoty nižší než 0,03 $rad/s$.




*Obr. č. 24: Výsledky simulace řízení v programu DYNAST* (zdroj: vlastní)




*Obr. č. 25: Výsledky simulace v programu DYNAST: první servopohon* (zdroj: vlastní)

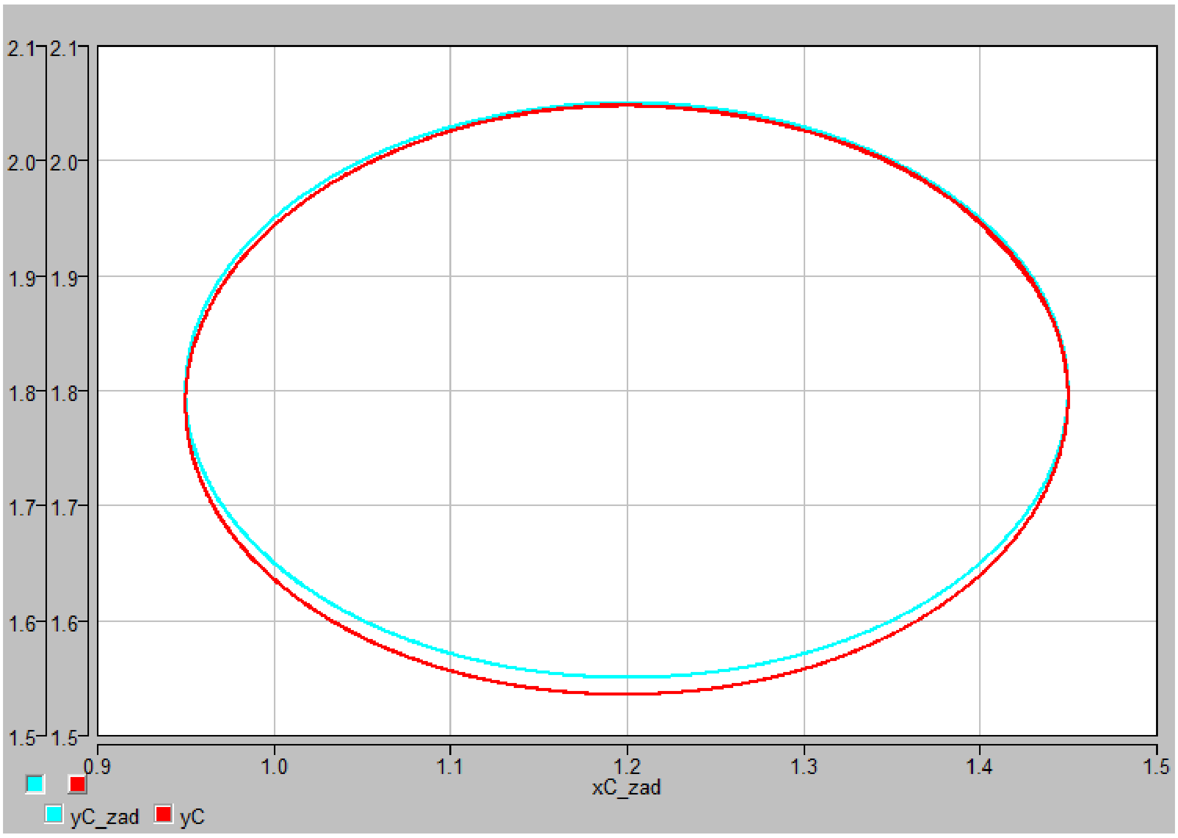



*Obr. č. 26: Výsledky simulace v programu DYNAST: druhý servopohon* (zdroj: vlastní)

Na obrázku č. 25 jsou zobrazeny průběhy řízení prvního ramena na začátku simulace. Zobrazené průběhy znázorňují: $\omega_{1ž}$ – žádanou úhlovou rychlost ramene, $\omega_1$ – jeho skutečnou úhlovou rychlost, $i_{a1}$, $i_{b1}$, $i_{c1}$ jsou proudy statorem, $m_{tr1}$ – točivý moment na výstupu z převodovky. Hodnota $\omega_1$ „se ustaluje" kolem hodnoty $\omega_{1ž}$ v čase $0{,}17\ s$ což lze považovat za vhodný čas pouze pro aplikace, které nevyžadují velmi rychlé a přesné řízení rychlosti kinematické dvojice.

Při porovnání průběhů řízení prvního a druhého ramena (obrázek č. 26) lze usoudit, že pohyb druhého ramena znatelně ovlivňuje řízení pohybu toho prvního. Tento vliv lze pozorovat v čase $0{,}08\ s$, kde hodnota $\omega_2\omega_1$ je v podkmitu, který zpomaluje přiblížení $\omega_1$ k požadované hodnotě. I proto řídicí smyčka druhého ramena potřebuje méně času k dosažení plynulého sledování požadované úhlové rychlosti.

Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o řízení úhlové rychlosti, bod $C$ není schopen sledovat trajektorii zadané kružnice. Malé odchylky na obrázku č. 27 jsou následkem volby počáteční pozice přímo na zadané kružnici.




*Obr. č. 27: Výsledná trajektorie bodu C a zadaná kružnice* (zdroj: vlastní)

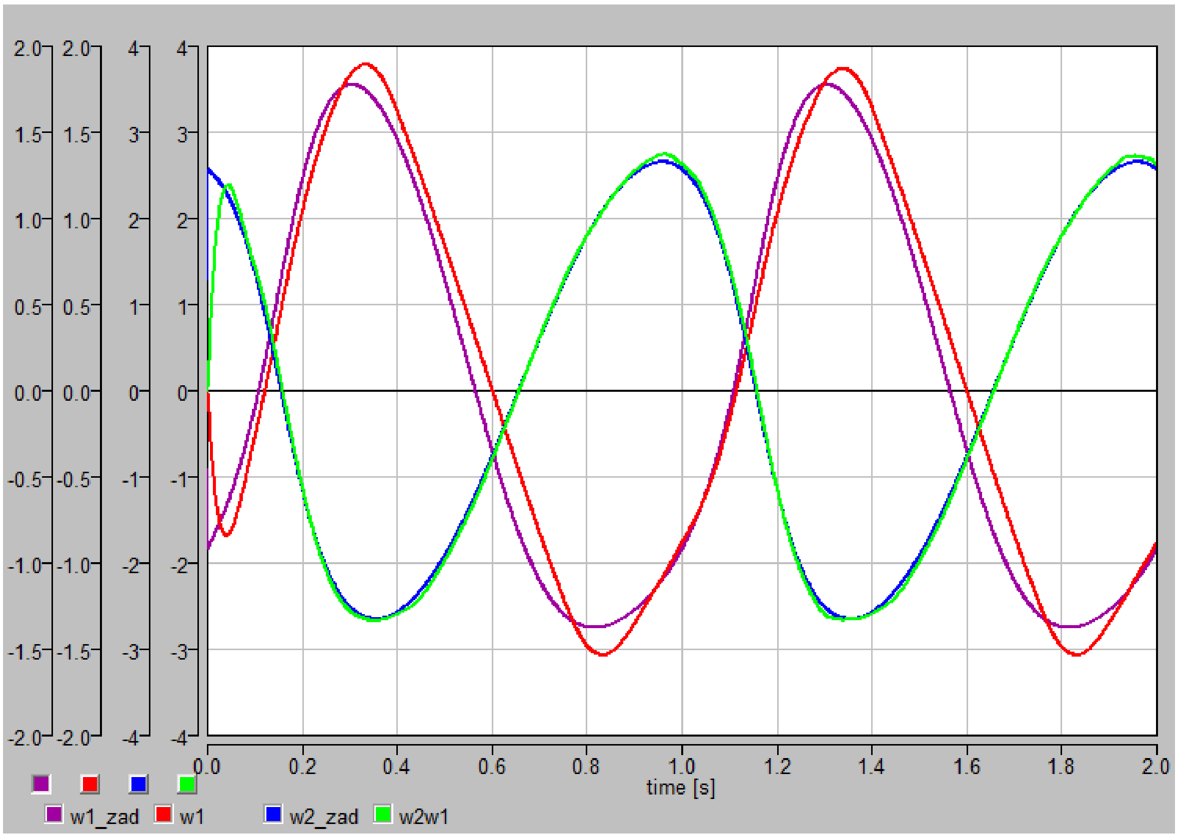
### 7.4.4 Další simulace průběhu řízení s jinými parametry

Pokud změny žádaných rychlosti budou příliš náhlé, motory již nebudou schopny zajistit přesné sledování žádaných úhlových rychlostí a to ani po úpravě PID regulátorů.

Nově zvolený pohyb po zadané kružnici je dvakrát rychlejší, než býval před tím:

$$x_ž(t) = 1{,}2 + 0{,}25 \cdot \cos(2\pi t) \quad y_ž(t) = 1{,}8 + 0{,}25 \cdot \sin(2\pi t) \tag{7.4.4.1}$$

Nová hodnota zesílení PID regulátoru prvního ramena je dvakrát vyšší ($K = 20$).




*Obr. č. 28: Simulace řízení při vyšších úhlových rychlostech* (zdroj: vlastní)

Výsledky řízení hodnoty $\omega_2\omega_1$ lze pořád považovat za uspokojivé, což se ovšem nedá prohlásit o hodnotě $\omega_1$. Lze tvrdit, že při vyšších rychlostech roste míra vlivu pohybu druhého ramena na řízení rychlosti prvního. Jinými slovy je potřeba aby motor zajistil větší točivý moment, což platí nejen pro vyšší rychlosti, ale i pro větší hmotnostní zátěže.

# ZÁVĚR

Cílem dané práce bylo zjistit, jestli jsou asynchronní motory vhodné k řízení rychlosti pohybu mechanických soustav, většinou reprezentovaných jako kinematické dvojice.

Pro případy manipulátorů typu SCARA a na základě výsledků simulací lze tvrdit, že ano, jestliže se jedná o nenáročné aplikace, při nichž se nevyžadují náhlé nebo přesné změny rychlostí pohybu. Ovšem pokud jde o většinu robotických aplikací, je potřeba mít zajištěno, aby robot mohl vykonávat stejné pohyby v určených trajektoriích. To znamená, že navržené řízení by mělo být rozšířeno o smyčku, regulující polohu konce manipulátoru.

Dalším krokem by mohlo být zkoumání aktuální nabídky asynchronních motorů na trhu, aby bylo možné zjistit aplikační limity takových manipulátorů. Podle představ autora této práce by měl servopohon zajistit co největší výkon při jeho co nejmenších rozměrech a hmotnosti, protože servopohony jsou umístěny v místech spojení dvou ramen a jejich velká hmotnost by mohla výrazně omezovat potenciál celého manipulátoru. Výjimkou může být servopohon prvního ramena, protože podle provedených simulací bylo zjevné, že kinetický stav druhého ramena má mnohem větší vliv na první rameno, ne naopak. Proto by první servopohon měl splňovat požadavky na větší točivé momenty, přičemž právě on může být větší a těžší než ostatní, jelikož první rameno je upevněno na rámu. Aby se platnost dané hypotézy potvrdila, je potřeba provést simulace s větším počtem ramen a servopohonů na jednom manipulátoru.

Je rovněž třeba poznamenat, že by bylo vhodné vytvořit reálnou mechanickou soustavu se stejnými vlastnostmi a s její pomocí zkontrolovat, jsou-li výsledky simulací pravdivé, a zda je lze použít k finální formulaci tvrzení o dané aplikaci.

# SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] PYTLÍČEK, Jiří. *Lineární algebra a geometrie*. Praha: ČVUT, 2008. ISBN 978-80-0104-063-8.

[2] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Robotika*. Zlín: UTB, 2012. ISBN 978-80-7454-223-7.

[3] TAYLOR, John R. *Classical Mechanics*. Sausalito, CA: University Science Books, 2005. ISBN 978-18-9138-922-1.

[4] *The Physics Hypertextbook: Kinetic Energy* [online]. The United States of America: Glenn Elert, 1998 [cit. 2022-05-14]. Dostupné z: https://physics.info/energy-kinetic/

[5] LANDAU, Lev a Evgeny LIFSHITZ. *Mechanics*. 3rd edition. Oxford: Butterworth-Heinenann Linacre House, a division of Reed Educational and Professional Publishing, 1976. ISBN 978-07-5062-896-9.

[6] NOVOTNÝ, Karel. *Teorie Elektromagnetického Pole I*. Praha: ČVUT Praha, 1998. ISBN 978-80-0101-774-6.

[7] HOFMANN, Jaroslav a Marie URBANOVÁ. *FYZIKA I*. Praha: VŠCHT Praha, 2005. ISBN 978-80-7080-777-4.

[8] SADIKU, Matthew. *Elements of Electromagnetics*. 7 ed. Oxford: Oxford University Press, 2014. ISBN 978-01-9932-138-4.

[9] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Elektromechanické Akční Členy*. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-835-1.

[10] KIRTLEY, James a Wayne BEATY. *Electric Motor Handbook*. New York: McGraw Hill, 1998. ISBN 978-00-7035-971-0.

[11] TKOTZ, Klaus. *Příručka pro elektrotechnika*. 2 dopl. vyd. Praha: Europa-Sobotáles, 2006. ISBN 80-86706-13-3.

[12] STEJSKAL, Jan. *Měření momentové charakteristiky asynchronního motoru*. Praha, 2019. Diplomová práce. České Vysoké Učení Technické v Praze. Vedoucí práce Ing. Vít Hlinovský, CSc.

[13] HORA, Oldřich, Stanislav NAVRÁTIL a kol.. *Regulace elektrických strojů*. Praha: STNL, 1976. DT 621.313.07.

[14] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. *Technické prostředky automatizace*. Zlín, b.r.

[15] MANN, Heřman a Michal ŠEVČENKO. *Snadné počítačové modelování dynamických soustav: Příručka k internetovému kurzu a simulačnímu systému DYNAST*. Praha, 2008.

# SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

| | |
|---|---|
| $a$ | Zrychlení |
| $B$ | Magnetická indukce |
| $D$ | Translační matice |
| DYNAST | DYNamika A Statika (název počítačového programu) |
| $E$ | Mechanická energie |
| $E^3$ | Trojrozměrný euklidovský prostor |
| $F$ | Síla |
| $G$ | Přenos |
| $\boldsymbol{I}$ | Matice setrvačnosti |
| $I, i$ | Elektrický proud |
| $I, J$ | Moment setrvačnosti |
| $K_m$ | Konstanta motoru |
| kHz | Kilohertz |
| $\boldsymbol{L}$ | Moment hybnosti |
| $L$ | Lagrangián; Indukčnost; Délka |
| $L_D$ | Celková indukčnost transformovaného rotorového vinutí |
| $L_d$ | Celková indukčnost transformovaného statorového vinutí |
| $L_m$ | Vzájemná indukčnost transformovaných vinutí statoru a rotoru |
| $M$ | Vzájemná indukčnost; Točivý moment |
| $m$ | Hmotnost |
| $m_{int}$ | Vnitřní moment stroje |
| $N$ | Počet otáček |
| PID | PID regulátor (regulátor s proporcionální (P), integrační (I) a derivační (D) složkami) |
| $p_p$ | Počet pólových párů |

| | |
|---|---|
| $Q$ | Elektrický náboj |
| $R$ | Matice rotace; Elektrický odpor |
| $R_s$ | Elektrický odpor statorového vinutí |
| $R_s$ | Elektrický odpor rotorového vinutí |
| $S$ | Plocha |
| $s$ | Skluz |
| $r$ | Vzdálenost, délka, posun |
| $T$ | Homogenní matice transformace; Kinetická energie |
| $U$ | Báze vektorového prostoru; Potenciální energie |
| $u$ | Napětí |
| $u_e$ | Elektromotorické napětí |
| $V$ | Vektorový prostor |
| $v$ | Rychlost |
| $W$ | Práce |
| $Z$ | Impedance |
| $\vartheta$ | Úhel, vyjadřující proměnnou vzájemnou indukčnost mezi statorem a rotorem |
| $\vartheta_e$ | Elektrický úhel stroje |
| $\vartheta_k$ | Transformační úhel |
| $\rho$ | Hustota |
| $\tau_r$ | Elektrická časová konstanta rotorového obvodu |
| $\Phi$ | Magnetický tok |
| $\Psi, \psi$ | Spřažený magnetický tok |
| $\omega$ | Úhlová rychlost |
| $\omega_e$ | Elektrická otáčivá rychlost stroje |
| $\omega_k$ | Transformační úhlová rychlost |
| $\omega_s$ | Úhlová rychlost statoru |

# SEZNAM OBRÁZKŮ

# SEZNAM TABULEK

# SEZNAM PŘÍLOH

# PŘÍLOHA P I: OBSAH VLOŽENÉHO CD-ROM

- Text této diplomové práce: soubor fulltext.pdf,
- Model mechanické soustavy vytvořený v programu DYNAST: soubory m_soustava s příponami .dia, .diaprb, .O a .prb,
- Knihovna DP_lib.lbr, použita při tvorbě výše uvedené soustavy. Součástí knihovny jsou soubory:
    - I_IND.dia a I_IND.mod – model proudově napájeného as. stroje,
    - PID_contr.mod – PID regulátor,
    - TRR.dia a TRR.mod – model ramena.

# PŘÍLOHA P II: TEXTOVÝ MODEL INDUKČNÍHO STROJE V PROGRAMU DYNAST

```
:: I_IND
I_IND
sa,
sb,
sc,
wr,
ws/
LRS=5.244e-4,LRR=2.884e-4,LM=6.637e-3,RS=.1755,RR=.141,
Jmr=1.45e-4,Jms=1e-3,PP=1,period=1e-3;
:
Ls=Lrs+Lm;Lr=Lrr+Lm;
kd = 2/3;kq = 2/3;
:
Rs1 1 = 0;
Rs2 2 = 0;
Rs3 3 = 0;
BS1 nad = kd*cos(theta_k);
BS2 nbd = kd*cos(theta_k-2pi/3);
BS3 ncd = kd*cos(theta_k+2pi/3);
BS4 naq = kq*sin(theta_k);
BS6 ncq = kq*sin(theta_k+2pi/3);
BS5 nbq = kq*sin(theta_k-2pi/3);
:
L1 7 = Ls;
L2 5-8 = Ls;
R1 4-7 = Rs;
R2 8 = Rs;
E4 9 = i.R6*(wr-ws);
:
R6 14 = 0;
R5 13 = 0;
:
L3 0-11 = Lr;
L4 0-12 = Lr;
R3 11-9 = Rr;
R4 12-10 = Rr;
E5 10 = -i.R5*(wr-ws);
M1 L1-L3 = Lm;
M2 L2-L4 = Lm;
E1 sa-1 = nad*v.L1-naq*v.L2;
E2 sb-2 = nbd*v.L1-nbq*v.L2;
E3 sc-3 = ncd*v.L1-ncq*v.L2;
:
J_rot > C wr = Jmr;
J_stat > C ws = Jms;

ID1 > @Intdiff wr,ws,fi;
```

```
G_frict wr-ws = 1.5e-6;
AD1 > @AD fi,6 / B=15,RANGE=2pi/4;
N_der1 > @N_der 6,w_sen / 1/4*Period;
BH1 > @SampleHold 6,fi_sen / Period=period;
Jd 0-4 = nad*i.Rs1+nbd*i.Rs2+ncd*i.Rs3;
Jq 0-5 = -naq*i.Rs1-nbq*i.Rs2-ncq*i.Rs3;
J1 ws-wr = pp*Lm*(I.Jq*i.R3-i.Jd*i.R4);
nd > J 0-14 = pp*(Lr*i.R4+Lm*i.Jq);
nq > J 0-13 = pp*(Lr*i.R3+Lm*i.Jd);
theta_k_posun > BI theta_k = 0;
EO@;
```

# PŘÍLOHA P III: TEXTOVÝ MODEL RAMENA V PROGRAMU DYNAST

```
TRR AX,AY,BX,BY,W/
M=1,JJ=1,XA=-1,XB=1,acc=0;
: binarni hm. clen
:se dvema rotacnimi dvojicemi v gravitacnim poli
: vazebni rovnice (pro rychlosti)
eax ax-0=v.vTx-v.w*(xa*sin(v.fi));
eay ay-0=v.vTy+v.w*(xa*cos(v.fi));
ebx bx-0=v.vTx-v.w*(xb*sin(v.fi));
eby by-0=v.vTy+v.w*(xb*cos(v.fi));
: pohybove rovnice
Jx 0-vTx=i.eax+i.ebx;:           smer X
Cx vTx-0=m;
BI xT=v.vTx;
:
Cy vTy-0=m;
Jy 0-vTy=i.eay+i.eby;:-m*acc;:    smer Y
BI yT=v.vTy;
:
Cfi w-0=JJ;
Jfi 0-w=-i.eax*(xa*sin(v.fi))+
         i.eay*(xa*cos(v.fi))-
         i.ebx*(xb*sin(v.fi))+
         i.eby*(xb*cos(v.fi));
:                                rotace
BI fi=v.w;
EO@;
```

## PŘÍLOHA P IV: TEXTOVÝ MODEL CELÉHO MODELU MECHANICKÉ SOUSTAVY V PROGRAMU DYNAST

```
*SYSTEM;
L1=1.2; L2=1.3; imr1 = 10; imr2 = 10;

TRA1 > @tra_tra w1_rot,0,w1,0 / 60;
I_asm1 > @I_IND 1,2,3,w1_rot,0 / LRS=1.2e-2,LRR=1.7e-2,
  LM=0.459,RS=4.37,RR=2.95,Jmr=1.5e-3,Jms=1e-2,PP=2;
I_asm2 > @I_IND 9,10,11,w2_rot,w1 / LRS=1.2e-2,LRR=1.7e-2,
  LM=0.459,RS=4.37,RR=2.95,Jmr=1.5e-3,Jms=1e-2,PP=2;

Km1 = I_asm1.PP*((I_asm1.Lm)**2)/I_asm1.Lr;
Km2 = I_asm2.PP*((I_asm2.Lm)**2)/I_asm2.Lr;
taur1 = I_asm1.LR/I_asm1.RR;
taur2 = I_asm2.LR/I_asm2.RR;
cit /POLY/ 1.5;
jme /POLY/ 1,1/500;

J1 0-1 = ia1;
J2 0-2 = ib1;
J3 0-3 = ic1;
DF1 > @Difference 23,4,e_w1;
BS9 5 = imr1;
D1 > @Differentiator 5,6;
SC2 > @Scalor 6,7 / taur1;
SU1 > @Summator 7,5,id1_zad;
BS3 8 = (1/taur1)*iq1_zad/imr1;
I1 > @Int 8,phi1_skl;
BS4 phi1_mot = I_asm1.fi_sen;
TRR1 > @TRR 0,0,vxB,vyB,w1 / M=31,JJ=1/12*L1**2,XA=-L1/2,
  XB=L1/2;
TRR2 > @TRR vxB,vyB,vxC,vyC,w2 / M=35,JJ=1/12*L2**2,
  XA=-L2/2,XB=L2/2;
J4 0-9 = ia2;
J6 0-11 = ic2;
J5 0-10 = ib2;
TRA2 > @tra_tra w2_rot,w1,w2,w1 / 60;
SU2 > @Summator 12,13,id2_zad;
DF2 > @Difference 24,14,e_w2;
SC3 > @Scalor 15,12 / taur2;
BS12 13 = imr2;
D2 > @Differentiator 13,15;
I2 > @Int 16,phi2_skl;
BS14 phi2_mot = I_asm2.fi_sen;
BS13 16 = (1/taur2)*iq2_zad/imr2;
BS1 xC = xB+L2*cos(phi1+phi2);
BS2 yC = yB+L2*sin(phi1+phi2);
BS5 xB = L1*cos(phi1);
BS6 yB = L1*sin(phi1);
```

```
PID_contr1 > @PID_contr e_w1,u1 / K=10,TAU=0.001,KD=0.075;
PID_contr2 > @PID_contr e_w2,u2 / K=10,TAU=0.001,KD=0.075;
BS15 ia1 = cos(phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot)*id1_zad-sin(
  phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot)*iq1_zad;
BS16 ib1 = cos(phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot-2pi/3)*
  id1_zad-sin(phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot-2pi/3)*iq1_zad;
BS17 ic1 = cos(phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot+2pi/3)*
  id1_zad-sin(phi1_skl+I_asm1.pp*phi1_mot+2pi/3)*iq1_zad;
BS18 ia2 = cos(phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot)*id2_zad-sin(
  phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot)*iq2_zad;
BS19 ib2 = cos(phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot-2pi/3)*
  id2_zad-sin(phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot-2pi/3)*iq2_zad;
BS20 ic2 = cos(phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot+2pi/3)*
  id2_zad-sin(phi2_skl+I_asm2.pp*phi2_mot+2pi/3)*iq2_zad;
BS21 iq1_zad = mom1_zad/(Km1*imr1);
BS22 iq2_zad = mom2_zad/(Km2*imr2);
AD1 > @AD 17,18 / B=15,RANGE=1pi/4;
BS23 17 = I_asm1.wr;
BH1 > @SampleHold 18,w1_sen / Period=1e-3;
BS24 19 = I_asm2.wr;
AD2 > @AD 19,20 / B=15,RANGE=1pi/4;
BH2 > @SampleHold 20,w2_sen / Period=1e-3;
BT1 mom1_zad = cit/jme * u1;
BT3 mom2_zad = cit/jme * u2;
BS8 21 = w1_sen;
BS11 22 = w2_sen;
BI1 phi1 = w1;
BS29 w2w1 = w2-w1;

BS30 mom_tr1 = -i.TRA1.Jb;
BS31 mom_tr2 = -i.TRA2.Jb;
C1 vyC = 0;
C2 vxC = 0;
BS25 xC_zad = 1.2+0.25*cos(2pi/2*time);
BS26 yC_zad = 1.8+0.25*sin(2pi/2*time);
BS27 23 = w1_zad;
BS28 24 = w2_zad;
BI2 phi2 = w2-w1;
BS7 vxC_zad = -0.25*sin(2pi/2*time)*2pi/2;
BS10 vyC_zad = 0.25*cos(2pi/2*time)*2pi/2;
BO1 phi1_zad = L1*cos(phi1_zad)+L2*cos(phi1_zad+phi2_zad)
  -xC_zad;
BO2 phi2_zad = L1*sin(phi1_zad)+L2*sin(phi1_zad+phi2_zad)
  -yC_zad;
BO3 w1_zad = L1*(-sin(phi1_zad)*w1_zad)+L2*(-sin(phi1_zad+
  phi2_zad)*(w1_zad+w2_zad))-vxC_zad;
BO4 w2_zad = L1*cos(phi1_zad)*w1_zad+L2*cos(phi1_zad+
  phi2_zad)*(w1_zad+w2_zad)-vyC_zad;
SC5 > @Scalor 21,4 / 1/60;
SC6 > @Scalor 22,14 / 1/60;
*TR;
```

```
TR 0 5;

PRINT(5001) phi1_zad, phi1, phi2_zad, phi2, w1_zad, w1,
   w2_zad, w2w1, xC_zad, xC, yC_zad, yC, u1, u2, e_w1, e_w2,
   ia1, ib1, ic1, ia2, ib2, ic2, mom1_zad, mom_tr1, id2_zad,
   id1_zad, iq1_zad, iq2_zad, mom2_zad, mom_tr2;

INIT xC_zad=1.45, yC_zad=1.8, phi1=1.3001, phi2=-0.7816,
   phi1_zad=1.3001, phi2_zad=-0.7816, xB=L1*cos(1.3001),
   yB=L1*sin(1.3001),
   xC=L1*cos(1.3001)+L2*cos(1.3001-0.7816),
   yC=L1*sin(1.3001)+L2*sin(1.3001-0.7816), w1_zad=-0.4586,
  w2_zad=1.2845;

RUN EPS=1e-4, MIN=1e5, MAX=1e4, WPRINT=1000;

*END;
```