

Řízení mnohorozměrných dynamických systémů

Bc. Petra Ducháčková

Diplomová práce
2020



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav počítačových a komunikačních systémů

Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Petra Ducháčková**
Osobní číslo: **A18562**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Počítačové a komunikační systémy**
Forma studia: **Kombinovaná**
Téma práce: **Řízení mnohorozměrných dynamických systémů**
Téma práce anglicky: **The Control of Multi-variable Dynamic Systems**

Zásady pro vypracování

1. Nastudujte úvod do teorie lineárních mnohorozměrných systémů.
2. Vypracujte metodiku řešení maticových diofantických rovnic.
3. Vytvořte studijní materiál pro návrh mnohorozměrných regulátorů.
4. Vytvořte programové prostředí pro návrh a simulaci mnohorozměrných systémů.
5. Ověřte vypracovanou metodiku na simulačních příkladech.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. TZAFESTAS, Spiros. *Multivariable Control*. Berlin, Springer, 2011. ISBN 9400964803.
2. WONHAM, W. Murray. *Linear Multivariable Control*, Berlin, Springer, 2012, ISBN 1461270057
3. ROSENWASSER, Efim a Bernhard LAMPE. *Multivariable Computer-controlled Systems*. Berlin, Springer, 2006. ISBN 978-1-84628-432-8
4. SKOGESTAD, Sigurd a POSTLETHWAITE, Ian. *Multivariable Feedback Control*, Wiley ISBN 047001167X
5. TAN, Liansheng. *Generalized Framework of Linear Multivariable Control*, Elsevier 2017, ISBN 0081019467
6. ZHU, Yucai a Ton BACKS. *Identification of Multivariable Industrial Processes*. Berlin, Springer 2011, ISBN 1447120604
7. KUČERA, Vladimír. *Discrete Linear Control*. Chichester, Praha, Academia, 1979, ISBN 0081019467
8. KUČERA, Vladimír. *Analysis and Design of Discrete Linear Control*. Chichester, Prentice Hall 1991, ISBN 013033085-X
9. POLYX, L. *The Polynomial Toolbox for Matlab*. Prague, Czech Republic, 2001.

Vedoucí diplomové práce:

prof. Ing. Roman Prokop, CSc.
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: 13. prosince 2019
Termin odevzdání diplomové práce: 29. května 2020



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan

Ing. Miroslav Matýsek, Ph.D.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 9. prosince 2019

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

Petra Ducháčková, v. r.
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá návrhem mnohorozměrných spojitéch systémů řízení polynomiálním přístupem. Cílem je vytvoření několika ilustrativních příkladů, které se touto problematikou zabývají. Teoretická část je věnována základním pojmům, vztahům, lineárním mnohorozměrných systémů a řešení maticových diofantických rovnic. Praktická část se zabývá použitými vývojovými prostředky a zahrnuje ilustrativní příklady.

Klíčová slova: návrh řízení, mnohorozměrné systémy, polynomiální přístup, diofantické rovnice, programová podpora, MATLAB, Polynomial toolbox, regulace

ABSTRACT

This thesis deals with polynomial MIMO control system design. The aim of thesis is to create several illustrative examples that deal with this question. The theoretical part deals to basic concepts, relations, linear MIMO and solutions of matrix Diophantine equations. The practical part of thesis deals with the development tools used and includes illustrative examples.

Keywords: control design, MIMO systems, polynomial approach, Diophantine equations, computer-aided, MATLAB, Polynomial toolbox, regulation

Velké poděkování patří vedoucímu mé diplomové práce panu prof. Ing. Romanovi Prokopovi, CSc. za odbornou pomoc při řešení problematiky, cenné rady, připomínky a celkově skvělé vedení práce. Dále děkuji také rodině za podporu v průběhu studia.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Motto:

„Non scholae, sed vitae discimus“

(Neučíme se pro školu, ale pro život)

Seneca

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČÁST	9
1 HISTORICKÉ POZNÁMKY	10
1.1 DIOFANTOS Z ALEXANDRIE	10
1.2 DIOFANTICKÉ ROVNICE V NOVOVĚKU	10
2 TEORETICKÉ ZÁKLADY	13
2.1 ALGEBRAICKÉ POJMY	13
2.1.1 Okruhy a tělesa.....	13
2.1.2 Dělitelnost v okruhu	14
2.1.3 Polynomiální zlomky	18
2.1.4 Polynomiální matice.....	19
2.1.5 Diofantické rovnice v okruhu polynomů	20
2.2 LINEÁRNÍ MNOHOROZMĚRNÉ SYSTÉMY	23
2.2.1 Přenos	23
2.2.2 Popis mnohorozměrných systémů.....	24
2.2.3 Stabilita mnohorozměrného systému	26
2.2.4 Polynomiální maticové zlomky.....	27
2.2.5 Řešení maticových polynomiálních diofantických rovnic	32
2.2.6 Syntéza regulátorů.....	33
II PRAKTICKÁ ČÁST	36
3 PROGRAMOVÉ PROSTŘEDÍ PRO VÝPOČTY A SIMULACE	37
3.1 POPIS PROSTŘEDÍ.....	37
3.2 PROSTŘEDÍ MATLAB	37
3.3 SIMULINK.....	39
3.3.1 Spuštění programu Simulink.....	39
3.4 POLYNOMIAL TOOLBOX	40
3.4.1 Základní vlastnosti Polynomial Toolboxu	41
3.4.2 Základní funkce Polynomial Toolboxu.....	41
3.4.3 Funkce pro návrh řídicího systému	53
4 SIMULACE A ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY	59
4.1 ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD I.	59
4.2 ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD II.....	65
4.3 ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD III.	71
4.4 ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLAD IV.	75
ZÁVĚR	78
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	80
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	82
SEZNAM OBRÁZKŮ	83

ÚVOD

Průnik algebry, jejích pojmů a metod je v teorii řízení a dalších disciplínách kybernetiky zřetelný od poloviny minulého století. Metodika těchto věd tak postupovala od inženýrsky experimentálního pojetí k více vědeckým a matematickým postupům a tento trend se zachovává do dnešních dnů. Přirozeně kromě algebraických metod byly postupně implementovány metody matematické, funkcionální analýzy a dalších disciplín. S hlubším rozvojem metod spojených s Laplaceovou nebo Z- transformací se začaly zkoumat vlastnosti množin polynomů a vědci si uvědomili, že množina polynomů tvoří z pohledu algebry komutativní okruh a charakteristický zpětnovazební polynom je vlastně diofantickou rovnicí, pokud se předepíše rozmístění pólů tomuto polynomu. Na několik desetiletí se tak okruh polynomů stal základním stavebním kamenem pro analýzu a syntézu diskrétních i spojitých lineárních obvodů a začal se používat termín polynomiální nebo algebraická syntéza. Prvním zobecněním komutativních okruhů bylo rozšíření algebraických metod na mnohorozměrné systémy, které vedly na polynomiální matice tedy nekomutativní okruhy. V osmdesátých letech minulého století se vynořily úlohy, na které polynomy a okruhy polynomů přestaly postačovat. Byla to zejména potřeba definovat normu v množině přenosů pro účely neurčitosti a robustnosti a možnost využívat širší spektrum řešení diofantické rovnice. Byly definovány nové okruhy speciálních podmnožin racionálně lomených funkcí, okruh stabilních a ryzích funkcí, okruh meromorfních funkcí a podobně.

Tato práce je věnována algebraickému přístupu v řízení vícerozměrných lineárních spojitých systémů. S použitím Laplaceovy transformace jsou definovány polynomiální matice a popsány jejich základní vlastnosti. Jedná se tedy o nekomutativní okruhy, v nichž lze definovat diofantické rovnice v těchto okruzích a je ukázáno jejich využití pro návrh vícerozměrných regulátorů.

Vhodným prostředím pro výpočty s maticemi, ale i pro simulaci dynamických a zpětnovazebních systémů je MATLAB s množstvím toolboxů a Simulink. Pro algebraické metody a syntézy byl vyvinut Polynomial toolbox, který dokáže efektivně řešit úlohy klasickým přístupem prakticky neřešitelné. V praktické části práce je uvedeno několik příkladů funkcí a ilustrativních příkladů.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 HISTORICKÉ POZNÁMKY

První zmínky o diofantických rovnicích jsou ze 3. století n. l. Za zakladatele je považován Diofantos z Alexandrie.

1.1 Diofantos z Alexandrie

Diofantos z Alexandrie byl starověký řecký matematik. Narodil se ve 3. století n. l. v egyptské Alexandrii a působil ve slavné Alexandrijské knihovně. O jeho životě se bohužel nedochovalo mnoho zpráv.

Patřil mezi první matematiky, kteří řešili ryze algebraické problémy. Vymyslel pro ně promyšlený systém značek. Mezi jeho nejdůležitější díla patří Aritmetiky ve 13 knihách. Do dnešní doby byla zachována přibližně polovina. Díky tomuto dílu je nazýván „otec algebry“. V tomto díle popisuje všechna tehdy známá řešení lineárních a kvadratických rovnic. Až do 17. století byla Aritmetika od Diofanta spolu s Eukleidovými Základy základním stavebním kamenem matematiky. Diofantos neznal nulu ani záporná čísla. Všechny rovnice, které narážely na tento problém, nazýval „absurdní“. Matematik Pierre de Fermat v 17. století postavil svou Velkou Fermatovu větu na základě Diofanta. Podle něj jsou pojmenovány diofantická čísla a diofantické rovnice.

Diofantické rovnice jsou neurčité rovnice v množinách typu okruh. Řešením těchto rovnic mohou být pouze celá čísla. Rovnice, které popisují problémy, lze matematicky popsat méně rovnicemi, než je počet neznámých. Diofantické rovnice jsou proto neurčité rovnice. Neexistuje jednoznačné řešení. Řešení bývá většinou nekonečně mnoho.

Diofantické rovnice jsou rovnice o dvou proměnných x a y ve tvaru $ax + by = c$, kde $a, b, c \in N$ jsou konstanty a $x, y \in N$ jsou proměnné. Diofantické rovnice jsou tedy rovnice s koeficienty z oboru přirozených čísel a jejichž řešení je také pouze z oboru přirozených čísel. [1,2]

1.2 Diofantické rovnice v novověku

První třetina 19. století přinesla významný pokrok v rozvoji algebraických pojmů, metod a technik. Zasloužily se o to zejména dvě osobnosti, a to Niels Henrik Abel a Évariste Galois. Ani jeden se nedožil věku 30 let, přesto se do historie matematiky oba zapsali nesmazatelným významem.

Niels Abel (1802-1829) se narodil do rodiny norského pastora. Jeho otec měl také doktorát z filozofie a teologie. Abel studoval na univerzitě v Oslu, poté v Dánsku, Německu a v Paříži. Celý život se potýkal s finančními problémy. V Paříži se nakazil tuberkulózou a po návratu do Norska zemřel v nedožitých 27 letech. Po Abelovi se nazývá řada matematických pojmů jako např. Abelova grupa, Abelova sumace, Abelovo kritérium. Pomocí Abelovských grup lze pojem okruh definovat jako Abelovskou grupu vůči sečítání a Abelovskou pologrupu vůči násobení.

Évariste Galois (1811-1832) byl francouzský matematik. Jeho osobní život byl velmi pohnutý a krátký. Vyrůstal v rodině starosty města, republikána, který se dostal do politických sporů a ukončil svůj život sebevraždou. Évariste se pak stal revolucionářem. Dostal se do nepřehledných sporů a ve věku 21 let zemřel na následky souboje pistolí. Za svého krátkého života jeho práce nebyly uznány, přestože je zasílal významným matematikům ve francouzské akademii věd. Teprve s odstupem času si matematika povšimla, že jeho práce byly revoluční, neboť zcela mění pohled na algebru a otevírají brány teorie množin. On sám si revolučnosti svých prací byl dobře vědom. Na Galoisově objevení měl zásadní podíl matematik Camille Jordan. Ten jako první ocenil jeho dílo v roce 1843 a to ve svém časopise. V roce 1846 ocenil jeho dílo matematik Joseph Liouville. Formuloval Galoisovu teorii, jednu ze základních kamenů moderní algebry. Pomocí své teorie dokázal charakterizovat, kdy má obecný polynom tzv. radikálové řešení, tj. kdy je možno kořeny zapsat jen s užitím základních aritmetických operací a odmocnin. Galois se též považuje za zakladatele teorie grup.

Pro rozvoj diofantických rovnic byly práce obou matematiků významné ve smyslu, že umožnily formulace v jiných okruzích jako např. v množině celých čísel. Jedná se o množinu polynomů, množinu racionálně lomených, stabilních a ryzích funkcí, množinu meromorfních funkcí apod.

V polovině 20. století si věda v teorii řízení, ale i v dalších disciplínách uvědomila, že syntéza regulátorů spočívá v konstrukci ke známému přenosu řízeného objektu v lineárním případě daným podílem dvou známých polynomů $S = b/a$ nalézt regulátor daný podílem dvou neznámých polynomů $R = q/p$. Charakteristická rovnice uzavřeného zpětnovazebního obvodu je pak $ap + bq$ a tato rovnice musí být stabilní, tedy musí platit $ap + bq = c$ se stabilním polynomem c . A to je již tvar diofantické rovnice. Nejstarší využití této filozofie je známo z diskrétních systémů popsaných pomocí Z-transformace, později se rozšířilo pro

spojité systémy, pro systémy se zpožděním a podobně. V mnohorozměrných systémech pak šlo o maticové diofantické rovnice v nekomutativních okruzích.

2 TEORETICKÉ ZÁKLADY

Již mnoho desetiletí je předmětem vědeckého zkoumání analýza a syntéza mnohorozměrných (MIMO) systémů. Během desetiletí se objevila celá řada přístupů a metod. Zobecnění výsledků teorie řízení z oblasti jednorozměrných (SISO) systémů není triviální a přímočaré. Pomocí soustav diferenciálních nebo diferenčních rovnic lze popsat dynamické systémy s více vstupy a výstupy. V lineárních případech lze použít Laplaceovu nebo Z-transformaci. Při zkoumání a analýze těchto systémů se však naráží na problémy, které jsou spojené s nekomutativitou maticového násobení. Vícerozměrný přenos lze vyjádřit pomocí levého nebo pravého maticového zlomku. Při tomto řešení, ale dochází k algebraickým problémům, které se nevyskytovaly v jednorozměrných systémech. Jedna z nutností je použití determinantu polynomiální matice k vyšetření stability. Skalární diofantická rovnice se změnila na maticové rovnice tří typů. Při analýze a syntéze mnohorozměrných (MIMO) systémů lze algebraické modely, pojmu a metody použít. [3]

2.1 Algebraické pojmy

Obecně cílem řízení soustavy S je získat výstup y , který splňuje určité požadavky. Jednou z nejčastěji sledovaných žádaných (řídících, referenčních) veličin w . K tomu lze dosáhnout vhodnými změnami vstupu u soustavy. Tyto změny lze realizovat pomocí regulátoru R . Mezi hlavní požadavky je minimalizace (ideálně odstranění) regulační odchylky $e = w - y$ v konečném čase. Dalšími požadavky také např. stabilita regulačního obvodu a kompenzace poruch.

Pro hlubší pohled do teorie mnohorozměrného dynamického systému řízení a k nalezení efektivnějších výpočetních algoritmů je potřeba vybudovat nový formální matematický aparát. Základním rysem matematického aparátu je algebraizace pojmu soustavy a především syntéza optimálního řízení. Důležitou algebraickou strukturou tohoto popisu je okruh, zejména okruh polynomů. [4,5]

2.1.1 Okruhy a tělesa

Okruh je množina, v níž lze sčítat (+), odčítat (-) a násobit (\cdot). Operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání. O tělese se hovoří, pokud se v ní dá navíc dělit.

Přesněji řečeno, je dána množina R se dvěma binárními operacemi, sčítáním a násobením $(R, +, \cdot)$. Pro okruh s operacemi musí být splněny následující axiomy:

1. $a + b \in R$ (uzavřenost)

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativní zákon)
3. $a + b = b + a$ (komutativní zákon)
4. existuje $0 \in R$, tak že $0 + a = a$ (nulový prvek)
5. existuje $-a \in R$ tak, že $-a + a = 0$ (opačný prvek)
6. $a \cdot b \in R$ (uzavřenost)
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativní zákon)
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativní zákon)
9. existuje $e \in R$ tak, že $e \cdot a = a \cdot e = a$ (jednotkový prvek)
10. pro $a \neq 0$ existuje $a^{-1} \in R$ tak, že $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ (inverzní prvek)
11. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributivní zákon)

Těleso je asociativní okruh, jehož každý nenulový prvek je invertovatelný. V tomto případě platí ještě navíc:

$$\forall a \neq 0 \in R \exists (a^{-1}) a \cdot a^{-1} = e \quad (\text{axiom dělení})$$

Okruh je tedy množina prvků, ve které je možné sčítat (odčítat) a násobit pomocí komutativních, asociativních a distributivních operací. Nekomutativní okruh je takový, kde neplatí pravidlo (8.). Typickým příkladem nekomutativního okruhu je množina polynomiálních matic. O tělese se hovoří, zda lze v této množině navíc i dělit. Příkladem okruhu je množina celých čísel nebo množina polynomů. Množina reálných čísel je příkladem tělesa a podobně množina polynomiálních zlomků (přenosů) je tělesem.

Důležitým pojmem je dělitelnost v tělese, kde platí:

- a dělí $b \Leftrightarrow \exists d \in R \quad b = a \cdot d$,
- d je dělitelem a i $b \Leftrightarrow a = a_0 \cdot d \quad b = b_0 \cdot d$,
- d je největší společný dělitel $\text{NSD}(a, b) \Leftrightarrow d$ je dělitelný každým dělitelem a, b .

V okruhu polynomů se dělitelnost rozhoduje přes kořeny. V okruhu celých čísel můžeme o dělitelnosti rozhodnout rozkladem na prvočinitele. Při řešení lze využít zobecněný Euklidův algoritmus. [6,7]

2.1.2 Dělitelnost v okruhu

Důležitou definicí je dělitelnost na množině prvků okruhu, která zní: necht' máme $a, b \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} = množina celých čísel), říkáme, že a dělí b (nebo také a je dělitel b , nebo b je násobek a), právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $b = k \cdot a$.

Skutečnost, že a dělí b lze symbolicky zapsat jako: $a \mid b$.

Pro dělitelnost na množině celých čísel platí:

1. Pro každé $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mid a$.
2. Pro každé $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ když $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$, pak také $a \mid c$.
3. Neplatí, že když $a \in \mathbb{Z}$ dělí $b \in \mathbb{Z}$, pak také b dělí a . Jinak řečeno, existují $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \mid b$ a zároveň b nedělí a .
4. Pro každé $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow (a \mid b \wedge b \mid a)$.
5. Pro každé $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab \mid c \Rightarrow (a \mid c \wedge b \mid c)$.
6. Necht' $a, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \mid m \wedge a \mid n) \Rightarrow a \mid (m + n)$.
7. Pro každé $a, b, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a \mid nb$.
8. Pro každé $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \Rightarrow a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Mezi další důležité definice patří společný dělitel. Společným dělitelem (nebo zkráceně jen dělitelem) čísel $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ nazveme každé $d \in \mathbb{Z}$ splňující: $d \mid a_1, \dots, d \mid a_n$.

Poté největším společným dělitelem čísel $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ nazveme každé $d \in \mathbb{Z}$ splňující podmínky:

1. $d \geq 0$
2. Číslo d je společným dělitelem čísel a_1, \dots, a_n , tj. $d \mid a_1, \dots, d \mid a_n$.
3. Jestliže d^* je dělitelem čísel a_1, \dots, a_n , potom $d^* \mid d$.

Skutečnost, že d je největším společným dělitelem čísel a_1, \dots, a_n , se značí jako $\text{NSD}(a_1, \dots, a_n)$.

Celá čísla a a b jsou nesoudělná, právě když $\text{NSD}(a, b) = 1$. V opačném případě, kdy $\text{NSD}(a, b) \neq 1$, jsou čísla soudělná.

Celou částí reálného čísla r se nazývá celé číslo z , které splňuje podmínku: $z \leq r < z + 1$. Celou částí reálného čísla r budeme značit $[r]$.

Pro každé $a, b \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} je množina přirozených čísel), $b \geq a$ existuje právě jedno $q \in \mathbb{N}$ a právě jedno $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < a$ takové, že: $b = qa + r$.

Pro určení největšího společného dělitele se používá Euklidův algoritmus. Necht' $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq a$. Jestliže $a = b$, poté $\text{NSD}(a, b) = a$. Jestliže $b > a$, poté existuje $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak,

že existují čísla $r_{-1} = b, r_0 = a, q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pro $j = 1, \dots, n + 1$ takové, že pro každé $i = -1, \dots, n - 1$ platí: $r_i = q_{i+2}r_{i+1} + r_{i+2}, 0 \leq r_{i+2} < r_{i+1}, a = r_0 > \dots > r_{n+1} = 0$.

Největším společným dělitelem čísel a a b je pak číslo r_n (poslední nenulový zbytek, případně $r_n = r_0 = a$), tj. $\text{NSD}(a, b) = r_n$.

Máme nekomutativní okruh a v něm prvky a, b , které patří do tohoto nekomutativního okruhu. Jestliže $a = e \cdot b$, kde e je jednotka v nekomutativní okruhu, pak a, b jsou prvky zleva asociované v tomto okruhu. Jestliže $a = b \cdot e$, pak a, b jsou prvky zprava asociované v daném okruhu. Jestliže dále platí $a = e_1 \cdot b \cdot e_2$, kde e_1 a e_2 jsou jednotky z nekomutativního okruhu, pak prvky a, b se nazývají asociované.

Prvek b se označuje jako pravý dělitel prvku a , jestliže existuje prvek c z nekomutativního okruhu takový, že platí $a = c \cdot b$. Naopak prvek b je levým dělitelem a , jestliže platí $a = b \cdot c$.

Prvek d_1 z nekomutativního okruhu se nazývá společným pravým dělitelem prvků a, b , jestliže je dělitelem každého z nich. Pokud navíc je dělitelný zprava každým jiným společným pravým dělitelem těchto prvků, pak se nazývá největší společný pravý dělitel. Prvek d_2 se nazývá společný levý dělitel prvků a, b , je-li levým dělitelem každého z nich. Jestliže je navíc dělitelný zleva každým jiným společným levým dělitelem těchto prvků, nazývá se největší společný levý dělitel.

Typickým příkladem nekomutativního okruhu je okruh $R_{m \times m}$ čtvercových matic m -tého stupně ($m > 1$) s prvky v tělese R neboli, jak říkáme, nad tělesem R . Nulovým prvkem $R_{m \times m}$ je nulová matice 0_m a jednotkovým prvkem je jednotková matice I_m .

O dělitelnosti dvou polynomů $a(s), b(s)$ je možné rozhodnout dvěma způsoby:

- pomocí rozkladu daných polynomů kořenové činitele,
- pomocí zobecněného Euklidova algoritmu.

Ruční výpočet největšího společného dělitele v okruhu polynomů je zdlouhavý proces. Ke zjištění největšího společného dělitele je možnost využití programu MATLAB.

Zobecněný Euklidův algoritmus pro určení největšího společného dělitele dvou polynomů $a(s), b(s)$ je uvažováno při splnění podmínky:

$$ak + bl = \text{NSD}(a, b),$$

$$am + bn = 0,$$

(1)

kde d je největší společný dělitel polynomů a, b a dále k, l, m, n jsou pomocné polynomy.

Algoritmus pro hledání největší společného dělitele dvou polynomů:

1. Definujeme uspořádání polynomů k, l, m, n do matic P a Q :

$$P = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2. Určíme, že $k = n = 1, l = m = 0$.
3. Určíme nenulový polynom menšího stupně v matici Q . Pokud jsou oba nulové, pak je konec výpočtu.
4. Jestliže je polynom menšího stupně ve druhém řádku matice Q , zaměníme řádky matic P a Q .
5. Jestliže je polynom ve druhém řádku matice Q nulový, pak je konec výpočtu.
6. Odečteme první řádek vynásobený $\lambda \cdot s^n$ od druhého řádku v matici P a Q .
7. Postup opakujeme od bodu 2).

Po ukončení tohoto postupu je největší společný dělitel NSD(a, b) na místě prvku a v matici Q . Na místě prvku b je nula. Prvky k, l, m, n jsou na svých pozicích v matici P . [5,8]

Příklad 2.1

Nalezneme největšího společného dělitele dvou polynomů v okruhu polynomů:

$$a(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 3,$$

$$b(s) = s^3 + 3s^2 + s + 3.$$

Řešení pomocí Euklidova algoritmu (sloupce označíme římskými číslicemi pro přehlednost):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} s^3 + 4s^2 + 4s + 3 \\ s^3 + 3s^2 + s + 3 \end{bmatrix} \quad II = (-1) \cdot I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} s^3 + 4s^2 + 4s + 3 \\ -s^2 - 3s \end{bmatrix} \quad \text{zaměníme řádky}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -s^2 - 3s \\ s^3 + 4s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix} \quad II = s \cdot I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -s + 1 & s \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -s^2 - 3s \\ s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix} \quad II = I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -s & s + 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -s^2 - 3s \\ s + 3 \end{bmatrix} \quad \text{zaměníme řádky}$$

$$P = \begin{bmatrix} -s & s+1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} s+3 \\ -s^2-3s \end{bmatrix} \quad II = s \cdot I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} -s & s+1 \\ -s^2-1 & s^2+s+1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} s+3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ze získaných matic P a Q je možné určit největší společný dělitel a pomocné polynomy. Největší společný dělitel dvou polynomů $a(s)$ a $b(s)$ a pomocné polynomy k, l, m, n jsou tedy:

$$\text{NSD}(a, b) = s + 3,$$

$$k = -s, \quad l = s + 1, \quad m = -s^2 - 1, \quad n = s^2 + s + 1,$$

přičemž platí podmínka (1):

$$ak + bl = \text{NSD}(a, b)$$

$$-s(s^3 + 4s^2 + 4s + 3) + (s + 1)(s^3 + 3s^2 + s + 3) = s + 3$$

$$am + bn = 0$$

$$(-s^2 - 1)(s^3 + 4s^2 + 4s + 3) + (s^2 + s + 1)(s^3 + 3s^2 + s + 3) = 0.$$

Získání největšího společného dělitele těchto dvou polynomů lze urychlit při využití programu MATLAB. Program MATLAB obsahuje funkci gcd , která slouží pro určení největšího společného dělitele. Použití funkce gcd :

$$\gg a=s^3+4*s^2+4*s+3;b=s^3+3*s^2+s+3;$$

$$\gg [G,C,D]=\text{gcd}(a,b)$$

$$G = s + 3$$

$$C = -s$$

$$D = s + 1$$

G určuje $\text{NSD}(a, b) = s + 3$ a proměnné C a D nám určují pomocné polynomy. Tedy platí:

$$G = aC + bD = (s^3 + 4s^2 + 4s + 3) \cdot (-s) + (s^3 + 3s^2 + s + 3) \cdot (s + 1) = (s + 3).$$

2.1.3 Polynomiální zlomky

Je daný komutativní okruh R , ve kterém nejsou netriviální dělitelé nuly a zlomky ve tvaru:

$$a = \frac{a_2}{a_1}, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \in R$$

$$b = \frac{b_2}{b_1}, b_1 \neq 0, b_2 \in R \quad (3)$$

Rovnost $a = b$ platí, jestliže $a_2 b_1 = a_1 b_2$ a sčítání a násobení je definované jako

$$a + b = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 b_1}$$

$$ab = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} \quad (4)$$

Poté množina všech tříd sobě rovných zlomků tvoří těleso. Nulovým prvkem tohoto tělesa jsou zlomky ve tvaru $\frac{0}{a_1}, a_1 \neq 0$. Jednotkovým prvkem tohoto tělesa jsou zlomky ve tvaru $\frac{a_1}{a_1}, a_1 \neq 0$. Prvek opačným k prvku a je $-a_2/a_1$ a prvkem inverzním k prvku $a \neq 0$ je a_1/a_2 . [5]

2.1.4 Polynomiální matice

Matice $P(s) \in R_{rxm}$ lze chápat jako maticový polynom

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_n s^n, \text{ kde } p_k \in R_{rxm} \quad (5)$$

Jestliže $p_n \neq 0$, pak n je stupeň polynomiální matice $P(s)$.

Polynomiální matice tvoří (nekomutativní) okruh pouze jestliže platí $r = m$. Matice $P(s)$ je jednotkou okruhu R_{mxm} právě když $\det P(s)$ je jednotkou okruhu R , $\det P(s)$ je nenulové číslo. Matice $P(s)$ je dělitelem nuly v R_{mxm} , právě když $\det P(s)$ je dělitelem nuly v R , $\det P(s) = 0$. [5]

Polynomiální matice $P(s)$ jsou obecně nesymetrické o rozměrech $r \times m$, kterých prvky jsou polynomy, které jsou z okruhu R . $\beta^{rm}[s]$ je označení pro množinu všech polynomiálních matic rozměru $r \times m$.

Polynomiální matice je ve tvaru:

$$P(s) = \begin{pmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \dots & p_{1m}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & \dots & p_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}(s) & p_{r2}(s) & \dots & p_{rm}(s) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Pro polynom na pozici r, m platí:

$$p_{rm}(s) = p_{rm0} + p_{rm1}s + \dots + p_{rmn_{rm}}s^{n_{rm}} \quad (7)$$

Mějme polynomiální matici $P(s) \in \beta[s]$. Stupeň r -tého řádku $r_r(P)$ matice $P(s)$ je maximálním ze stupňů polynomů v r -tém řádku. Poté stupeň m -tého sloupce $c_m(P)$ matice $P(s)$ je maximálním ze stupňů polynomů v m -tém sloupci. Stupeň polynomiální matice $P(s)$ ($\deg P(s)$) je maximálním ze stupňů všech polynomů v matici $P(s)$. [8]

2.1.5 Diofantické rovnice v okruhu polynomů

Diofantickou rovnicí v komutativním okruhu R lze zapsat ve tvaru:

$$ax + by = c, \quad (8)$$

kde a, b, c jsou dané prvky okruhu a x, y jsou neznámé ve stejném okruhu. Jestliže je největší společný dělitel prvků a, b ($\text{NSD}(a, b)$) pak platí, že $\text{NSD}((a_0x + b_0y)) = c$, kde prvky a_0, b_0 jsou nesoudělné prvky (jejich $\text{NSD}(a_0, b_0) = 1$). Diofantická rovnice má řešení v okruhu, pokud platí, že $\text{NSD}(a, b)$ (což je největší společný dělitel prvků a, b definované v okruhu) dělí c , tedy $(\text{NSD}(a, b)/c)$. Obecné řešení diofantické rovnice je dáno součtem partikulárního řešení úplné rovnice a obecného řešení zkrácené rovnice. Tedy platí:

$$\begin{aligned} x &= x_p + \frac{b}{\text{NSD}(a, b)} t \\ y &= y_p - \frac{a}{\text{NSD}(a, b)} t \end{aligned} \quad (9)$$

kde členy x_p, y_p jsou partikulární řešení diofantické rovnice a t je libovolný polynom.

Do diofantické rovnice dosadíme získané řešení a dostaneme:

$$\begin{aligned} ax + by = c &\rightarrow ax_p + a \frac{b}{(a, b)} t + by_p - b \frac{a}{(a, b)} t = c \\ ax_p + by_p &= c \end{aligned} \quad (10)$$

Řešení této rovnice představuje partikulární řešení diofantické rovnice.

Příklad 2.2

Najděme řešení diofantické rovnice v okruhu polynomů metodou neurčitých koeficientů:

$$(s^2 + 4s + 6)x + (s + 1)y = s + 2 \leftrightarrow ax + by = c$$

Určení stupňů hledaných polynomů x, y :

$$\deg a + \deg b \rightarrow \deg c \rightarrow 1 + 2 > 1$$

$$\deg x = \deg b - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\deg y = \deg a - 1 = 2 - 1 = 1$$

Výsledný tvar diofantické rovnice, který poslouží k nalezení partikulárního řešení:

$$(s^2 + 4s + 6)x_0 + (s + 1)(y_0 + y_1s) = s + 2$$

$$x_0s^2 + 4x_0s + 6x_0 + y_0s + y_0 + y_1s^2 + y_1s = s + 2$$

$$s^2: x_0 + y_1 = 0 \qquad x_0 = -y_1$$

$$s: 4x_0 + y_0 + y_1 = 1$$

$$s^0: 6x_0 + y_0 = 2 \qquad y_0 = 2 - 6(-y_1) = 2 + 6y_1$$

Dosazením výrazů z první a třetí rovnice do druhé rovnice a po dalších úpravách získáme:

$$-4y_1 + 2 + 6y_1 + y_1 = 1 \rightarrow 3y_1 = -1 \rightarrow y_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_0 = -y_1 = \frac{1}{3}$$

$$y_0 = 2 + 6y_1 = 2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}$$

Jelikož platí, že $\text{NSD}(a,b)=1$, získáme řešení partikulární rovnice:

$$x_p = x_0 = \frac{1}{3}$$

$$y_p = (y_0 + y_1s) = -\frac{1}{3}s$$

Obecné řešení:

$$x = x_p + \frac{b}{\text{NSD}(a,b)}t = \frac{1}{3} + (s + 1)t$$

$$y = y_p - \frac{a}{\text{NSD}(a,b)}t = -\frac{1}{3}s - (s^2 + 4s + 6)t$$

Přičemž t představuje libovolný polynom.

Příklad 2.3

Najděme řešení diofantické rovnice v okruhu polynomů pomocí zobecněného Euklidova algoritmu:

$$(s^2 + 4s + 6)x + (s + 1)y = s + 2 \leftrightarrow ax + by = c$$

Určením největšího společného dělitele $\text{NSD}(a, b)$ a pomocných polynomů k, l, m, n získáme řešení diofantické rovnice. Sloupce označíme římskými číslicemi pro přehlednost.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 6 \\ s + 1 \end{bmatrix} \text{ zaměníme řádky}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} s + 1 \\ s^2 + 4s + 6 \end{bmatrix} II = (-s) \cdot I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} s + 1 \\ 3s + 6 \end{bmatrix} II = (-3)I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s - 3 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} s + 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ zaměníme řádky}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -s - 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 3 \\ s + 1 \end{bmatrix} II = (-s)I + 3II$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -s - 3 \\ -s & s^2 + 3s + 3 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} II = -I + II$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -s - 3 \\ -s - 1 & s^2 + 4s + 6 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} I = \frac{1}{3}I$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -s - 1 & s^2 + 4s + 6 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Největší společný dělitel dvou polynomů a a b a pomocné polynomy jsou:

$$\text{NSD}(a, b) = 1,$$

$$k = \frac{1}{3}, l = -\frac{1}{3}s - 1, m = -s - 1, n = s^2 + 4s + 6$$

Ověření podmínky řešitelnosti diofantické rovnice:

$$\frac{c}{\text{NSD}(a, b)} = s + 2 \Rightarrow \text{je splněna podmínka } \text{NSD}(a, b) \mid c \text{ v okruhu polynomů.}$$

Obecné řešení:

$$x = x_p + \frac{b}{\text{NSD}(a, b)}t = \frac{c}{\text{NSD}(a, b)}k + mt = \frac{1}{3}(s + 2) - (s + 1)t$$

$$y = y_p - \frac{a}{\text{NSD}(a, b)}t = \frac{c}{\text{NSD}(a, b)}l + nt = -\left(\frac{1}{3}s + 1\right)(s + 2) + (s^2 + 4s + 6)t$$

Partikulární řešení:

$$x_p = \frac{1}{3}(s + 2) = \frac{1}{3}s + 2$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}s - 1\right)(s + 2) = -\frac{1}{3}s^2 - \frac{5}{3}s - 2$$

Partikulární řešení příkladů 2.2. a 2.3. na první pohled vypadají rozdílně. Ale u příkladu 2.2 jsme našli partikulární řešení ve tvaru 1. stupně a u příkladu 2.3 jsme našli partikulární řešení ve tvaru 2. stupně.

Řešení diofantické rovnice je nalezení některého partikulárního řešení a nalezení koeficientů vyjadřujících neurčitost obecného řešení.

Má-li tedy rovnice (1) řešení, pak jich má nekonečně mnoho. Odtud název neurčitá či diofantická rovnice. [6,8,9]

2.2 Lineární mnohorozměrné systémy

2.2.1 Přenos

Nejstarší a nejhluběji studovanou disciplínou teorie řízení je analýza a syntéza LSDS (lineární spojité dynamické systémy). Mezi jednu z důležitých věcí je zkoumat, jak působí jedna část systému na jinou, na okolí atd. Určený matematický popis reálného systému (vytvořený matematický model) je vhodný způsob zjišťování těchto vlivů. LSDS jsou popisovány lineárními diferenciálními rovnicemi. Systém může být popsán jen v diskrétních časových okamžicích. To jsou diskrétní lineární systémy popsané diferenčními rovnicemi. Při analýze a syntéze lineárních spojitých dynamických systémů je třeba řešit složité diferenciální rovnice nebo soustavy diferenciálních rovnic. Mezi analýzu LSDS patří popis statických a dynamických vlastností systémů, vyšetřování stability atd. Mezi syntézu LSDS patří stanovení struktur a parametrů regulačního obvodu takovým způsobem, aby byly splněny požadavky na regulační pochod. Laplaceova transformace přináší zjednodušení výpočtů diferenciálních rovnic či jejich soustav. Podle vztahu:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (11)$$

Laplaceova transformace přiřazuje po částech reálné funkci $f(t)$ reálné proměnné t komplexní funkci $F(s)$ komplexní proměnné s .

Pro funkci $f(t)$ musí platit:

- $f(t)$ je alespoň po částech spojitá funkce
- $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
- $f(t) \leq Me^{-\alpha t}$ pro $M > 0, \alpha > 0$.

K popisu chování lineárních spojitých dynamických systémů lze přikročit různými způsoby. Pokud se používají pouze vstupní a výstupní funkce, jde o vnější popis systému. V případě použití dalších veličin, jde o vnitřní popis. Vnější popis LSDS je možné vyjádřit mnoha ekvivalentními způsoby. Jeden z těchto způsobů je přenosová funkce systému (dále přenos systému).

Nejběžnějším způsobem přenosu LSDS je přenos $G(s)$. Tento přenos se definuje jako poměr Laplaceových obrazů výstupní veličiny $Y(s)$ a vstupní veličiny $U(s)$ při nulových počátečních podmínkách. Přenos $G(s)$ lze zapsat jako:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (12)$$

kde n je řád přenosu a $n - m$ je relativní řád přenosu.

Jmenovatele i činitele přenosu je možné rozložit na součin kořenových činitelů. Kořeny jmenovatele určují póly p přenosu. Kořeny čitatele určují nuly z přenosu. Pomocí pólů a nul lze přenos vyjádřit jako:

$$G(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (13)$$

Přenos lze vyjádřit ve tvaru s časovými konstantami:

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (14)$$

Mezi časovými konstantami, póly a nulami přenosu pro reálné póly a nuly jsou vztahy:

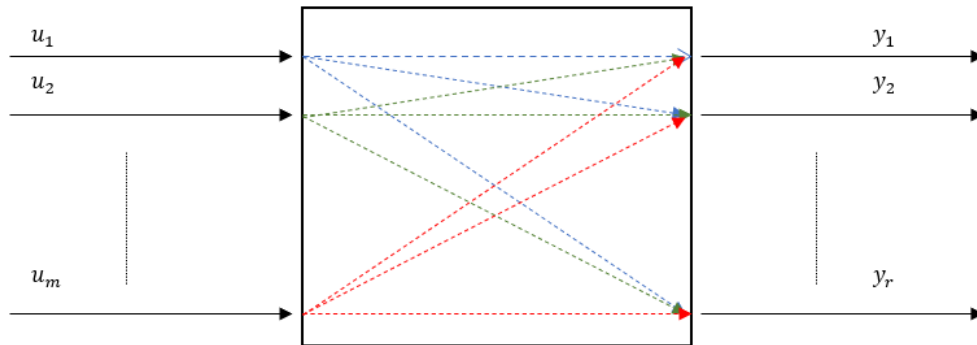
$$T_i = -\frac{1}{p_i} \tau_i = -\frac{1}{z_i} \quad (15)$$

[6,7]

2.2.2 Popis mnohorozměrných systémů

U většího počtu regulovaných objektů (turbíny, kotle) je třeba regulovat několik veličin najednou. Tedy systémy v praxi se nejčastěji objevují jako systémy s více vstupními a

výstupními veličinami. Tyto veličiny v systémech jsou provázány vzájemně. Obecně každý vstup může ovlivnit kterýkoli výstup. Pro to se označují jako mnohorozměrné systémy. Používá se zkratka „MIMO“ (Multi-Input Multi-Output). Takový systém lze schematicky zobrazit s m vstupy a r výstupy a je zobrazen na Obr. 1.



Obr. 1 Schéma mnohorozměrného systému

MIMO systém lze popsat soustavou diferenciálních rovnic. Soustavou lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu lze popsat lineární systém. Pro případ systému se dvěma vstupy, dvěma výstupy a dynamikou prvního řádu by se jednalo o:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) &= b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) \\ a_3 y_1(t) + y_2'(t) + a_4 y_2(t) &= b_3 u_1(t) + b_4 u_2(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Po použití Laplaceovy transformace (při uvažování nulových počátečních podmínek) dostaneme:

$$\begin{aligned} (s + a_1)Y_1(s) + a_2 Y_2(s) &= b_1 U_1(s) + b_2 U_2(s) \\ a_3 Y_1(s) + (s + a_4)Y_2(s) &= b_3 U_1(s) + b_4 U_2(s) \end{aligned} \quad (17)$$

Po přepisu do maticového tvaru lze tyto rovnice vyjádřit:

$$\begin{pmatrix} s + a_1 & a_2 \\ a_3 & s + a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Obecně tedy platí:

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) \quad (19)$$

kde matice A má rozměr rxr a matice B má rozměr rxm .

Maticovým přenosem (levým) mnohorozměrných systémů je pak matice racionálně lomených funkcí:

$$G(s) = A^{-1}(s)B(s) \quad (20)$$

Pomocí přenosové matice lze popsat vnější popis LSDS. Tento popis neobsahuje stavové veličiny. Popisuje pouze vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami systému.

V případě mnohorozměrných systémů mohou být tyto vztahy odvozeny ze stavového popisu ve tvaru maticových přenosů. Mohou být použity polynomiální matice a přenosy jsou poté následně vyjádřeny ve tvaru maticových zlomků. Matice přenosů lze zapsat jako:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{g_{11}(s)}{a(s)} & \frac{g_{12}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{1m}(s)}{a(s)} \\ \frac{g_{21}(s)}{a(s)} & \frac{g_{22}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{2m}(s)}{a(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{g_{r1}(s)}{a(s)} & \frac{g_{r2}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{rm}(s)}{a(s)} \end{pmatrix} = \frac{G'(s)}{a(s)} \quad (21)$$

kde m je počet vstupů systémů a r je počet výstupů. [6,7,8]

2.2.3 Stabilita mnohorozměrného systému

Stabilitou dynamických systémů se zabýval L. P. Ljapunov. Jeho definice stability jsou do dnešní době platné pro tzv. vnitřní stabilitu nejen pro lineární, ale i pro nelineární systémy. Ve smyslu této definice je stabilita dynamického systému schopnost vrátit se po vychýlení z původního stavu. Toto vychýlení je vždy způsobeno nenulovými počátečními podmínkami. Ljapunovská stabilita je tedy vlastnost pouze levé části diferenciální rovnice (jmenovatele přenosu).

Ljapunovská stabilita říká: systém je stabilní, jestliže z nenulového počátečního stavu konverguje řešení (výstup systému) k nule. Ljapunovská stabilita tedy závisí na vstupní veličině.

LSDS je nestabilní tehdy, jestliže póly leží buď v pravé části komplexní roviny nebo jestliže kořeny leží na imaginární ose (leží na hranici stability).

Nutnou podmínkou k tomu, aby kořeny ležely polynomu $a(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ ležely pouze v levé části komplexní rovin musí platit, aby $a_i > 0$ pro všechny $i = 0, 1, \dots, n$. Z toho plyne, že pokud je aspoň jeden koeficient záporný a ostatní koeficienty jsou kladné, tak je polynom nestabilní.

Pro stabilitu mnohorozměrného systému je rozhodující $\det A(s)$, respektive $\det A_p(s)$. MIMO systém je stabilní tehdy, pokud je $\det A(s)$ ($\det A_p(s)$) stabilní polynom, tzn. že má kořeny v levé části komplexní roviny. Přitom platí, že $\det A(s) \cong \det A_p(s)$, což znamená, že výsledné polynomy se mohou lišit pouze o nějaký skalární násobek. Jejich kořeny jsou ale vždy stejné. [6]

2.2.4 Polynomiální maticové zlomky

Pomocí vztahů (12) a (21), které se nacházejí v kapitole 2.2.1 Přenosová funkce a 2.2.2 Popis mnohorozměrných systémů získáme vektor obrazů výstupu ve stavu:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G'(s)}{a(s)}U(s) \quad (22)$$

kdy stále uvažujeme nulové počáteční podmínky.

Vnější popis systému pomocí přenosové matice (21) nemusí být nejvýhodnější z pohledu odvození zákonů řízení mnohorozměrných systémů. Jako vhodnějším způsobem se jeví vnější popis systému pomocí polynomiálních matic. Je lepší i z hlediska identifikace těchto systémů.

Přenosovou matici systému (21) lze za použití (22) možné zapsat ve dvou tvarech:

$$G(s) = A^{-1}(s)B(s) \quad (23)$$

kde platí: $A(s) = a(s)I_r$ a $B(s) = G'(s)$. Přenosová matice, která je reprezentovaná ve tvaru (23) nazýváme levý polynomiální maticový zlomek nebo zkráceně LPMFD.

$$G(s) = B_p(s)A_p^{-1}(s) \quad (24)$$

kde platí: $A_p(s) = a(s)I_m$ a $B_p(s) = G'(s)$. Přenosová matice, která je reprezentovaná ve tvaru (24) nazýváme pravý polynomiální maticový zlomek nebo zkráceně RPMFD.

Výhodné je použití levého polynomiálního maticového zlomku LPMFD, protože je možné získat popis systému v časové oblasti (diferenciální rovnice) zpětnou Laplaceovou transformací rovnice:

$$Y(s) = A^{-1}(s)B(s)U(s)$$

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) \quad (25)$$

Je-li systém popsán diferenciálními rovnicemi, pak jejich Laplaceovou transformací se získá popis systému ve tvaru levého polynomiálního maticového zlomku LPMFD. [6,7,8]

Přirozeným (vnějším) popisem mnohorozměrných systémů je soustava diferenciálních rovnic, např.:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + 2y_1(t) + 0,8y_2(t) &= 5u_1(t) + 6u_2(t) \\ y_2'(t) + 1,5y_2(t) + 0,6y_1(t) &= 2u_1(t) + 3u_2(t) \end{aligned} \quad (26)$$

Je-li soustava lineární, lze použít Laplaceovu transformaci, tedy (při nulových počátečních podmínkách):

$$\begin{aligned} sY_1(s) + 2Y_1(s) + 0,8Y_2(s) &= 5U_1(s) + 6U_2(s) \\ 0,6Y_1(s) + sY_2(s) + 1,5Y_2(s) &= 2U_1(s) + 3U_2(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s+2 & 0,8 \\ 0,6 & s+1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

Obecně můžeme psát:

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) \quad (27)$$

Rozměry polynomiálních rovnic jsou $A(s)(l \times l)$, $B(s)(l \times m)$.

Lze pak psát maticový přenos $G(s)(l \times m)$, pro který platí:

$$Y(s) = A^{-1}(s)B(s)U(s) = G(s)U(s) \quad (28)$$

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{l1}(s) & G_{l2}(s) & \dots & G_{lm}(s) \end{pmatrix} \quad (29)$$

kde $G_{lm}(s)$ je (dílní) přenos m -té vstupní veličiny na l -tou výstupní veličinu.

Maticový přenos může být ve tvaru levého maticového zlomku: $A^{-1}(s)B(s)$ nebo ve tvaru pravého maticového zlomku: $B_P(s)A_P^{-1}(s)$. Rozměry matic jsou $B_P(s)(l \times m)$, $A_P(s)(m \times m)$. Oba zápisy jsou ekvivalentní tehdy, když všechny matice jsou zprava i zleva nesoudělné.

Levý maticový zlomek $A^{-1}(s)B(s)$ je zleva soudělný, když existuje (neunimodulární) matice $T(s)$ taková, že $A(s) = T(s)A_0(s)$ a $B(s) = T(s)B_0(s)$.

Pravý maticový zlomek $B_P(s)A_P^{-1}(s)$ je zprava soudělný, když existuje (neunimodulární) matice $T(s)$ taková, že $A_P(s) = A_{P0}(s)T(s)$ a $B_P(s) = B_{P0}(s)T(s)$.

Pak platí:

$$A^{-1}(s)B(s) = B_P(s)A_P^{-1}(s) \quad (30)$$

tedy $B(s)A_P(s) - A(s)B_P(s) = 0$, což je obecně maticová diofantická rovnice, jejímž řešením lze z levého maticového zlomku nalézt pravý maticový zlomek a naopak.

Navíc ještě platí:

$$\det A(s) = k \cdot \det A_P(s) \quad (31)$$

kde k je konstanta. Libovolný determinant z těchto determinantů pak tvoří charakteristický polynom systému. Tedy kořeny tohoto polynomu jsou přenosovými póly, které rozhodují o stabilitě. [6]

Příklad 2.4

Určeme levý a pravý maticový zlomek u daného mnohorozměrného systému se dvěma vstupy a dvěma výstupy:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= u_1(t) + 2u_2(t) \\ y_2'(t) + 2y_2(t) + 3y_1(t) &= 3u_2(t) \end{aligned}$$

Obraz těchto rovnic po Laplaceově transformaci jsou ve tvaru:

$$sY_1(s) + Y_1(s) + 2Y_2(s) = U_1(s) + 2U_2(s)$$

$$3Y_1(s) + sY_2(s) + 2Y_2(s) = 3U_2(s)$$

Systém můžeme zapsat ve tvaru LPMFD (levý polynomiální maticový zlomek):

$$\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

$$G = A^{-1}B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\det G = s^2 + 3s - 4$$

Pro výpočet pravého maticového zlomku využijeme elementárních sloupcových úprav a následujícího schématu:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline X & -B_p \\ Y & A_p \end{array} \right) \quad (32)$$

Sloupce označíme římskými číslicemi pro přehlednost.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s+1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & s+2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad IV = -2 \cdot III + IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s+1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & s+2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad IV = \frac{1}{3} IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s+1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & s+2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad I = -s \cdot III + I, II = -2 \cdot III + II$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & s+2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & -2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad II = -s \cdot IV + II, I = -3 \cdot IV + I$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s+2 & \frac{2}{3}s-2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3}s & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad II = II - IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s+2 & \frac{2}{3}s - \frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad III = -I + III, IV = -II + IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3}s - \frac{4}{3} & 0 & -\frac{2}{3}s + \frac{2}{3} \\ -s+2 & \frac{2}{3}s - \frac{4}{3} & s-1 & -\frac{2}{3}s + \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3}s - \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}s + \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Výsledkem je pravý maticový zlomek:

$$G = B_p A_p^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & -\frac{2}{3}s + \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3}s + \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1}}}$$

$$\det G = \frac{1}{3}s^2 + s - \frac{4}{3} = s^2 + 3s - 4$$

Přenosová matice:

$$G = A^{-1}B = \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 3 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2 + 3s - 4} \begin{pmatrix} s+2 & 2s-2 \\ -3 & 3s-3 \end{pmatrix}}}$$

respektive

$$G = B_p A_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & -\frac{2}{3}s + \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3}s + \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$G = \frac{1}{\frac{1}{3}s^2 + s - \frac{4}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}s + \frac{2}{3} & \frac{2}{3}s - \frac{2}{3} \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}$$

Po roznásobení do tvaru matice se čtyřmi racionálními funkcemi lomenými a zkrácení lze vidět, že jsme přes pravý i levý maticový zlomek dospěli k téže přenosové matici G .

2.2.5 Řešení maticových polynomiálních diofantických rovnic

V nekomutativních okruzích (např. v polynomiálních) je komplikovanější situace. Díky nekomutativnímu násobení můžeme maticové diofantické rovnice rozlišit na tři typy plynoucí z (8). Obecně jsou ve tvarech:

- pravostranná rovnice (řešení sloupcovými úpravami)

$$AX + BY = C \quad (33)$$

- levostranná rovnice (řešení řádkovými úpravami)

$$XA + YB = C \quad (34)$$

- (bilaterární) rovnice s neznámými na různých stranách

$$AX + YB = C \quad (35)$$

Matice (A, B, C) v rovnici (27) mají stejný počet řádků. Matice (A, B, C) v rovnici (30) mají stejný počet sloupců. Řešení těchto rovnic lze shrnout následovně:

- rovnice (33) má řešení právě tehdy, jestliže $NSLD(A, B)$ je levým dělitelem C ,
- rovnice (34) má řešení právě tehdy, jestliže $NSPD(A, B)$ je pravým dělitelem C ,
- rovnice (35) má řešení právě tehdy, jestliže jsou matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ekvivalentní. Tento případ není součástí diplomové práce.

Existuje-li partikulární řešení dané diofantické rovnice, pak jich existuje nekonečně mnoho. Podobně jak je tomu v komutativním okruhu.

V případě rovnice (31) je množina řešení dána vztahy:

$$x = x_0 - \tilde{B}T, y = y_0 + \tilde{A}T \quad (36)$$

kde x_0, y_0 je partikulární řešení (33) a T je libovolná polynomiální matice příslušné dimenze a platí:

$$A\tilde{B} = B\tilde{A} \quad (37)$$

V případě rovnice (34) je množina řešení dána vztahy:

$$x = x_0 - \tilde{T}B, y = y_0 + \tilde{T}A \quad (38)$$

kde x_0, y_0 je partikulární řešení (34) a T je libovolná polynomiální matice příslušné dimenze a platí:

$$\tilde{B}A = \tilde{A}B \quad (39)$$

Vztahy (36), (38) vyjadřují otočení maticového zlomku. Vhodné a kvalifikované prostředí pro tyto výpočty je program MATLAB, který je rozšířený o Polynomial toolbox. MATLAB obsahuje řadu funkcí pro různé účely teorie řízení a návrh regulátorů.

Diofantické rovnice lze řešit roznásobením člen po členu. Tím jsou převedeny na skalární polynomiální rovnice. Výhodnější je řešení pomocí elementárních sloupcových či řádkových úprav. Mezi elementární sloupcové/řádkové úpravy patří:

- výměna sloupců/řádků,
- vynásobení všech prvků konstantou ve sloupci/řádku,
- přičtení polynomiálního násobku sloupce či řádku k dalšímu sloupci/řádku.

Na následujících schématech je znázorněn postup:

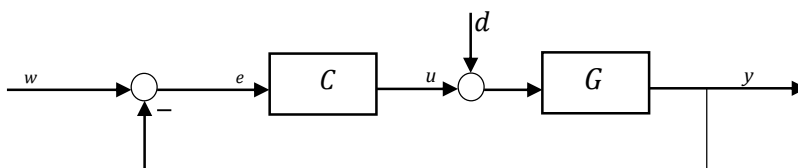
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární sloupcové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline X & Z_1 \\ Y & Z_2 \end{array} \right) \quad (40)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} A & I & 0 \\ B & 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(\begin{array}{ccc} C & X & Y \\ 0 & Z_1 & Z_2 \end{array} \right) \quad (41)$$

kde $\begin{matrix} Z_1 = -B_p \\ Z_2 = A_p \end{matrix}$ } je otočený maticový zlomek vzhledem k A resp. B . [3]

2.2.6 Syntéza regulátorů

Základní schéma zpětnovazebního řízení je zobrazena na Obr. 2.



Obr. 2 Zpětnovazební systém s jedním stupněm volnosti (1DOF)

Vstupními signály na Obr. 2 jsou referenční (žádaný) signál $w = F_w^{-1}(s)G_w(s)$ a poruchový signál $d = F_w^{-1}(s)G_w(s)$. oba signály jsou definovány pomocí levých maticových zlomků. Všechny stabilizující regulátory, které jsou tvaru 1DOF podle Obr. 2 jsou dány maticovou diofantickou rovnicí:

$$A(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (42)$$

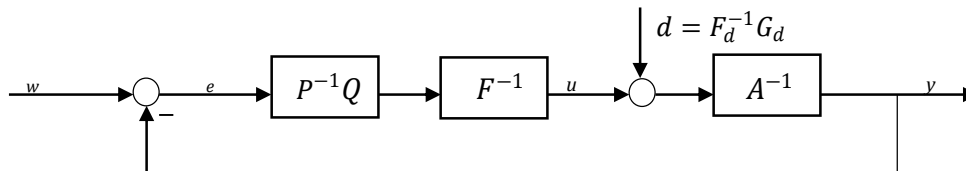
kde $P^{-1}(s)Q(s) = Q_P(s)P_P^{-1}(s)$ je levý a pravý maticový zlomek regulátoru C . $A^{-1}(s)B(s) = B_P(s)A_P^{-1}(s)$ je levý a pravý maticový zlomek řízeného objektu.

Pro asymptotické sledování nebo potlačení poruch musí být splněny ještě další podmínky. Jedna z podmínek musí splňovat, aby součin jmenovatelů řízeného objektu a regulátorů byl dělitelný jmenovateli vstupujících signálů (žádané veličiny nebo poruchy). Možností splnění této podmínky je použití kompenzátoru ve zpětné vazbě podle Obr. 2. Pro splnění asymptotického sledování je $sF = F_w$. V případě simultánního asymptotického sledování a potlačení poruchy je $nF = F_w F_d$, kde F_d je levý jmenovatel přenosu poruchy. Syntéza regulátoru podle Obr. 2, pak pro regulátor $Q_R(s)P_R^{-1}(s)$ spočívá v řešení maticové diofantické rovnici:

$$A(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (43)$$

kde $M(s)$ je stabilní polynomiální matice s předepsanými póly svého determinantu. Výsledné matice P_R, Q_R reprezentují pravý maticový zlomek:

$$P^{-1}(s)Q(s) = Q_R(s)P_R^{-1}(s) \quad (44)$$



Obr. 3 Zpětnovazební systém s předkompenzátorem

Zákon řízení je pak generován rovnicí:

$$P^{-1}(s)F(s)U(s) = Q(s) \cdot (W(s) - Y(s)) \quad (45)$$

Pro jednodušší případy lze diofantickou rovnicí (42) řešit pomocí elementárních sloupcových operací. Postup je možné vyjádřit podle následujícího schématu:

$$\left(\begin{array}{c|c} AF & B \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární sloupcové operace}} \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P_R & Z_1 \\ \hline Q_R & Z_2 \end{array} \right) \quad (46)$$

Elementární operace v (46) je možné provádět tím způsobem, že polynomiální matice $P_P(s)$ zůstává jednotková, a tak není nevyhnutelné provádět otočení maticového zlomku. V komplikovanějších případech se pak musí použít Euklidův algoritmus. Polynomial toolbox, co

je součástí programu MATLAB nabízí řadu funkcí a programů, které pomohou k řešení problémů a rovnic polynomiálních matic.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 PROGRAMOVÉ PROSTŘEDÍ PRO VÝPOČTY A SIMULACE

Název MATLAB je zkratkou z anglického spojení *MATrix LABoratory*. Programový balík s názvem MATLAB představila americká společnost The MathWorks v roce 1984.

3.1 Popis prostředí

MATLAB je integrované prostředí, díky kterému lze provádět matematické výpočty, modelování a simulace, analýza dat a jejich vizualizace, návrhy řídicích a komunikačních systémů, vývoj algoritmů, zpracování signálů a komunikace atd. Program MATLAB zvládá složité výpočetní operace, ale program neumí udělat návrh řešení našeho problému. Program je schopný pouze zrealizovat náš návrh řešení.

MATLAB obsahuje několik základních komponentů a mezi ně patří: výpočetní jádro, grafický subsystém, pracovní nástroje, toolboxy, otevřenou architekturu.

Výpočetní jádro je základem vývojového prostředí. Provádí numerické operace s maticemi reálných nebo komplexních čísel. MATLAB je tedy orientován maticově.

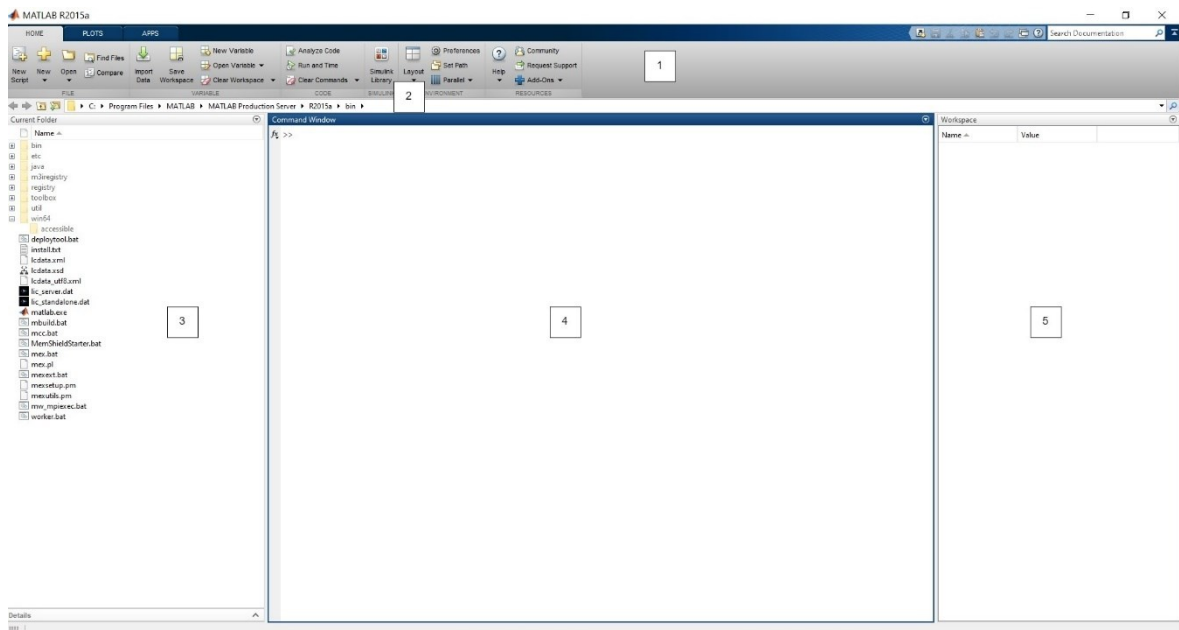
Grafický subsystém zobrazuje výsledky výpočtů, a to v grafické podobě. Práce s grafy je jednoduchá a rychlá. Lze je různě nastavovat, upravovat a vytvořit je ve dvojrozměrném 2D nebo třírozměrném 3D prostředí.

Toolboxy jsou knihovny funkcí, které jsou součástí jádra. Tyto toolboxy rozšiřují možnosti programu. Jsou zaměřené na konkrétní vědní a technické obory. Mezi toolboxy patří např.: Symbolic Math Toolbox, Optimization Toolbox, Control System Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, System Identification Toolbox, Polynomial Toolbox a mnoho další.

Samostatnou kapitolu pak tvoří systém Simulink. Simulink umožňuje pracovat se všemi funkcemi a příkazy jako s grafickými bloky. Tyto bloky je schopný vzájemně propojovat, napojovat na zdroje dat, aj. [10]

3.2 Prostředí MATLAB

Po spuštění programu MATLAB se zobrazí základní okno, které je na následujícím obrázku (Obr. 4).



Obr. 4. Pracovní plocha prostředí MATLAB R2015a

Menu (Obr. 4 položka 1) – panel hlavní nabídky se nachází v horní části okna. Tato hlavní nabídky je rozdělena na tři části. Home, který slouží pro základní operace se soubory, proměnnými, zobrazení nápovědy atd. Plots, který slouží pro výběr z několika druhů stylu grafu nebo možnost vytvoření nového stylu grafu. Apps, kde je přehled nainstalovaných Apps a přístup k nim nebo slouží pro stáhnutí různých doplňujících aplikací pro jednodušší práci s MATLABem.

Průzkumník (Obr. 4 položka 2) – okno, které slouží pro nastavení cesty aktuálního adresáře.

Current Folder (Obr. 4 položka 3) – aktuální složka. V tomto okně se nachází všechny soubory, které jsou v aktuální složce. Tyto soubory můžeme spouštět dvojitým kliknutím myši na danou položku. Podle přípony se pak soubor otevře v určitém editoru.

Command Window (Obr. 4 položka 4) – příkazové okno. Uživatel zde zadává jednotlivé příkazy, spouští funkce a skripty. Vypisují se zde výsledky, které jsou vypočítané MATLABem. Používá se i pro ladění a testování skriptů, když uživatel neví, co jednotlivé řádky nebo části skriptu provádí.

Workspace (Obr. 4 položka 5) – pracovní prostor. Velmi důležité okno. Po spuštění programu MATLAB, je toto okno prázdné. Vypisují se zde všechny proměnné a jejich hodnoty, které uživatel použil během své práce. Po dvojitým kliknutí myši na proměnnou se zobrazí detailní informace – název, rozměr, struktura atd. Je zde lepší orientace při použití většího množství proměnných než v příkazovém okně. [11,12]

3.3 Simulink

Slovo Simulink se skládá ze dvou anglických slov – SIMUlation and LINK (přeloženo do češtiny jako „Simulace a spojení“). Patří mezi nejznámější a nejpoužívanější nadstavbu v programu MATLAB. Používá se pro modelování, simulaci a analýzu dynamických systémů, a to v přehledném grafickém uživatelském prostředí (GUI). V GUI si uživatel může poskládat vlastní model z jednotlivých bloků knihovny, které zastávají různé funkce. Uživateli je umožněno i sestavení vlastního návrhu bloku, případně editovat již hotové bloky. Ovládání prostředí Simulinku probíhá přes tzv. click-and-drag operace myši. to znamená kliknutí myši na zvolený blok a tažení bloku na určené místo, kde se blok má nacházet.

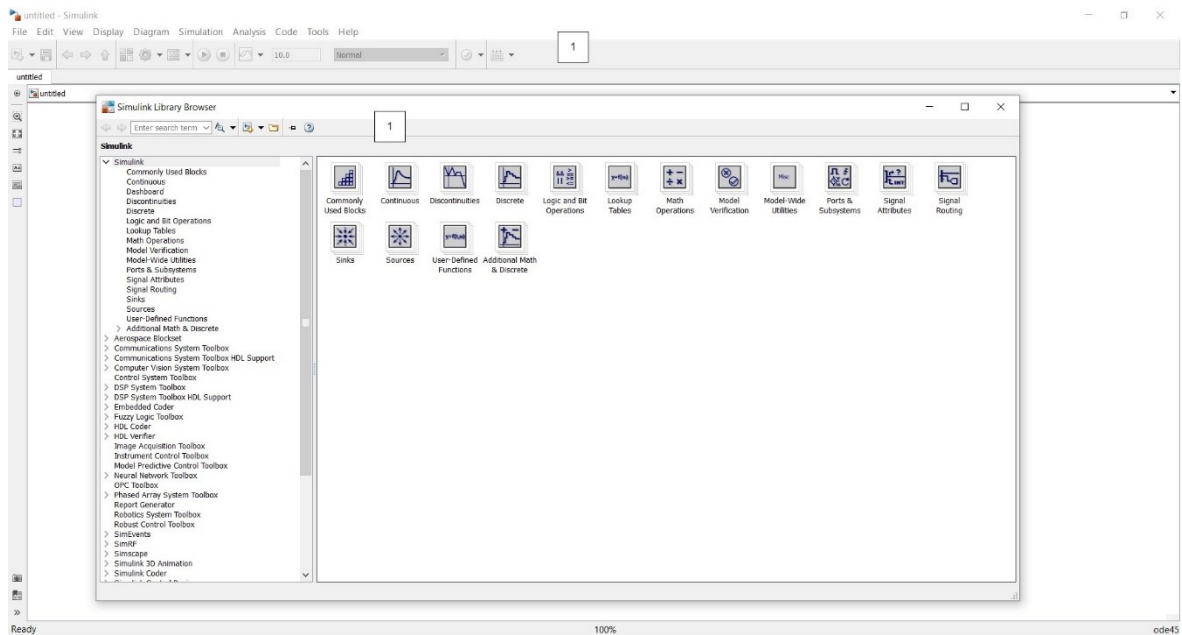
Simulink je určený pro časové řešení – simulaci – chování dynamického systému, jestli známe jeho matematický popis. Pomocí něj můžeme určit časové průběhy výstupních a všech vnitřních veličin v závislosti na časovém průběhu veličin vstupních a na počátečním stavu. Matematický popis soustavy může být značně rozsáhlý a složitý. [9,13]

3.3.1 Spuštění programu Simulink

Simulink lze spustit několika způsoby:

- kliknutím na ikonu Simulink, která se nachází v části menu,
- napsáním klíčového slova „*simulink*“ do příkazového okna Command Window v programu Matlab a poté potvrzením příkazu pomocí ENTER se Simulink spustí.

Po spuštění Simulinku se nám zobrazí okno *Simulink Library Browser*, ve kterém se nachází veškeré knihovny programu Simulink, které jsou zobrazeny na Obr. 5. V knihovnách jsou rozříděny jednotlivé bloky podle toho, do které oblasti spadají. Přes možnost „*New Model*“ se nám zobrazí nové okno *Blank Model* („prázdný model“).



Obr. 5 Okno programu Simulink

Simulink Library Browser je rozdělen na dvě hlavní části. Na levé straně tohoto okna se nacházejí veškeré knihovny, které jsou k dispozici, Na pravé části okna se nacházejí bloky, které daná knihovna obsahuje. Jednotlivé bloky se dají hledat buď podle knihovny, do které spadá daný blok nebo vyhledat v horní části okna v textovém poli *Enter search term* za předpokladu, že víme alespoň část názvu bloku. Okno obsahuje ještě tlačítka pro vytvoření nového modelu a tlačítka pro otevření již vytvořeného modelu. Tlačítka se nacházejí v horní části okna na levé straně.

Jednotlivé bloky z knihoven lze jednoduše vložit do okna grafického prostředí programu Simulink a to přetažením pomocí myši. Vložené bloky může uživatel mezi se sebou jakkoliv propojit a tím vytvořit model pro simulaci.

3.4 Polynomial Toolbox

Polynomial Toolbox patří mezi jeden z mnoha rozšíření programu MATLAB. Je to nástroj pro analýzu a návrh systémů, signálů a řízení založený na pokročilých polynomiálních metodách. Součástí tohoto rozšíření je velké množství takzvaných m-souborů v MATLAB kódu a je jednoduše použitelný.

Polynomial Toolbox obsahuje nové algoritmy, které jsou spolehlivé, rychlé a usnadňují uživatelům řešení. Velký počet převodních algoritmů umožňuje přímou spolupráci s Control System Toolboxem a Symbolic Math Toolboxem s přímým napojením na Simulink. Tak umožňuje elegantní zobrazení grafů nebo modelů.

Pokud máme Polynomial Toolbox nainstalovaný, tak při každém spuštění tohoto rozšíření je potřeba napsat slovo „*pinit*“ do příkazového řádku. [7,14]

3.4.1 Základní vlastnosti Polynomial Toolboxu

- Jednoduché zadávání, manipulace a zobrazení polynomů a polynomiálních matic založené na novém polynomiálním maticovém objektu,
- polynomiální matice s komplexními koeficienty pro aplikace ve zpracování signálu,
- nová generace numerických algoritmů: snadná, rychlá a spolehlivá,
- polynomiální maticový editor, 2-D a 3-D barevné grafy,
- klasická a robustní analýza LTI systémů a filtrů,
- nástroje pro klasický a optimální návrh regulátorů: metoda umístění pólů, všechny stabilizující regulátory, dead-beat, H₂ a LQG,
- robustní řízení s parametrickými neurčitostmi,
- sada SIMULINK pro LTI systémy popisované polynomiálními maticovými zlomky.

Polynomial Toolbox implementuje nové originální algoritmy, které jsou rychlé a spolehlivé. [14]

3.4.2 Základní funkce Polynomial Toolboxu

Funkce *roots*

Pomocí funkce *roots* získáme hodnoty kořenů polynomu nebo determinantu polynomiální matice. Funkce vyhodnotí jak konečnou, tak i nekonečnou hodnotu kořenů polynomu. Kořen nekonečné hodnoty není často běžný.

Příklad 3.1

Najděme kořeny polynomu:

$$p(s) = s^2 - 6s + 9$$

Nejprve nadefinujeme matici:

```
>> p = s^2 - 6*s + 9
```

p =

$$9 - 6s + s^2$$

Použijeme funkci *roots*:

```
>> roots(p)
```

```
ans =
```

```
3.0000 + 0.0000i
```

```
3.0000 - 0.0000i
```

Pomocí funkce *roots* jsme získali dvojnásobný kořen $p_1 = 3$.

Příklad 3.2

V matici P najděme kořeny determinantu polynomiální matice:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s & 0,7s \\ 0,3s & s^2 + 2,5s \end{bmatrix}$$

Nejprve nadefinujeme matici:

```
>> P=[s^2+s 0.7*s;0.3*s s^2+2.5*s]
```

```
P =
```

```
s + s^2    0.7s
```

```
0.3s      2.5s + s^2
```

Použijeme funkci *roots*:

```
>> roots(P)
```

```
ans =
```

```
0
```

```
0
```

```
-2.6289
```

```
-0.8711
```

Pomocí funkce *roots* jsme získali hodnoty kořenů, kterými jsou $p_1 = -2.6289$, $p_2 = -0.8711$ a dvojnásobný $p_{3,4} = 0$ kořen.

Jestliže polynom $P(s)$ je čtvercového tvaru, tak hodnoty kořenů se rovnají hodnotám determinantu polynomiální matice $P(s)$ ($\det P(s)$).

Funkce *zplot*

Funkce *zplot* vizualizuje konečné kořeny polynomů nebo polynomiální matice.

Příklad 3.3

Zobrazme umístění kořenů polynomu p na reálné a imaginární ose:

$$p(s) = s^2 - 6s + 9$$

Nadefinujeme polynom:

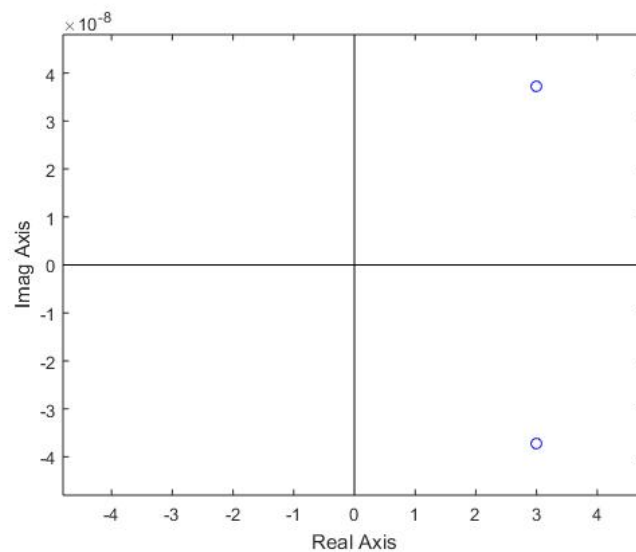
$$\gg p = s^2 - 6*s + 9$$

$p =$

$$9 - 6s + s^2$$

Pomocí funkce *zplot* zobrazíme kořeny polynomu:

$\gg zplot(p)$



Obr. 6 Umístění kořenů polynomu $p(s)$

Příklad 3.4

Zobrazme umístění kořenů matice $P(s)$ na reálné a imaginární ose:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s & 0,7s \\ 0,3s & s^2 + 2,5s \end{bmatrix}$$

Nadefinujeme polynom:

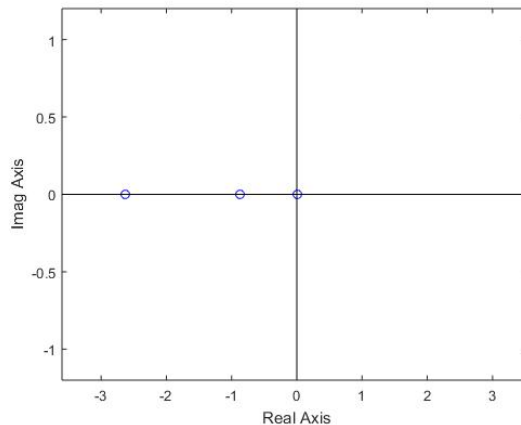
$\gg P=[s^2+s \ 0.7*s;0.3*s \ s^2+2.5*s]$

P =

$$s + s^2 \quad 0.7s$$

$$0.3s \quad 2.5s + s^2$$

Pomocí funkce *zplot* zobrazíme kořeny polynomiální matice:



Obr. 7 Umístění kořenů polynomiální matice $P(s)$

Funkce *gld*

Největšího společného dělitele (levých polynomiálních maticových zlomků) získáme pomocí funkce *gld*. Pokud jsou jediným společným dělitelem $a(s)$ a $b(s)$ konstanty, pak polynomy $a(s)$ a $b(s)$ jsou nesoudělné.

Příklad 3.5

Najděme největšího společného dělitele dvou polynomů:

$$a = s^2 + s, b = s^2 + 2.5s$$

Nadefinujeme oba polynomy:

$$\gg a=[s^2+s], b=[s^2+2.5*s]$$

a =

$$s + s^2$$

b =

$$2.5s + s^2$$

Pomocí zavolání funkce *gld* zjistíme největšího společného dělitele:

```
>> gld(a,b)
```

```
ans =
```

```
    s
```

Největším společným dělitelem ($\text{NSD}(a,b)$) je tedy s .

Příklad 3.6

Najděme největšího společného dělitele dvou polynomů:

$$c = 1 + s, d = 1 - s$$

Nadefinujeme oba polynomy:

```
>> c=1+s, d=1-s
```

```
c =
```

```
    1 + s
```

```
d =
```

```
    1 - s
```

Pomocí zavolání funkce gld zjistíme největšího společného dělitele:

```
>> gld(c,d)
```

```
Constant polynomial matrix: 1-by-1
```

```
ans =
```

```
    1
```

Funkce $axbyc$

Parametry regulátoru k nominální soustavě jsou řešeny obecně pomocí diofantické rovnice $ax + by = c$. Pro řešení této rovnice se používá funkce $axbyc$, která má syntaxi: $[x, y] = axbyc(a, b, c)$ nebo $[x, y] = xabyc(a, b, c)$.

Tato funkce vyhledá k zadaným polynomům a , b a c partikulární řešení x a y dané diofantické rovnice. Pokud neexistuje řešení, je výsledným řešením x a y hodnota NaN (Not a Number).

Další možné syntaxe této funkce jsou:

$[x, y] = axbyc(a, b, c, DEGREE)$ - řešení X a Y je stupně $DEGREE$,

$[x, y] = axbyc(a, b, c, 'minx')$ - řešení X je minimálního stupně,

$[x, y] = axbyc(a, b, c, 'miny')$ - řešení Y je minimálního stupně.

Příklad 3.7

Nalezněme řešení diofantické rovnice:

$$(s^2 + 2s + 1,5)x + (-s + 1)y = 2,5s + 1$$

Nejprve nadefinujeme polynomy a , b a c :

$$\gg a=s^2+2*s+1.5, b=-s+1, c=2.5*s+1,$$

$a =$

$$1.5 + 2s + s^2$$

$b =$

$$1 - s$$

$c =$

$$1 + 2.5s$$

Pomocí zavolání funkce $axbyc$ získáme řešení diofantické rovnice:

$$\gg [x,y]=axbyc(a,b,c)$$

Constant polynomial matrix: 1-by-1

$x =$

$$0.78$$

$y =$

$$-0.17 + 0.78s$$

MATLAB vrátí řešení a to dvojici $(x(s), y(s)) = (0,78; -0,17 + 0,78s)$ s minimálním stupněm.

Příklad 3.8

Příklad 3.7 můžeme obdobně řešit použitím funkce $axbyc$ jako:

$$\gg [x,y,f,g]=axbyc(a,b,c)$$

Constant polynomial matrix: 1-by-1

$x =$

$$0.78$$

$y =$

$$-0.17 + 0.78s$$

$f =$

$$-0.33 + 0.33s$$

$g =$

$$0.49 + 0.66s + 0.33s^2$$

Získáme tak kompletní obecné řešení ve formě $(x(s) + f(s)t(s), y(s) + g(s)t(s)) = (0,78(0,33s - 0,33), (0,78s - 0,17)(0,33s^2 + 0,66s + 0,49))$, s libovolným polynomiálním parametrem $t(s)$.

Chceme-li prozkoumat případ různých řešení minimální míry, pak pravou stranu rovnice zvolíme vyššího stupně. V příkladech 3.9 – 3.11 budeme mít srovnání jednotlivých výsledků stejné polynomiální rovnice.

Příklad 3.9

Vyřešme polynomiální rovnici:

$$(s^2 + 2s + 1,5)x + (-s + 1)y = s^4 + 9.5s + 11.5$$

Nejprve nadefinujeme polynomy a , b a c :

$$\gg a=s^2+2*s+1.5; b=-s+1; c=11.5+9.5*s+s^4,$$

$c =$

$$12 + 9.5s + s^4$$

Pomocí zavolání funkce $axbyc$ získáme řešení diofantické rovnice:

$$\gg [x,y]=axbyc(a,b,c)$$

$x =$

$$6.2 - 2.3s + s^2$$

$y =$

$$2.2 + 2.8s - 0.31s^2$$

Tento příklad vede k řešení minimálního celkového stupně $(x(s), y(s)) = (s^2 - 2.3s + 6.2; -0.31s^2 + 2.8s + 2.2)$ (v tomto případě $\deg x = \deg y = 2$).

Příklad 3.10

Vyřešme polynomiální rovnici s minimálním stupněm první neznámé x :

$$(s^2 + 2s + 1.5)x + (-s + 1)y = s^4 + 9.5s + 11.5$$

Nadefinujeme polynomy a , b a c :

$$\gg a=s^2+2*s+1.5; b=-s+1; c=11.5+9.5*s+s^4;$$

Pomocí zavolání funkce $axbyc$ získáme řešení diofantické rovnice:

$$\gg [x,y]=axbyc(a,b,c,'minx')$$

Constant polynomial matrix: 1-by-1

$x =$

$$4.9$$

$y =$

$$4.2 + 3.9s - s^2 - s^3$$

Příklad vede k řešení s minimálním stupněm prvního neznámého $(x(s), y(s)) = (4,9; -s^3 - s^2 + 3,9s + 4,2)$.

Příklad 3.11

Vyřešme polynomiální rovnici s minimálním stupněm druhé neznámé y :

$$(s^2 + 2s + 1.5)x + (-s + 1)y = s^4 + 9.5s + 11.5$$

Nadefinujeme polynomy a , b a c :

$$\gg a=s^2+2*s+1.5; b=-s+1; c=11.5+9.5*s+s^4;$$

Pomocí zavolání funkce $axbyc$ získáme řešení diofantické rovnice:

$$\gg [x,y]=axbyc(a,b,c,'miny')$$

$x =$

$$5.9 - 2s + s^2$$

$y =$

$$2,7 + 3,4s$$

Poslední možností tvoří řešení s minimálním stupněm ve druhé neznámé $(x(s), y(s)) = (s^2 - 2s + 5,9; 3,4s + 2,7)$.

V případě matice se polynomiální rovnice stává maticovou polynomiální rovnicí. Základní maticovou polynomiální rovnicí (polynomiální maticí) jsou:

$$A(s)X(s) = B(s) \text{ a } X(s)A(s) = B(s) \text{ nebo } A(s)X(s)B(s) = C(s).$$

$A(s)$, $B(s)$ a pokud je to možné, tak $C(s)$ jsou dány, zatímco $X(s)$ jsou neznámé. Polynomial toolbox nabízí funkce pro řešení těchto rovnic, které jsou běžně pojmenovány jako axb , xab a $axbc$.

Příklad 3.12

Nalezněme řešení maticové polynomiální rovnice:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 2s & 1,5 + s \\ s - 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} x(s) = \begin{pmatrix} 0,5s & 0 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Nadefinujeme matice:

$$\gg A=[0.5 \ 2*s \ 1.5+s; s-1 \ 1 \ 0.5], B=[0.5*s \ 0; 1 \ 1.5],$$

A =

$$0.5 \quad 2s \quad 1.5 + s$$

$$-1 + s \quad 1 \quad 0.5$$

B =

$$0.5s \quad 0$$

$$1 \quad 1.5$$

Pomocí funkce axb získáme řešení:

$$\gg x0=axb(A,B)$$

$x_0 =$

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 + 0.5s & 1.5 + s \\ -1s & -2s \end{array}$$

Tento příklad vrací řešení s minimálním celkovým stupněm $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,5s + 1 & s + 1,5 \\ -s & -2s \end{pmatrix}$.

V systémech a řízeních existuje několik forem polynomiálních rovnic, se kterými se setká-
váme. Zejména se jedná o jednostranné rovnice:

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = C(s)$$

nebo

$$X(s)A(s) + Y(s)B(s) = C(s)$$

Také oboustranné rovnice:

$$A(s)X(s) + Y(s)B(s) = C(s)$$

a

$$X(s)A(s) + B(s)Y(s) = C(s)$$

kde $A(s)$, $B(s)$ a $C(s)$ jsou známé, zatímco $X(s)$ a $Y(s)$ jsou neznámé.

Řešení jednostranných a oboustranných rovnic lze nalézt pomocí Polynomial toolboxu pomocí příkazu *axbyc*, *xabyc* a *axybc*.

Příklad 3.13

Vyřešme maticovou polynomiální rovnici:

$$\begin{pmatrix} s^2 + s & 0,8s \\ 0,6s & s^2 + 2s \end{pmatrix} x(s) + \begin{pmatrix} s & 6 \\ 2 & s \end{pmatrix} y(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 0,5s + 1 & 0 \\ 0 & 0,5s^2 + 2s + 0,9 \end{pmatrix}$$

Nadefinujeme polynomy a , b a c :

```
>> A=[s^2+1*s 0.8*s;0.6*s s^2+2*s]; B=[s 6;2 s]; C = [s^2 + 0.5*s + 1 0;0 0.5*s^2 + 2*s + 0.9];
```

Pomocí zavolání funkce *axbyc* získáme řešení maticové polynomiální rovnice:

```
>> [X,Y]=axbyc(A,B,C)
```

Constant polynomial matrix: 2-by-2

$X =$

$$1.9 \quad -0.66$$

$$0.28 \quad 0.54$$

$Y =$

$$-0.94s \quad 0.45 + 0.66s$$

$$0.17 - 0.28s \quad -0.036s$$

Získáme řešení maticové polynomiální rovnice a to dvojici $(x(s), y(s)) = \left(\begin{pmatrix} 1,9 & -0,66 \\ 0,28 & 0,54 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,94s & 0,66s + 0,45 \\ -0,28s + 0,17 & -0,036s \end{pmatrix} \right)$.

Různé další případy maticových polynomiálních rovnic mohou být řešeny přímo použitím vhodných funkcí naprogramovaných v Polynomiálním toolboxu, jako rovnici ve tvaru:

$$A(s)X^*(s) + X(s)A^*(s) = B(s)$$

Rovnice	Funkce
$AX = B$	axb
$AXB = C$	axbc
$AX + BY = C$	axbyc
$A^*X + X^*A = B$	axxab
$A^*X + Y^*A = B$	axyab
$AX + YB = C$	axybc
$XA^* + AX^* = B$	xaaxb
$XA = B$	xab
$XA + YB = C$	xaybc

Tab. 1 Seznam všech dostupných řešení rovnic polynomiálních matic

Funkce *lmf2rmf*, *rmf2lmf*

Tato funkce převádí levý polynomiální maticový zlomek na pravý polynomiální maticový zlomek a opačně.

K danému levému polynomiálnímu zlomku $Q_l^{-1}P_l$ existuje vždy pravý polynomiální zlomek $P_rQ_r^{-1}$ a platí:

$$Q_l^{-1}P_l = P_rQ_r^{-1}$$

$[Pr, Qr] = \text{lmf2rmf}(Pl, Ql)$ převádí levý maticový zlomek $Q_l^{-1}P_l$ na pravý maticový zlomek $P_rQ_r^{-1}$, přičemž P_r a Q_r jsou nesoudělné.

$[Pl, Ql] = \text{lmf2rmf}(Pr, Qr)$ převádí pravý maticový zlomek $P_rQ_r^{-1}$ na levý maticový zlomek $Q_l^{-1}P_l$.

Příklad 3.14

Převědme pravý maticový $\frac{P_l}{Q_l}$ zlomek na levý maticový zlomek:

$$\frac{P_r}{Q_r} = \frac{1}{2s^2 + 4s - 2}$$

Nadefinujeme P_r a Q_r :

```
>> Pr=1,Qr=2*s^2+4*s-2,
```

```
Pr =
```

```
1
```

```
Qr =
```

```
-2 + 4s + 2s^2
```

```
>> [Pl,Ql] = rmf2lmf(Pr,Qr)
```

Constant polynomial matrix: 1-by-1

```
Pl =
```

```
0.2
```

```
Ql =
```

```
-0.4 + 0.8s + 0.4s^2
```

Dostaneme řešení pravého maticového zlomku $\frac{P_l}{Q_l} = \frac{0,2}{0,4s^2 + 0,8s - 0,4}$.

3.4.3 Funkce pro návrh řídicího systému

V souvislosti s polynomiálními metodami odpovídá návrh řídicího systému výběru popisu polynomiální maticové frakce pro dynamickou výstupní zpětnou vazbu kompenzátoru pro splnění daných specifikací. To je jeden z kroků návrhu v průmyslu, který je třeba doplnit dalšími kroky, jako je průzkumná analýza, identifikace, simulace a hodnocení.

Polynomiální sada nástrojů poskytuje několik rutin při řešení typických návrhových úkolů. Jejich modifikace a polynomiální řešení mnoha dalších konstrukčních problémů lze snadno vytvořit pomocí základních nástrojů Polynomial Toolboxu.

Polynomial Toolbox nabízí základní funkce:

- stabilizaci zařízení, a navíc parametrizaci všech stabilních regulátorů,
- umístění pólů s uzavřenou smyčkou podle dynamické výstupní zpětné vazby,
- navrhnutí regulátoru pro systémy s diskretním časem.

Jednoduché náhodné stability lze dosáhnout následujícím způsobem. Daný lineární časově nezávislý růst s přenosovou maticí $P(v) = D^{-1}(v)N(v)$, kde v může být libovolná z proměnných s, p, z, q, z^{-1} nebo d , příkaz

`[Nc,Dc] = stab(N,D)`

vypočítá stabilní systém s přenosovou maticí $C(v) = N_c(v)D_c^{-1}(v)$.

Výsledné póly s uzavřenou smyčkou jsou náhodně umístěny do oblasti stability, jejíž tvar samozřejmě závisí na výběru proměnné.

Pro stejný případ se příkaz

`[Nc,Dc,E,F] = stab(N,D)`

používá k získání parametrizace všech stabilizujících regulátorů ve formě $C(v) = (N_c(v)P(v) + E(v)T(v))(D_c(v)P(v) - F(v)T(v))^{-1}$, kde $P(v)$ je libovolný, ale stabilní parametr polynomiální matice s kompatibilní velikostí, $T(v)$ je další (ne nutně stabilní) libovolný parametr polynomiální matice kompatibilní velikosti. Parametry lze volit libovolně, ale výsledný systém je vhodný. Pokud je některý společný faktor v parametru $C(v)$ zrušen, pak výše uvedený vzorec je standardní parametrizací Youlca – Kučera pro všechny stabilizující regulátory a $\det P(v)$ je výsledný charakteristický polynom s uzavřenou smyčkou.

Podobně pro případ s přenosovou maticí $P(v) = N(v)D^{-1}(v)$ příkaz $[Nc, Dc] = \text{stab}(N, D, 'r')$ vypočítá stabilní systém s přenosovou maticí $C(v) = D_c^{-1}(v)N_c(v)$.

Příkaz $[Nc, Dc, E, F, \text{degT}] = \text{stab}(N, D, 'r')$

vede k parametrizaci $C(v) = (P(v)D_c(v) - T(v)F(v))^{-1}(P(v)N_c(v) + T(v)E(v))$, kde $P(v)$ je libovolný, ale stabilní parametr polynomiální matice kompatibilní velikosti a $T(v)$ je další (nemusí být stabilní) libovolný polynomiální maticový parametr kompatibilní velikosti. Parametry lze volit libovolně, ale tak, aby výsledný systém byl vhodný.

Příklad 3.15

Máme jednorozměrný systém (jeden vstup - jeden výstup), který zadán jako:

$$G = \frac{s + 1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{n}{d}$$

Pomocí příkazu *stab*, tento systém stabilizujeme.

Nejprve nadefinujeme systém:

```
>> d=s^2-3*s+2;n=s+1;
```

Zjistíme kořeny pomocí funkce *roots*:

```
>> roots(d)
```

```
ans =
```

```
2.0000
```

```
1.0000
```

Použijeme funkci *stab*:

```
>> [nc,dc]=stab(n,d)
```

```
nc =
```

```
73 - 2.8s
```

```
dc
```

```
9.9+s
```

Ve skutečnosti tento zpětnovazební charakteristický polynom je:

```
>> cl = d*dc+n*nc
```

`cl =`

$$93 + 43s + 4s^2 + s^3$$

Pomocí funkce *roots* zjistíme, že všechny její kořeny leží v levé části komplexní roviny:

`>> roots(cl)`

`ans =`

$$-0.8297 + 6.1991i$$

$$-0.8297 - 6.1991i$$

$$-2.3816$$

Pomocí funkce *stab* můžeme získat všechny stabilizující regulátory:

`>> [nc,dc,e,f] = stab(n,d)`

`nc =`

$$1.4 + 6.8s$$

`dc =`

$$0.98 + s$$

`e =`

$$2 - 3s + s^2$$

`f =`

$$1 + s$$

Můžeme získat další stabilizující regulátor spolu s parametrizací všech stabilizujících kompenzátorů:

$$\frac{n_c}{d_c} = \frac{(6,8s + 1,4)c(s) + (s^2 - 3s + 2)t(s)}{(s + 0,98)c(s) - (s + 1)t(s)}$$

Funkce *pplace*

Póly s uzavřenou smyčkou by měly být nejen stabilní, ale měly by být umístěny v předepsaných oblastech stability. K tomu nám pomůže funkce *pplace* v programu MATLAB. Vzhledem k systému s přenosovou maticí $P(v) = D^{-1}(v)N(v)$ a vektoru požadovaných pólů s uzavřenou smyčkou na místa *poles*, slouží příkaz

$[N_c, D_c] = \text{pplace}(N, D, \text{poles})$

vypočítá regulátor s přenosovou maticí $C(v) = N_c(v)D_c^{-1}(v)$, který umísťuje póly s uzavřenou smyčkou na místa *poles*. V případě potřeby se zvýší multiplicita pólů. Výsledný systém může mít skutečné nebo komplexní koeficienty v závislosti na tom, zda požadované póly jsou nebo nejsou konjugovány.

Pro stejný systém a stejná požadovaná umístění vektoru slouží příkaz:

$[N_c, D_c, E, F, \text{deg}T] = \text{pplace}(N, D, \text{poles})$

a mohou být použity k získání parametrizace $C(v) = (N_c(v) + E(v)T(v))(D_c(v) - F(v)T(v))^{-1}$ všech ostatních regulátorů vykazujících stejnou dynamiku. $T(v)$ je libovolný parametr polynomiální matice kompatibilní velikosti a stupně ohraničený $\text{deg}T$.

Technika umístování pólů je zvláště užitečná pro zařízení s jedním vstupem a s jedním výstupem. Makro vykonává svou práci i pro systémy s více vstupy a výstupy, ale uživatel by si měl být vědom skutečnosti, že přiřazení pouze poloh pole nemusí být dostačující. V případě vícenásobného vstupu s více výstupy požadované chování obvykle také závisí na invariantních polynomech s uzavřenou smyčkou, nikoli pouze na polohách pólů. Ve skutečnosti je přiřazení invariantních polynomů velmi snadné: stačí pouze umístit požadované invariantní polynomy p_i do diagonální matice $R(v)$ stejné velikosti jako $D(v)$ a zavolat příkaz

$[N_c, D_c] = \text{pplace}(N, D, R)$.

Pokud je matice přenosu systému dána jako $P(v) = N(v)D^{-1}(v)$, pak příkaz

$[N_c, D_c] = \text{pplace}(N, D, \text{poles}, 'r')$

vypočítá matici přenosu regulátoru ve tvaru $C(v) = DC^{-1}(v)N_c(v)$.

Příkaz $[N_c, D_c, E, F, \text{deg}T] = \text{pplace}(N, D, \text{poles}, 'r')$

vede k parametrizaci $C(v) = (D_c(v) - T(v)F(v))^{-1}(N_c(v) + T(v)E(v))$, parametr $T(v)$ je libovolný parametr polynomiální matice kompatibilní velikosti a maximálního stupně $\text{deg}T$.

Chceme-li předepsat nejen umístění pólů, ale také jejich distribuci přes invariantní polynomy p_i , musíme vložit póly do diagonální matice $R(v)$ stejné velikosti jako $D(v)$ a volat příkaz

$[N_c, D_c] = \text{pplace}(N, D, R, 'r')$.

Příklad 3.16

Máme jednorozměrný systém, který zadán jako:

$$G = \frac{s + 1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{n}{d}$$

Pomocí příkazu *pplace*, získáme umístění pólů daného systému.

Pomocí příkazu *stab*, tento systém stabilizujeme.

Nejprve nadefinujeme systém:

```
>> d=s^2-3*s+2;n=s+1;
```

Zjistíme kořeny pomocí funkce *roots*:

```
>> roots(d)
```

```
ans =
```

```
2.0000
```

```
1.0000
```

Póly mohou být posunuty libovolně s regulátorem prvního řádu. Výsledný systém zpětné vazby má tedy tři póly. Umístíme je na místa $s_1 = -1$, $s_2 = -1 + j$ a $s_3 = -1 - j$. Výsledkem je regulátor, který umístí póly na tato místa:

```
>>[nc,dc] = pplace(n,d,[-1,-1+j,-1-j])
```

```
nc =
```

```
5s
```

```
dc =
```

```
1 + s
```

Výsledná přenosová funkce:

$$\frac{n_c}{d_c} = \frac{5s}{1 + s}$$

Ve skutečnosti:

```
>>r = d*dc+n*nc
```

r =

$$2 + 4s + 3s^2 + s^3$$

Pro zkoušku správnosti zjistíme kořeny:

```
>>roots(r)
```

ans =

$$-1.0000 + 1.0000i$$

$$-1.0000 - 1.0000i$$

$$-1.0000$$

4 SIMULACE A ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY

4.1 Ilustrativní příklad I.

Máme stabilní systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy (TITO) Tento systém je popsán diferenciálními rovnicemi ve tvaru:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + 2y_1(t) + 0,8y_2(t) &= 5u_1(t) + 6u_2(t) \\ y_2'(t) + 1,5y_2(t) + 0,6y_1(t) &= 2u_1(t) + 3u_2(t) \end{aligned} \quad (47)$$

1. Určeme levý maticový zlomek.
2. Navrhněme spojitý dvourozměrný regulátor a simulujme řízení.

Ad 1)

Obraz rovnic (47) po Laplaceově transformaci jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} sY_1(s) + 2Y_1(s) + 0,8Y_2(s) &= 5U_1(s) + 6U_2(s) \\ 0,6Y_1(s) + sY_2(s) + 1,5Y_2(s) &= 2U_1(s) + 3U_2(s) \end{aligned}$$

Systém můžeme zapsat ve tvaru LPMFD (levý polynomiální maticový zlomek):

$$\begin{pmatrix} s+2 & 0,8 \\ 0,6 & s+1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} s+2 & 0,8 \\ 0,6 & s+1,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = A^{-1}B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} s+2 & 0,8 \\ 0,6 & s+1,5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}}$$

Ad 2)

Je třeba řešit maticovou diofantickou rovnicí ve tvaru:

$$A(s)F(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (48)$$

Jestliže si zvolíme póly $m_1 = -1$ a $m_2 = -0,75$, pak pro matici M platí:

$$M = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+0,75)^2 \end{pmatrix}$$

Matice F bude ve tvaru:

$$F = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Pro vyřešení rovnice (47) použijeme elementární sloupcové úpravy a schéma obecně zapsané jako (49). V tomhle případě jej tedy přepíšeme na:

$$\left(\begin{array}{c|c} AF & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární sloupcové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P_R & Z_1 \\ Q_R & Z_2 \end{array} \right) \quad (49)$$

Sloupce označíme římskými číslicemi pro přehlednost.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & 5 & 6 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad III = (-3) \cdot III + 2 \cdot IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & -3 & 6 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad IV = 2 \cdot III + IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & -3 & 0 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} III = -\frac{1}{3} III, \\ IV = \frac{1}{3} IV \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & 1 & 0 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2/3 & 5/3 \end{array} \right) \quad II = II + (-0,8s) \cdot III$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0 & 1 & 0 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8s & 1 & -2 \\ 0 & 8/15s & -2/3 & 5/3 \end{array} \right) \quad I = I + (-0,6s) \cdot IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 1,5s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1,2s & -0,8s & 1 & -2 \\ -s & 8/15s & -2/3 & 5/3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I = I + III, \\ II = II + 0,75s^2 \cdot (IV) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s + 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 1,5s + 0,75^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1,2s + 1 & -0,8s - 1,125 & 1 & -2 \\ -s - 0,667 & 0,533s + 0,9375 & -0,667 & 1,667 \end{array} \right)$$

Výsledkem je pravý maticový zlomek:

$$\underline{P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_R = \begin{pmatrix} 1,2s + 1 & -0,8s - 1,125 \\ -s - 0,667 & 0,533s + 0,9375 \end{pmatrix}}$$

Snadnější a rychlejší způsob je využití programu MATLAB a jeho rozšíření Polynomial Toolbox. Při řešení těchto rovnic se využívají funkce AXBYC. Řešení úlohy získané pomocí Polynomial Toolboxu:

```
>> A=[s^2+2*s 0.8*s;0.6*s s^2+1.5*s]; B=[5 6;2 3]; C = [s^2 + 2*s + 1 0;0 s^2 + 1.5*s + 0.5625]
```

```
>> [x,y]=axbyc(A,B,C)
```

Constant polynomial matrix: 2-by-2

x =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y =

$$\begin{pmatrix} 1 + 1.2s & -1.1 - 0.8s \\ -0.67 - s & 0.94 + 0.53s \end{pmatrix}$$

Výsledkem je:

$$\underline{P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_R = \begin{pmatrix} 1,2s + 1 & -0,8s - 1,1 \\ -s - 0,67 & 0,53s + 0,94 \end{pmatrix}}$$

Je patrné, že oba výsledky se od sebe liší jen nepatrně. Rozdíl je nejspíše způsoben odlišným zaokrouhlováním.

Následuje realizace zákona řízení. Můžeme ji provést jak přes pravý maticový zlomek ($FU = Q_R P_R^{-1} E$), tak také přes levý maticový zlomek ($P F U = Q E$). Otočení pravého maticového zlomku na levý maticový zlomek není v tomto případě nutný. Protože platí $Q_R P_R^{-1} = P^{-1} Q$ a protože P_R je jednotková matice, tak je zřejmé, že platí $P = P_R$ a $Q = Q_R$.

Zákon řízení s využitím levého maticového zlomku zní:

$$PFU = Q(W - Y) \quad (50)$$

$$PFU = QE \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2s + 1 & -0,8s - 1,125 \\ -s - 0,667 & 0,533s + 0,9375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Po roznásobení a převedení do časové oblasti získáme:

$$u_1 = 1,2e_1 + e_1 - 0,8e_2 - 1,125e_2$$

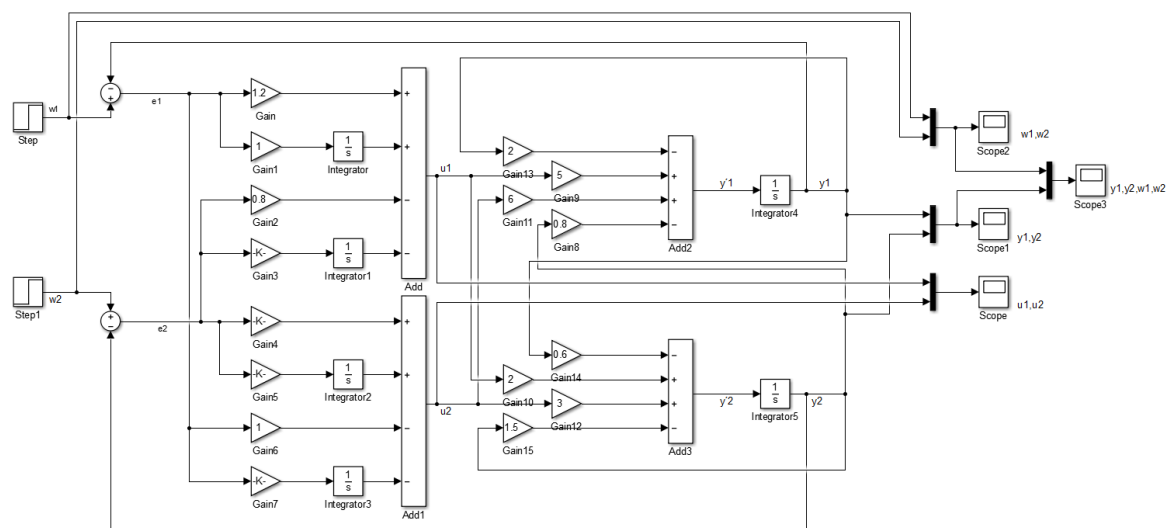
$$u_2 = -e_1 - 0,667e_1 + 0,533e_2 + 0,9375e_2$$

Pomocí integrace získáme výsledné rovnice definující dvourozměrný regulátor:

$$u_1 = 1,2e_1 + \int e_1 - 0,8e_2 - 1,125 \int e_2$$

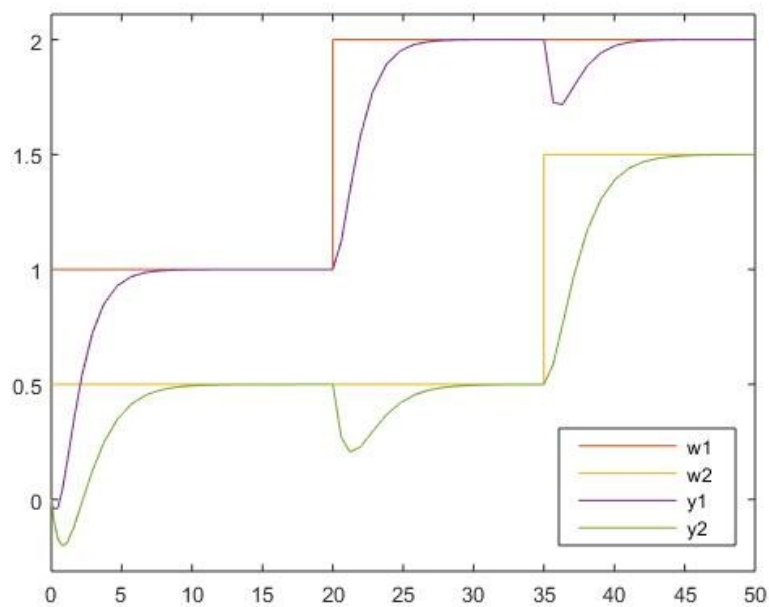
$$u_2 = -e_1 - 0,667 \int e_1 + 0,533e_2 + 0,9375 \int e_2$$

Na základě soustavy rovnic (54) lze sestavit regulační obvod pomocí níže uvedeného zapojení. Toto zapojení bylo vytvořeno pomocí programu MATLAB/Simulink.

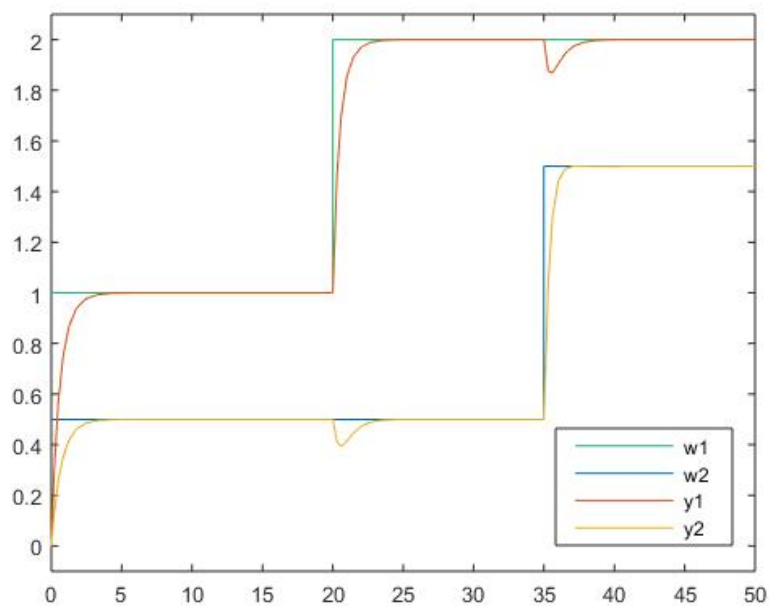


Obr. 8 Simulační schéma dvourozměrného regulačního obvodu

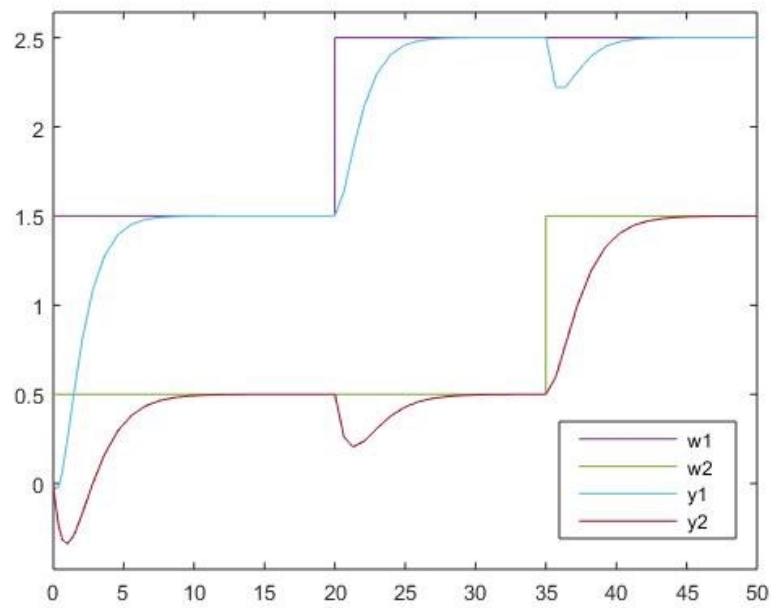
Pokud vyjádříme regulovanou soustavu (řízený systém) i regulátor (řídící systém) pomocí přenosových matic, pak lze využít alternativního zapojení. Výsledný regulační průběh je zobrazen níže. Z průběhu regulačního pochodu je zřejmé, že změna jedné žádané veličiny w_i způsobuje změnu nejen příslušně výstupní veličiny y_i , ale také změnu další výstupní veličiny. Tyto změny jsou zobrazeny na Obr. 11 a Obr. 12.



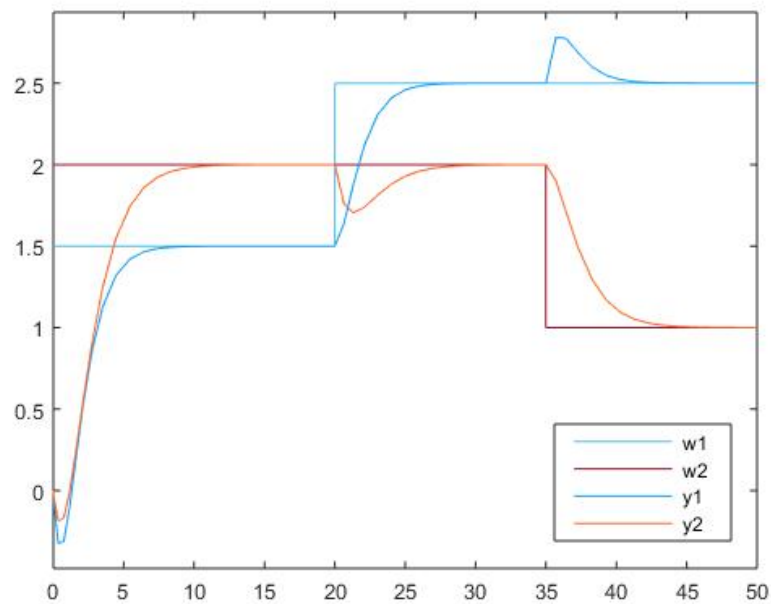
Obr. 9 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při zvolených pólech $m_1 = -1$, $m_2 = -0,75$



Obr. 10 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při zvolených pólech $m_1 = -2$, $m_2 = -2$



Obr. 11 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při změně jedné ze žádaných veličin



Obr. 12 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při změně obou žádaných veličin

4.2 Ilustrativní příklad II.

Máme nestabilní systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy (TITO). Tento systém je popsán diferenciálními rovnicemi ve tvaru:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= 0,5u_1(t) + u_2(t) \\ y_2'(t) + y_2(t) + y_1(t) &= 0,5u_1(t) + 2u_2(t) \end{aligned} \quad (52)$$

1. Určeme levý maticový zlomek.
2. Potvrďme, že systém je nestabilní.
3. Navrhňme spojitý dvourozměrný regulátor a simulujme řízení.

Ad 1)

Obraz rovnic (59) po Laplaceově transformaci jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} sY_1(s) + Y_1(s) + 2Y_2(s) &= 0,5U_1(s) + U_2(s) \\ Y_1(s) + sY_2(s) + Y_2(s) &= 0,5U_1(s) + 2U_2(s) \end{aligned}$$

Systém je možno zapsat ve tvaru LPMFD (levý polynomiální maticový zlomek):

$$\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = A^{-1}B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix}}}$$

Ad 2)

Stabilitu řízeného systému (regulované soustavy) $G(s)$ lze určit jednoduše z determinantu matice A_L , který je roven polynomu $s^2 + 2s - 1$. Z daného polynomu lze přímo určit, že řízený systém je nestabilní, neboť všechny kořeny jmenovatelů neleží v levé části komplexní roviny.

Ad 3)

Je třeba řešit maticovou diofantickou rovnicí ve tvaru:

$$A(s)F(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (53)$$

Jestliže si zvolíme póly $m_1 = -1$ a $m_2 = -2$, pak pro matici M platí:

$$M = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Matice F bude ve tvaru:

$$F = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Pro vyřešení rovnice (60) použijeme elementární sloupcové úpravy a schéma obecně zapsané jako (61). V tomhle případě jej tedy přepíšeme na:

$$\left(\begin{array}{c|c} AF & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární sloupcové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P_R & Z_1 \\ Q_R & Z_2 \end{array} \right) \quad (54)$$

Sloupce označíme římskými číslicemi pro přehlednost.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 2s & 0,5 & 1 \\ s & s^2 + s & 0,5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad III = (-4) \cdot III + IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & -1 & 1 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad IV = III + IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s & 0,8s & -1 & 0 \\ 0,6s & s^2 + 1,5s & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} III = III \div (-1), \\ IV = IV \div 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 2s & 1 & 0 \\ s & s^2 + s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad II = II + (-2s) \cdot III$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 + s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8s & 4 & -2 \\ 0 & 2s & -1 & 1 \end{array} \right) \quad I = I + (-s) \cdot IV$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 + s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2s & -8s & 4 & -2 \\ -s & 2s & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} I = I + 0,25 \cdot III, \\ II = II + 0,25 \cdot (IV) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} s^2 + s + 0,25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 + s + 0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2s + 1 & -8s - 0,5 & 4 & -2 \\ -s - 0,25 & 2s + 0,25 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Výsledkem je pravý maticový zlomek:

$$\underline{P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_R = \begin{pmatrix} 2s + 1 & -8s - 0,5 \\ -s - 0,25 & 2s + 0,25 \end{pmatrix}}$$

Řešení úlohy získané pomocí Polynomial Toolboxu:

```
>> A=[s^2+s 2*s;s s^2+s]; B=[0.5 1;0.5 2]; C = [s^2 + s + 0.25 0;0 s^2 + s + 0.25]
```

```
>> [x,y]=axbyc(A,B,C)
```

Constant polynomial matrix: 2-by-2

x =

1 0

0 1

y =

1 + 2s -0.5 - 8s

-0.25 - s 0.25 + 2s

Výsledkem je:

$$\underline{P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_R = \begin{pmatrix} 2s + 1 & -8s - 0,5 \\ -s - 0,25 & 2s + 0,25 \end{pmatrix}}$$

Zákon řízení s využitím levého maticového zlomku zní:

$$PFU = Q(W - Y) \quad (55)$$

$$PFU = QE \quad (56)$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + 1 & -8s - 0,5 \\ -s - 0,25 & 2s + 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Po roznásobení a převedení do časové oblasti získáme:

$$\dot{u}_1 = 2\dot{e}_1 + e_1 - 8\dot{e}_2 - 0,5e_2$$

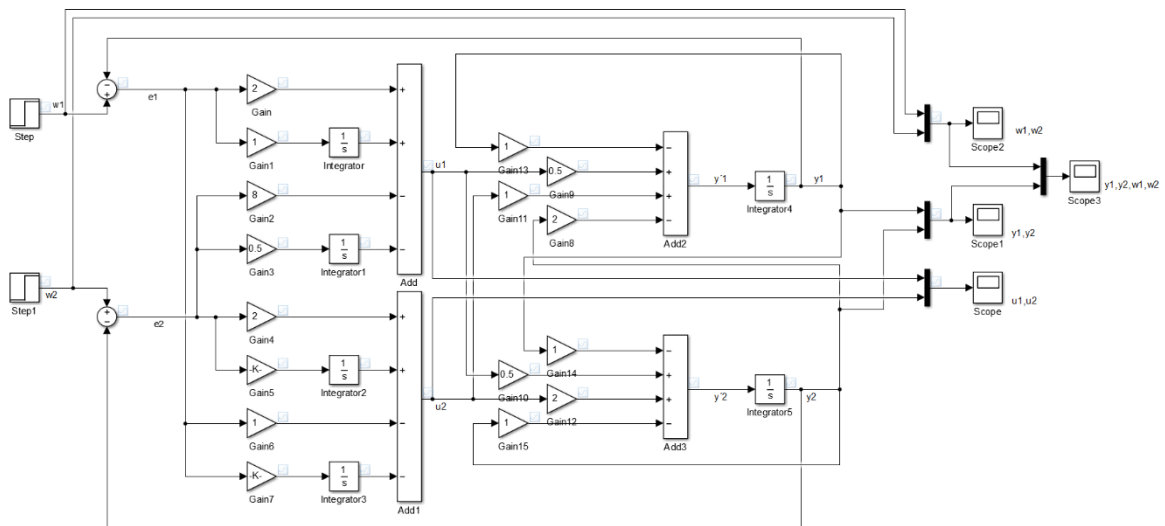
$$\dot{u}_2 = -\dot{e}_1 - 0,25e_1 + 2\dot{e}_2 + 0,25e_2$$

Pomocí integrace získáme výsledné rovnice definující dvourozměrný regulační obvod:

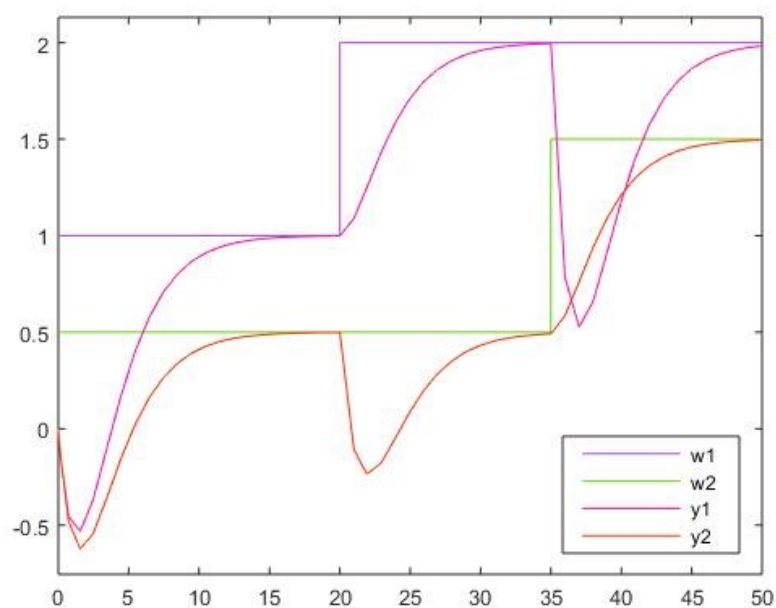
$$u_1 = 2e_1 + \int e_1 - 8e_2 - 0,5 \int e_2$$

$$u_2 = -e_1 - 0,25 \int e_1 + 2e_2 + 0,25 \int e_2$$

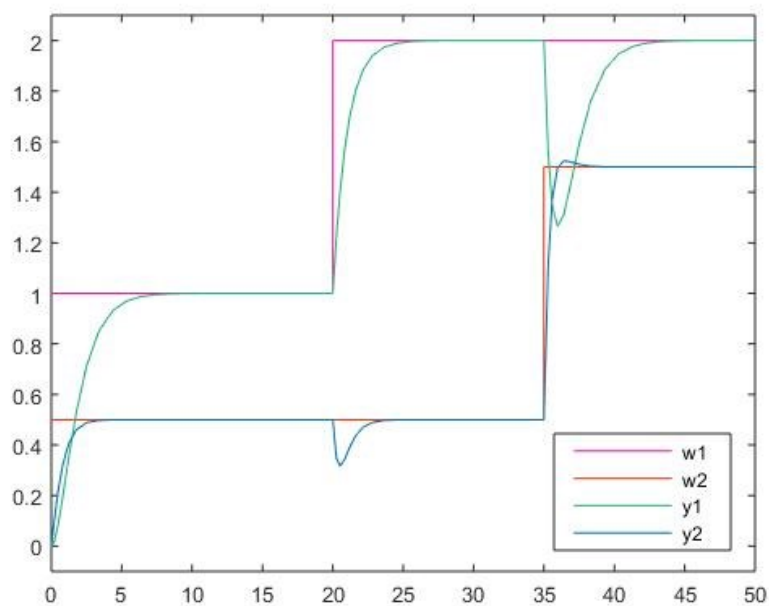
Na základě soustavy rovnic (59) lze sestavit regulační obvod pomocí níže uvedeného zapojení. Toto zapojení bylo vytvořeno pomocí programu MATLAB/Simulink.



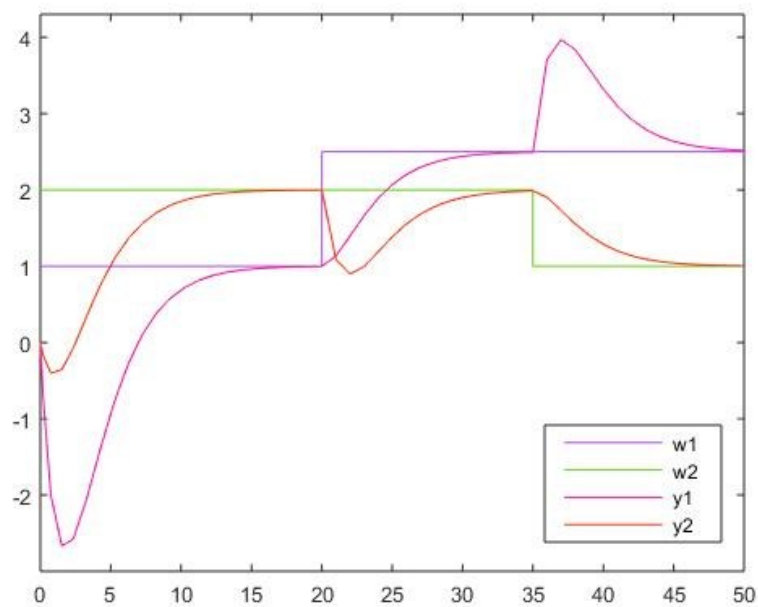
Obr. 13 Simulační schéma dvourozměrného regulačního obvodu



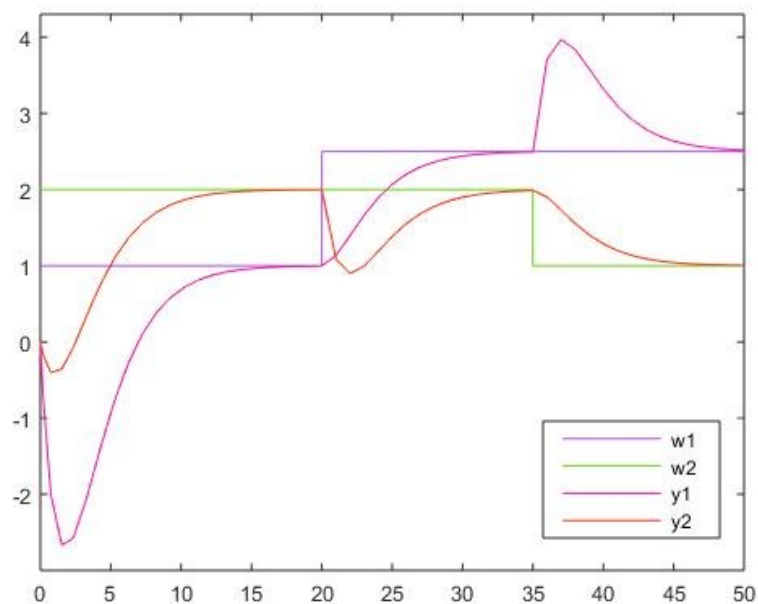
Obr. 14 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při zvolených pólech $m_1 = -0,5$; $m_2 = -0,5$



Obr. 15 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při zvolených pólech $m_1 = -1$, $m_2 = -2$



Obr. 16 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při změně jedné ze žádaných veličin



Obr. 17 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při změně obou žádaných veličin

4.3 Ilustrativní příklad III.

Je dán mnohorozměrný systém se třemi vstupy a dvěma výstupy (TITO). Tento systém je popsán diferenciálními rovnicemi ve tvaru:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + y_1(t) + 0,5y_2(t) &= 2u_1(t) + 1,5u_2(t) + 0,8u_3(t) \\ y_2'(t) + 1,5y_2(t) + 0,8y_1(t) &= 0,6u_1(t) + u_2(t) + 1,2u_3(t) \end{aligned} \quad (57)$$

1. Určeme levý maticový zlomek.
2. Určeme stabilitu systému.
3. Navrhněme spojitý dvourozměrný regulátor a simulujme řízení.

Ad 1)

Obraz rovnic (64) po Laplaceově transformaci jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} sY_1(s) + Y_1(s) + 0,5Y_2(s) &= 2U_1(s) + 1,5U_2(s) + 0,8U_3(s) \\ 0,8Y_1(s) + sY_2(s) + 1,5Y_2(s) &= 0,6U_1(s) + U_2(s) + 1,2U_3(s) \end{aligned}$$

Systém je možné zapsat ve tvaru LPMFD (levý polynomiální maticový zlomek):

$$\begin{pmatrix} s+1 & 0,5 \\ 0,8 & s+1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 0,8 \\ 0,6 & 1 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} s+1 & 0,5 \\ 0,8 & s+1,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 0,8 \\ 0,6 & 1 & 1,2 \end{pmatrix}$$

$$G = A^{-1}B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} s+1 & 0,5 \\ 0,8 & s+1,5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 0,8 \\ 0,6 & 1 & 1,2 \end{pmatrix}}}$$

Ad 2)

Stabilitu řízeného systému (regulované soustavy) $G(s)$ lze určit jednoduše z determinantu matice A_L , který je roven polynomu $s^2 + 2s + 0,6$. Z daného polynomu lze přímo určit, že řízený systém je stabilní, neboť kořeny jmenovatelů leží v levé části komplexní roviny.

Ad 3)

Je třeba řešit maticovou diofantickou rovnicí ve tvaru:

$$A(s)F(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (58)$$

Zvolíme si póly $m_1 = -0,5$ a $m_2 = -0,5$, pak pro matici M platí:

$$M = \begin{pmatrix} (s + 0,5)^2 & 0 \\ 0 & (s + 0,5)^2 \end{pmatrix}$$

Matice F bude ve tvaru:

$$F = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Pro vyřešení rovnice využijeme programu MATLAB a jeho rozšíření Polynomial Toolbox. Pomocí elementárních sloupcových úprav by řešení této rovnice bylo zdlouhavé. Řešení, které lze získat pomocí Polynomial Toolboxu je:

```
>> A=[s^2+s 0.5*s;0.8*s s^2+(1.5*s)]; B=[2 1.5 0.8;0.6 1 1.2]; C = [s^2 + s + 0.25 0;0 s^2 + s + 0.25]
```

```
>> [x,y]=axbyc(A,B,C)
```

Constant polynomial matrix: 2-by-2

x =

1 0

0 1

y =

2.3 + 2.2s -0.54 - 0.56s

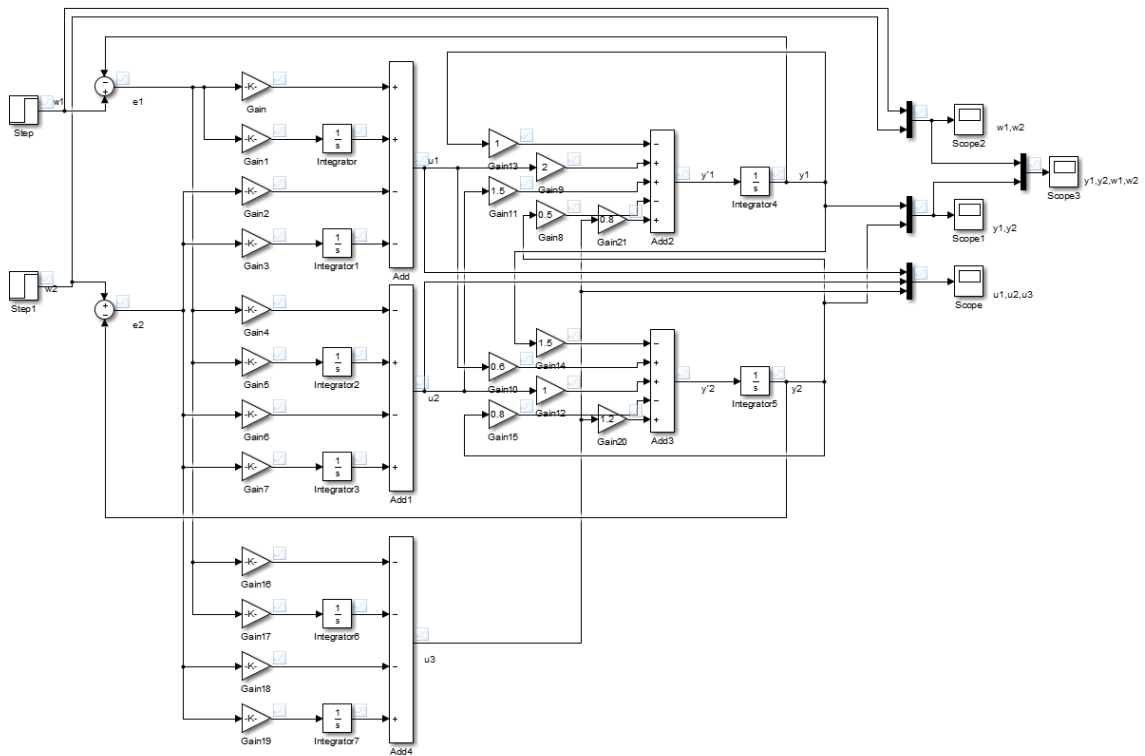
0.37 + 0.085s 0.24 + 0.073s

-1.5 - 1.8s 0.91 + 0.64s

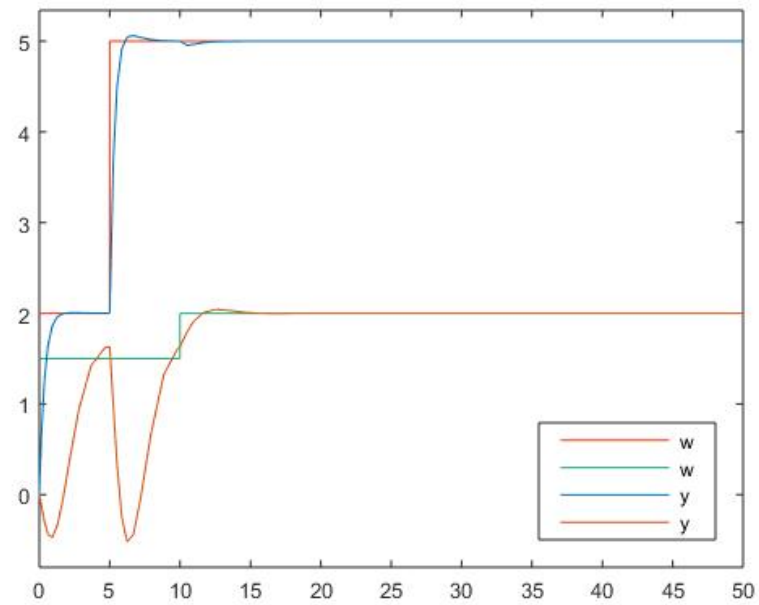
Výsledkem je:

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_R = \begin{pmatrix} 2,2s + 2,3 & -0,56s - 0,54 \\ 0,085s + 0,37 & 0,073s + 0,24 \\ -1,8s - 1,5 & 0,64s + 0,91 \end{pmatrix}$$

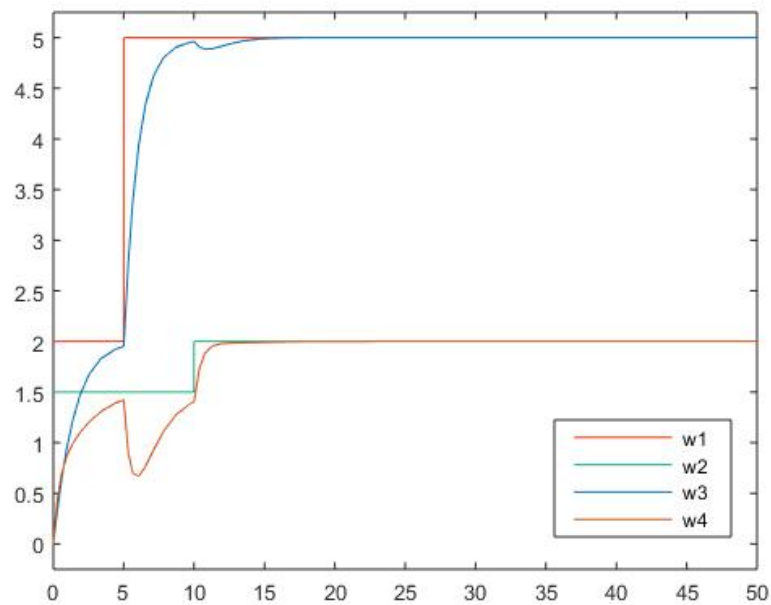
Na základě soustavy rovnic (64) lze sestavit regulační obvod pomocí níže uvedeného zapojení. Toto zapojení bylo vytvořeno pomocí programu MATLAB/Simulink.



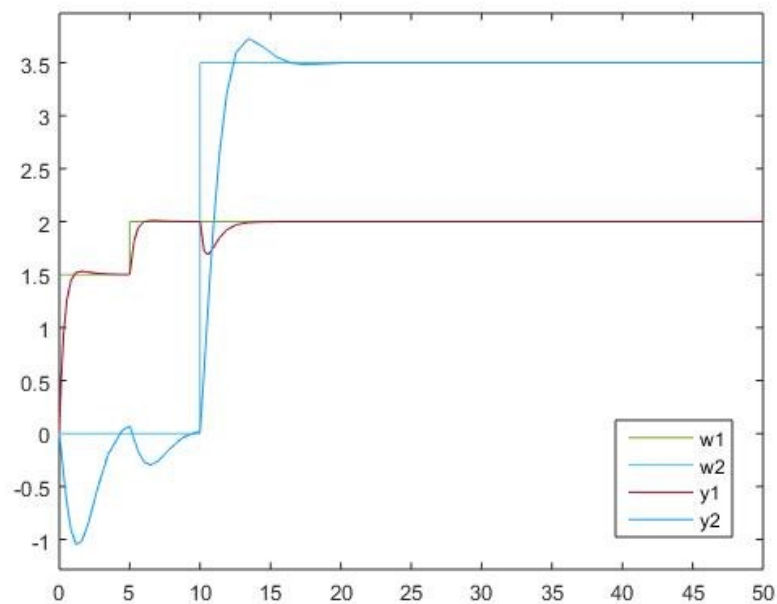
Obr. 18 Simulační schéma systému (57) regulačního obvodu se třemi vstupy a dvěma výstupy



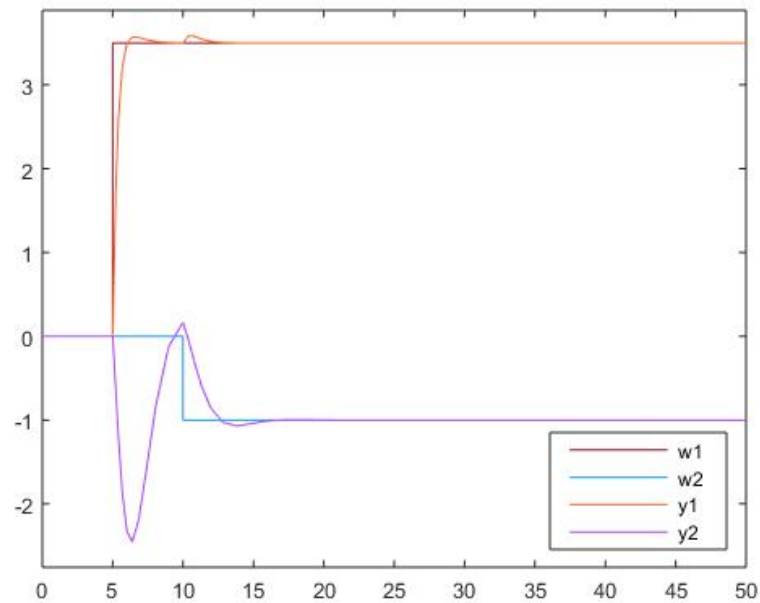
Obr. 19 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při zvolených pólech $m_1 = -2$; $m_2 = -1$



Obr. 20 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při zvolených pólech $m_1 = -1$, $m_2 = -2$



Obr. 21 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při změně jedné ze žádaných veličin



Obr. 22 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při změně jedné ze žádaných veličin

4.4 Ilustrativní příklad IV.

Je dán mnohorozměrný systém se dvěma vstupy a jedním výstupem druhého řádu. Tento systém je popsán diferenciálními rovnicí ve tvaru:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5u_1(t) + 6u_2(t) \quad (59)$$

1. Určeme levý maticový zlomek.
2. Určeme stabilitu systému.
3. Navrhněme spojitý dvourozměrný regulátor a simulujme řízení.

Ad 1)

Obraz rovnic (66) po Laplaceově transformaci jsou ve tvaru:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 5U_1(s) + 6U_2(s)$$

Systém můžeme zapsat ve tvaru LPMFD (levý polynomiální maticový zlomek):

$$(s^2 + 3s + 2)(Y(s)) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

$$A = (s^2 + 3s + 2) \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Levý maticový zlomek je ve tvaru:

$$G = A^{-1}B = \underline{(s^2 + 3s + 2)^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}}$$

Ad 2)

Stabilitu řízeného systému (regulované soustavy) $G(s)$ lze určit jednoduše z daného polynomu $s^2 + 3s + 2$, že řízený systém je stabilní, neboť kořeny jmenovatelů leží v levé části komplexní roviny.

Ad 3)

Je třeba řešit maticovou diofantickou rovnicí ve tvaru:

$$A(s)F(s)P_R(s) + B(s)Q_R(s) = M(s) \quad (60)$$

Zvolíme si pól $m = 1$:

$$M = (s + 1)^3$$

Matice F bude ve tvaru:

$$F = s$$

Pro vyřešení rovnice využijeme programu MATLAB a jeho rozšíření Polynomial Toolbox.

Řešení, které lze získat pomocí Polynomial Toolboxu je:

```
>> A=[s^3+3*s^2+2*s];B=[5 6];C=[s^3+3*s^2+3*s+1];
```

```
>> [x,y]=axbyc(A,B,C)
```

Constant polynomial matrix: 1-by-1

x =

1

y =

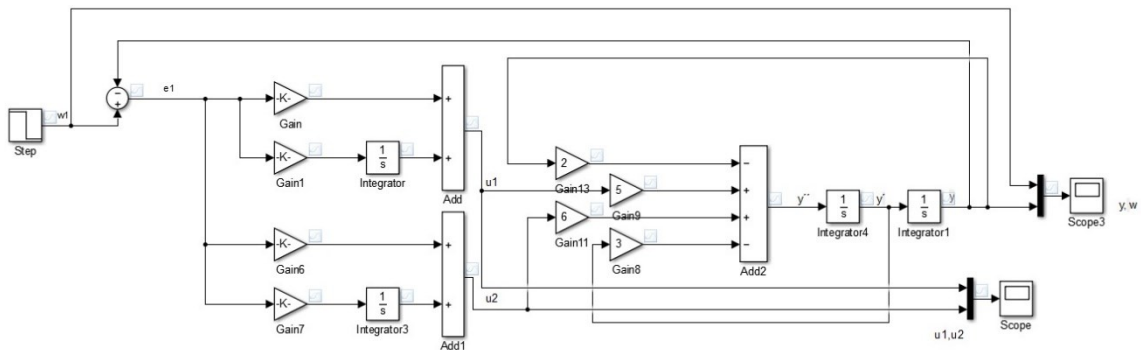
0.082 + 0.082s

0.098 + 0.098s

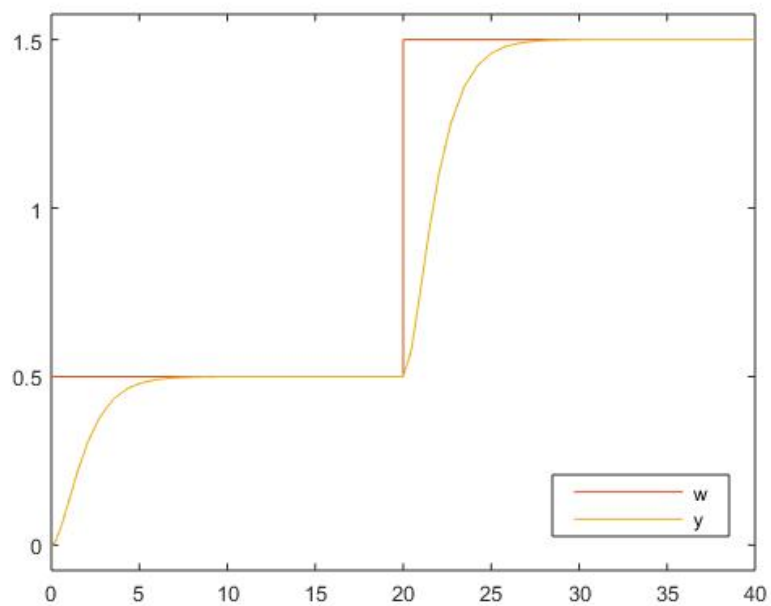
Výsledkem je:

$$\underline{P_R = 1 \quad Q_R = \begin{pmatrix} 0.082s + 0.082 \\ 0.098s + 0.098 \end{pmatrix}}$$

Na základě soustavy rovnic (59) lze sestavit regulační obvod pomocí níže uvedeného zapojení. Toto zapojení bylo vytvořeno pomocí programu MATLAB/Simulink.



Obr. 23 Simulační schéma systému (59) regulačního obvodu se dvěma vstupy a jedním výstupem druhého řádu



Obr. 24 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (59) při zvolených pólech $m_{1,2,3} = -1$

ZÁVĚR

Hlavním cílem této diplomové práce bylo vytvořit několik ilustrativních příkladů a simulací pro podporu návrhu MIMO řízení polynomiálním přístupem. Diplomová práce byla rozdělena na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část se zabývala historickými poznámkami, které obsahují první zmínky o diofantických rovnicích a významné osobnosti, které se touto problematikou zabývali. Dále teoretická část byla věnována základním algebraickým pojmům jako okruhy a tělesa, dělitelnost v okruhu (který obsahuje zobecněný Euklidův algoritmus), polynomiální zlomky, polynomiální matice a diofantické rovnice v okruhu polynomů. V části diofantické rovnice v okruhu polynomů bylo zahrnuto řešení těchto rovnic. Tato část diplomové práce popisuje řešení diofantických rovnic metodou neurčitých koeficientů a řešení diofantických rovnic pomocí zobecněného Euklidova algoritmu. Další část teorie obsahovala lineární MIMO systémy. Zde byl popsán přenos, mnohorozměrné systémy, stabilita mnohorozměrných systémů, polynomiální maticové zlomky, řešení maticových polynomiálních diofantických rovnic a syntéza regulátorů. Část polynomiální maticové zlomky zahrnuje popis pravých a levých polynomiálních maticových zlomků. Řešení maticových polynomiálních rovnic lze pomocí elementárních sloupcových nebo řádkových úprav. Tyto úpravy bývají náročnější, proto k řešení těchto rovnic se využívá program MATLAB a jeho rozšíření Polynomial toolbox, který byl věnován v praktické části diplomové práce.

První část praktické části byla věnována programu MATLAB. Zde bylo popsáno prostředí programu a jeho rozšíření Simulink, ve kterém lze sestavovat regulační obvody. Větší část byla věnována Polynomial toolboxu. Polynomial toolbox je nástroj, který slouží pro analýzu a návrh systémů, signálů a řízení založený na pokročilých polynomiálních metodách. Obsahuje funkce, díky kterým například získáme kořeny polynomu a zobrazení těchto kořenů na komplexní rovině, největšího společného dělitele, řešení diofantických rovnic, převod levého polynomiálního maticového zlomku na pravý a opačně, stabilizaci systému a mnoho dalšího. Jednotlivé popsané funkce obsahují příklady použití příkazu. Druhá část praktické části diplomové práce byla věnována ilustrativním příkladům. Na čtyřech příkladech bylo demonstrováno řešení levého i pravého maticového zlomku a řešení diofantických rovnic pomocí elementárních úprav a za pomoci programu MATLAB a jeho rozšíření Polynomial toolbox. Součástí příkladů je navržený regulátor, který zajistí požadované chování. Ověření výsledku návrhu řízení je realizováno v prostředí MATLAB/Simulink jehož součástí je i

zobrazení jednotlivých výsledných regulačních průběhů. Jednotlivé simulace ukázaly skutečnost, že změna jedné žádané veličiny způsobuje nejen změnu příslušné výstupní veličiny, ale také změnu další výstupní veličiny. Takové chování se u mnohorozměrného řízení nazývá neautonomní.

Využití těchto ilustrativních příkladů je možné pro studijní účely. Využití této práce lze vidět ve dvou rovinách. Jedná se o pedagogickou a studijní oblast, kde lze využít algebraické pojmy a příkazy prostředí Polynomial toolboxu a MATLABu, kde je možné rozšíření na celé spektrum mnohorozměrných systémů. Druhou oblastí využití je možné vidět ve vědecké a komerční činnosti, protože převážná část reálných technologických procesů představuje ve skutečnosti mnohorozměrné systémy.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Diofantos, 2001-. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation [cit. 2020-07-26]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Diofantos>.
- [2] Diofantos z Alexandrie, 2006. Encyklopedie fyziky [online]. SPŠST Panská, Praha 1: Jaroslav Reichl [cit. 2020-07-26]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main/article/view/1436-diofantos-z-alexandrie>.
- [3] PROKOP, Roman a Jiří KORBEL, 2015. Diofantické rovnice v řízení mnohorozměrných dynamických systémů. UTB FAI, Zlín: prof. Ing. Roman Prokop, CSc. Projekt. UTB FAI, Zlín.
- [4] SKOGESTAD, Sigurd; POSTLETHWAITE, Ian. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. Chichester: Wiley, 2005. ISBN 0-470-01168-8.
- [5] KUČERA, Vladimír, 1978. Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení. Praha: ACADEMIA. ISBN 509-21-857.
- [6] PROKOP, Roman, Radek MATUŠŮ a Zdenka PROKOPOVÁ. Teorie automatického řízení: lineární spojité dynamické systémy. Zlín: UTB ve Zlíně, 2006. ISBN 8073183692.
- [7] FRANČÁLEK, Petr, 2013. Programová podpora návrhu MIMO řízení polynomiálním přístupem. Zlín: ACADEMIA. ISBN 509-21-857. Diplomová práce. UTB FAI, Zlín. Vedoucí práce doc. Ing. František Gazdoš, Ph.Ds.
- [8] DOSTÁL, Petr; MATUŠŮ, Radek. Stavová a algebraická teorie řízení. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2010. ISBN 978-80-7318-991-4.
- [9] NAVRÁTIL, Pavel, 2011. Automatizace: vybrané statě. Ve Zlíně: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 289 s. ISBN 978-80-7318-935-8. Dostupné také z: <http://hdl.han-dle.net/10563/18581>.
- [10] ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. MATLAB pro začátečníky. 2. vydání. Praha: BEN - technická literatura, 2005. ISBN 80-7300-175-6
- [11] BALATĚ, J. *Automaticke řízení*. 2. přeprac. vyd. Praha: BEN – technicka literatura, 2004. 664 s. ISBN 80-7300-148-9
- [12] DUŠEK, František. *Simulink – Úvod do používání*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2001. ISBN 80-7194-273-1

- [13] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: ComputerPress, 2006. ISBN 978-80-251-1448-3
- [14] POLYX, L. *The Polynomial Toolbox for Matlab*. Prague, Czech Republic, 2001
- [15] TZAFESTAS, Spiros. *Multivariable Control*. Berlin, Springer, 2011. ISBN 9400964803
- [16] WONHAM, W. Murray. *Linear Multivariable Control*, Berlin, Springer, 2012, ISBN 1461270057
- [17] ROSENWASSER, Efim a Bernhard LAMPE. *Multivariable Computer-controlled Systems*. Berlin, Springer, 2006. ISBN 978-1-84628-432-8
- [18] SKOGESTAD, Sigurd a POSTLETHWAITE, Ian. *Multivariable Feedback Control*, Wiley ISBN 047001167X
- [19] TAN, Liansheng. *Generalized Framework of Linear Multivariable Control*, Elsevier 2017, ISBN 0081019467
- [20] ZHU, Yucai a Ton BACKS. *Identification of Multivariable Industrial Processes*. Berlin, Springer 2011, ISBN 1447120604
- [21] KUČERA, Vladimír. *Discrete Linear Control*. Chichester, Praha, Academia, 1979, ISBN 0081019467
- [22] KUČERA, Vladimír. *Analysis and Design of Discrete Linear Control*. Chichester, Prentice Hall 1991, ISBN 013033085-X

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

MIMO Mnohorozměrné systémy (systém s více vstupy a výstupy)

SISO Jednorozměrný systém (systém s jedním vstupem a jedním výstupem)

LSDS Lineární spojité dynamické systémy

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Schéma mnohorozměrného systému	25
Obr. 2 Zpětnovazební systém s jedním stupněm volnosti (1DOF).....	33
Obr. 3 Zpětnovazební systém s předkompenzátořem	34
Obr. 4. Pracovní plocha prostředí MATLAB R2015a.....	38
Obr. 5 Okno programu Simulink	40
Obr. 6 Umístění kořenů polynomu $p(s)$	43
Obr. 7 Umístění kořenů polynomiální matice $P(s)$	44
Obr. 8 Simulační schéma dvouřozměrného regulačního obvodu	62
Obr. 9 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při zvolených pólech $m_1 = -1, m_2 = -0,75$	63
Obr. 10 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při zvolených pólech $m_1 = -2, m_2 = -2$	63
Obr. 11 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při změně jedné ze žádaných veličin	64
Obr. 12 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (47) při změně obou žádaných veličin.....	64
Obr. 13 Simulační schéma dvouřozměrného regulačního obvodu	68
Obr. 14 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při zvolených pólech $m_1 = -0,5; m_2 = -0,5$	69
Obr. 15 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při zvolených pólech $m_1 = -1, m_2 = -2$	69
Obr. 16 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při změně jedné ze žádaných veličin	70
Obr. 17 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (52) při změně obou žádaných veličin.....	70
Obr. 18 Simulační schéma systému (57) regulačního obvodu se třemi vřtupy a dvěma výřtupy	73
Obr. 19 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při zvolených pólech $m_1 = -2; m_2 = -1$	73
Obr. 20 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při zvolených pólech $m_1 = -1, m_2 = -2$	74

- Obr. 21 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při změně jedné ze žádaných veličin74
- Obr. 22 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (57) při změně jedné ze žádaných veličin75
- Obr. 23 Simulační schéma systému (59) regulačního obvodu se dvěma vstupy a jedním výstupem druhého řádu77
- Obr. 24 Simulační průběh regulačního pochodu pro mnohorozměrný systém (59) při zvolených pólech $m_{1,2,3} = -1$ 77

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Seznam všech dostupných řešení rovnic polynomiálních matic	51
---	----

