

Softwarová podpora výuky matematiky na středních školách

Bc. Martin Strmiska

Diplomová práce
2017



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Martin Strmiska**
Osobní číslo: **A15620**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Učitelství informatiky pro střední školy**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Softwarová podpora výuky matematiky na středních školách**
Téma anglicky: **Software Support of Teaching Mathematics in Secondary Schools**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte literární rešerši zaměřenou na popis nejznámějších softwarových programů pro podporu výuky matematiky na středních školách.
2. Navrhněte a sestavte dotazník za účelem průzkumu využití softwarových programů na středních školách v České republice. Dotazník bude obsahovat také otázky týkající se spokojenosti vyučujících s dostupností a nabídkou programů a jejich funkcí.
3. Prostřednictvím vytvořeného dotazníku provedte průzkum na vybraných středních školách.
4. Vyhodnoťte získaná data a na základě výsledků stanovte závěry.
5. Vyberte vhodné příklady ze středoškolského učiva matematiky a zpracujte je v softwarových programech, které podle závěrů Vašeho dotazníkového šetření patří mezi nejpoužívanější.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **POLÁK, Josef. Středoškolská matematika v úlohách I. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 371 s. ISBN 80-7196-337-2.**
2. **HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČKOVÁ. Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 8071963186.**
3. **Wolfram Mathematica. Wolfram Mathematica [online]. [cit. 2017-01-27]. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/>**
4. **GeoGebra [online]. [cit. 2017-01-27]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/about>**
5. **MÍČA, Daniel. Program pro výuku funkcí ve středoškolské matematice [online]. Praha, 2005 [cit. 2017-01-30]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/daniel_mica/. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze.**

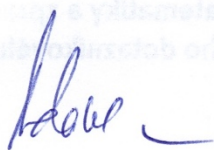
Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**

Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: **3. února 2017**

Termín odevzdání diplomové práce: **16. května 2017**

Ve Zlíně dne 3. února 2017



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Mgr. Roman Jašek, Ph.D.
ředitel ústavu

Autor: Bc. Martin Strmiska

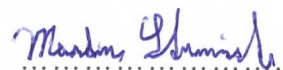
Název diplomové práce: Softwarová podpora výuky matematiky na středních školách
Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užit své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně dne 16. května 2017


.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cílem diplomové práce je průzkum využití podpůrných softwarových programů ve výuce matematiky na středních školách pomocí dotazníkového šetření, dále vytvoření přehledu nepoužívanějších programů a následně vytvoření ukázkových příkladů v těchto programech. Dotazník bude zahrnovat otázky týkající se nejen toho, jaké programy vyučující využívají, zda jsou volně dostupné či licencované, jak je používají, ale také jak jsou s nabídkou programů a jejich konkrétními funkcemi spokojeni, či zda škola poskytuje dostatečné zázemí pro implementaci těchto programů do výuky. Odpovědi budou statisticky vyhodnoceny.

Klíčová slova: výuková metoda, multimedia learning, matematika, software, výuka, učitel, žák

ABSTRACT

The purpose of this master thesis aims to survey the use of assistive software programs for teaching mathematics in secondary schools through a questionnaire survey, as well as creating a list of commonly used programs and then create a striking example of these programs. The questionnaire will include questions relating not only to the programs teachers use, whether freely available or licensed to use them, but also as a range of programs and their specific functions are satisfied and whether the school provides adequate facilities for the implementation of these programs in education. Responses will be analyzed statistically.

Keywords: learning method, multimedia learning, mathematics, software, teaching, teacher, student

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování Mgr. Janě Rezníčkové, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné rady a za všechny čas, který mi věnovala při konzultacích. Také děkuji přátelům a rodině za podporu při studiu a psaní této práce. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat všem učitelům – respondentům, kteří mi poskytli informace hodnotné pro tuto práci.

„Cílem vzdělání a moudrosti je, aby člověk viděl před sebou jasnou cestu života, po ní opatrně vykročoval, pamatoval na minulost, znal přítomnost a předvídal budoucnost.“

Jan Amos Komenský

Prohlašuji, že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD.....	8
I TEORETICKÁ ČÁST.....	9
1 VÝUKOVÉ METODY.....	10
1.1 KLASIFIKACE VÝUKOVÝCH METOD	10
1.1.1 Klasické výukové metody	10
1.1.2 Aktivizující metody.....	10
1.1.3 Komplexní výukové metody	10
1.2 MULTIMEDIA LEARNING.....	11
1.2.1 Pythagorova věta klasickou výukovou metodou.....	13
1.2.2 Pythagorova věta podaná multimedia learningem	13
2 POPIS VYBRANÝCH PROGRAMŮ A WEBOVÝCH APLIKACÍ	14
2.1 MICROSOFT MATHEMATICS	14
2.2 WOLFRAM ALPHA	16
2.3 WOLFRAM MATHEMATICA.....	17
2.4 SYMBOLAB.....	18
2.5 APPLE GRAPHER	19
2.6 DESMOS.....	20
2.7 GRAPH.....	21
2.8 FUNKCE.....	22
2.9 DERIVE 6.1	23
2.10 OCTAVE.....	24
2.11 GEOGEBRA.....	25
2.12 CABRI II PLUS	26
II PRAKTICKÁ ČÁST	27
3 VLASTNÍ VÝZKUM	28
3.1 CÍL VÝZKUMU	28
3.2 POPIS ZKOUMANÉHO VZORKU	28
3.3 STANOVENÍ VĚCNÝCH HYPOTÉZ	28
3.4 ANALÝZA A INTERPRETACE VÝSLEDKŮ VÝZKUMU	29
3.5 TESTOVACÍ KRITÉRIUM CHÍ KVADRÁT	32
3.6 STATISTICKÉ STANOVENÍ A OVĚŘENÍ HYPOTÉZ.....	33
3.7 ZHODNOCENÍ VÝZKUMU.....	35
4 PRÁCE V JEDNOTLIVÝCH APLIKACÍCH.....	36
4.1 MICROSOFT MATHEMATICS	36
a) Algebraické výrazy	37
b) Rovnice, nerovnice a jejich soustavy	38
c) Vykreslení grafů funkcí.....	39
d) Výpočty v trojúhelníku.....	41
e) Využití aplikace ve vyšší matematice	43

4.2	WOLFRAM ALPHA	44
a)	Algebraické výrazy	44
b)	Rovnice, nerovnice a jejich soustavy	45
c)	Funkce a jejich vlastnosti	47
d)	Využití aplikace ve vyšší matematice	48
4.3	WOLFRAM MATHEMATICA	50
4.4	SYMBOLAB	51
a)	Algebraické výrazy	51
b)	Rovnice, nerovnice a jejich soustavy	52
c)	Funkce a jejich vlastnosti	53
d)	Výpočty v trojúhelníku.....	54
e)	Vektorová algebra	54
f)	Využití aplikace ve vyšší matematice	55
4.5	APPLE GRAPHER	56
4.6	DESMOS.....	58
4.7	GRAPH.....	59
4.8	FUNKCE.....	61
4.9	DERIVE 6.1	63
a)	Teorie čísel	64
b)	Množinové operace	64
c)	Algebraické výrazy	65
d)	Rovnice, nerovnice a jejich soustavy	66
e)	Vykreslení grafů funkcí.....	67
4.10	OCTAVE.....	68
4.11	GEOGEBRA.....	71
ZÁVĚR		74
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....		75
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK		77
SEZNAM OBRÁZKŮ		78
SEZNAM TABULEK.....		80
SEZNAM PŘÍLOH.....		81

ÚVOD

Matematika bývá žáky středních škol mnohdy považována za náročný, nudný a neoblíbený předmět. Oproti tomu velká část odborné veřejnosti se shoduje na tom, že matematika je z hlediska dalšího uplatnění žáků a rozvoje logického myšlení předmětem velmi důležitým. V blízké budoucnosti má být navíc maturitní zkouška z matematiky povinná u většiny maturitních oborů. Proto existují různé snahy, jak tuto výuku zatraktivnit, zefektivnit a celkově zlepšit.

Tato diplomová práce se zabývá výukou matematiky a podporou výuky tohoto předmětu zejména na středních školách. Cílem práce je sestavit přehled nejpoužívanějších matematických aplikací a v těchto aplikacích pak vytvořit ukázkové příklady. Jako prostředek ke zjištění nejpoužívanějších aplikací slouží dotazník, který byl distribuován mezi učitele matematiky na středních školách.

Teoretická část se zprvu zabývá výukovými metodami a jejich klasifikací. Je zde mimo jiné zaveden pojem multimedia learning a na příkladu uveden rozdíl mezi klasickou metodou výuky a multimedia learningem. V teoretické části je rovněž uvedena rešerše podpůrných výukových aplikací včetně jejich podrobnějšího popisu. Tato rešerše představuje jednotlivé aplikace, popisuje jejich funkce a vlastnosti a v neposlední řadě shrnuje jejich výhody a nevýhody.

Praktická část je tvořena dvěma kapitolami. Třetí kapitola popisuje vlastní výzkum, jeho cíle, metodiku a závěry. Popis práce v jednotlivých aplikacích najdeme ve čtvrté kapitole, kde jsou rovněž uvedeny řešené ukázkové příklady ze středoškolské matematiky.

Vzhledem k tématu práce je pro její pochopení nezbytné umět pracovat na počítači a ovládat středoškolskou matematiku.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 VÝUKOVÉ METODY

Výuková metoda je postup, jakým učitel předá informace žákům. Je to koordinovaný systém činností učitele vedoucí žáka k dosažení stanovených vzdělávacích cílů (Průcha a kol., 2003, s. 287). Učitel má na výběr mnoho výukových metod, které může použít, měl by však odhadnout, pro jaký typ hodiny použije danou metodu. Níže je uvedena klasifikace výukových metod podle J. Maňáka¹ (Maňák a Švec, 2003, s. 49). Při psaní kapitoly byly použity zdroje [1], [2], [3] a [4].

1.1 Klasifikace výukových metod

1.1.1 Klasické výukové metody

- a) *Metody slovní:* vyprávění, vysvětlování, přednáška, práce s textem, rozhovor.
- b) *Metody názorně-demonstrační:* předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž.
- c) *Metody dovednostně-praktické:* napodobování, manipulování, laborování a experimentování, vytváření dovedností, produkční metody.

1.1.2 Aktivizující metody

- a) *Metody diskusí*
- b) *Metody heuristické (vedoucí k řešení problémů)*
- c) *Metody situační*
- d) *Metody inscenační*
- e) *Didaktické hry*

1.1.3 Komplexní výukové metody

- a) *Frontální výuka*
- b) *Skupinová výuka a kooperativní výuka*
- c) *Partnerská výuka*
- d) *Individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků*

¹ Prof. PhDr. Josef Maňák, CSc. je přední český pedagog, který se zabývá obecnou didaktikou, kterou spojuje s aktuální problematikou současné školy. Jeho celoživotními tématy jsou problémy výukových metod, pedagogického výzkumu, otázky aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků a jiné.

- e) *Kritické myšlení*
- f) *Brainstorming*
- g) *Projektová výuka*
- h) *Učení dramatem*
- i) *Otevřené učení*
- j) *Učení v životních situacích*
- k) *Televizní výuka*
- l) *Výuka podporovaná počítačem*
- m) *Sugestopedie a superlearning*
- n) *Hypnopedie*

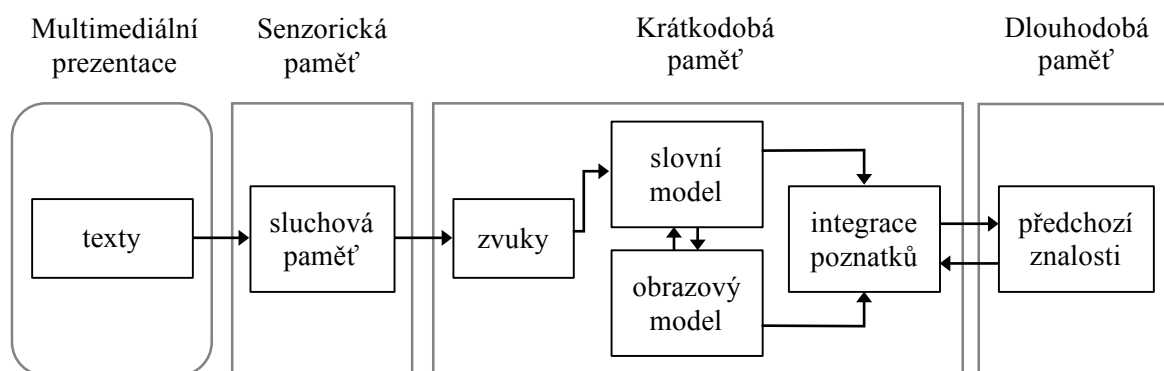
Z výše uvedených výukových metod se v následující podkapitole zaměříme na kombinaci výukové metody názorně-demonstrační a slovní. Tuto kombinaci budeme zkráceně značit jako *multimedia learning*.

1.2 Multimedia learning

Proč multimedia learning? V překladu by to bylo něco jako „učení se s multimédií“. Ve skutečnosti tomu tak je. S multimédií se setkáváme denně – na telefonu, tabletu či počítači můžeme poslouchat hudbu, sledovat seriály nebo si vyřizovat mailovou korespondenci. Multimédia můžeme smysluplně využít i ve výuce. V první řadě je potřeba definovat, co jsou to multimédia ve výuce. Můžou to být schémata, grafy, obrázky, videa, animace a další. Multimedia learning lze chápat jako učení se na základě propojení multimédií a slov. U žáka dochází pak k většímu pochopení probírané látky. Toto tvrdil i učitel národů Jan Amos Komenský: „*Proto budiž učitelům zlatým pravidlem, aby všechno bylo předváděno všem smyslům, kolika možno. Totiž věci viditelné zraky, slyšitelné sluchu, vonné čichu, chutnatelné chuti a hmatatelné hmatu; a může-li něco být vnímáno najednou více smysly, budiž to předváděno více smyslům.*“ (Velká didaktika, kap. XX), což bylo na svou dobu velmi pokrokové myšlení. Vnímání je cesta k poznání a člověk je tvor vnímavý. Jednomu více sedí kniha, druhý se raději podívá na film a třetí navštíví divadelní představení. Tato ideologie lidí je ve všech sociálních skupinách a ve škole tomu nebude jinak. Žáci jsou různí a každý vnímá informace jinak. Vyučovací hodina by měla být různorodá, tedy učitelé by měli vzájemně kombinovat více výukových metod, aby látku pochopilo co nejvíce žáků.

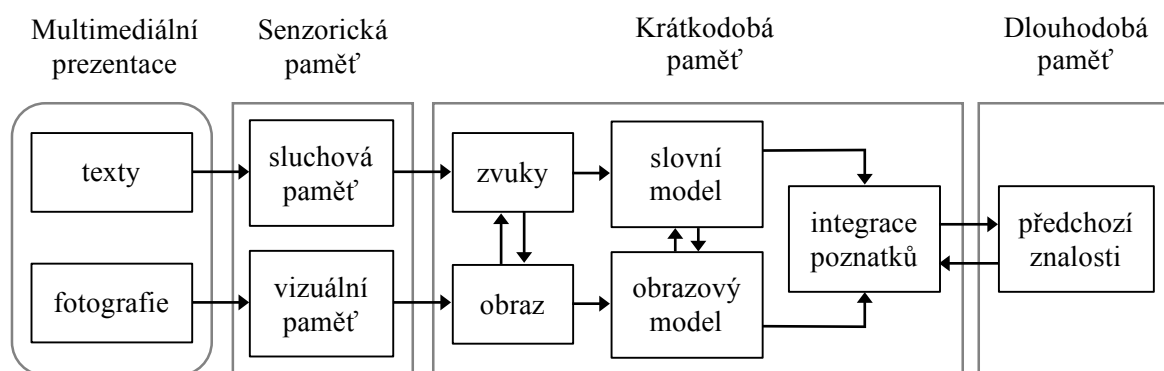
Z psychologického hlediska má člověk tři druhy paměti, a to paměť sensorickou, krátkodobou a dlouhodobou. Sensorickou paměť tvoří oči a uši a její kapacita je velmi krátká. Další, krátkodobá paměť, je někdy též nazývána jako pracovní a slouží k přemýšlení a učení. Z názvu je patrné, že její kapacita je krátkodobá. Poslední, dlouhodobá paměť, má kapacitu trvalou a slouží k zapamatování znalostí. Schémata na obrázcích níže popisují kognitivní teorii učení. Proces učení zde probíhá tak, že získané znalosti jsou kombinací předchozích znalostí a vytříbených poznatků, které jsou uloženy v krátkodobé paměti. Na obrázku (Obr. 1) vnímání probíhá tak, že žák čte text nebo poslouchá mluvené slovo. Případný obrazový model probírané látky je dokreslován v krátkodobé paměti a nemusí být přesný. V druhém případě (Obr. 2) žák vnímá současně text i fotografie a utváří si pohled na látku v ucelenější podobě.

Vnímání textu



Obr. 1: Kognitivní teorie učení [1]

Vnímání textu doplněného o obraz



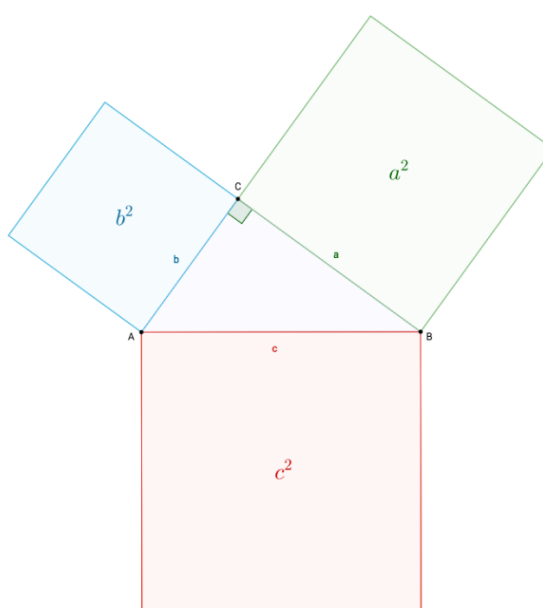
Obr. 2: Kognitivní teorie multimediálního učení [1]

Obě varianty teorie učení jsou vysvětleny níže na příkladu Pythagorovy věty pomocí klasické výukové metody slovní a pomocí multimedia learningu.

1.2.1 Pythagorova věta klasickou výukovou metodou

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami. Je dána vztahem $c^2 = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky odvěsen v trojúhelníku a c je délka přepony.

1.2.2 Pythagorova věta podaná multimedia learningem



Obr. 3: Grafické znázornění Pythagorovy věty

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami. Je dána vztahem $c^2 = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky odvěsen v trojúhelníku a c je délka přepony.

Z uvedených dvou ukázek je zřejmé, že pokud je látka doplněna o obrázek, je více pochopitelná. V některých otevřených odpovědích dotazníkového šetření respondenti namítali, že by výuka matematiky měla být opřena čistě jen o počítání bez využití multimediálních technologií. Důležité je uvědomit si, jak velkým pomocníkem může být matematický software při výuce – kupříkladu při vysvětlování pojmu graf funkce. Část dotazovaných uvedla, že by byla vhodná osvěta do škol, to by šlo udělat dalším vzděláváním učitelů. Z toho důvodu je práce zaměřena spíše aplikačně, případní zájemci zde naleznou ukázkové příklady řešené v matematickém softwaru.

2 POPIS VYBRANÝCH PROGRAMŮ A WEBOVÝCH APLIKACÍ

Matematické aplikace lze použít k různým úkonům, například k úpravám algebraických výrazů, k řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav, k vykreslení grafů funkcí, k řešení konstrukčních úloh, ke kontrole vlastních výpočtů a dalším aplikacím – uplatnění je možné najít např. i v diferenciálním a integrálním počtu.

V dalších podkapitolách jsou popsány aplikace Microsoft Mathematics, Wolfram|Alpha, Wolfram Mathematica, Symbolab, Apple Grapher, Desmos, Graph, Funkce, Derive 6.1, Octave, GeoGebra a Cabri II Plus. Tyto aplikace byly vybrány na základě dotazníkového šetření a možností využití. Přesto, že jsou aplikace dispozici převážně v angličtině, většina z nich má intuitivní ovládání a jazyk by neměl být problémem. O každé aplikaci je uvedeno několik informací, a to představení aplikace, výčet funkcí, výhody, nevýhody a vlastnosti (licence, dostupnost a další). Z hlediska licence uvažujeme, zda je aplikace k dispozici zdarma či je placená. Z pohledu dostupnosti rozlišujeme, zda je aplikace desktopová či webová. Výhodou webových aplikací je, že je spustíme téměř v každém počítači – přímo ve webovém prohlížeči. Nevýhodou je pak nutnost připojení k internetu. Kladem desktopových aplikací je, že je můžeme používat bez použití internetového připojení. Nevýhodou je, že musíme uvažovat vhodný operační systém, pro který je aplikace naprogramována.

2.1 Microsoft Mathematics

Při psaní recenze této aplikace byly využity vlastní poznatky z užívání a zdroj [5].

Představení aplikace

Microsoft Mathematics je vzdělávací aplikace pro MS Windows, která je vyvíjena společností Microsoft. Světlo světa aplikace spatřila v roce 2006 s tehdejšími názvem Microsoft Math 1.0, a to jako licencovaná aplikace. Vývoj aplikace pokračoval a v roce 2011 vyšla verze Microsoft Mathematics 4.0 jako volně stažitelná. Aplikace umožňuje uživatelům řešit matematické a vědecké problémy. Rozhraní aplikace je jednoduché, intuitivní a snadno použitelné. V levé části okna se nachází grafický kalkulátor pro zadávání výrazů, rovnic a funkcí. K zadávání samozřejmě lze užít klávesnice či stylus. V pravé části okna se nachází pracovní list, ve kterém se ukazují řešené matematické problémy. V aplikaci lze nastavit, zda budou prováděny výpočty v reálných nebo komplexních číslech – to může být užitečné na střední škole.

Funkce

Aplikace má mnoho funkcí a těmi jsou:

1. Základní kalkulátor.
2. Vykreslení grafů funkcí v \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 .
3. Řešení soustav n rovnic o n neznámých.
4. Převody jednotek.
5. Triangle solver – umožňuje dopočítat strany, případně úhly trojúhelníku.
6. Úprava výrazů.
7. Řešení rovnic a nerovnic.
8. Operace s maticemi.
9. Řešení příkladů z oblasti diferenciálního a integrálního počtu.

Výhody a nevýhody

- ✔ Aplikace je k dispozici zdarma
- ✔ U většiny příkladů je k dispozici step-by-step řešení
- ✔ Integrovaný převodník jednotek
- ✔ K zadání matematických problémů lze užít klávesnice, myš nebo stylus
- ✔ Seznam důležitých rovnic a vzorců
- ✘ Pouze pro MS Windows
- ✘ Není v českém jazyce
- ✘ Aplikace neumí řešit diferenciální rovnice
- ✘ Pouze vlastní formát, nelze exportovat do PDF

Vlastnosti

Název: Microsoft Mathematics

Verze: 4.0

Licence: Freeware

Dostupnost: MS Windows XP a novější

Velikost: 18,45 MB

Vývojář: Microsoft

K dispozici: <https://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=15702>

2.2 Wolfram|Alpha

K popisu této webové aplikace byly využity zdroje [6], [7] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Wolfram|Alpha je webová aplikace, která slouží jako znalostní internetový vyhledávač. Většina internetových vyhledávačů prohledává webové stránky, zato Wolfram|Alpha odpovídá přímo na dotazy – kupříkladu na otázku, „What is the capital of France?“ odpoví „Paris“ a ukáže další zajímavé informace o městě, např. aktuální čas a počasí, hustotu zalidnění, nejbližší města a další. Pokud zadáme např. funkci $y = \sqrt{4x - 1} + 2$, vykreslí nám graf této funkce, určí vlastnosti (definiční obor, obor hodnot a další), nalezne extrémy a podá spoustu dalších zajímavých informací souvisejících s danou funkcí. Webová aplikace byla spuštěna v roce 2009 společností Wolfram Research². V současné době je služba zdarma, ale lze dokoupit licenci Wolfram|Alpha Pro, která umožňuje zobrazit postup řešení příkladu či exportovat výsledky do různých formátů. Wolfram|Alpha je taktéž k dispozici pro mobilní telefony s operačním systémem iOS, Android nebo Windows Phone. Aplikace je dostupná na webové stránce www.wolframalpha.com.

Funkce

Aplikace je velmi komplexní a rozsáhlá, její uplatnění nacházíme v mnoha vědních oborech, zejména v matematice, fyzice, chemii, geografii, dějepise a dalších.

Výhody a nevýhody

- ✔ Velmi komplexní vyhledávací systém
- ✔ Dostupnost – lze spustit na libovolném zařízení s internetovým připojením
- ✔ Poradí si nejen s matematickými problémy
- ✔ Pro běžné použití zdarma
- ✘ Pouze v anglickém jazyce
- ✘ Pro export je nutná zpoplatněná verze Wolfram|Alpha Pro

² Společnost Wolfram Research, kterou založil v roce 1987 Stephen Wolfram, patří k nejuznávanějším počítačovým, webovým a cloudovým softwarovým společnostem na světě a je také hojně přínosná pro vědu a výzkum.

2.3 Wolfram Mathematica

K popisu aplikace byly využity zdroje [7], [8] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Wolfram Mathematica je desktopová aplikace, která je vyvíjena společností Wolfram Research, a její první verze byla vydána v roce 1988 zakladatelem Stephenem Wolframem. K dnešnímu datu (14. 3. 2017) je k dispozici verze 11. Aplikace má velké uplatnění nejen ve školním prostředí, ale také ve výzkumu, není tedy divu, že je licencovaná. Ovládání aplikace je středně pokročilé, uživatel musí znát syntax pro zadávání příkazů, vektorů, matic, funkcí atd. Rozhraní aplikace tvoří tzv. výpočetní notebook, do kterého se zadávají příkazy, aplikace následně provede výpočet a ten se zobrazí pod příkazem v notebooku. Ukázkové příklady, které lze využít v matematice na středních školách, jsou uvedeny v praktické části.

Funkce

Mathematica je svými možnostmi poměrně rozsáhlá, proto je praktická část práce věnována základním středoškolským matematickým problémům, jako jsou výrazy, rovnice a nerovnice, soustavy rovnic a nerovnic, funkce, vektorová algebra a další.

Výhody a nevýhody

- ✔ Velmi rozsáhlý výpočetní systém
- ✔ Dostupnost – podpora Windows, macOS i Linux
- ✔ Náповěda je tvořena formou interaktivních notebooků
- ✔ Spousta příkladů k dispozici na webových fórech Wolfram Mathematica
- ✘ Licencovaná aplikace
- ✘ Výpočty jsou prováděny standardně v komplexních číslech

Vlastnosti

Název: Wolfram Mathematica

Verze: 11.0

Licence: licencovaná

Dostupnost: MS Windows, macOS a Linux

Vývojář: Wolfram Research

K dispozici: <http://www.wolfram.com/mathematica/pricing/>

2.4 Symbolab

K popisu webové aplikace byl využit zdroj [9] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Symbolab je vzdělávací webová aplikace, která je vyvíjena od roku 2011 společností EqsQuest Ltd. Funguje podobně jako Wolfram|Alpha, uživatel zadá nějaký matematický problém a aplikace jej vyřeší. V rovině matematických problémů je Symbolab velkým konkurentem webové aplikace Wolfram|Alpha, protože nabízí zobrazení postupu řešení příkladů zdarma (jedinou podmínkou je bezplatná registrace). Symbolab je rovněž k dispozici pro mobilní telefony s operačním systémem iOS nebo Android. Webová aplikace je k dispozici na webové stránce www.symbolab.com.

Funkce

Aplikace slouží jako pokročilý matematický vzdělávací nástroj. Umožňuje uživatelům naučit se a pochopit různá matematická témata. Symbolab umí řešit matematické problémy z různých oblastí matematiky, se kterými se může setkat nejen žák střední školy, ale také student univerzity. Dále aplikace umožňuje vykreslit graf funkce jedné proměnné, naučit se vzorce pomocí souhrnného seznamu vzorců seřazeného podle témat, procvičit si některá matematická pravidla pomocí výukových videí, zopakovat si libovolné matematické téma pomocí předpřipravených testů atd.

Výhody a nevýhody

- ✔ Zobrazuje postup řešení matematických problémů
- ✔ Příklady lze vložit v kódu LaTeX
- ✔ Dostupnost – lze spustit na libovolném zařízení s internetovým připojením
- ✔ Existence mobilní aplikace pro iOS a Android
- ✔ Pro běžné použití zdarma
- ✔ Matematické problémy lze zadat klávesnicí nebo myší
- ✔ Obsahuje periodickou soustavu prvků
- ✔ Obsahuje spoustu výukových videí
- ✔ Vývojář pravidelně doplňuje funkce webové aplikace
- ✘ Pouze v anglickém jazyce
- ✘ Grafy funkcí nelze exportovat jako obrázek
- ✘ Vykresluje grafy pouze v \mathbb{R}

2.5 Apple Grapher

K popisu byla využita interní nápověda aplikace a zdroj [10].

Představení aplikace

Grapher je jednoduchá desktopová aplikace pro vykreslení grafů funkcí jedné a dvou proměnných. Aplikace je vyvíjena společností Apple a je součástí počítačů Mac od roku 2007. Rozhraní aplikace je přirozené – vlevo se nachází seznam uživatelem zadaných rovnic, vpravo je velká plocha pro vykreslení grafů funkcí. Grapher je výtečná aplikace, avšak není dostupná pro uživatele Windows a Linux. Možná alternativa pro uživatele Linux je KAlgebra a pro uživatele Windows již výše zmíněný Microsoft Mathematics.

Funkce

Aplikace je perfektní v oblasti vykreslení grafů funkcí, nabízí:

1. Vykreslení grafů funkcí v \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 .
2. Vykreslení funkcí v kartézských, polárních, sférických a válcových souřadnicích.
3. Rovnice lze zadat implicitně, explicitně i parametricky.
4. Analýzu grafů funkcí (nalezne průsečík, kořen, derivuje a integruje funkci atd.).
5. Vykreslení řešení diferenciální rovnice.

Výhody a nevýhody

- ✔ K dispozici v českém jazyce
- ✔ Export rovnic do kódu LaTeX
- ✔ Možnost exportu grafu do různých formátů (obrázků, videí)
- ✔ Součástí aplikace je spousta vzorových příkladů
- ✘ Pouze pro macOS

Vlastnosti

Název: Apple Grapher

Verze: 2.5

Licence: aplikace je integrovaná v operačním systému

Dostupnost: macOS 10.5 a novější

Velikost: 21,7 MB

Vývojář: Apple

K dispozici: aplikace je součástí operačního systému

2.6 Desmos

K popisu této webové aplikace byl využit zdroj [11].

Představení aplikace

Desmos je velmi pokročilá webová a mobilní aplikace pro vykreslení grafů funkcí jedné proměnné. Aplikace je vyvíjena od roku 2012 společností Desmos, vývoj aplikace finančně podpořily společnosti Kapor Capital, Learn Capital, Kindler Capital, Elm Street Ventures a Google Ventures v celkové výši 1 000 000 \$. Cílem projektu je podpořit výuku matematiky na středních školách a aplikace je k dispozici zdarma. Rozhraní aplikace je intuitivní, vlevo je panel, do kterého se vkládají rovnice, a vpravo je místo pro vykreslení grafů funkcí. Desmos je přeložen do několika světových jazyků. Společnost nabízí i službu Desmos Classroom Activities, která umožňuje učitelům připravit si pracovní materiál online, žáci se pak k tomuto materiálu přihlásí a plní dané úkoly. Učitel poté v přehledné tabulce zkontroluje, zda žáci splnili požadované úkoly, a zhodnotí, jak se jim dařilo.

Funkce

Aplikace se specializuje na vykreslení grafů funkcí jedné proměnné. Mezi jednotlivé funkce patří:

1. Vědecký kalkulátor.
2. Velmi zdařilé grafy bez nutnosti nastavení barev apod.
3. Funkce lze zadat implicitně, explicitně i parametricky.
4. Vykreslení řešení nerovnice.
5. Po přihlášení má uživatel možnost ukládat si své grafy.
6. Při zadání dvou a více funkcí aplikace automaticky vyznačí průsečíky.
7. Podpora základních statistických metod.
8. Řešení příkladů z oblasti diferenciálního a integrálního počtu.

Výhody a nevýhody

- ✔ K dispozici zdarma
- ✔ K dispozici v českém jazyce
- ✔ Velmi propracovaná nápověda
- ✔ K zadání matematických problémů lze užít klávesnici nebo myš
- ✔ K dispozici i jako mobilní aplikace pro iOS a Android
- ✔ Možnost graf uložit jako obrázek nebo jej sdílet jako odkaz
- ✔ Podpora kartézských a polárních souřadnic
- ✘ Vykresluje grafy pouze v \mathbb{R}

2.7 Graph

Pro popis aplikace byl použit zdroj [12] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Graph je desktopová aplikace s otevřeným zdrojovým kódem a slouží k vykreslení grafů funkcí jedné proměnné. Aplikace byla vydána v roce 2001 a k dnešnímu datu je k dispozici verze 4.4.2. Rozhraní aplikace je tvořeno oknem, ve kterém se nachází lišta s nástroji pro práci s grafem, plocha pro kreslení grafů funkcí, a pruh, ve kterém jsou zobrazeny uživatelem zadané rovnice.

Funkce

Aplikace se specializuje na vykreslení a analýzu grafů funkcí jedné proměnné. Umožňuje vložit tečnu nebo kolmici k funkci v daném bodě, vyšrafovat plochu pod křivkou, nad křivkou nebo mezi dvěma křivkami, spočítat délku křivky mezi dvěma zadanými body, derivovat nebo integrovat funkci ve zvoleném rozsahu hodnot atd.

Výhody a nevýhody

- ✔ Licence GNU 2
- ✔ Aplikace je v českém jazyce
- ✔ Funkce lze zadat explicitně, polárně nebo parametricky
- ✔ Jednoduchost používání
- ✔ Možnost exportu bodů, které tvoří graf, do tabulky
- ✔ Možnost uložit graf jako obrázek nebo soubor Graph
- ✘ Vykresluje grafy pouze v \mathbb{R}
- ✘ Pouze pro MS Windows
- ✘ Aplikace působí zastarale
- ✘ Aplikace neumí vykreslit plochu mezi více než dvěma funkcemi

Vlastnosti

Název: Graph

Verze: 4.4.2

Licence: GNU 2

Dostupnost: MS Windows

Velikost: 9,6 MB

K dispozici: <https://www.padowan.dk>

2.8 Funkce

Pro popis aplikace byl použit zdroj [13] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Funkce je jednoduchá desktopová aplikace pro operační systém Windows, která vznikla jako diplomová práce Mgr. Daniela Míči při Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze v roce 2005. Rozhraní aplikace je tvořeno lištou s nástroji pro práci s grafem, seznamem funkcí zadaných uživatelem, oblastí pro vykreslení grafu funkce a posuvníkem, kterým uživatel nastavuje parametry obecně zadaných funkcí. Cílem aplikace je podpořit výuku funkcí na středních školách.

Funkce

Mezi základní funkce aplikace patří:

1. Vykreslení funkcí jedné proměnné.
2. Vložení předdefinované či explicitně zadané funkce.
3. Nalezení průsečíků dvou funkcí.

Výhody a nevýhody

- ✔ Aplikace je v českém jazyce
- ✔ Aplikace je zdarma
- ✔ Jednoduchost používání
- ✔ Možnost exportu grafu jako BMP
- ✔ Obsahuje předpřipravené funkce, které se vyučují na středních školách
- ✔ Není třeba instalace
- ✘ Vykresluje grafy pouze v \mathbb{R}
- ✘ Pouze pro MS Windows
- ✘ Funkce lze zadat pouze explicitně
- ✘ Aplikace vykreslí maximálně tři funkce do jednoho grafu

Vlastnosti

Název: Funkce

Verze: 2.0.1

Licence: Freeware

Dostupnost: MS Windows

Velikost: 0,6 MB

Vývojář: Mgr. Daniel Míča

K dispozici: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/daniel_mica/index.html

2.9 Derive 6.1

Pro popis aplikace byl použit zdroj [14] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Derive je desktopová aplikace pro operační systém Microsoft Windows. Aplikace byla vydána společností Texas Instruments v roce 1988 a její vývoj byl ukončen dne 29. 6. 2007 (v dotazníkovém šetření se ukázalo, že se aplikace stále používá, z toho důvodu je zmíněna v práci). Rozhraní aplikace je tvořeno oknem, ve kterém se nachází lišta pro volbu matematických operací, dále rozsáhlá oblast, ve které se zobrazují výpočty, a v poslední řadě pruh s matematickou klávesnicí se symboly a operátory, ve kterém se zadávají příkazy. Aplikace je na používání středně složitá, uživatel se musí naučit základní syntax pro provádění matematických operací, v některých případech stačí operaci vyvolat přímo z kontextového menu.

Funkce

Derive je velmi rozsáhlá aplikace, z toho důvodu je praktická část práce věnována základním matematickým problémům, které využije žák střední školy. Těmi jsou třeba příklady z oblasti teorie čísel, množin, výrazů, rovnic, nerovnic a jejich soustav, funkcí a analytické geometrie.

Výhody a nevýhody

- ✔ Velmi komplexní aplikace
- ✔ Velké možnosti nastavení aplikace
- ✔ Aplikace je v českém jazyce
- ✔ Aplikace není náročná na operační paměť
- ✘ Pouze pro MS Windows
- ✘ Vývoj aplikace byl ukončen

Vlastnosti

Název: Derive

Verze: 6.1

Licence: Proprietární

Dostupnost: MS Windows – funkční do verze Windows 8

Velikost: 6,5 MB

Vývojář: Texas Instruments

Informace: <http://www.chartwellyorke.com/derive/derivereviews.html>

2.10 Octave

Pro popis aplikace byl použit zdroj [15] a poznatky z používání.

Představení aplikace

Octave je vysokoúrovňový programovací jazyk pro numerické výpočty. V roce 1988 jej napsal James B. Rawlings jako doprovodný software pro svou vysokoškolskou práci. Nyní je k dispozici verze 4.2.1 a aplikace je pod licencí GPL, tedy je možné ji používat zdarma. Octave je vhodnou alternativou k MATLABu. Aplikace se ovládá pomocí příkazového řádku, je však možné doinstalovat grafické rozhraní.

Funkce

Octave můžeme využít k analýze dat, k numerickým výpočtům a vykreslení grafů funkcí. Aplikace se ovládá prostřednictvím příkazového řádku pomocí programovacího jazyka, který je podobný tomu, jaký používá aplikace MATLAB. Aplikace zvládne řešit algebraické rovnice, diferenciální rovnice, hledat kořeny polynomů, vykreslit grafy funkcí jedné a dvou proměnných, řešit problémy lineární algebry a další. Vzhledem k tomu, že se nejedná o výukovou aplikaci, ale o programovací jazyk, tak se praktická část věnuje pouze vykreslování grafů funkcí.

Výhody a nevýhody

- ✔ Rozsáhlý výpočetní systém
- ✔ Aplikace má podobnou syntax jako MATLAB
- ✔ Lze modelovat různé matematické problémy
- ✔ Aplikace není náročná na operační paměť
- ✔ Podpora vývojáře a mnoho výukových materiálů
- ✘ Není v češtině
- ✘ Ovládání pomocí příkazového řádku

Vlastnosti

Název: Octave

Verze: 4.2.1

Licence: GPL

Dostupnost: MS Windows, Linux a macOS

Velikost: záleží na operačním systému

Vývojář: John W. Eaton a ostatní

K dispozici: <https://www.gnu.org/software/octave/>

2.11 GeoGebra

K popisu aplikace byly využity zdroje [16].

Představení aplikace

GeoGebra je vzdělávací aplikace, která se zaměřuje na podporu výuky geometrie, algebry, statistiky a matematické analýzy. První verze vznikla v roce 2001 jako diplomová práce Markuse Hohenwartera na univerzitě v Salcburku, nyní ji v rámci licence otevřeného kódu vyvíjí několik vývojářů na celém světě. GeoGebra je k dispozici jako desktopová aplikace pro operační systém MS Windows, macOS a Linux, jako mobilní aplikace pro iOS, Android a Windows a v poslední řadě jako webová aplikace, kterou lze spustit v libovolném prohlížeči, jenž podporuje HTML 5. Webová verze GeoGebry je k dispozici na webové stránce <https://www.geogebra.org/apps>.

Poznámka: Jedna z možných alternativ webové verze GeoGebry je aplikace sketchometry, která je k dispozici na webové stránce <https://start.sketchometry.org>.

Funkce

GeoGebra je unikátní zejména jako aplikace pro podporu výuky geometrie, ale vyniká i v dalších oblastech. Praktická část práce se věnuje geometrickým aplikacím, které využije žák střední školy.

Výhody a nevýhody

- ✔ K dispozici v českém jazyce
- ✔ Multiplatformní aplikace
- ✔ GeoGebra materiály – spousta ukázkových příkladů
- ✔ Aplikace je zdarma
- ✘ Na tabletu se hůře ovládá webová verze GeoGebry

Vlastnosti

Název: GeoGebra

Verze: 6.0.348.0

Licence: Open Source

Dostupnost: MS Windows, macOS a Linux

Velikost: Záleží na operačním systému

Vývojář: Markus Hohenwarter a kolektiv

K dispozici: <https://www.geogebra.org>

2.12 Cabri II Plus

K popisu desktopové aplikace byl využit zdroj [17] a manuál k aplikaci.

Představení aplikace

Aplikace Cabri II Plus je desktopová aplikace pro operační systém MS Windows a macOS. Vznikla v 80. letech na univerzitě Josepha Fouriera v Grenoble ve Francii a její poslední verze byla vydána v roce 2003. Aplikace je určena především pro vytváření interaktivních geometrických konstrukcí na obrazovce počítače. Ve své době byla Cabri jedna z nejlepších aplikací pro znázornění dynamické geometrie na webových stránkách a nadějná pomůcka pro výuku konstrukční geometrie na základních a středních školách. V dnešní době se používá méně, protože ji postupně nahrazují modernější aplikace, např. GeoGebra. Cabri není v praktické části práce zmíněna, protože je licencovaná (v testovací verzi nelze vytvářet soubory) a její ovládání je velmi podobné jako v Geogebře.

Funkce

Cabri II Plus lze použít jako podpůrnou aplikaci pro výuku konstrukční geometrie. Rozhraní aplikace je jednoduché – tvoří jej nákretná a několik ovládacích tlačítek (pro vložení bodu, přímky, kružnice atd.). Práce s aplikací je podobná rýsování pomocí rýsovacích potřeb.

Výhody a nevýhody

- ✔ Jednoduché ovládání
- ✔ Aplikace je v českém jazyce
- ✔ Existence mnoha podpůrných materiálů
- ✔ Rozšířená možnost exportu grafiky
- ✘ Licencovaná aplikace
- ✘ Problémy se spuštěním na novějších MS Windows
- ✘ Aplikace je již zastaralá

Vlastnosti

Název: Cabri II Plus

Verze: 2.1.1

Licence: Proprietární

Dostupnost: MS Windows a macOS

Velikost: 40,9 MB

Vývojář: Cabrilog

K dispozici: <http://www.cabri.com/download-cabri-2-plus.html>

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 VLASTNÍ VÝZKUM

Dotazník (viz Příloha č. 1) je zpracován ve webové aplikaci Formuláře Google, která umožňuje vytvoření dotazníku, odeslání jej respondentům a následnou analýzu a zpracování dat. Dotazník obsahuje devět výzkumných otázek, které jsou smíšeného typu. Sedm otázek je orientovaných kvantitativně a dvě kvalitativně. Učitelé zde mají prostor pro vyjádření jakéhokoli podnětu, který může být pro tuto práci důležitý. Jedním z dalších významných aspektů bylo, aby byl dotazník pro učitele pochopitelný. Proto byla jeho srozumitelnost ověřena u tří učitelů matematiky, kteří dotazník bez problémů vyplnili.

3.1 Cíl výzkumu

Jedním z cílů výzkumu bylo zjistit, jak učitelé využívají počítač k výuce matematiky na středních školách, jaký matematický software používají a také technické vybavení učeben. Dalším cílem bylo zjistit, zda učitelé dávají přednost volně dostupnému či licencovanému software. Na základě šetření byl stanoven seznam aplikací, které se ukázaly jako nejvíce používané. Seznam aplikací je uveden v příloze (viz Příloha č. 3) a je použit jako výchozí bod této práce.

3.2 Popis zkoumaného vzorku

Zkoumaný vzorek respondentů tvoří učitelé matematiky středních odborných škol a gymnázií. Sběr respondentů proběhl tak, že z webů jednotlivých škol uvedených na webové stránce (<https://www.stredniskoly.cz>) byly vybrány mailové adresy učitelů matematiky a na ty byly rozeslány dotazníky. Z celkového počtu 2552 odeslaných dotazníků se zpátky vrátilo 658 vyplněných dotazníků, a to je dostačující vzorek k vyhodnocení.

3.3 Stanovení věcných hypotéz

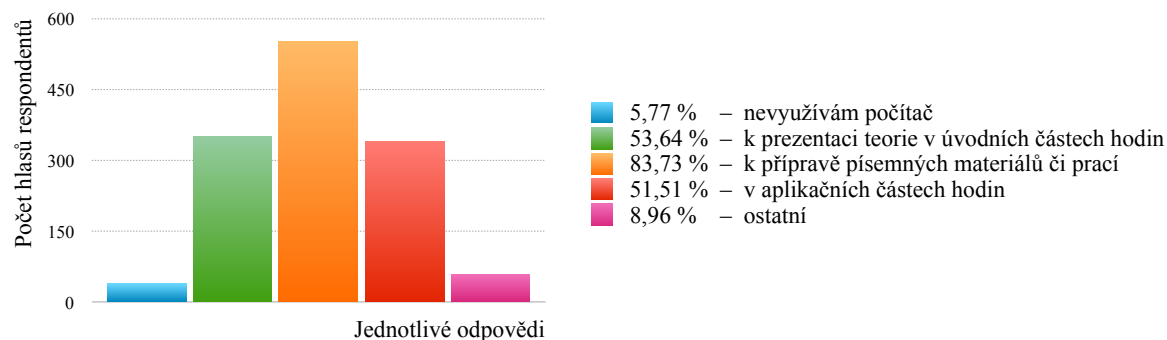
Níže jsou uvedeny věcné hypotézy, které budou zkoumány. V podkapitole (3.6) budou tyto věcné hypotézy převedeny na statistické a ke každé bude uvedena i její nulová a alternativní varianta. V poslední řadě budou jednotlivé hypotézy ověřeny statistickou metodou *chi kvadrát*.

1. Většina učitelů používá počítač každou druhou vyučovací hodinu.
2. Používání počítače usnadňuje vyučujícím práci.
3. Většina učitelů není spokojena s nabídkou podpůrného software.

3.4 Analýza a interpretace výsledků výzkumu

V této podkapitole jsou postupně vyhodnoceny výzkumné otázky. Vždy je uvedena otázka, její grafické vyhodnocení a komentář.

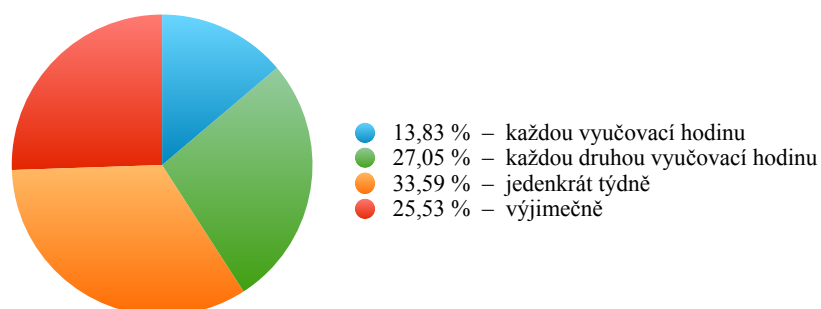
Otázka č. 1: Jak využíváte počítač pro výuku matematiky?



Obr. 4: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 1

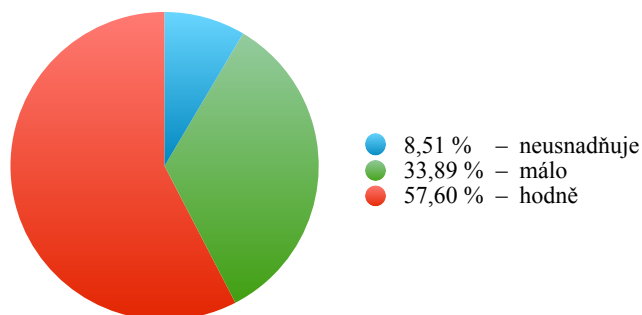
V první otázce mohli učitelé vybrat více variant odpovědí podle toho, jak využívají počítač pro výuku matematiky. Z grafu vyplývá, že většina (94,23 %) počítač využívá, a to hlavně k přípravě vyučovací hodiny a následnému odučení. Dotazovaní mohli odpovědět i slovně a uvést, k čemu dalšímu využívají PC; ukázalo se, že převážně pro vykreslení grafů, řešení geometrických úloh a organizaci vyučovací hodiny (viz Příloha č. 2).

Otázka č. 2: Jak často používáte počítač?



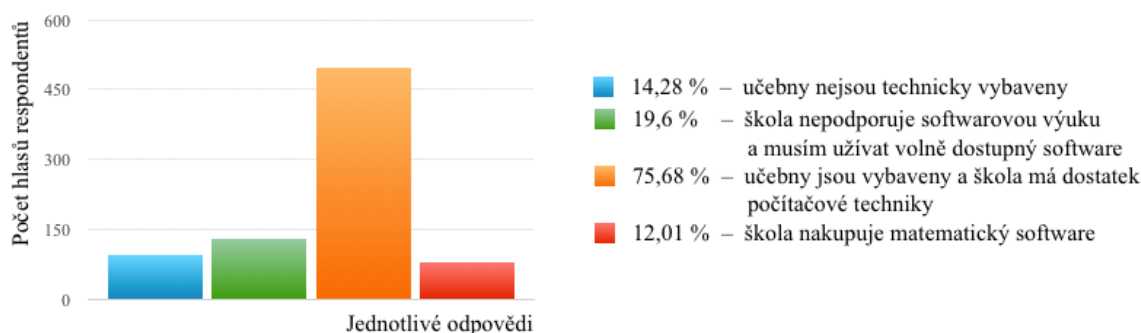
Obr. 5: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 2

Ve druhé otázce byly odpovědi následující: 25,53 % zvolilo odpověď *výjimečně*, to činí 168 učitelů, kteří využívají techniku jen zřídka. Zbýlých 74,47 % učitelů používá počítač aktivně ve výuce, z toho 91 každou vyučovací hodinu, 178 každou druhou vyučovací hodinu a 221 jedenkrát týdně.

Otázka č. 3: Jak moc Vám používání počítače ve výuce usnadňuje práci?

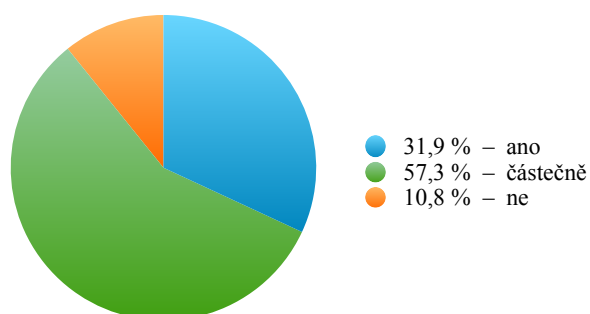
Obr. 6: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 3

Na otázku, jak moc Vám používání počítače ve výuce usnadňuje práci, odpověděli učitelé následovně – 56 *neusnadňuje*, 223 *málo* a 329 *hodně*. Dotazovaní, kteří odpověděli *neusnadňuje* nebo *málo*, tvoří 42,4 % z celkového počtu respondentů. To znamená, že těmto učitelům nezdjednodušuje používání počítače práci. Zbylým 57,6 % usnadňuje počítač práci hodně.

Otázka č. 4: Poskytuje Vám škola dostatečné podpůrné zázemí?

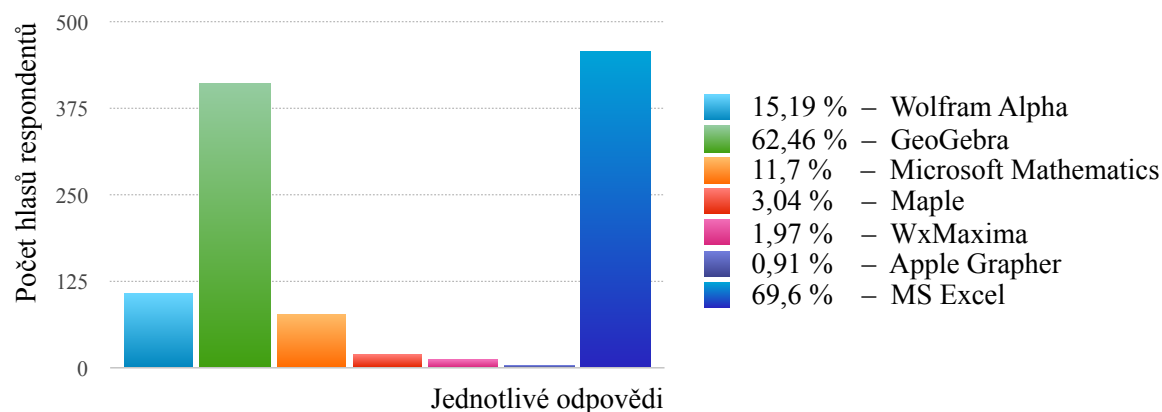
Obr. 7: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 4

Ve čtvrté otázce mohli učitelé opět vybrat více variant odpovědí podle toho, co nejvíc vystihuje školu, ve které učí. Z následujícího grafu vyplývá, že většina škol poskytuje technické zázemí a pouze 94 škol ne – technickým zázemím je myšleno vybavení učebny počítači a dataprojektorem. Z dalších odpovědí lze zjistit, že školy málo nakupují matematický software a učitelé využívají volně dostupná řešení.

Otázka č. 5: Jste s nabídkou podpůrných matematických programů spokojeni?

Obr. 8: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 5

Na otázku, zda jsou učitelé spokojeni s nabídkou podpůrných programů, odpovědělo 32 % všech dotazovaných *ano*, dalších 57 % *částečně* a pouhých 11 % *ne*. Z toho lze vyvodit, že většina učitelů je spokojena.

Otázka č. 6: Které programy používáte ve výuce?

Obr. 9: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 6

V šesté otázce měli učitelé vybrat programy, které využívají ve výuce. V dotazníku se jako nejvíce dominantní ukázal Microsoft Excel a geometrická aplikace GeoGebra. Dále po řadě programy jako Wolfram|Alpha, Microsoft Mathematics, Maple, WxMaxima a Apple Grapher.

Otázka č. 7: Které další programy používáte ve výuce?

Tato otázka je otevřená, jednotlivé odpovědi jsou uvedeny v příloze (viz Příloha č. 3). V této otázce učitelé uvedli různé desktopové a webové aplikace, které využívají k výuce. Práce s nejvíce užitečnými aplikacemi je prezentována v dalších kapitolách této práce. Nejčastěji uváděné programy jsou: Cabri Geometrie, Derive, Funkce, Graph a kancelářský software společnosti Microsoft.

Otázka č. 8: Napadá Vás ještě něco důležitého, co byste chtěli k tématu sdělit?

Tato otázka je otevřená a dobrovolná, učitelé zde mohli nechat své postřehy a náměty k tématu diplomové práce. Tyto připomínky poukázaly na to, jak probíhá výuka matematiky na střední škole. Náměty a připomínky jsou uvedeny v příloze (viz Příloha č. 4).

3.5 Testovací kritérium Chí kvadrát

V podkapitole (3.3) byly navrženy věcné hypotézy, které budou převedeny na statistické hypotézy a vyhodnoceny testovacím kritériem chí kvadrát. Pro vyhodnocení bude dodržen následující postup:

- 1. Formulace hypotéz.** Test začíná formulací nulové a alternativní hypotézy. Nulová hypotéza je taková hypotéza, která říká, že mezi pozorovanými a očekávanými daty nejsou žádné statisticky významné rozdíly. Alternativní hypotéza naopak říká, že mezi pozorovanými a očekávanými daty jsou statisticky významné rozdíly.
- 2. Vytvoření kontingenční tabulky.** Tabulka se skládá ze tří sloupců. V prvním sloupci jsou uvedeny jednotlivé odpovědi, ve druhém četnosti pozorované a ve třetím očekávané. Jednotlivé očekávané četnosti se určí ze vztahu $\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^k h_n$. Tabulka bude mít tolik řádků k , kolik existuje odpovědí.

Tab. 1: Obecná kontingenční tabulka

Odpověď	Pozorovaná četnost	Očekávaná četnost
Odpověď 1	h_1	\bar{h}_1
Odpověď 2	h_2	\bar{h}_2
⋮	⋮	⋮
Odpověď k	h_k	\bar{h}_k

3. **Spočtení Chí kvadrát χ^2 .** Celková hodnota χ^2 se spočte pomocí následujícího vztahu

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^k \frac{(h_n - \bar{h}_n)^2}{\bar{h}_n} = \frac{(h_1 - \bar{h}_1)^2}{\bar{h}_1} + \frac{(h_2 - \bar{h}_2)^2}{\bar{h}_2} + \dots + \frac{(h_k - \bar{h}_k)^2}{\bar{h}_k},$$

kde h_n značí pozorovanou četnost, \bar{h}_n četnost očekávanou, n je sčítací index a k je poslední prvek. Poznámka: Pro přehlednost může mít kontingenční tabulka čtvrtý sloupec, ve kterém jsou jednotlivé části hodnoty chí kvadrát.

4. **Testování nulové hypotézy.** V tomto kroku se porovná vypočtená hodnota s tzv. kritickou hodnotou testovacího kritéria. Danou kritickou hodnotu nalezneme v příloze (viz Příloha č. 5) pro danou hladinu významnosti a určitý počet stupňů volnosti. Hladina významnosti je pravděpodobnost, že neoprávněně zamítneme nulovou hypotézu. V pedagogických výzkumech se pracuje na hladině významnosti 0,05 nebo 0,01. Stupeň volnosti se určí ze vztahu $\nu = k - 1$. Nulovou hypotézu přijímáme, pokud je vypočtená hodnota testovacího kritéria menší než kritická hodnota. V opačném případě nulovou hypotézu odmítáme a přijímáme alternativní. K popisu testovacího kritéria bylo čerpáno z učebnice [18].

3.6 Statistické stanovení a ověření hypotéz

a) **Většina učitelů používá počítač každou druhou vyučovací hodinu.**

Hypotéza: Většina učitelů používá počítač více než jedenkrát týdně.

Hypotéza nulová: Učitelé používají počítač zhruba stejně, čili mezi pozorovanými a očekávanými soubory dat nejsou statisticky významné rozdíly.

Hypotéza alternativní: Většina učitelů používá počítač méně než jedenkrát týdně.

Tab. 2: Kontingenční tabulka pro první hypotézu

Odpověď	Pozorovaná	Očekávaná	χ^2
Každou vyučovací hodinu	91	164,5	32,84
Každou druhou vyučovací hodinu	178	164,5	1,1
Jedenkrát týdně	221	164,5	19,4
Výjimečně	168	164,5	0,075

Vypočtená hodnota $\chi^2 = 53,41$ je větší, než kritická hodnota $\chi_{0,01}^2(3) = 11,341$ testovacího kritéria, proto odmítáme nulovou hypotézu.

b) Používání počítače usnadňuje vyučujícím práci.

Hypotéza: Při použití počítače jsou učitelé více efektivní, než kdyby jej nepoužili.

Nulová hypotéza: Použití počítače nehraje významnou roli vzhledem k efektivnosti práce a učitel je stejně efektivní i bez něj.

Alternativní hypotéza: Při použití počítače jsou učitelé méně efektivní než při klasické výuce.

Tab. 3: Kontingenční tabulka pro druhou hypotézu

Odpověď	Pozorovaná	Očekávaná	χ^2
Neusnadňuje	56	219,3	121,6
Málo	223	219,3	0,062
Hodně	379	219,3	116,29

Vypočtená hodnota $\chi^2 = 237,96$ je stejně jako v předchozím příkladu větší než kritická hodnota $\chi^2_{0,01}(2) = 9,21$ testovacího kritéria, proto odmítáme nulovou hypotézu.

c) Většina učitelů není spokojena s nabídkou podpůrného software.

Hypotéza: Většina učitelů není s nabídkou podpůrného software spokojena.

Hypotéza nulová: Učitelé odpověděli na otázku téměř stejně, takže mezi pozorovanými a očekávanými soubory dat nejsou statisticky významné rozdíly.

Hypotéza alternativní: Učitelé jsou s nabídkou softwaru převážně spokojeni.

Tab. 4: Kontingenční tabulka pro třetí hypotézu

Odpověď	Pozorovaná	Očekávaná	χ^2
Ano	210	219,3	0,39
Částečně	377	219,3	113,4
Ne	71	219,3	100,3

Vypočtená hodnota $\chi^2 = 214,09$ je opět jako v předchozích případech větší než kritická hodnota $\chi^2_{0,01}(2) = 9,21$ testovacího kritéria, proto odmítáme nulovou hypotézu.

3.7 Zhodnocení výzkumu

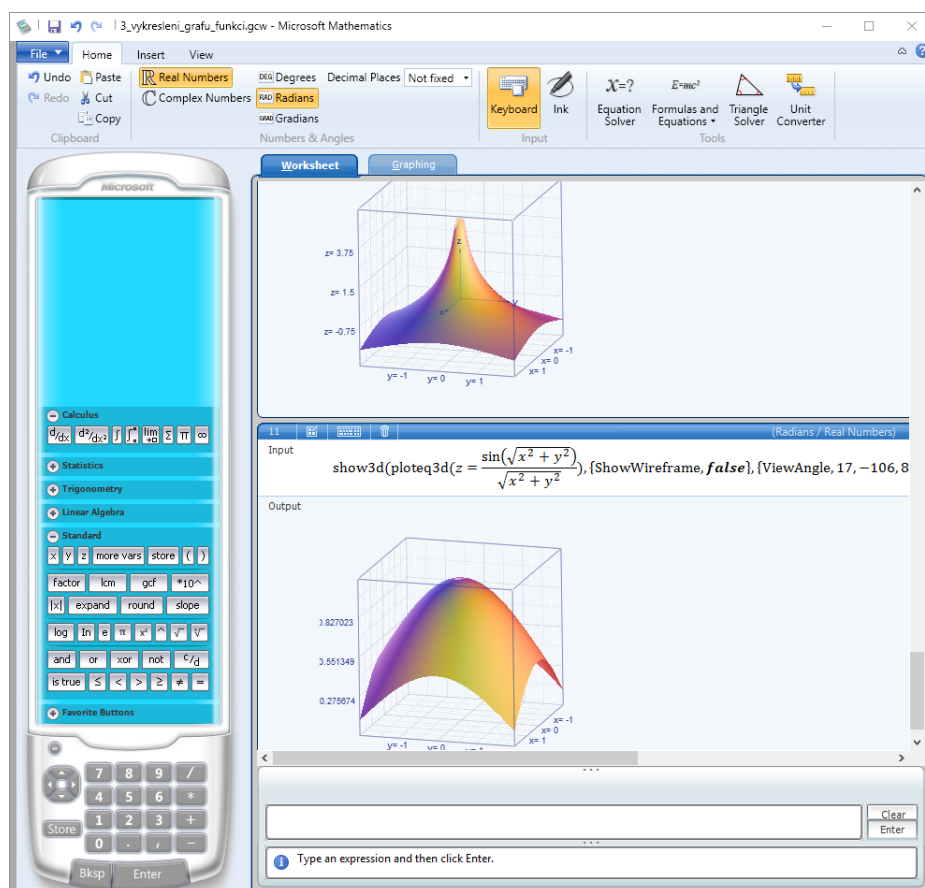
Výzkum přinesl různé poznatky o využití matematického softwaru na středních školách a gymnáziích v České republice. V následujících větách jsou prezentovány nedůležitější informace z celkového výzkumného šetření. Nejprve byly vyhodnoceny jednotlivé výzkumné otázky. Ukázalo se, že většině učitelů počítač usnadňuje práci a aktivně jej využívá nejen k přípravě vyučovací hodiny, ale i k jejímu odučení. Přímou ve vyučovací hodině jej využívá většina, a to 75 % dotazovaných. Učitelé používají PC pro vykreslení grafů funkcí, řešení geometrických úloh a k organizaci vyučovací hodiny. Na středních školách se častěji využívá volně dostupný software a majoritní část dotazovaných je s nabídkou spokojena. Mezi nejpoužívanější programy patří Cabri Geometrie, Derive, Funkce, Graph, Microsoft Office, GeoGebra, Wolfram|Alpha, Microsoft Mathematics, Maple, WxMaxima a Apple Grapher. Většina škol je technicky vybavena, a to počítačem a dataprojektorem.

Dále byly zpracovány otevřené otázky. Odpovědi na otázky jsou uvedeny v přílohách (viz Příloha č. 7, 8). Tyto otázky byly dobrovolné, takže na ně odpověděli jen respondenti, kteří chtěli. Otázka č. 7 pojednávala o tom, jaký matematický software používají, tento software je shrnut v tabulce (Tab. 5) a je seřazen dle četnosti. Otázka č. 8 dala možnost respondentům vyjádřit se libovolně k tématu diplomové práce podle vlastního uvážení. Ukázalo se, že většina učitelů dává přednost volně dostupnému software a také, že mnoho učitelů dává přednost klasickým výukovým metodám bez použití počítače.

4 PRÁCE V JEDNOTLIVÝCH APLIKACÍCH

4.1 Microsoft Mathematics

Microsoft Mathematics svými funkcemi pokrývá širokou škálu matematických témat. Aplikace je k dispozici zdarma a je dostupná pouze pro operační systém Microsoft Windows. Po spuštění aplikace lze vidět pracovní prostředí (Obr. 10). V levé části můžeme vidět grafický kalkulátor pro zadávání výrazů, rovnic a funkcí. V pravé části okna můžeme vidět pracovní list, ve kterém se provádí výpočty. Jednotlivé příkazy píšeme do bílého vstupního pole, které se nachází ve spodní části okna.



Obr. 10: Microsoft Mathematics

Poznámka: Aplikace neumožňuje vložení komentářů do výpočtů, z toho důvodu je podkapitola rozdělena na sekce, které jsou jednotlivě komentovány.

a) Algebraické výrazy**Příklad 1.** Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{k^3 - 49k}{k^3 + 343} \cdot \frac{k^2 - 7k + 49}{3k}, \quad \text{b) } \frac{\frac{5+x}{5-x} - \frac{5-x}{5+x}}{1 - \frac{25+x^2}{25-x^2}}, \quad \text{c) } \frac{m-1}{2m+2} + \frac{m+1}{3-3m} + \frac{5m-1}{3m^2-3}$$

Řešení: Do místa pro příkaz zadáme algebraický výraz a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `((k^3-49k)/(k^3+343))((k^2-7k+49)/(3k)),`
 b) `((5+x)/(5-x) - (5-x)/(5+x)) / (1 - (25+x^2)/(25-x^2)),`
 c) `(m-1)/(2m+2) + (m+1)/(3-3m) + (5m-1)/(3m^2-3).`

Příklad 2. Rozložte na součín:

$$\text{a) } 2x^2 - 8, \quad \text{b) } x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, \quad \text{c) } 16x^3 - 56x^2 + 32x - 112.$$

Řešení: K rozložení výrazu na součín slouží funkce `factor(výraz)`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `factor(2x^2-8),`
 b) `factor(x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x),`
 c) `factor(16x^3-56x^2+32x-112).`

Příklad 3. Vynásobte:

$$\text{a) } (x-1)(x-2)(x-3), \quad \text{b) } (a-b)(a+b)(y+z)(y-z), \quad \text{c) } (x^3+1)(1+x).$$

Řešení: K tomuto úkonu slouží funkce `expand(výraz)`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `expand((x-1)(x-2)(x-3)),`
 b) `expand((a-b)(a+b)(y+z)(y-z)),`
 c) `expand((x^3+1)(1+x)).`

Výše uvedené příklady jsou zpracovány v ukázkovém souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/1_Mathematics/1_vyrazy.gcw`.

b) Rovnice, nerovnice a jejich soustavy**Příklad 1.** Řešte rovnice v \mathbb{R} :

$$\text{a) } 5x - 1 - \frac{3x - 1}{2} = \frac{27}{2}, \quad \text{b) } 2x^2 + 24x - 26 = 0, \quad \text{c) } \log x + \log(x + 1) = \log 2x.$$

Řešení: K vyřešení rovnice slouží funkce `solve({rovnice})`, kterou zadáme místa pro příkaz vstup a potvrdíme klávesou Enter.

$$\text{a) } \text{solve}(\{5x-1-(3x-1)/2=27/2\}),$$

$$\text{b) } \text{solve}(\{2x^2+24x-26=0\}),$$

$$\text{c) } \text{solve}(\{\log(x)+\log(x+1)=\log(2x)\}).$$

Příklad 2. Vyjádřete ze vzorce r :

$$\text{a) } 2q - 3r = \frac{q - 2}{2} + 1, \text{ kde } q \text{ je reálný parametr,}$$

$$\text{b) } V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ kde } V \text{ je kladný reálný parametr.}$$

Řešení: K vyjádření r ze vzorce slouží funkce `solve({rovnice}, {neznámá})`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme opět klávesou Enter.

$$\text{a) } \text{solve}(\{2q-3r=(q-2)/2+1\}, \{r\}),$$

$$\text{b) } \text{solve}(\{V=4/3\pi r^3\}, \{r\}).$$

Příklad 3. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x - 5y + 10 = 0 & \text{b) } y - 3z = 5 \\ & x + y = 2, \\ & x + 2y = 5. \\ & 3x - z = 4 \end{array}$$

Řešení: K vyřešení soustavy rovnic slouží funkce `solve({rovnice1}, {rovnice2})`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter. Microsoft Mathematics vyřeší maximálně soustavu šesti rovnic o šesti neznámých.

$$\text{a) } \text{solve}(\{2x-5y+10=0, x+y=2\}),$$

$$\text{b) } \text{solve}(\{y-3z=5, x+2y=5, 3x-z=4\}).$$

Rovnice lze zadat i pomocí grafického prostředí, dodržíme následující postup:

1. Klikneme na tlačítko *Equation Solver*,
2. ve výběru vybereme určitý typ soustavy,
3. do jednotlivých polí zapíšeme rovnice,
4. stiskneme tlačítko *Solve*.

Příklad 5. Řešte nerovnice v \mathbb{R} :

$$\text{a) } x^2 - 16 \leq 4, \quad \text{b) } 5x - 2(1 + x^2) \leq 0.$$

Řešení: K vyřešení nerovnice slouží funkce `solveIneq({rovnice})`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter.

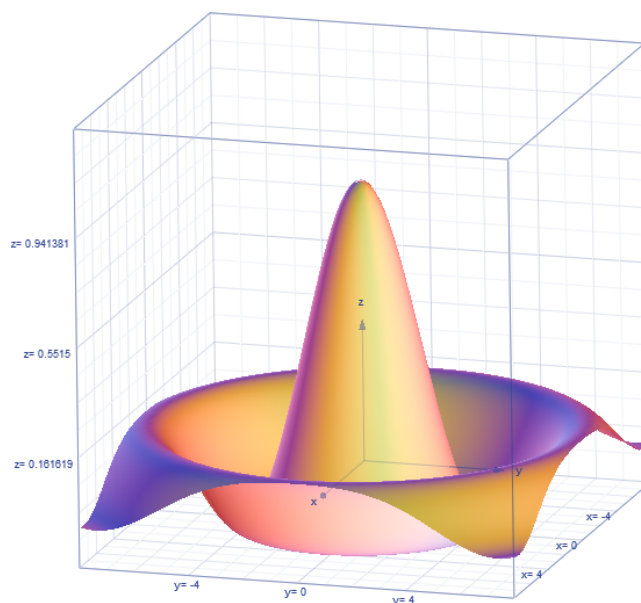
a) `solveIneq(x^2-16<=4, x)`,

b) `solveIneq(5x-2(1+x^2)<=0, x)`.

U rovnic a jejich soustav Microsoft Mathematics ukáže i postup výpočtu krok po kroku, a to více než jednou metodou. U nerovnic postup k nabídce není. Výše uvedené příklady jsou zpracovány v ukázkovém souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/1_Mathematics/2_rovnice_nerovnice_a_jejich_soustavy.gcw`.

c) Vykreslení grafů funkcí

Aplikace zvládne vykreslit grafy v \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 , a to v souřadnicích kartézských, polárních, sférických a cylindrických – níže na obrázku lze vidět vykreslení prostorové funkce.



Obr. 11: Vykreslení grafu prostorové funkce

Vykreslení grafů funkcí můžeme provést pomocí grafického prostředí nebo přímo příkazem.

Vykreslení grafů pomocí grafického rozhraní provedeme následovně:

1. Zvolíme záložku *Graphing*,
2. otevřeme *Equations & Functions* nebo *Parametric*,
3. vybereme prostor a souřadnicový systém,
4. napíšeme funkci a klikneme na tlačítko *Graph*.

Vykreslení grafu pomocí příkazů je ukázáno na příkladech níže.

Příklad 1. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí:

- a) $y = x$, $y = -2x$, $y = |x| + 1$,
 b) $y = x^2$, $y = (x - 2)^2 + 4$, $y = -(x - 3)^2 - 5$,
 c) $y = e^x$, $y = x^{-1}$, $y = \ln x$,
 d) $y = \cos(4x - 2) + 1$, $y = |\sin x| + 4$,
 e) $y = \cot\left(\frac{x}{4} + 1\right)$, $y = \tan(2x - 1) + 1$.

Řešení: Několik grafů funkcí do jednoho společného grafu vykreslíme pomocí příkazu `show2d(plotEq2d(funkce1), plotEq2d(funkce2))`, který zadáme do místa pro příkaz.

- a) `show2d(plotEq2d(y=x), plotEq2d(y=(-2)x), plotEq2d(y=abs(x)+1))`,
 b) `show2d(plotEq2d(y=x^2), plotEq2d(y=(x-2)^2+4), plotEq2d(y=-(x-3)^2-5))`,
 c) `show2d(plotEq2d(y=e^x), plotEq2d(y=1/x), plotEq2d(y=ln(x)))`,
 d) `show2d(plotEq2d(y=cos(4x-2)+1), plotEq2d(y=abs(sin(x))+4))`,
 e) `show2d(plotEq2d(y=cot(x/4+1)), plotEq2d(y=tan(2x-1)+1))`.

Příklad 2. V \mathbb{R}^2 vykreslete grafy funkcí:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, b) $z = x^2 + y^2$, c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$,
 d) $z = e^{(x^2+y^2)}$, e) $z = \ln\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$, f) $z = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

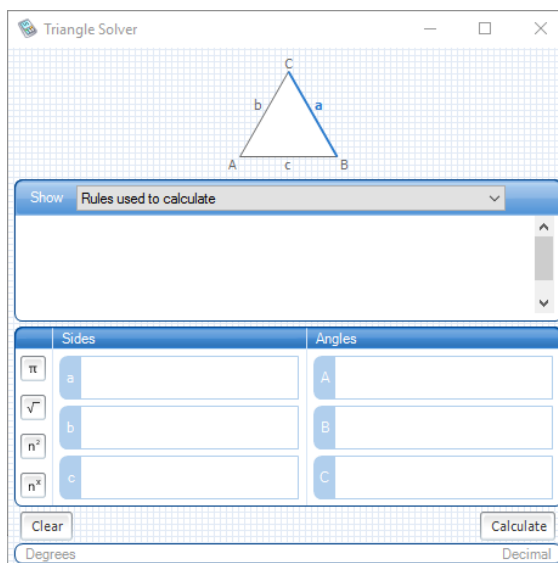
Řešení: K vyřešení rovnice pro neznámou r slouží funkce `solve({rovnice}, {neznámá})`, kterou zadáme do pole vstup a potvrdíme opět klávesou Enter.

- a) `show3d(plotEq3d(x^2+y^2+z^2=9))`,
 b) `show3d(plotEq3d(z=x^2+y^2))`,
 c) `show3d(plotEq3d(x^2/4+y^2/9+z^2/16=1))`,
 d) `show3d(plotEq3d(z=e^(x^2+y^2)))`,
 e) `show3d(plotEq3d(z=ln(1/(x^2+y^2))))`,
 f) `show3d(plotEq3d(z=sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)))`.

Jak bylo zmíněno dříve, MS Mathematics zvládá poměrně kvalitně vykreslovat grafy funkcí jedné a dvou proměnných. V prvním příkladu je ukázáno vykreslení funkcí jedné proměnné, které se učí na střední škole. V druhém příkladu je ukázáno vykreslení prostorových funkcí. Uvedené příklady jsou obsaženy v souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/1_Mathematics/3_vykresleni_grafu_funkci.gcw`.

d) Výpočty v trojúhelníku

Aplikace obsahuje užitečný nástroj pro výpočet stran a úhlů trojúhelníku (Obr. 12).

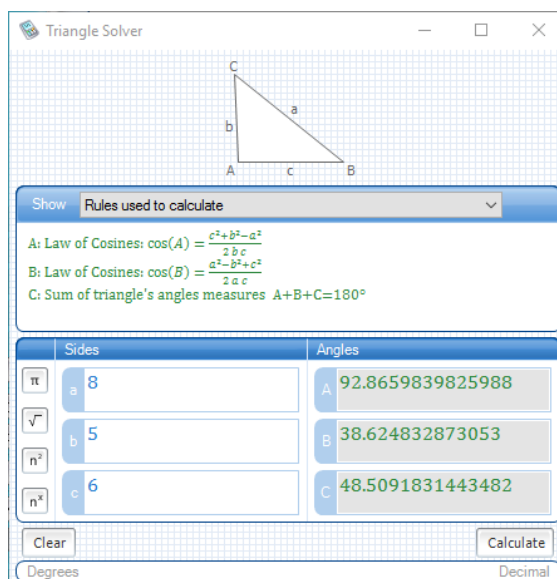


Obr. 12: Triangle Solver

Nástroj spustíme kliknutím na tlačítko *Triangle Solver*. Známé strany, případně úhly zadáme do bílých políček a stiskneme tlačítko *Calculate*. Po zadání vstupních informací nástroj ukáže o jaký typ trojúhelníku se jedná, dále naznačí pravidla, pomocí kterých vypočetl neznámé strany a případné úhly, úhlopříčky a také obsah trojúhelníku. To může být užitečné při kontrole výpočtu nebo rysu. Nástroj *Triangle Solver* však neumožňuje uložení souboru, proto jsou příklady doloženy pouze snímkem okna.

Příklad 1. Jsou dány strany $a = 8$ cm, $b = 5$ cm a $c = 6$ cm. Dopočtěte úhly α , β a γ .

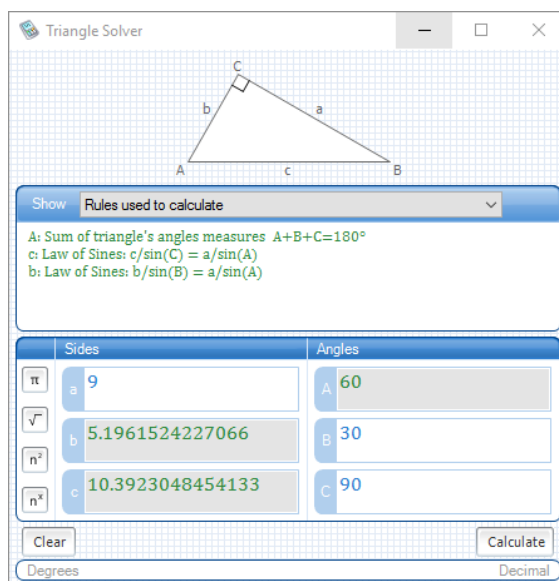
Řešení: Úhly dopočteme podle výše uvedeného návodu.



Obr. 13: Příklad 1

Příklad 2. Je dáno $a = 9$ cm, $\beta = 30^\circ$ a $\gamma = 90^\circ$. Dopočtěte b , c a α .

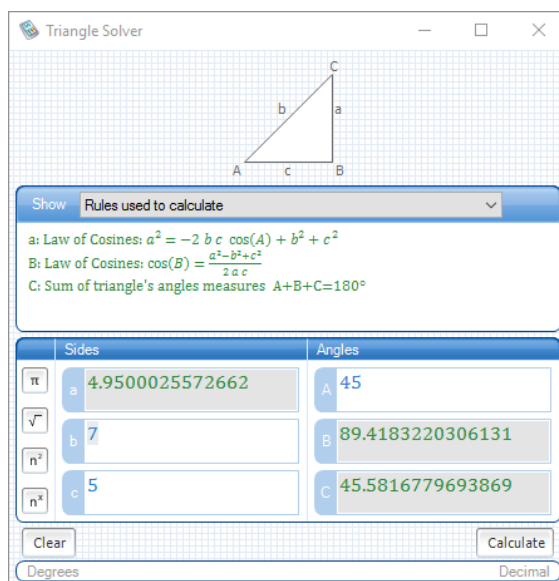
Řešení:



Obr. 14: Příklad 2

Příklad 3. Je dáno $b = 7$ cm, $c = 5$ cm a $\alpha = 45^\circ$. Dopočtěte a , β a γ .

Řešení:



Obr. 15: Příklad 3

e) Využití aplikace ve vyšší matematice

Aplikace umí řešit i příklady z vyšší matematiky, se kterými se může setkat žák střední školy v matematickém semináři. V aplikaci lze řešit příklady z oblasti diferenciálního a integrálního počtu a také z lineární algebry.

Příklad 1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

- a) A^{-1} , b) B^{-1} , c) $A \cdot B$, d) $B \cdot A$, e) $|A|$, f) $|B|$.

Řešení: Do místa pro příkaz zadáme níže uvedené kódy a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `inverse(matrix{{-1, 3}, {-2, 4}}),`
 b) `inverse(matrix{{4, 3}, {2, 1}}),`
 c) `(matrix{{-1, 3}, {-2, 4}})(matrix{{4, 3}, {2, 1}}),`
 d) `(matrix{{4, 3}, {2, 1}})(matrix{{-1, 3}, {-2, 4}}),`
 e) `det(matrix{{-1, 3}, {-2, 4}}),`
 f) `det(matrix{{4, 3}, {2, 1}}).`

Příklad 2. Vypočtěte derivace funkcí:

- a) $y = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$, b) $y = \ln(2x + 1)$, c) $y = x^4 \cos x$.

Řešení: Pro derivaci slouží příkaz `deriv(funkce, proměnná)`, který zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `deriv(x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x, x),`
 b) `deriv(ln(2x+1), x),`
 c) `deriv(x^4cos(x), x).`

Příklad 3. Integrujte:

- a) $\int (x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x) dx$, b) $\int \cos 2x dx$, c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

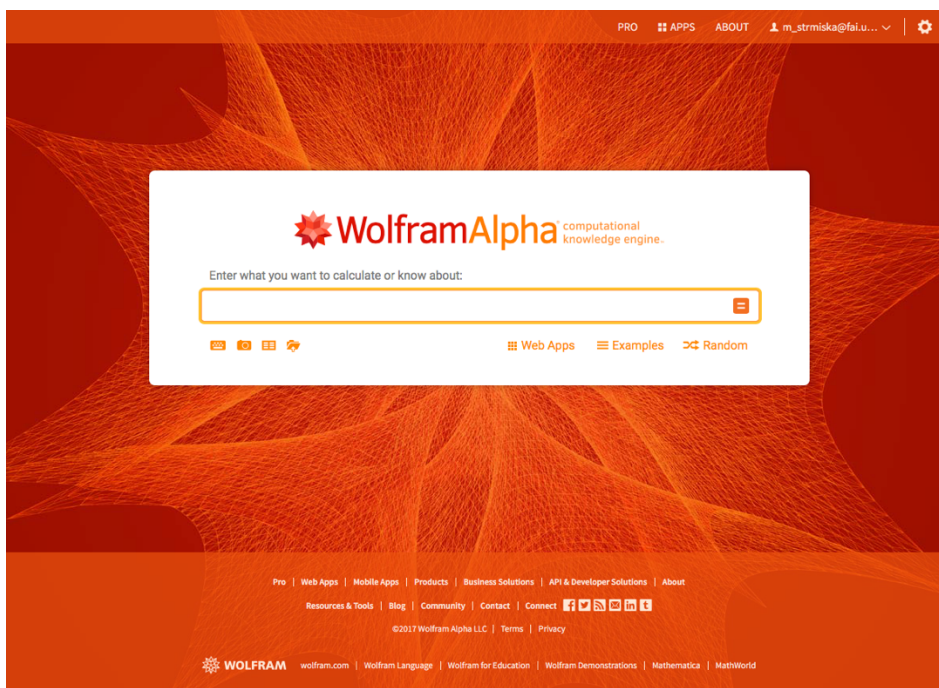
Řešení: Pro integraci slouží příkaz `integral(funkce, proměnná)`, který zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme klávesou Enter.

- a) `integral(x^5-10x^4+35x^3-50x^2+24x, x),`
 b) `integral(cos(2x), x),`
 c) `integral(ln(x)/x, x).`

Výše uvedené příklady jsou zpracovány v ukázkovém souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/1_Mathematics/4_vyssi_matematika.gcw`.

4.2 Wolfram|Alpha

Wolfram|Alpha je webová aplikace, která je k dispozici na adrese www.wolframalpha.com. Po otevření webové stránky se zobrazí rozhraní (Obr. 16). Příkaz zadáváme do bílého pole a spustíme jej klávesou Enter nebo kliknutím na oranžové rovná se (=), které se nachází ve vstupním poli vpravo. Jelikož se jedná o webovou aplikaci, tak jsou řešení doplněna o přímý odkaz, po jehož rozkliknutí se otevře daný příklad přímo ve webovém prohlížeči.



Obr. 16: Wolfram|Alpha

a) Algebraické výrazy

Příklad 1. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{8x-6}{x^3+27} \cdot \frac{x^2-3x+9}{9-12x}, \quad \text{b) } \frac{25 + \frac{1}{a^2} - \frac{10}{a}}{5 - \frac{1}{a}} \cdot a, \quad \text{c) } \frac{216 - k^3}{k^2 + 36 + 6k}, \quad \text{d) } \frac{\sin^2 x \cotg x}{\sin^2 x - 1}.$$

Řešení: Ke zjednodušení výrazu slouží příkaz `simplify`.

$$\text{a) } \text{simplify } ((8x-6)/(x^3+27)) * ((x^2-3x+9)/(9-12x)),$$

$$\text{b) } \text{simplify } ((25+1/(a^2)-10/a)/(5-1/a)) * a,$$

$$\text{c) } \text{simplify } (216-k^3)/(k^2+36+6k),$$

$$\text{d) } \text{simplify } ((\sin x)^2 \cot x)/((\sin x)^2-1).$$

Příklad 2. Rozložte na součin:

a) $a^2 + 2ab + b^2$, b) $x^4 - 15x^3 + 53x^2 - 135x + 396$, c) $x^3 + 3x^2y - xy^2 - 3y^3$.

Řešení: K rozložení výrazu na součin slouží příkaz `factor`.

a) `factor a^2+2ab+b^2`,

b) `factor x^4-x15x^3+53x^2-135x+396`,

c) `factor x^3+3x^2y-xy^2-3y^3`.

Příklad 3. Vynásobte:

a) $(m - n)(2m - 3)$, b) $(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$, c) $(a - b - c)(d - e - f)$.

Řešení: K roznásobení mnohočlenů slouží příkaz `expand`.

a) `expand (m-n) (2m-3)`,

b) `expand (x^2+1) (x^3+x^2+x+1)`,

c) `expand (a-b-c) (d-e-f)`.

Příklad 4. Doplňte na čtverec:

a) $x^2 - 3x$, b) $2x^2 + 7x - 1$, c) $x^2 + 10x + 28$.

Řešení: K doplnění na čtverec použijeme příkaz `complete the square`.

a) `complete the square x^2-3x`,

b) `complete the square 2x^2 +7x-1`,

c) `complete the square x^2 +10x+28`.

b) Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Příklad 1. Řešte rovnice v \mathbb{R} :

a) $4x - 16 = 9 - x$, b) $x^3 + 2x^2 - x = 2$, c) $\sin x + \cos x = 1$, d) $2^{3x-1} = 8^{2x+1}$.

Řešení: K vyřešení rovnice použijeme příkaz `solve`.

a) `solve 4x-16=9-x`,

b) `solve x^3+2x^2-x=2`,

c) `solve sinx+cosx=1`,

d) `solve 2^(3x-1)=8^(2x+1)`.

Příklad 2. Vyjádřete ze vzorce r :

a) $2q - 3r = \frac{q - 2}{2} + 1$, kde q je reálný parametr,

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, kde V je kladný reálný parametr.

Řešení: K vyjádření r ze vzorce použijeme příkaz `solve` s dodatkem `for` proměnná.

a) `solve 2q-3r=(q-2)/1 for r,`

b) `solve V=(4/3)pir^3 for r .`

Příklad 3. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 & \text{b) } a + b + c = 8 \\ & a - b - c = 4. \\ & x^2 + y^2 = 1, & a + c = 2 \end{array}$$

Řešení: K vyřešení soustavy rovnic jednoduše píšeme jednotlivé rovnice oddělené čárkou.

a) $(x-2)^2+(y-1)^2=4, x^2+y^2=1,$

b) $a+b+c=8, a-b-c=4, a+c=2.$

Příklad 4. Řešte nerovnice v \mathbb{R} :

a) $2x - 4 > 0,$ b) $\frac{2x + 1}{2x - 1} \leq 0,$ c) $x^2 - x > 0.$

Řešení: K vyřešení nerovnice použijeme příkaz `solve`.

a) `solve 2x-4>0,`

b) `solve (2x+1)/(2x-1) <= 0,`

c) `solve x^2-x>0.`

Příklad 5. Řešte soustavu nerovnic v \mathbb{R} :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x - 1 \leq x + 6 & \text{b) } 5x + 17 > 8x - 10 & \text{c) } 3x - 2 \leq 2x + 3 \\ & x + 2 > 3, & 3 - x \leq 5, & x \leq 5. \end{array}$$

Řešení: K vyřešení soustavy nerovnic použijeme příkaz `solve` a píšeme jednotlivé nerovnice oddělené čárkou.

a) `solve 2x-1<=x+6, x+2>3,`

b) `solve 5x+7>8x-10, 3-x<=5,`

c) `solve 3x-2<=2x+3, x<=5.`

c) Funkce a jejich vlastnosti**Příklad 1.** Vykreslete grafy funkcí:

$$\text{a) } y = x^2 - 4x + 2, \quad \text{b) } y = \sin 2x + 1, \quad \text{c) } y = \sqrt{9 - x^2}, \quad \text{d) } z = \frac{\ln y}{x}.$$

Řešení: K vykreslení grafu funkce použijeme funkci `plot`.

a) `plot y=x^2-4x+2,`

b) `plot y=sin2x+1,`

c) `plot y=sqrt(9-x^2),`

d) `plot z=(lny)/x.`

Příklad 2. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí:

a) $y = -x, \quad y = 2x, \quad y = x + 1,$

b) $y = x^2, \quad y = -x^2 + 2, \quad y = x^2 - 2x,$

c) $y = \sqrt{x - 1}, \quad y = -2^x + 4, \quad y = \log 4x,$

d) $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = \tan|4x| + 1, \quad y = 2 \sin 2x.$

Řešení: Několik grafů funkcí do jednoho společného grafu vykreslíme pomocí funkce `plot` a jednotlivé rovnice funkcí píšeme za sebou.

a) `plot y=-x, y=2x, y=x+1,`

b) `plot y=x^2, y=-x^2+2, y=x^2-2x,`

c) `plot y=sqrt(x-1), y=-2^x+4, y=log4x,`

d) `plot y=-cos(2x+pi/3), y=tan(abs(4x))+1, y=2sin2x.`

Příklad 3. Určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ funkcí:

$$\text{a) } y = \sqrt{7x - 11}, \quad \text{b) } y = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad \text{c) } y = \sqrt{\frac{x + 4}{3 - x}} \quad \text{d) } y = \frac{7}{x^2 + 2x - 24}.$$

Řešení: Definiční obor a obor hodnot funkce zjistíme pomocí příkazu `domain and range of`, kde `domain` značí definiční obor a `range` obor hodnot.

a) `domain and range of y=sqrt(7x-11),`

b) `domain and range of y=(x^2+x)/x,`

c) `domain and range of y=sqrt((x+4)/(3-x)),`

d) `domain and range of y=7/(x^2+2x-24).`

Příklad 4. Určete paritu funkcí:

$$\text{a) } y = x^2 - 8, \quad \text{b) } y = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{c) } y = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{d) } y = \frac{|x|+x}{2x^2}.$$

Řešení: Paritu funkce zjistíme pomocí příkazu `parity`. Aplikace vrátí *even* pokud je funkce sudá, *odd* pokud je lichá a *neither even nor odd* pokud nemá ani jednu z vlastností.

- a) `parity y=x^2-8,`
 b) `parity y=(1+x)/(1-x),`
 c) `parity y=-sinx/cosx,`
 d) `parity y=(abs(x)+x)/(2x^2).`

Příklad 5. Rozhodněte, zda je funkce periodická a případně určete periodu:

$$\text{a) } y = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad \text{b) } y = \sin(\tan 2x), \quad \text{c) } y = x^3 + 3, \quad \text{d) } y = \sin 4x \cos^3 x.$$

Řešení: Tento příklad řešíme příkazem `period`.

- a) `period y=2sin(x/2),`
 b) `period y=sin(tan2x),`
 c) `period y=x^3 +3,`
 d) `period y=sin4x(cos(x))^3.`

d) Využití aplikace ve vyšší matematice

V aplikaci lze řešit také příklady z oblasti algebry, diferenciálního a integrálního počtu, diferenciálních rovnic, nekonečných řad atd. S některým z těchto témat se může setkat i žák střední školy v matematickém semináři. Pro zajímavost jsou uvedeny některé vybrané příklady.

Příklad 1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

$$\text{a) } A^{-1}, \quad \text{b) } B^{-1}, \quad \text{c) } A \cdot B, \quad \text{d) } B \cdot A, \quad \text{e) } |A|, \quad \text{f) } |B|.$$

Řešení: Inverzní matici vypočteme příkazem `inverse` a determinant příkazem `det`.

- a) `inverse {{1,2},{3,4}},`
 b) `inverse {{1,0},{1,1}},`
 c) `{{1,2},{3,4}} {{1,0},{1,1}},`
 d) `{{1,0},{1,1}} {{1,2},{3,4}},`
 e) `det {{1,2},{3,4}},`
 f) `det {{1,0},{1,1}}.`

Příklad 2. Vypočtěte derivace funkcí:

$$\text{a) } y = 7x^7 - 5x^5 + 3x^3 - x, \quad \text{b) } y = \sqrt{4x^2 - 1}, \quad \text{c) } y = \ln x \cos x.$$

Řešení: Pro derivaci použijeme příkaz `d (funkce) /dx`.

$$\text{a) } d(y=7x^7-5x^5+3x^3-x) /dx,$$

$$\text{b) } d(y=\text{sqrt}(4x^2 - 1)) /dx,$$

$$\text{c) } d(y=\ln x \cos x) /dx.$$

Příklad 3. Integrujte:

$$\text{a) } \int (25x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x + 1) dx, \quad \text{b) } \int \ln x dx, \quad \text{c) } \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Řešení: Pro integraci funkce slouží příkaz `int (funkce) d (proměnná)`.

$$\text{a) } \text{int} (25x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x + 1) dx,$$

$$\text{b) } \text{int} (\ln x) dx,$$

$$\text{c) } \text{int} (\sin x / \cos x) dx.$$

Příklad 4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$\text{a) } y'' + 2y' = 0, \quad \text{b) } xy' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad \text{c) } (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

Řešení:

$$\text{a) } y'' + 2y' = 0,$$

$$\text{b) } xy' + 2xy = xe^{-x^2},$$

$$\text{c) } (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$$

Příklad 5. Určete součty číselných řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 9 \cdot 3^{n-1}}{(-1) \cdot 4^n}.$$

Řešení:

$$\text{a) } \text{sum } 7 / ((n+1)(n+2)), \text{ n=1 to infinity,}$$

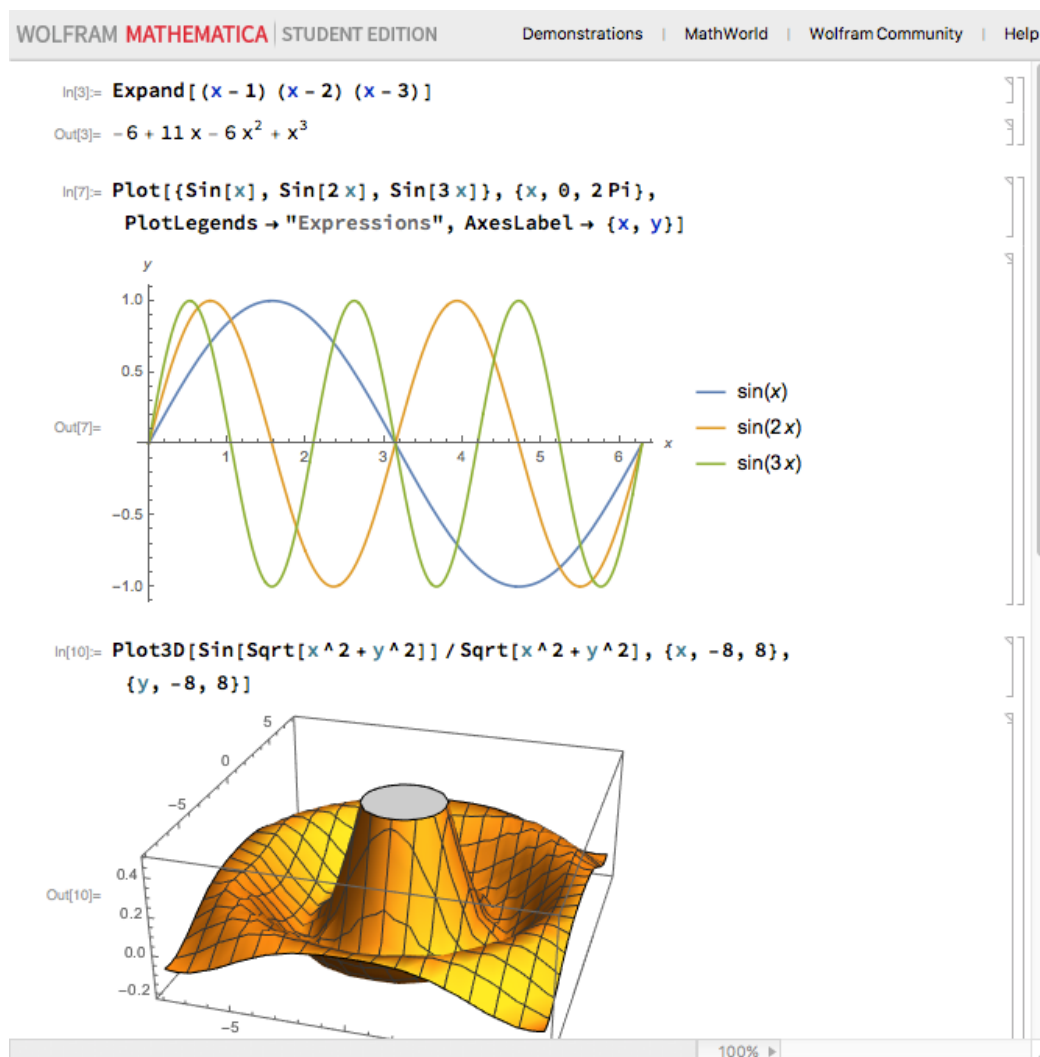
$$\text{b) } \text{sum } 1 / (n^2 + 3n), \text{ n=1 to infinity,}$$

$$\text{c) } \text{sum } ((2^n + 5^n) / (10^n)) \text{ n=1 to infinity,}$$

$$\text{d) } \text{sum } ((2^{(n+1)} - 9 * (3^{(n-1)})) / ((-1) * 4^n)) \text{ n=1 to infinity.}$$

4.3 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica je licencovaná desktopová aplikace. Po jejím otevření se nám zobrazí notebook, ve kterém lze provádět výpočty. Jednotlivé příkazy píšeme přímo do notebooku a potvrdíme je klávesou Enter a Mathematica je vyhodnotí. Na obrázku (Obr. 17) lze vidět práci v aplikaci.



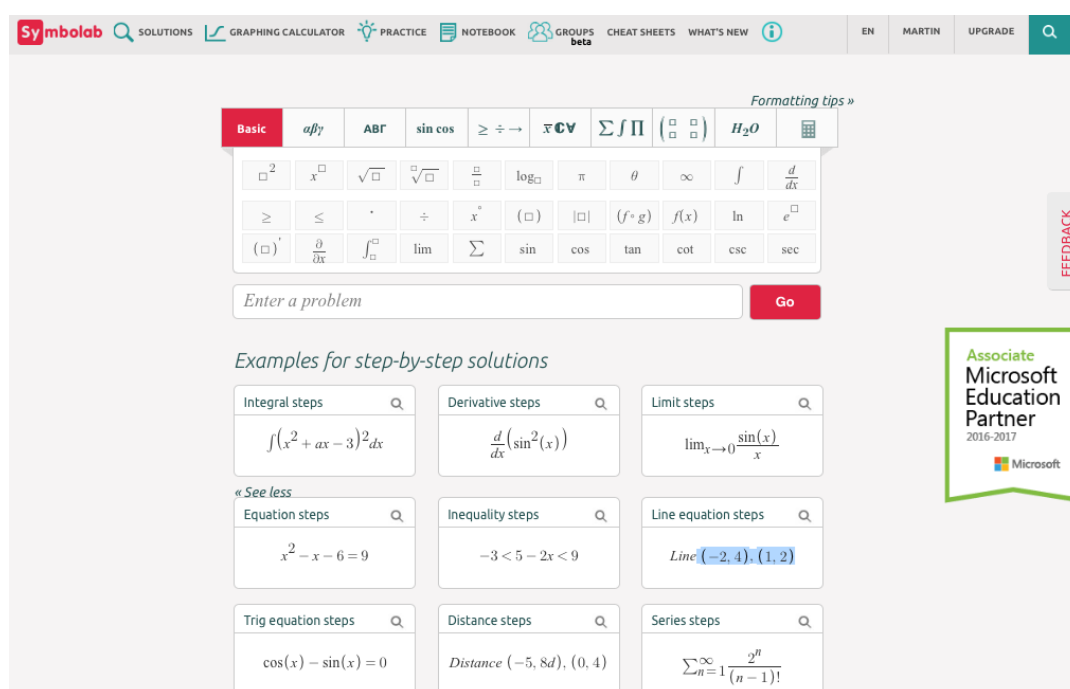
Obr. 17: Wolfram Mathematica

Vzhledem k tomu, že Mathematica umožňuje do notebooku přidávat i komentáře, tak jsou vybrané ukázkové příklady řešeny přímo v notebooku.

Notebook je k dispozici v datové příloze a cesta k němu je `prilohy/aplikace/3_Mathematica/ukazkove_priklady.nb`. Bez aplikace Mathematica je možné se na příklady podívat v PDF souboru, který je k dispozici taktéž v datové příloze pod cestou `prilohy/aplikace/3_Mathematica/ukazkove_priklady.pdf`.

4.4 Symbolab

Symbolab je webová aplikace, která je k dispozici na adrese <http://www.symbolab.com>. Po otevření webové stránky se zobrazí rozhraní (Obr. 18). Uprostřed stránky se nachází pole s textem „Enter a problem“, do kterého se zadávají příkazy. Jak již bylo zmíněno v teoretické části práce, aplikace ukazuje řešení tzv. krok po kroku – to lze vidět na řešených příkladech. Po kliknutí na řešení příkladu se daný příklad otevře ve webovém prohlížeči. Řešení příkladů je zapsáno LaTeXovými příkazy, k zadání problému lze však použít i grafická klávesnice, která jde taktéž vidět na obrázku.



Obr. 18: Symbolab

a) Algebraické výrazy

Příklad 1. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2-2x-3}, \quad \text{b) } \frac{x^3+512}{x^2-8x+64}, \quad \text{c) } \frac{5a^3b-3ab^2}{3b^2-5a^2b}, \quad \text{d) } \left(1-\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}.$$

Řešení: Ke zjednodušení výrazu slouží příkaz `simplify`.

a) `simplify \frac{x+1}{x^2-2x-3},`

b) `simplify \frac{x^3+512}{x^2-8x+64},`

c) `simplify \frac{5a^3b-3ab^2}{3b^2-5a^2b},`

d) `simplify \left(1-\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}.`

Příklad 2. Rozložte na součin:

$$\text{a) } a^3 - a^2 - 36a + 36, \quad \text{b) } x^4 - 5x^2 + 4, \quad \text{c) } x^3 - x^2y - 2y + 2x.$$

Řešení: K rozložení výrazu na součin slouží příkaz `factor`.

$$\text{a) } \text{factor } a^3 - a^2 - 36a + 36,$$

$$\text{b) } \text{factor } x^4 - 5x^2 + 4,$$

$$\text{c) } \text{factor } x^3 - x^2y - 2y + 2x.$$

Příklad 3. Vynásobte:

$$\text{a) } (a + b)(a - 4)(b + 1), \quad \text{b) } (c - d)(c^2 - d)(c - d^2), \quad \text{c) } (4t - s)(s^3 + 2t).$$

Řešení: K roznásobení mnohočlenů slouží příkaz `expand`.

$$\text{a) } \text{expand } \left((a+b) \right) \left((a-4) \right) \left((b+1) \right),$$

$$\text{b) } \text{expand } \left((c-d) \right) \left((c^2-d) \right) \left((c-d^2) \right),$$

$$\text{c) } \text{expand } \left((4t-s) \right) \left((s^3+2t) \right).$$

b) Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Příklad 1. Řešte rovnice v \mathbb{R} :

$$\text{a) } x^2 - x - 6 = 0, \quad \text{b) } \sqrt{x-1} - x = -7, \quad \text{c) } |3x + 1| = 4, \quad \text{d) } 3^{3x} = 9^{x+5}.$$

Řešení: Do pole pro příkaz zapisujeme pouze rovnici, kterou chceme vyřešit.

$$\text{a) } x^2 - x - 6 = 0,$$

$$\text{b) } \sqrt{x-1} - x = -7,$$

$$\text{c) } |3x+1| = 4,$$

$$\text{d) } 3^x = 9^{x+5}.$$

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + y = 5 & \text{b) } 5a + 3b + 2c = 0 \\ x^2 + y^2 = 7, & a + b + c = 25. \\ & b - c = 6 \end{array}$$

Řešení: K vyřešení soustavy rovnic jednoduše píšeme jednotlivé rovnice oddělené čárkou.

$$\text{a) } x^2 + y = 5, \quad x^2 + y^2 = 7,$$

$$\text{b) } 5a + 3b + 2c = 0, \quad a + b + c = 25, \quad b - c = 6.$$

Příklad 3. Řešte nerovnice v \mathbb{R} :

$$\text{a) } 2x^2 - x > 0, \quad \text{b) } (x + 3)^2 \leq 10x + 6, \quad \text{c) } \left| \frac{3x + 2}{x - 1} \right| > 2.$$

Řešení: Do pole pro příkaz zapisujeme pouze rovnici, kterou chceme vyřešit.

$$\text{a) } 2x^2 - x > 0,$$

$$\text{b) } \left((x+3) \right)^2 \leq 10x+6,$$

$$\text{c) } \left| \frac{3x+2}{x-1} \right| > 2.$$

Příklad 4. Řešte soustavu nerovnic v \mathbb{R} :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x - 1 \leq x + 7 & \text{b) } 4x + 16 > 7x - 9 & \text{c) } 3x - 1 \leq 2x + 7 \\ & x + 2 > 3, & 3 - x \leq 5, & x \geq 7. \end{array}$$

Řešení: K vyřešení soustavy nerovnic použijeme příkaz `solve` a píšeme jednotlivé nerovnice oddělené čárkou.

$$\text{a) } 2x-1 \leq x+7, \quad x+2 > 3,$$

$$\text{b) } 4x+16 > 7x-9, \quad 3-x \leq 5,$$

$$\text{c) } 3x-1 \leq 2x+7, \quad x \geq 7.$$

c) Funkce a jejich vlastnosti

Symbolab nabízí pokročilou analýzu funkcí jedné proměnné. V přehledném výpisu zobrazí definiční obor, obor hodnot, průsečíky s osami a další důležité vlastnosti (např. u kvadratické funkce určí souřadnice vrcholu, u goniometrické funkce určí periodu, atd.).

Příklad 1. Vykreslete grafy funkcí a určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$:

$$\text{a) } y = |2x - 1| + 4, \quad \text{b) } y = x^2 - 3x - 4, \quad \text{c) } y = \log_{0,5} 2x, \quad \text{d) } y = -4 \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Řešení: K vyšetření průběhu funkce zapíšeme její funkční předpis do pole pro příkaz.

$$\text{a) } y = \left| 2x - 1 \right| + 4,$$

$$\text{b) } y = x^2 - 3x - 4,$$

$$\text{c) } y = \log_{0,5} (2x),$$

$$\text{d) } y = -4 \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|.$$

Pozn.: Ve výpisu je užita anglická terminologie. Periodicity označuje periodu, domain definiční obor, range obor hodnot, axis interception points průsečíky s osami, asymptotes asymptoty a extreme points extrémny funkce.

Příklad 2. Určete paritu funkcí:

$$\text{a) } y = \sin x, \quad \text{b) } y = \cos x, \quad \text{c) } y = \frac{1}{x}, \quad \text{d) } y = x^3 + x^2.$$

Řešení: Paritu funkce zjistíme pomocí příkazu `parity`. Aplikace vrátí *even* pokud je funkce sudá, *odd* pokud je lichá a *neither even nor odd* pokud nemá ani jednu z vlastností.

a) `parity y=\sin \left(x\right),`

b) `parity y=\cos \left(x\right),`

c) `parity y=\frac{1}{x},`

d) `parity y=x^3+x^2.`

d) Výpočty v trojúhelníku

Aplikace bohužel neumožňuje dopočtení všech neznámých veličin zároveň a je třeba je vypočítat postupně, proto je výpočet ukázán jen na jednom příkladu.

Příklad 1. Je dáno $b = 20 \text{ cm}$, $\alpha = 10^\circ$ a $\beta = 30^\circ$. Dopačtěte a , c a γ .

Řešení:

`a: triangle, find Side a, given \alpha=10^{\circ}, b=20, \beta=30^{\circ},`

`\gamma: triangle, find Angle \gamma, given \alpha=10^{\circ}, \beta=30^{\circ},`

`c: triangle, find Side c, given \gamma=140^{\circ}, a=6.946, b=20.`

e) Vektorová algebra

Příklad 1. Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (2,6)$, $\mathbf{b} = (-4,5)$. Vypočtěte:

a) $|\mathbf{a}|$, b) $|\mathbf{b}|$, c) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, d) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, f) úhel vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Řešení: Operace s vektory se zadávají stejně jako s normálními čísly, ale jednotlivé vektory se zadávají příkazem `\begin{pmatrix} číslo_1 & číslo_2 \end{pmatrix}`.

a) `\left| \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \right|,`

b) `\left| \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \right|,`

c) `\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix},`

d) `\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix},`

e) `\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix},`

f) `angle \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix}.`

f) Využití aplikace ve vyšší matematice

Opět budou ukázány příklady, se kterými se může setkat žák v matematickém semináři.

Příklad 1. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vypočtěte:

a) A^{-1} , b) $A \cdot B$, c) $4A$, d) $|A|$.

Řešení: Determinant příkazem `det`.

a) `\begin{pmatrix} 4&3 \\ 7&1 \end{pmatrix}^{-1}`,

b) `\begin{pmatrix} 4&3 \\ 7&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}`,

c) `4 \begin{pmatrix} 4&3 \\ 7&1 \end{pmatrix}`,

d) `det \begin{pmatrix} 4&3 \\ 7&1 \end{pmatrix}`.

Příklad 2. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$, b) $y = \ln \sqrt{x-4}$, c) $y = \sqrt{x} \sin x$.

Řešení: Pro derivaci použijeme příkaz `\frac{d}{dx} \left(funkce \right)`.

a) `\frac{d}{dx} \left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \right)`,

b) `\frac{d}{dx} \left(\ln \sqrt{x-4} \right)`,

c) `\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \sin x \right)`.

Příklad 3. Integrujte:

a) $\int (x^3 + x^2 + x + 1) dx$, b) $\int \frac{1}{x-1} dx$, c) $\int \frac{1}{\tan x} dx$.

Řešení: Pro integraci funkce slouží příkaz `integrate (funkce) d (proměnná)`.

a) `integrate x^3+x^2+x+1 dx`,

b) `integrate \frac{1}{x-1} dx`,

c) `integrate \frac{1}{\tan x} dx`.

Příklad 4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

a) $y'' + 2y' = \cos x$, b) $y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2$, c) $y' + y = y^2e^x$.

Řešení:

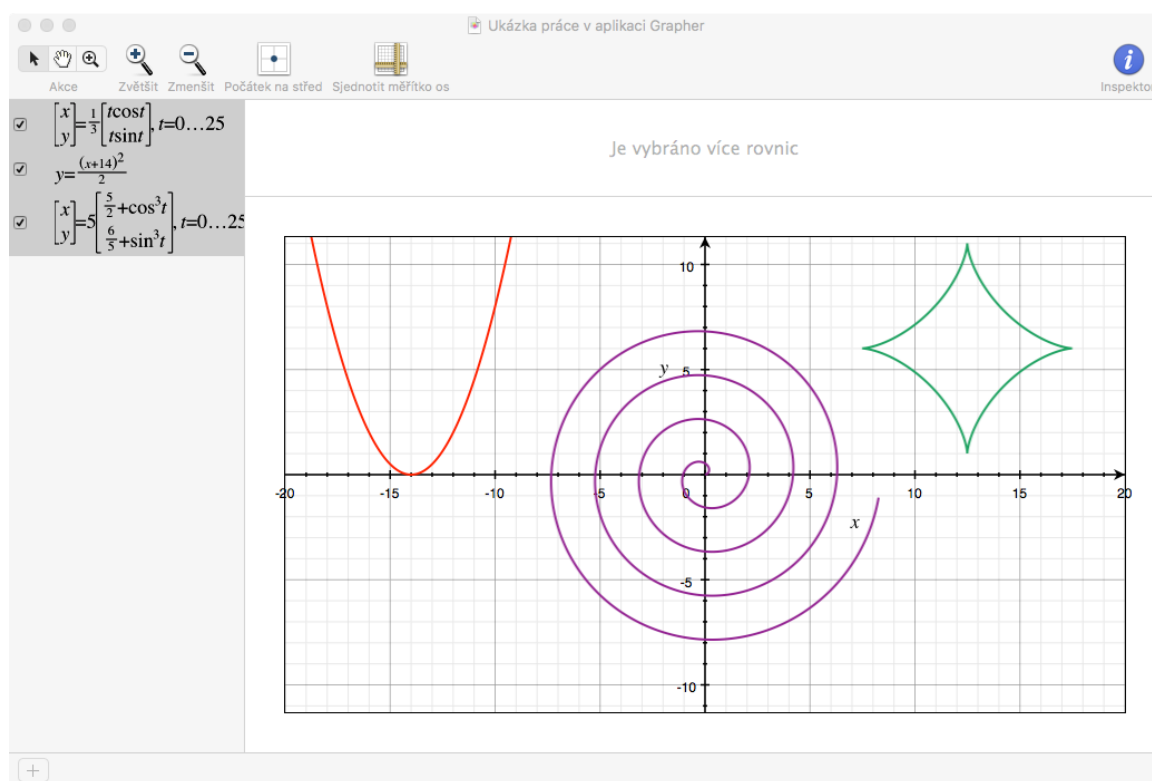
a) `y''+2y'=\cos x`,

b) `y'+\frac{4}{x}y=x^3y^2`,

c) `y'+y=y^2e^x`.

4.5 Apple Grapher

Apple Grapher slouží převážně k vykreslení grafů funkcí v \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 . Grafy funkcí vypadají profesionálně a lze je exportovat jako obrázek či animaci. Grapher je k dispozici pouze pro počítače společnosti Apple. Aplikaci spustíme tak, že v Docku klikneme na ikonu Launchpadu, vybereme složku Other a zvolíme Grapher. Vykreslení grafu funkce je jednoduché – po spuštění aplikace se zobrazí dialogové okno, ve kterém vybereme typ grafu, který chceme vytvořit (dvojměrný či trojměrný). Po této volbě uvidíme pracovní prostředí aplikace (Obr. 19). Klikneme na tlačítko + v levém dolním rohu okna Grapheru a pak vybereme možnost *Nová rovnice*, zadáme rovnici a potvrdíme klávesou Enter (rovnice je možné zadat několik). Graf funkce se vykreslí na plátně, jak je demonstrováno na obrázku.



Obr. 19: Apple Grapher

Ukázkové příklady jsou zpracovány v datové příloze a cesta k nim je `prilohy/aplikace/5_Grapher`, u každého příkladu je uvedena cesta přímo. Bez Grapheru je možné se na příklady podívat v souhrnném PDF souboru, který je k dispozici též v datové příloze pod cestou `prilohy/aplikace/5_Grapher/ukazkove_prikklady.pdf`.

Příklad 1. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí:

$$\text{a) } y = -(x + 2), \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{1}{x - 4}, \quad y = 3x^3,$$

$$\text{b) } y = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad y = e^x, \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{e}\right)^x,$$

$$\text{c) } y = \log(x + 1), \quad y = \ln(4 - x), \quad y = 0,5 \ln(x + 3), \quad y = (\log x - 1)^{-1},$$

$$\text{d) } y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x,$$

$$\text{e) } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1, \quad \begin{array}{l} x = 8 + 3 \cos t \\ y = 8 + 3 \sin t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}, \quad \begin{array}{l} x = 12 + 4 \cos t \\ y = -4 + 2 \sin t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}, \quad \begin{array}{l} x = t \cos 4t - 10 \\ y = t \sin 4t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}.$$

Řešení: Grafy vykreslíme podle výše uvedeného návodu (volíme dvojrozměrný graf).

a) `prilohy/aplikace/5_Grapher/1a.gcx`,

b) `prilohy/aplikace/5_Grapher/1b.gcx`,

c) `prilohy/aplikace/5_Grapher/1c.gcx`,

d) `prilohy/aplikace/5_Grapher/1d.gcx`,

e) `prilohy/aplikace/5_Grapher/1e.gcx`.

Příklad 2. V \mathbb{R}^2 vykreslete grafy funkcí:

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad \text{b) } z = \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}}, \quad \text{c) } z = -\frac{3}{4} \ln\left(\frac{1}{x^2 y^2}\right).$$

Řešení: Grafy vykreslíme podle výše uvedeného návodu (volíme trojrozměrný graf).

a) `prilohy/aplikace/5_Grapher/2a.gcx`,

b) `prilohy/aplikace/5_Grapher/2b.gcx`,

c) `prilohy/aplikace/5_Grapher/2c.gcx`.

Příklad 3. V aplikaci Apple Grapher vytvořte animaci vzniku křivek:

$$\text{a) } \begin{array}{l} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}, \quad \text{b) } \begin{array}{l} x = t \cos 4t \\ y = t \sin 4t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}.$$

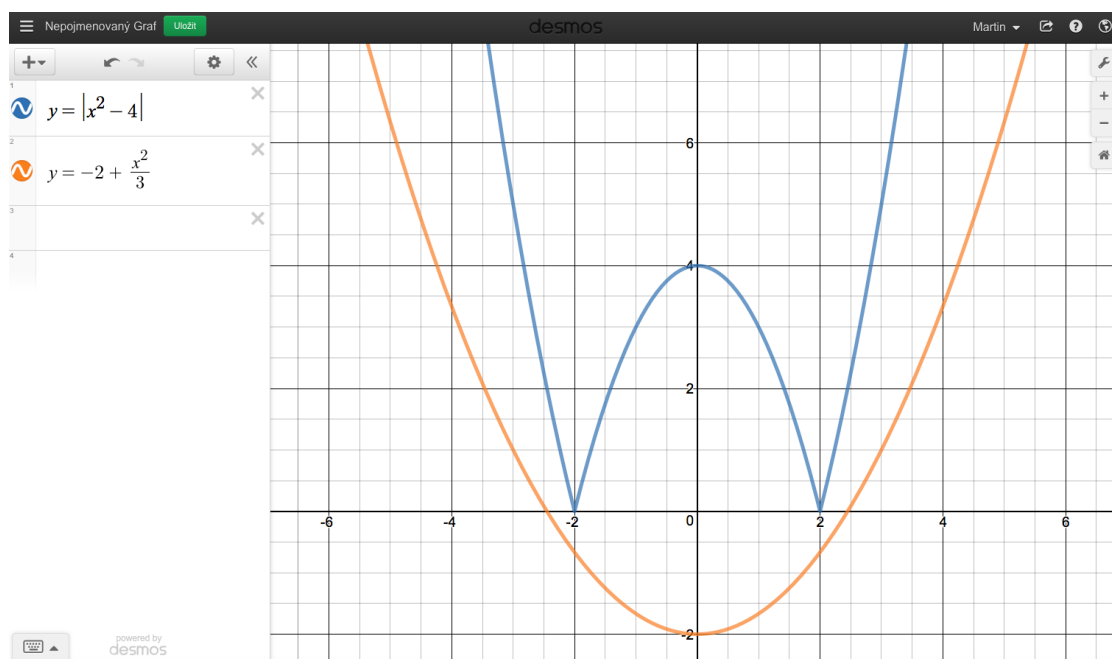
Řešení: Animaci vytvoříme podobně jako graf funkce, kdy definujeme parametr (např. $T = 0$), vložíme danou rovnici se substitucí $t = T$, vybereme volbu *Rovnice > Animovat parametr*. Animaci spustíme kliknutím na tlačítko *Přehrát*, které se zobrazí vedle parametru. Bez Grapheru se lze na animace podívat v datové příloze.

a) `prilohy/aplikace/5_Grapher/3a.gcx`, `prilohy/aplikace/5_Grapher/3a.m4v`,

b) `prilohy/aplikace/5_Grapher/3b.gcx`, `prilohy/aplikace/5_Grapher/3b.m4v`.

4.6 Desmos

Desmos Calculator je webová aplikace, která je k dispozici na adrese <http://www.desmos.com/calculator>. Aplikace je taktéž k dispozici pro mobilní telefony s operačním systémem iOS nebo Android. Aplikace slouží převážně k vykreslení grafů funkcí jedné proměnné. Na obrázku (Obr. 20) je ukázáno rozhraní webové aplikace. Vlevo nacházíme panel, kde pomocí tlačítka + přidáváme rovnice funkcí. V pravé části okna se nachází plátno, ve kterém jsou vykreslovány grafy zadaných funkcí.

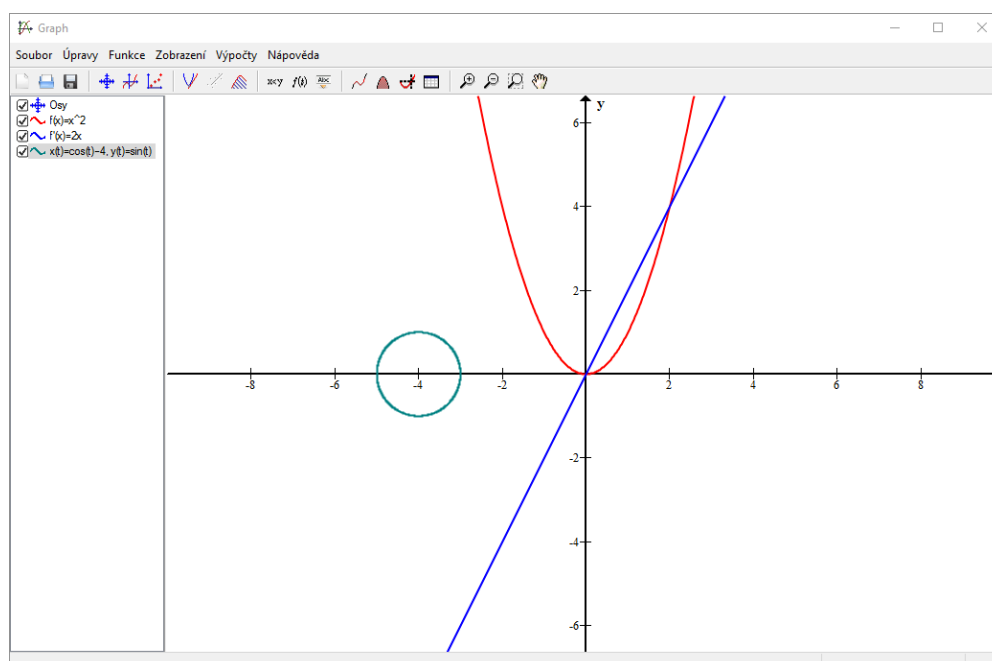


Obr. 20: Desmos Calculator

Desmos Calculator vzhledem k intuitivnímu ovládání nachází uplatnění nejen na středních školách, ale také na univerzitách. Aplikaci můžeme využít při výuce funkcí, protože v ní lze profesionálně demonstrovat transformace a posunutí funkce ve směru os. Ovládání aplikace, ukázka práce v aplikaci a její zhodnocení je k dispozici ve videu, které se nachází v datové příloze a cesta k němu je `přílohy/aplikace/6_Desmos/desmos.m4v`.

4.7 Graph

Graph je desktopová aplikace, která se specializuje na vykreslení a analýzu grafů funkcí jedné proměnné. Po jejím otevření se nám zobrazí okno, ve kterém nacházíme plochu pro vykreslení grafů funkcí, lištu s nástroji pro práci s grafem, a panel, do kterého se zapisují rovnice. Z obrázku (Obr. 21) lze vidět, že je aplikace minimalistická – tedy pro vykreslení grafu funkce je k dispozici nejvíce místa. Vykreslení grafu funkce je jednoduché – v menu klikneme na *Funkce > Vložit funkci*. Otevře se dialogové okno, ve kterém vybereme typ funkce (běžná, parametrická nebo polární) a do pole *Rovnice funkce* vepíšeme funkční předpis a klikneme na tlačítko *OK*.



Obr. 21: Graph

V příkladech jsou demonstrovány základní funkce aplikace, mezi které patří: vykreslení grafů funkcí, vložení tečny a kolmice k funkci v daném bodě a derivace funkcí. Vybrané ukázkové příklady jsou zpracovány v datové příloze a cesta k nim je `přílohy/aplikace/7_Graph`, u každého příkladu je uvedena cesta přímo. Bez aplikace je možné se na příklady podívat v souhrnném PDF souboru, který je k dispozici též v datové příloze pod cestou `přílohy/aplikace/7_Graph/ukazkove_priklady.pdf`.

Příklad 1. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí:

$$\text{a) } y = x + 4, \quad y = 2x^3, \quad y = \frac{3}{x+3}, \quad y = \frac{x^3}{1+x^2},$$

$$\text{b) } y = 2^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = \pi^x, \quad y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x,$$

$$\text{c) } y = \log_8 2x, \quad y = 3\cos 2x, \quad y = \tan(x+3), \quad y = \ln x - 1,$$

$$\text{d) } \begin{array}{l} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}, \quad \begin{array}{l} x = t \cos 8t \\ y = t \sin 8t \\ \text{kde } t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array}, \quad \begin{array}{l} x = 9\cos^3 t \\ y = 9\sin^3 t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}.$$

Řešení: Grafy vykreslíme podle výše uvedeného návodu.

a) `prilohy/aplikace/7_Graph/1a.gcx`,

b) `prilohy/aplikace/7_Graph/1b.gcx`,

c) `prilohy/aplikace/7_Graph/1c.gcx`,

d) `prilohy/aplikace/7_Graph/1d.gcx`.

Příklad 2. Vykreslete grafy funkcí a také tečny a kolmice k funkcím pro $x = 1$.

$$\text{a) } y = x^2, \quad \text{b) } y = \sin x \cos x, \quad \text{c) } \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ \text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}.$$

Řešení: Tečnu a kolmici vložíme tak, že vybereme rovnici v levém pruhu, klikneme na ni pravým tlačítkem a vybereme možnost *Vložit tečnu/kolmici*. Otevře se dialogové okno, ve kterém vybereme tečnu nebo kolmici, zadáme bod x a klikneme na tlačítko *OK*.

a) `prilohy/aplikace/7_Graph/2a.gcx`,

b) `prilohy/aplikace/7_Graph/2b.gcx`,

c) `prilohy/aplikace/7_Graph/2c.gcx`.

Příklad 3. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí a jejich derivací.

$$\text{a) } y = (x+1)^2, \quad \text{b) } y = x \ln x, \quad \text{c) } \tan(\ln x).$$

Řešení: Derivaci vytvoříme tak, že vybereme rovnici v levém pruhu, klikneme na ni pravým tlačítkem a vybereme možnost *vložit $f'(x)$* . Otevře se dialogové okno, které pouze potvrdíme tlačítkem *OK*.

a) `prilohy/aplikace/7_Graph/3a.gcx`,

b) `prilohy/aplikace/7_Graph/3b.gcx`,

c) `prilohy/aplikace/7_Graph/3c.gcx`.

4.8 Funkce

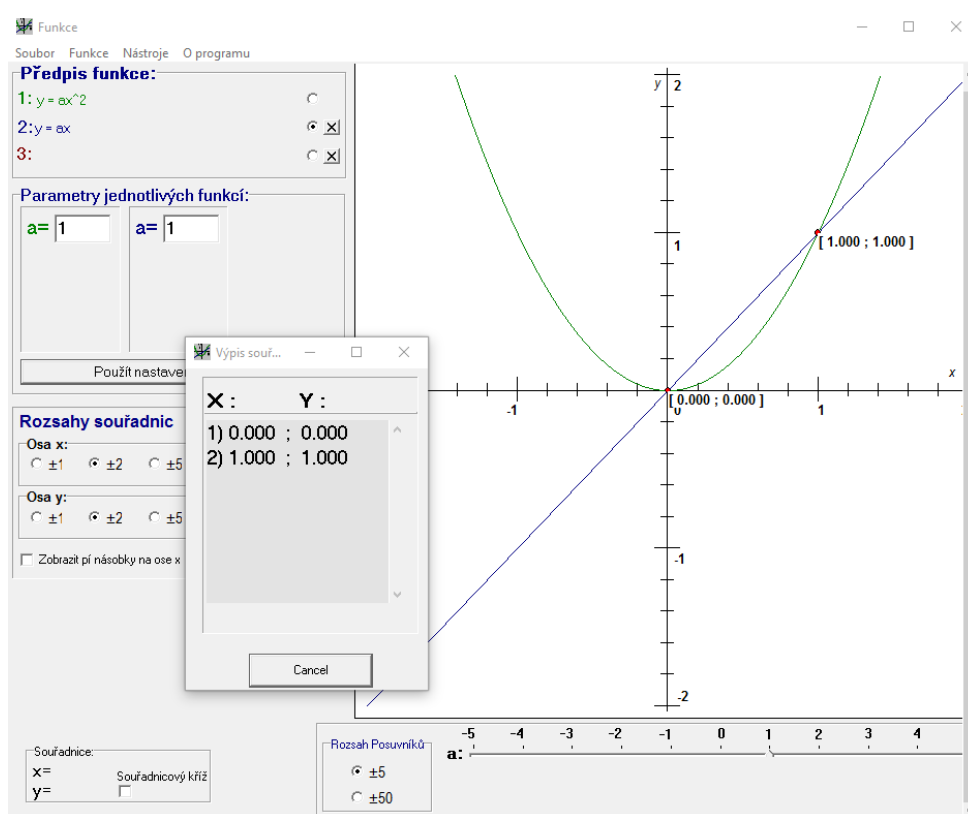
Funkce je jednoduchá aplikace pro vykreslení grafů funkcí jedné proměnné. Výhodou je, že aplikace obsahuje předdefinované šablony funkcí. Na obrázku (Obr. 22) lze vidět pracovní prostředí. Vykreslení grafu funkce můžeme provést dvěma způsoby:

Zvolení dynamického grafu funkce - provedeme tak, že v menu klikneme na *Funkce*, vybereme jaký typ funkce potřebujeme (konstantní, lineární, kvadratické, racionální, goniometrické, exponenciální a logaritmické) a klikneme na obecný funkční předpis. Poté můžeme pohybovat posuvníky (tím se budou měnit konstanty v obecném předpisu funkce) a graf se začne měnit (posunovat ve směru os, transformovat).

Zvolení statického grafu funkce - provedeme tak, že v menu klikneme na *Funkce*, zvolíme volbu *Uživatелеm zadaná*, do vstupního pole napíšeme vlastní předpis funkce a klikneme na tlačítko *Použít vlastní předpis funkce*.

Pozn.: Aplikace vykreslí pouze funkce zadané explicitně.

Aplikace umí nalézt průsečíky grafů funkcí – to provedeme tak, že v menu zvolíme *Nástroje* a vybereme volbu *Vyhledat průsečíky*.



Obr. 22: Funkce

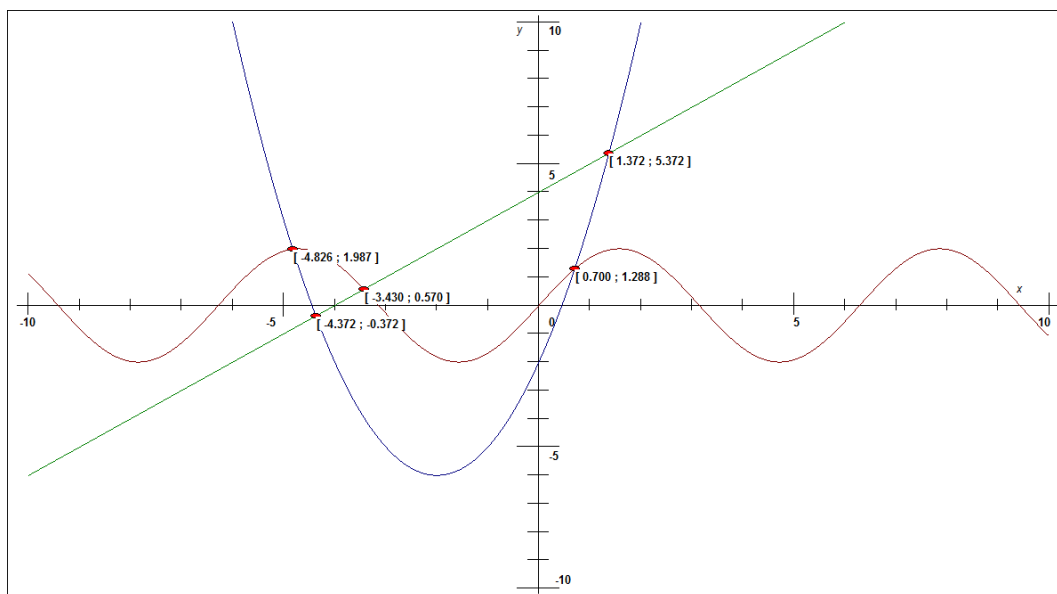
Příklad 1. Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí a zobrazte průsečíky grafů:

a) $y = x + 4$, $y = x^2 + 4x - 2$, $y = 2 \sin x$,

b) $y = 10 - x^2$, $y = \frac{x^2 + 1}{3 - 2x^2}$, $y = -\sqrt{36 - x^2}$.

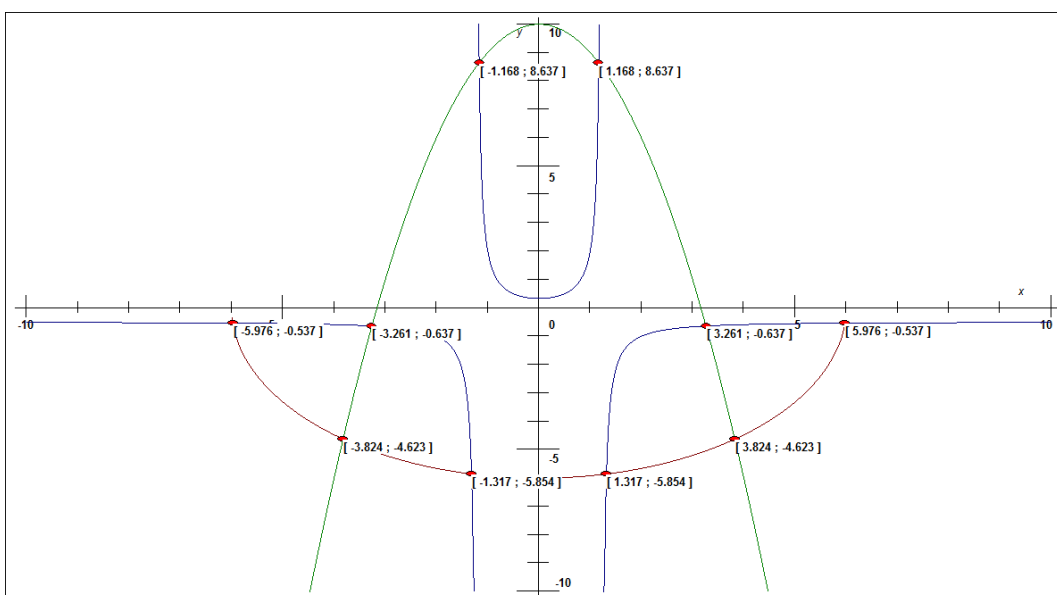
Řešení: Grafy vykreslíme podle výše uvedeného návodu.

a) `prilohy/aplikace/8_Funkce/1a.gcx`,



Obr. 23: Řešení bodu a)

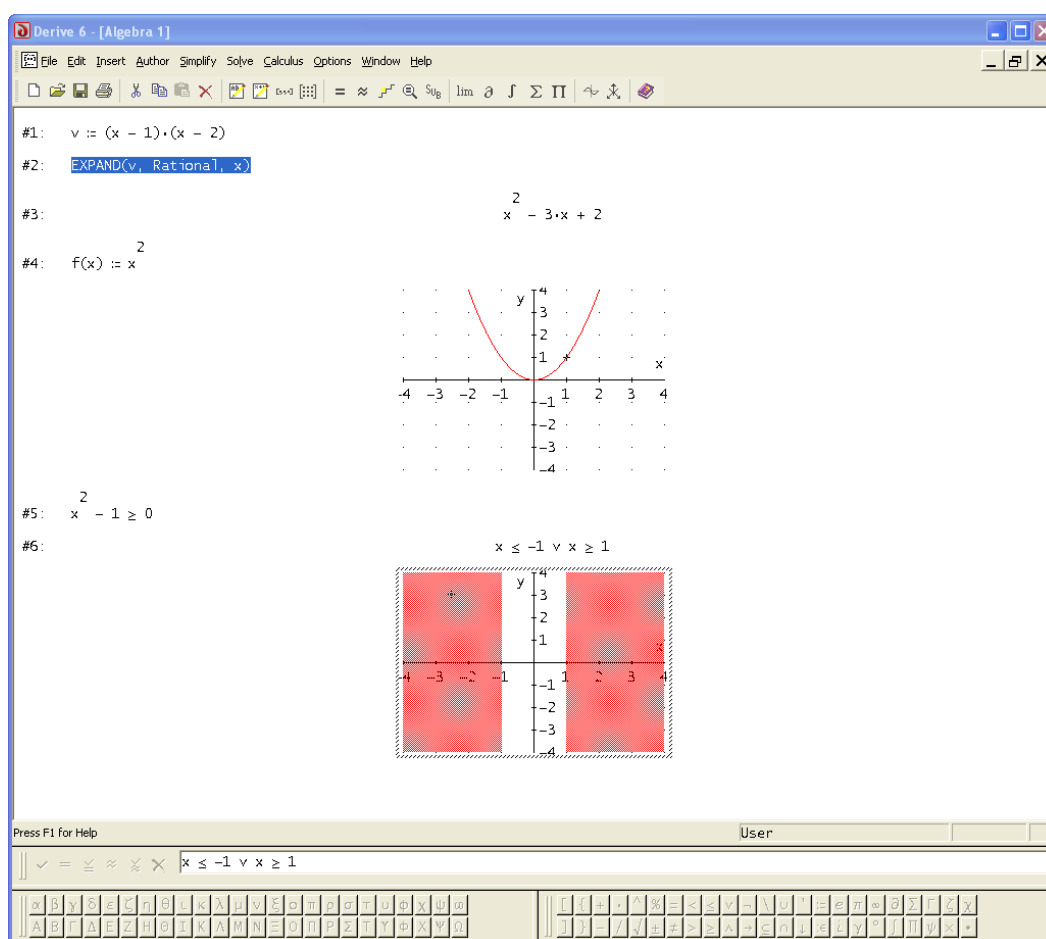
b) `prilohy/aplikace/8_Funkce/1b.gcx`.



Obr. 24: Řešení bodu b)

4.9 Derive 6.1

Derive je licencovaná desktopová aplikace. Po jejím otevření se nám zobrazí grafické rozhraní, které je tvořeno pracovní plochou, ve které lze provádět výpočty, a pruhem s matematickou klávesnicí, ve kterém se zadávají příkazy. Jednotlivé příkazy píšeme do bílého řádku ve spodní části okna a potvrdíme je klávesou Enter. Na obrázku (Obr. 25) lze vidět pracovní prostředí s několika vybranými příklady.



Obr. 25: Derive 6.1

Vzhledem k tomu, že aplikace neumožňuje vložení komentářů do výpočtů, je podkapitola rozdělena na sekce, které jsou komentovány jednotlivě. V každé sekci jsou uvedeny vybrané ukázkové příklady, které jsou zpracovány v datové příloze a cesta k nim je `přílohy/aplikace/9_Derive`, u každého příkladu je uvedena cesta přímo. Bez aplikace je možné se na příklady podívat v PDF souboru, který nese vždy stejný název jako soubor aplikace Derive.

a) Teorie čísel

Příklad 1. Rozložte následující čísla na prvočinitele:

a) 42, b) 150, c) 4956, d) 30888.

Řešení: K rozložení čísla na prvočinitele slouží funkce `FACTOR(číslo, number)`, kterou zadáme do místa pro příkaz a potvrdíme kombinací kláves `Ctrl` a `Enter`.

- a) `FACTOR(42, Number)`,
- b) `FACTOR(150, Number)`,
- c) `FACTOR(4956, Number)`,
- d) `FACTOR(30888, Number)`.

Příklad 2. Najděte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek daných čísel:

a) 51, 27, 81, b) 144, 72, 24, c) 210, 180, 120, d) 125, 175, 245.

Řešení: K nalezení největšího společného dělitele slouží příkaz `GCD` a k nalezení nejmenšího společného násobku příkaz `LCM`.

- a) `GCD(51, 27, 81), LCM(51, 27, 81)`,
- b) `GCD(144, 72, 24), LCM(144, 72, 24)`,
- c) `GCD(210, 180, 120), LCM(210, 180, 120)`,
- d) `GCD(125, 175, 245), LCM(125, 175, 245)`.

Výše uvedené příklady jsou zpracovány v ukázkovém souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/9_derive/1_teorie_cisel.dfw`.

b) Množinové operace

Příklad 1. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{-2, -1, 0, 3\}$.

Určete:

- a) $A \cup B$, b) $A \cap C$, c) $B \cup C$, d) $B \cap C$,
- e) $A \setminus B$, f) $A \setminus C$, g) $(B \cup C) \setminus A$, h) $(A \cup B) \setminus C$.

Řešení: Množinu zadáme obecně příkazem $M := \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Nejprve zapíšeme konkrétní množiny, tedy $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{0, 1, 2, 3\}$, $C := \{-2, -1, 0, 3\}$. Pro množinové operace používáme operátory, na které jsme zvyklí – pro sjednocení množin symbol \cup , pro průnik množin symbol \cap a pro rozdíl množin symbol \setminus .

- a) $A \cup B$, b) $A \cap C$, c) $B \cup C$, d) $B \cap C$,
- e) $A \setminus B$, f) $A \setminus C$, g) $(B \cup C) \setminus A$, h) $(A \cup B) \setminus C$.

Nevýhodou je, že množinové operace můžeme provádět pouze na množinách s konečným počtem prvků. Výše uvedené příklady jsou zpracovány v ukázkovém souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/9_derive/2_mnozino-ve_operace.dfw`.

c) Algebraické výrazy

Příklad 1. Zjednodušte:

$$\text{a) } \frac{x+3}{x^2+4x+3}, \quad \text{b) } \frac{2b^3+1458}{b^2-9b+81}, \quad \text{c) } \frac{8c^3d-4c^2d}{4d^2c-4cd^3}.$$

Řešení: Ke zjednodušení výrazu zapíšeme výraz do pole pro příkaz a stiskneme kombinaci kláves Ctrl a Enter.

- a) $(x+3)/(x^2+4x+3)$,
 b) $(2b^3+1458)/(b^2-9b+81)$,
 c) $(8c^3d-4c^2d)/(4d^2c-4cd^3)$.

Příklad 2. Rozložte na součiny:

$$\text{a) } x^3+22x^2+159x+378, \quad \text{b) } x^4-82x^2+81, \quad \text{c) } x^2-7x-bx+7b.$$

Řešení: K rozložení výrazu na součiny slouží příkaz `FACTOR(výraz, Radical, proměnná)`, který zapíšeme do pole pro příkaz a stiskneme kombinaci kláves Ctrl a Enter.

- a) `FACTOR(x^3+22x^2+159x+378, Radical, x)`,
 b) `FACTOR(x^4-82x^2+81, Radical, x)`,
 c) `FACTOR(x^2-7x-bx+7b, Radical, x)`.

Příklad 3. Vynásobte:

$$\text{a) } x(x+1)(x+9), \quad \text{b) } (x^2-a^3)(x^2-a^2)(x+a), \quad \text{c) } (t+3)^2(2t+1).$$

Řešení: K roznásobení mnohočlenů slouží příkaz `EXPAND(výraz, Radical, proměnná)`, který zapíšeme do pole pro příkaz a stiskneme kombinaci kláves Ctrl a Enter.

- a) `EXPAND(x(x+1)(x+9), Radical, x)`,
 b) `EXPAND((x^2-a^3)(x^2-a^2)(x+a), Radical, x)`,
 c) `EXPAND((t+3)^2*(2*t+1), Radical, t)`.

Výše uvedené ukázkové příklady jsou zpracovány v souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/9_derive/3_algebraicke_vyrazy.dfw`.

d) Rovnice, nerovnice a jejich soustavy**Příklad 1.** Řešte rovnice v \mathbb{R} :

a) $\sqrt{3-x} + 2x = 1$, b) $x = |1 - 2x|$, c) $2 \cos x = 1$.

Řešení: K vyřešení rovnice použijeme příkaz SOLVE (rovnice, proměnná).

a) SOLVE($\sqrt{3-x} + 2x = 1$, x),

b) SOLVE(x = ABS(1 - 2x), x),

c) SOLVE(2cos(x)=1, x).

Příklad 2. Řešte soustavu rovnic:

a) $x^2 + y^2 = 49$
 $x + y = 0$, b) $2a + 2b = 4$
 $a = b^2$.

Řešení: K vyřešení soustavy rovnic použijeme příkaz SOLVE ([rovnice], [proměnné]).

a) SOLVE([x + y = 0, x^2 + y^2 = 49], [x, y]),

b) SOLVE([2a+2b=4, a=b^2], [a, b]).

Příklad 3. Řešte nerovnice v \mathbb{R} :

a) $4 - x^3 > 0$, b) $x + 1 \leq (1 - x)^2$, c) $\left| \frac{4x + 8}{x - 7} \right| < 1$.

Řešení: K vyřešení nerovnice použijeme příkaz SOLVE (nerovnice, proměnná, Real).

a) SOLVE(4 - x^3 > 0, x, Real),

b) SOLVE(x + 1 ≤ (1 - x)^2, x, Real),

c) SOLVE(ABS((4x + 8)/(x - 7)) < 1, x, Real).

Příklad 4. Řešte soustavu nerovnic v \mathbb{R} :

a) $x - 3 \leq 6 + 2x$
 $x + 1 < 5$, b) $4 - x^2 \geq 0$
 $1 - x^2 \leq 0$, c) $1 \leq 2x + 4$
 $x \geq 3$.

Řešení: K vyřešení soustavy nerovnic píšeme jednotlivé nerovnice oddělené znakem \wedge .

a) $x - 3 \leq 6 + 2x \wedge x + 1 < 5$,

b) $4 - x^2 \geq 0 \wedge 1 - x^2 \leq 0$,

c) $1 \leq 2x + 4 \wedge x \geq 3$.

Výše uvedené ukázkové příklady jsou zpracovány v souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je `prilohy/aplikace/9_derive/4_rovnice_nerovnice_a_jejich_soustavy.dfw`.

e) Vykreslení grafů funkcí**Příklad 1.** Vykreslete grafy funkcí:

$$\text{a) } y = x^2 - 4x + 2, \quad \text{b) } y = \frac{\sin 2x + 1}{x}, \quad \text{c) } y = \sqrt{3 - x^2}, \quad \text{d) } y = x \ln x - 1.$$

Řešení: Graf funkce vykreslíme tak, že napíšeme funkční předpis a klikneme na tlačítko 2D-plot Windows.

$$\text{a) } y = x^2 - 4 \cdot x + 2,$$

$$\text{b) } y = (\text{SIN}(2 \cdot x) + 1) / x,$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3 - x^2},$$

$$\text{d) } y = x \cdot \text{LN}(x) - 1.$$

Příklad 2. Vykreslete grafy funkcí pro libovolné t , $t \in \langle 1,5 \rangle$:

$$\text{a) } y = tx^2, \quad \text{b) } y = \sin tx, \quad \text{c) } y = t^x, \quad \text{d) } y = x^t.$$

Řešení: Použijeme příkaz `VECTOR(funkce , parametr, t0, tn)`.

$$\text{a) } \text{VECTOR}(t \cdot x^2, t, 1, 4),$$

$$\text{b) } \text{VECTOR}(\sin(tx), t, 1, 3),$$

$$\text{c) } \text{VECTOR}(t^x, t, 2, 5),$$

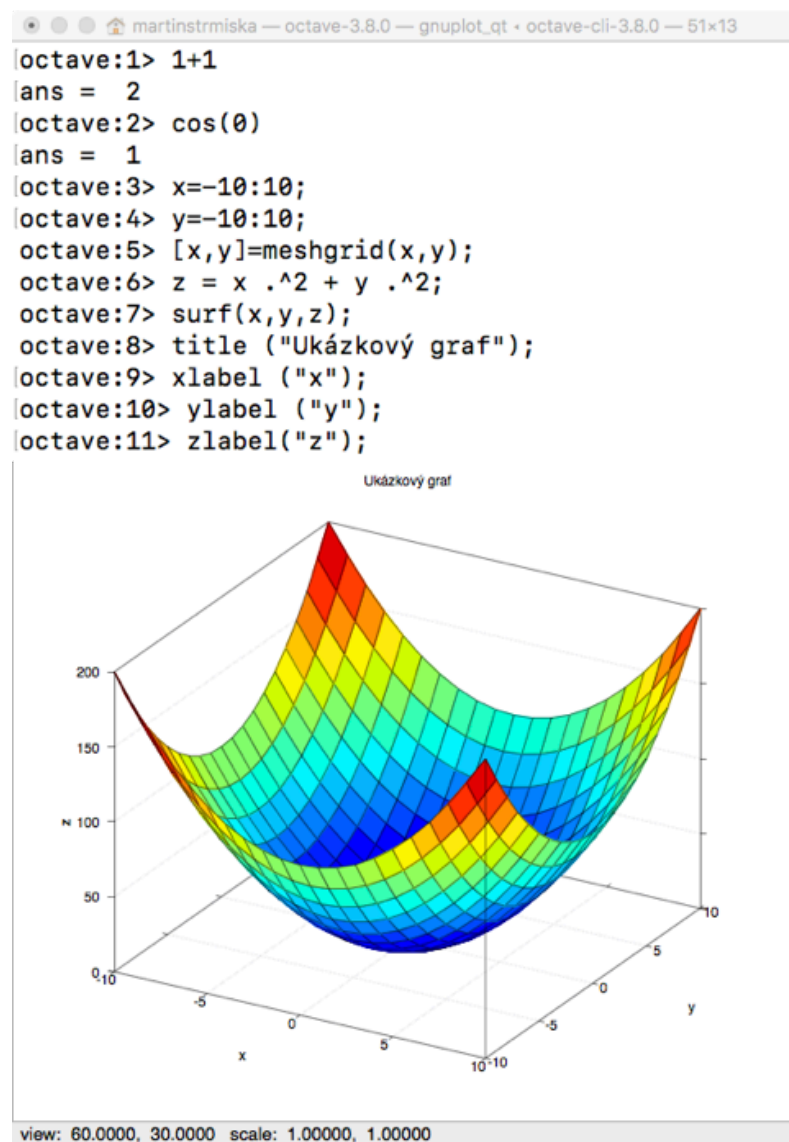
$$\text{d) } \text{VECTOR}(x^t, t, 2, 4).$$

Výše uvedené příklady jsou zpracovány v souboru, který je k dispozici v datové příloze.

Cesta k němu je `prilohy/aplikace/9_derive/5_vykresleni_grafu_funkci.dfw`.

4.10 Octave

Octave je bezplatná desktopová aplikace, která se ovládá pomocí příkazového řádku. Po jejím otevření se nám zobrazí terminál s příkazovým řádkem, do kterého se zadávají příkazy. Na obrázku (Obr. 26) je demonstrováno vykreslení grafu prostorové funkce $z = x^2 + y^2$. Vidíme, že na rozdíl od jiných aplikací je v Octave zadání příkazu poněkud složitější. Řešení vybraných ukázkových příkladů je tvořeno posloupností příkazů (které lze zadat do příkazového řádku) a grafem funkce.



Obr. 26: Terminálové okno aplikace Octave

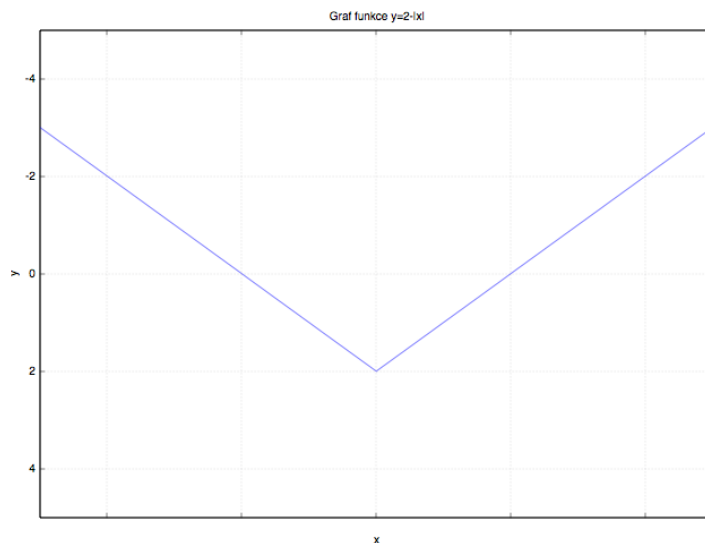
Příklad 1. Vykreslete grafy funkcí:

a) $y = 2 - |x|$, b) $y = 2 \sin x \cos x$, c) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $z = \sin x + \sin y$.

Řešení: Zadáme následující příkazy:

a) `x=-5:0.1:5;`

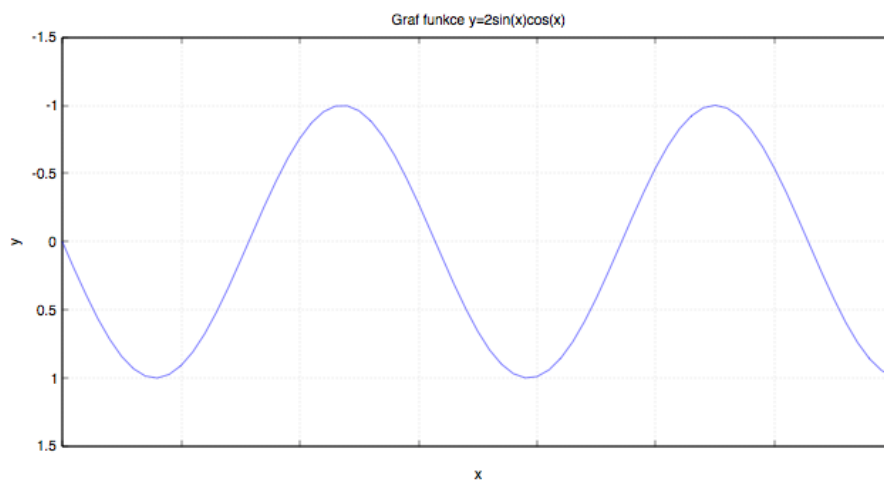
```
plot(x,2-abs(x));  
axis([-5 5 -5 5], 'normal', 'ij', 'labely'); grid on;  
title ("Graf funkce y=2-|x|"); xlabel("x");ylabel("y");
```



Obr. 27: Graf funkce $y = 2 - |x|$

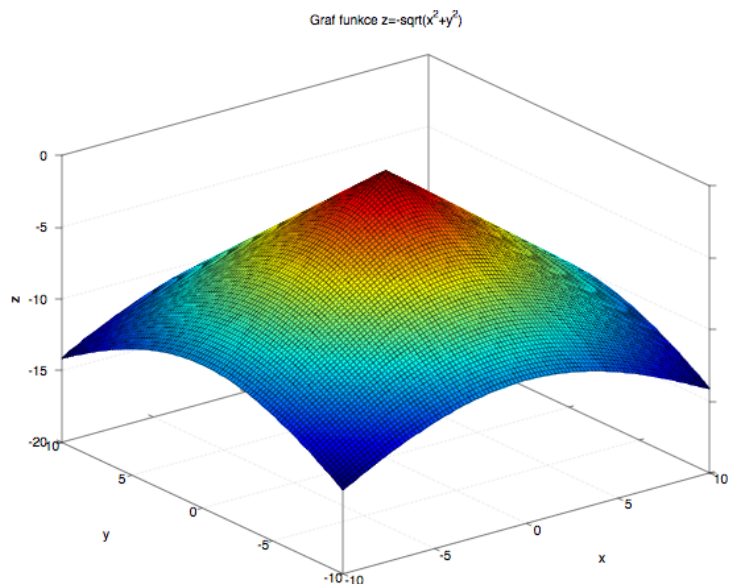
b) `x=0:0.1:10;`

```
plot(x,2*sin(x).*cos(x));  
axis([0 7 -1.5 1.5], 'normal', 'ij', 'labely'); grid on;  
title ("Graf funkce y=2sin(x)cos(x)"); xlabel("x");ylabel("y");
```



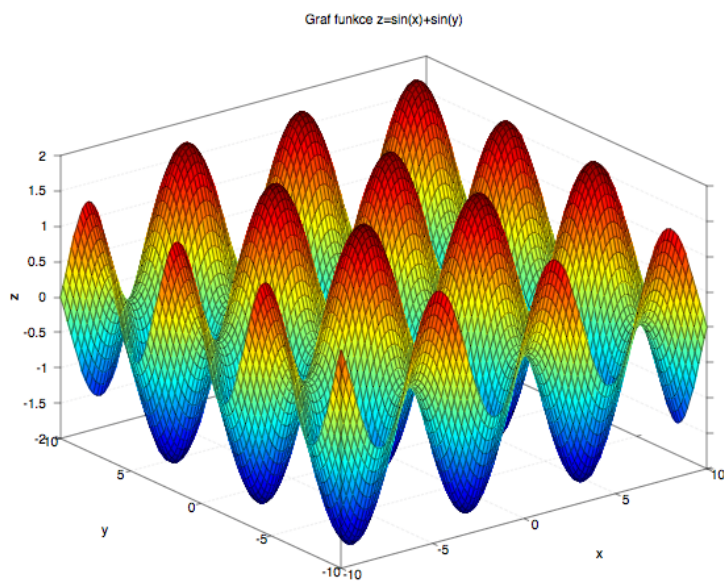
Obr. 28: Graf funkce $y = 2 \sin x \cos x$

```
c) x=-10:0.2:10; y=-10:0.2:10; [x,y]=meshgrid(x,y);  
z=-sqrt(x.^2 + y.^2); surf(x,y,z);  
title ("Graf funkce z=-sqrt(x^2+y^2) ");  
xlabel("x"); ylabel("y"); zlabel("z");
```



Obr. 29: Graf funkce $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

```
d) x=-10:0.2:10; y=-10:0.2:10; [x,y]=meshgrid(x,y);  
z=sin(x)+sin(y); surf(x,y,z);  
title ("Graf funkce z=sin(x)+sin(y)");  
xlabel("x"); ylabel("y"); zlabel("z");
```



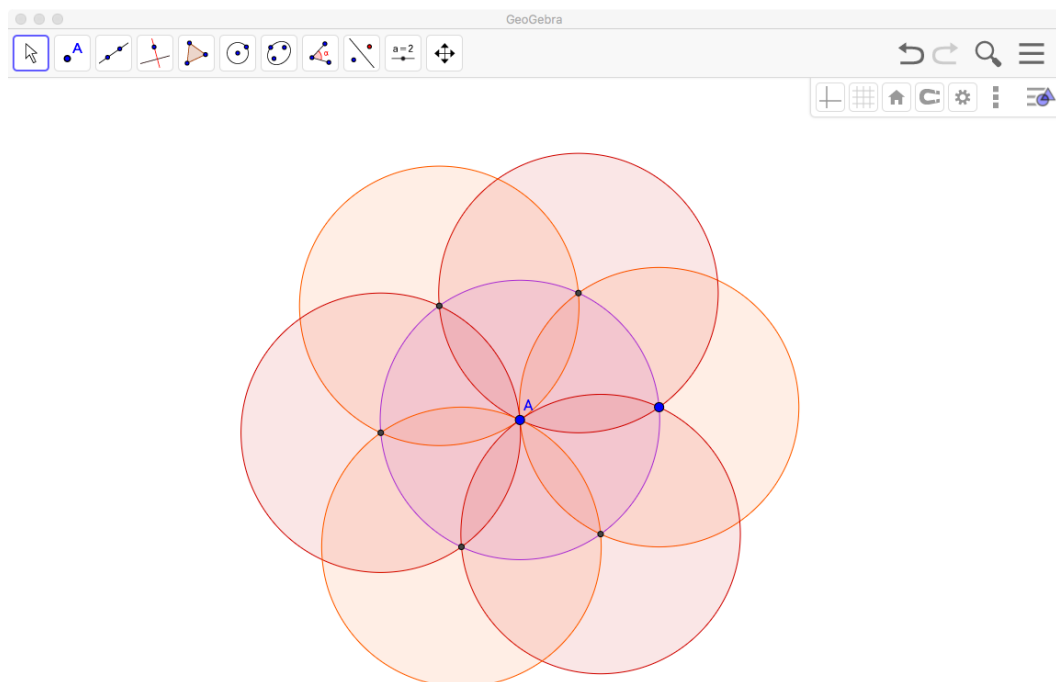
Obr. 30: Graf funkce $z = \sin x + \sin y$

4.11 GeoGebra

GeoGebra je multiplatformní aplikace, která je k dispozici zdarma. Po jejím spuštění se zobrazí grafické rozhraní, které je tvořeno kreslicím plátnem a pruhem s nástroji. Pruh (Obr. 31) obsahuje nástroje pro vložení bodu, přímky, mnohočlenu, kružnice, úhlu atd. Z toho důvodu je rýsování v GeoGebře podobné klasickému rýsování pomocí rýsovacích potřeb. Na obrázku (Obr. 32) lze vidět práce v aplikaci.



Obr. 31: Pruh s nástroji



Obr. 32: GeoGebra

Vzhledem k tomu, že GeoGebra umožňuje do kreslicího plátna přidávat komentáře, jsou vybrané ukázkové příklady řešeny přímo v ní.

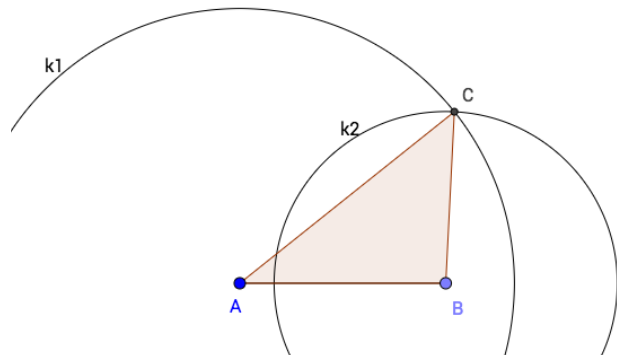
Příklad 1. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno: $a = 8$ cm, $b = 5$ cm a $c = 6$ cm.

Řešení:

Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = c = 6$ cm
2. $k_1; k_1(A; a = 8$ cm)
3. $k_2; k_2(B; b = 5$ cm)
4. $C; C \in k_1 \cap k_2$
5. $\triangle ABC$

Konstrukce:



Obr. 33: Řešení prvního trojúhelníku

Konstrukce je zpracována v souboru, který je k dispozici v datové příloze.

Cesta k němu je [přilohy/aplikace/11_GeoGebra/1.ggb](#).

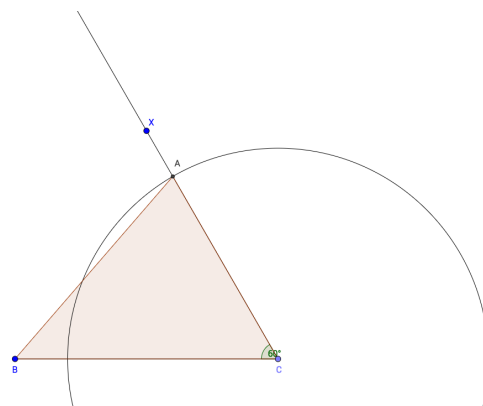
Příklad 2. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm a $\gamma = 60^\circ$.

Řešení:

Zápis konstrukce:

1. $AC; |AC| = b = 4$ cm
2. $k; k(C; a = 5$ cm)
3. $\sphericalangle ACX; |\sphericalangle ACX| = \gamma = 60^\circ$
4. $B; B \in \text{průsečík } CX \cap k$
5. $\triangle ABC$

Konstrukce



Obr. 34: Řešení druhého trojúhelníku

Konstrukce je zpracována v souboru, který je k dispozici v datové příloze.

Cesta k němu je [přilohy/aplikace/11_GeoGebra/2.ggb](#).

Příklad 3. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno: $c = 7,5$ cm, $a = 6$ cm a $v_c = 4,5$ cm.

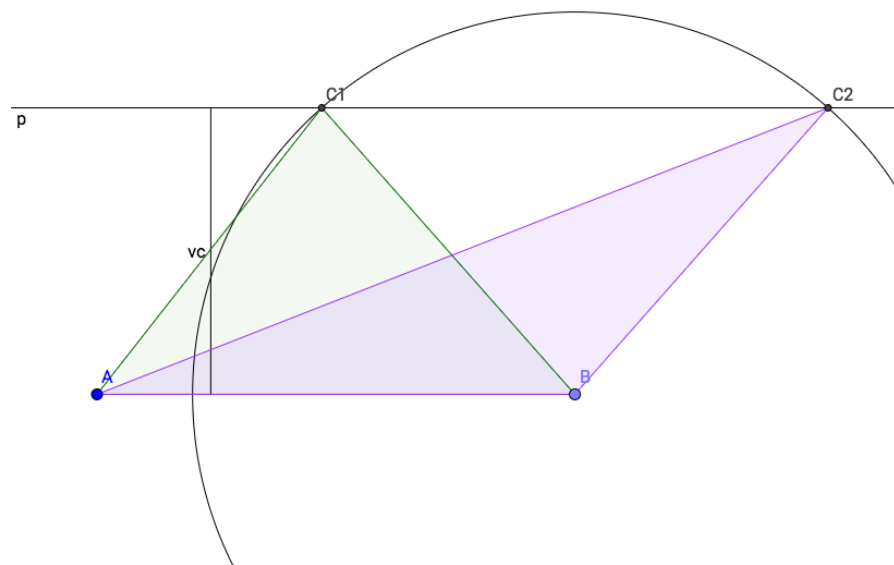
Řešení:

Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = c = 7,5$ cm
2. $v_c; v_c = 4,5$ cm; $v_c \perp AB$
3. $p; p \perp v_c; p \parallel AB; |pAB| = v_c = 4,5$ cm
4. $k; k(B; a = 6$ cm)
5. $C; C = p \cap k$
6. $\triangle ABC$

Konstrukce:

Pozn.: Tento příklad má dvě řešení – proto je obrázek zakreslen větší, než u předchozích dvou příkladů.



Obr. 35: Řešení třetího trojúhelníku

Konstrukce je zpracována v souboru, který je k dispozici v datové příloze. Cesta k němu je [přílohy/aplikace/11_GeoGebra/ 3.ggb](#).

ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývala softwarovou podporou výuky matematiky na středních školách. Cílem této práce bylo popsat matematický software, zkoumat, jak je využíván pro podporu výuky a dále zpracovat vybrané příklady ze středoškolské matematiky v nejpoužívanějších programech. Tyto cíle byly splněny. Dotazníkového šetření, které zkoumalo využití softwaru pro výuku matematiky, se zúčastnilo více než 600 respondentů. Na základě poznatků z dotazníkového šetření byla vytvořena sada řešených příkladů v nejpoužívanějších programech. Zadání i řešení příkladů byla vytvořena přímo autorem práce. Popis matematického softwaru byl uveden spíše stručněji. To proto, že zbytečně podrobný popis by práci neúměrně natahoval a tato práce má být zaměřena spíše na práci v software. Navíc čtenář pochopí danému softwaru nejlépe vždy tehdy, pokud jej sám vyzkouší.

V rámci dotazníkového šetření bylo zjištěno, že učitelé softwarová řešení používají. Čtyři pětiny učitelů používají počítač k přípravě písemných materiálů a prací. K výuce v teoretické či praktické části hodin využívá počítač asi polovina učitelů. Pouze 5 % učitelů uvedlo, že počítač nevyužívají. Drtivá většina učitelů (více než 90 %) počítače považuje za přínosné a práci usnadňující. V otevřených otázkách ovšem řada učitelů zmiňovala riziko, které může nést přehnané nebo nepromyšlené využívání počítačů, tedy že žáci budou spoléhat na počítač a nepochopí princip výpočtu. Ukázalo se, že existují učitelé, kteří se z těchto důvodů odvracejí od používání počítačů a místo nich raději znovu sahají ke křídě a k tabuli. Dále se ukázalo, že nejpoužívanějšími programy při výuce matematiky jsou MS Excel a GeoGebra. Tyto programy používá přes 60 % učitelů. S velkým odstupem následuje s 15 % Wolfram|Alpha a po něm další programy.

Je předpokládáno, že tato práce by mohla být v budoucnu využita učiteli matematiky. Ti zde naleznou rešerši několika matematických aplikací a ukázky práce v nich. Je důležité říci, že ačkoliv jde doba dopředu a technologie dokáže v mnoha případech nahradit spoustu věcí, v tomhle případě žádný software nikdy nenahradí práci kvalitního učitele. Vlastní praxe autora potvrzuje výsledky výzkumu, tedy že matematický software je skutečně přínosný, protože právě s jeho použitím studenti látku lépe a rychleji pochopí.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. Pedagogický slovník. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003. ISBN 80-7178-772-8.
- [2] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. Výukové metody. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.
- [3] KOMENSKÝ, Jan Amos. Didaktika velká. 3. vyd. Brno: Komenium, 1948. Pedagogické klasobraní.
- [4] MAYER, Richard E., ed. The Cambridge handbook of multimedia learning. Second edition. New York: Cambridge University Press, 2014. ISBN 978-1-107-61031-6.
- [5] *Microsoft Mathematics 4.0* [online]. [cit. 2017-03-11].
Dostupné z: <https://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=15702>
- [6] *About Wolfram|Alpha: Making the World's Knowledge Computable* [online]. [cit. 2017-03-12]. Dostupné z: <http://www.wolframalpha.com/about.html>
- [7] *About Wolfram Research* [online]. [cit. 2017-03-13].
Dostupné z: <https://www.wolfram.com/company/>
- [8] *Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing* [online]. [cit. 2017-03-16].
Dostupné z: <https://www.wolfram.com/mathematica/>
- [9] *Symbolab Math Solver - Step by Step calculator* [online]. [cit. 2017-03-19]. Dostupné z: <https://www.symbolab.com>
- [10] *Grapher - Mac Guides* [online]. [cit. 2017-03-12].
Dostupné z: <http://guides.macrumors.com/Grapher>
- [11] *Desmos | About us* [online]. [cit. 2017-03-24].
Dostupné z: <https://www.desmos.com/about>
- [12] *Graph | Plotting of mathematical functions* [online]. [cit. 2017-03-25]. Dostupné z: <http://www.padowan.dk/>
- [13] MÍČA, Daniel. Program pro výuku funkcí ve středoškolské matematice [online]. Praha, 2005 [cit. 2017-03-31]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/daniel_mica/. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze.
- [14] Hašek, Roman. Derive 6.1, řešení vybraných úloh z matematiky. [online]. České Budějovice, 2004 [cit. 2017-04-02]. Dostupné z: <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/derive/Derive6CZReseniUloh.pdf>. Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích.

- [15] *GNU Octave* [online]. [cit. 2017-04-05]. Dostupné z: <https://www.gnu.org/software/octave/>
- [16] *GeoGebra* [online]. [cit. 2017-04-09]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org>
- [17] *Cabri II Plus – Plane geometry software Cabri II Plus* [online]. [cit. 2017-04-13]. Dostupné z: <http://www.cabri.com/cabri-2-plus.html>
- [18] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. 2., aktualizované vydání. Praha: Grada, 2016. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-5326-3.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

\mathbb{R}	Množina reálných čísel
\mathbb{R}^2	Dvojměrný vektorový prostor množiny reálných čísel
M^{-1}	Inverzní matice k matici M
$ M $	Determinant matice M
PDF	Portable Document Format (univerzální a přenosný formát dokumentů)
PC	Osobní počítač
SW	Software
ŠVP	Školní vzdělávací plán
RVP	Rámcový vzdělávací plán
ZŠ	Základní škola
SŠ	Střední škola
VŠ	Vysoká škola
CERMAT	Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání
ICT	Informační a komunikační technologie

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Kognitivní teorie učení [1]	12
Obr. 2: Kognitivní teorie multimediálního učení [1]	12
Obr. 3: Grafické znázornění Pythagorovy věty	13
Obr. 4: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 1	29
Obr. 5: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 2	29
Obr. 6: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 3	30
Obr. 7: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 4	30
Obr. 8: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 5	31
Obr. 9: Grafické znázornění vyhodnocení otázky č. 6	31
Obr. 10: Microsoft Mathematics	36
Obr. 11: Vykreslení grafu prostorové funkce	39
Obr. 12: Triangle Solver	41
Obr. 13: Příklad 1	41
Obr. 14: Příklad 2	42
Obr. 15: Příklad 3	42
Obr. 16: Wolfram Alpha	44
Obr. 17: Wolfram Mathematica	50
Obr. 18: Symbolab	51
Obr. 19: Apple Grapher	56
Obr. 20: Desmos Calculator	58
Obr. 21: Graph	59
Obr. 22: Funkce	61
Obr. 23: Řešení bodu a)	62
Obr. 24: Řešení bodu b)	62
Obr. 25: Derive 6.1	63
Obr. 26: Terminálové okno aplikace Octave	68
Obr. 27: Graf funkce $y = 2 - x $	69
Obr. 28: Graf funkce $y = 2\sin x \cos x$	69
Obr. 29: Graf funkce $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$	70
Obr. 30: Graf funkce $z = \sin x + \sin y$	70
Obr. 31: Pruh s nástroji	71
Obr. 32: GeoGebra	71

Obr. 32: Řešení prvního trojúhelníku	72
Obr. 33: Řešení druhého trojúhelníku.....	72
Obr. 35: Řešení třetího trojúhelníku	73

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Obecná kontingenční tabulka	32
Tab. 2: Kontingenční tabulka pro první hypotézu	33
Tab. 3: Kontingenční tabulka pro druhou hypotézu	34
Tab. 4: Kontingenční tabulka pro třetí hypotézu	34
Tab. 5: Uvedené odpovědi na otázku č. 7 seřazené dle četnosti.....	88

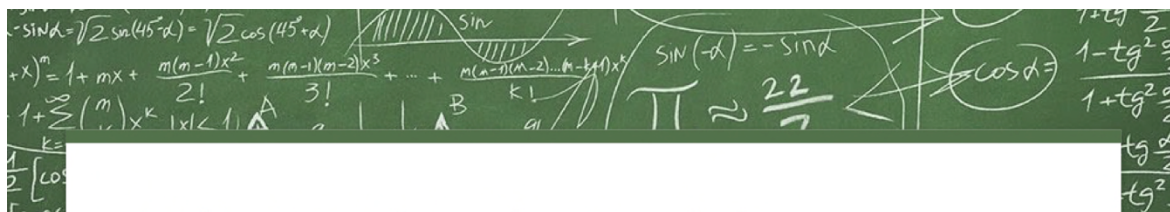
SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA P I: CD-ROM	82
PŘÍLOHA P II: DOTAZNÍK	83
PŘÍLOHA P III: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 1	86
PŘÍLOHA P IV: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 7	88
PŘÍLOHA P V: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 8	89
PŘÍLOHA P VI: KRITICKÉ HODNOTY TESTOVACÍHO KRITÉRIA χ^2 ...	96

PŘÍLOHA P I: CD-ROM

CD-ROM obsahuje výstupy aplikací, v některých případech také souhrnné PDF soubory, obrázky a videa. Cesty k jednotlivým souborům jsou uvedeny přímo v praktické části práce.

PŘÍLOHA P II: DOTAZNÍK



Softwarová podpora výuky matematiky na středních školách

Vážení učitelé,

mé jméno je Martin Strmiska a jsem studentem Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně. V rámci svého studia píši diplomovou práci na téma Softwarová podpora výuky matematiky na středních školách. Hlavním cílem práce je vytvoření sbírky příkladů. Příklady budou řešeny v nejčastěji používaných programech.

Prosím o vyplnění krátkého anonymního dotazníku - nezabere Vám to více než pět minut. Děkuji za Vaše odpovědi.

***Povinné pole**

Jak využíváte počítač pro výuku matematiky? *

- Nevyužívám počítač
- K prezentaci teorie v úvodních částech hodin
- K přípravě písemných materiálů či prací
- V aplikačních částech hodin
- Jiné: _____

Jak často používáte počítač? *

- Každou hodinu
- Každou druhou hodinu
- Jedenkrát týdně
- Vyjíměčně

Jak moc vám používání počítače ve výuce usnadňuje práci? *

- Neusnadňuje
- Málo
- Hodně

Poskytuje Vám škola dostatečné podpůrné zázemí? *

- Učebny nejsou technicky vybaveny
- Škola nepodporuje softwarovou výuku a musím užívat volně dostupný software
- Učebny jsou vybaveny a škola má dostatek počítačové techniky
- Škola nakupuje matematický software

Jste s nabídkou podpůrných matematických programů spokojeni? *

- Ano
- Částečně
- Ne

Které programy používáte ve výuce?

- Wolfram Alpha
- GeoGebra
- Microsoft Mathematics
- Maple
- WxMaxima
- Apple Grapher
- MS Excel

Které další programy používáte?

Odpovězte slovně, klidně i výčtem více programů.

Vaše odpověď

Napadá Vás ještě něco důležitého, co byste chtěli k tématu sdělit?

Vaše odpověď

Zadejte mail, pokud budete mít zájem poslat diplomovou práci.

Vaše odpověď

ODESLAT

Nikdy přes Formuláře Google neposílejte hesla.

PŘÍLOHA P III: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 1

1. příprava testů
2. ukázky grafů
3. zadávání úkolů k domácí přípravě
4. pro kontakt se studenty (např. Classroom od Googlu)
5. e-learning
6. domácí procvičení studentů, on-line prostředí Moodle
7. databáze studijních materiálů pro domácí použití
8. zobrazení grafů a těles
9. animace
10. zadávání příkladů a kontrola jejich výsledků
11. zobrazení grafů
12. hledání vhodných materiálů na webu
13. pracovní listy námi vytvořené pro studenty
14. interaktivní tabule
15. také pro zobrazení situace například u funkcí nebo u geometrických úloh
16. ke shrnutí/opakování učiva, k názornému předvedení důkazů
17. příprava do hodin, vyhledávání materiálů
18. kontrola výsledků především z domácích úloh
19. ukázka výpočtů pomocí PC
20. vlastní práce studentů
21. k zadání samostatných prací
22. k vyhledávání materiálů, doplnění vzdělání
23. zejména pro učivo funkce
24. využití programů k zadání úkolů TECHAMBITION, různé procvičovací materiály pod záštitou Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy – absolventské práce
25. procvičování
26. ukázky grafů
27. e-learningový portál - Moodle - výklad, testování
28. když potřebuji nějakou animaci
29. občas SW na geometrii a funkce
30. techambition
31. zajímavosti, historie matematiky

32. k samostatné práci studentů
33. grafy funkcí
34. prezentace prací studentů
35. domácí úkoly online
36. simulace průběhů funkcí
37. k přípravě hodin na interaktivní tabuli
38. testování, applety
39. konstrukce v Cabri, GeoGebre; grafy funkcí, promítání řešení příkladů
40. občas nechám na PC pracovat studenty
41. k objevování faktů
42. opakování učiva
43. Moodle
44. občasné ukázky, např. grafy
45. zápis hodiny
46. vykreslení grafů
47. Moodle
48. zápis do třídní knihy
49. aplikace matematiky v praxi
50. procvičování
51. ke zkoušení
52. zadávání příkladů k procvičení
53. sporadicky
54. žákovské tablety
55. zadání příkladů z internetových stránek
56. k motivaci žáků, k zpestření výuky - matematické hry
57. při prezentaci žáků
58. k ověřování výsledků pomocí Wolfram Alpha
59. k vykreslení grafů funkcí
60. používám volně dostupné webové aplikace.
61. používám interaktivní tabuli.
62. používám již vytvořené applety, které se snadno ovládají.
63. používám jen prezentace vytvořené na zakázku či z jiných zdrojů např. školení.
64. používám prezentace většinou k výkladu, zadání a řešení příkladů.

PŘÍLOHA P IV: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 7

Učitelé zde mohli uvést výčet matematických programů, které používají. Programy jsou v tabulce uvedené dle četnosti.

Tab. 5: Uvedené odpovědi na otázku č. 7 seřazené dle četnosti

Pořadí	Program	Další informace	Četnost
1.	Cabri II Plus	http://www.cabri.com/cabri-2-plus.html	52
2.	Derive 6	https://derive.en.uptodown.com	26
3.	MS PowerPoint	https://products.office.com/cs-cz/home	26
4.	MS Word	https://products.office.com/cs-cz/home	23
5.	TechAmbition	https://techambition.com	15
6.	Smart NoteBook	https://home.smarttech.com	15
7.	Funkce	Diplomová práce Daniela Míči	14
8.	Graph	www.padowan.dk	13
9.	Desmos Calculator	www.desmos.com	12
10.	Wolfram Mathematica	https://www.wolfram.com/mathematica/	10
11.	LaTeX	https://www.latex-project.org	10
12.	Cabri 3D	http://www.cabri.com/cabri-3d.html	8
13.	LibreOffice	https://cs.libreoffice.org	8
14.	Maatik 6-9	-	6
15.	ActivInspire	podpora interaktivních tabulí	6
16.	Graphmatica	http://www.graphmatica.com	5
17.	VoFce	http://slideplayer.cz/slide/3310531/	5
18.	MatMat	https://matmat.cz	5
19.	GeoNext	http://geonext.de	4
20.	Moodle	https://moodle.org	4
21.	OpenOffice	https://www.openoffice.cz	4
22.	Matematika s radostí	http://msr.vsb.cz	4
23.	MATLAB	http://www.mathworks.com	3
24.	Java applety	http://www.walter-fendt.de/m14cz	3
25.	Dumy	internetové zdroje pro výuku	3
26.	Gnuplot	http://gnuplot.info	2
27.	Android Mathematics	android mathematics app	2
28.	MathType	http://www.dessci.com	2
29.	KAlgebra	https://edu.kde.org/kalgebra	2
30.	Graph.tk	www.graph.tk	1
31.	Cinderella	http://www.cinderella.de/tiki-index.php	1
32.	Symbolab	https://www.symbolab.com	1
33.	Octave	https://www.gnu.org/software/octave	1
34.	Draw Function Graphs	https://rechneronline.de	1

PŘÍLOHA P V: OTEVŘENÉ ODPOVĚDI OTÁZKY Č. 8

1. Na "hraní si" s matematickými programy není čas.
2. Takovýchto prací je už velká spousta.
3. Při řešení příkladů na počítači se žáci častěji stávají nezúčastněnými diváky. Mnohdy mylně předpokládáme, že žák zná předchozí látku dokonale. Žáci často nechápou, kde vzal počítač dané výsledky. Tento problém vzniká hlavně u těch, kteří se látku memorují z paměti. Bohužel v dnešní době je takových dost a dost. Je třeba najít střední cestu, aby i tito měli šanci sledovat, co se na plátně děje a chápat souvislosti, aby stále viděli matematiku, a ne jen jakési video. Přeji hodně štěstí, kolego.
4. Přestože současný matematický software je velmi kvalitní, jeho přínos ke vzdělávání v matematice na střední škole se mi jeví jako málo významný ve srovnání s klasickou výukou využívající pouze tabuli a křídlo.
5. Osobně by se mi líbil nějaký generátor příkladů například pro řešení úloh k trojúhelníku, kombinatoriky apod.
6. Využíváme interaktivní učebnice od nakladatelství FRAUS.
7. Někdy používáme počítač každou hodinu, u jiné kapitoly vůbec.
8. Ve 2. otázce: při výuce - výjimečně, při přípravě na výuku - několikrát týdně; ve 3. otázce: usnadňuje mi práci při přípravě na výuku; 5. otázka: moje odpověď je "nevím", neboť při samotné výuce počítač moc nepoužívám (viz. odpověď na ot. č.1.);
PŘEJI VÁM HODNĚ ŠTĚSTÍ.
9. U některých otázek se mi hůře odpovídalo - chyběla mi širší škála u odpovědí (např. něco mezi hodně a málo).
10. Pokud mají studenti probíranou látku ve formě prezentace, mají pocit, že se nejedná o učivo nebo naopak mají pocit, že si musí opsat úplně vše, neumí rozlišit mezi důležitým a nedůležitým.
11. K otázce jak často – k některé látce je vhodné využití počítače každou hodinu a u některé látky vůbec.
12. Někdy je lepší npracovat s technikou, protože studenti často nezvládají základní početní operace např. bez použití kalkulačky a leckdy mají dojem, že nemusí přemýšlet, protože "internet přece obsahuje všechno".

13. Z praxe usuzuji, že cíl matematiky - naučit děti myslet, se používáním výpočetní techniky nijak nepřiblíží. Za důležité považuji, aby jim vše přešlo rukama do hlavy - tedy počítáním, případně rýsováním.
14. Konference a různá setkání učitelů matematiky by se neměla věnovat otázkám nesmrtnosti chrousta, nýbrž výběru a vhodnosti jednotlivých typů příkladů, názornému zpracování jejich řešení + skladbě, v jaké se probírají. Elektronická sbírka příkladů je skvělý počin - držím pěsti, ať si udržíte patřičný nadhled, nepropadnete příliš do hloubky a tajů této problematiky (ale přitom řešení těch příkladů studenty něco naučí a bude to mít výraznou přidanou hodnotu). Ať Vaše diplomka neztratí kouzlo přehlednosti, názornosti a jakési "svěžesti", neustálou konfrontací s "vnějšími pozorovateli" vytvoříte dílo, po kterém budou lačnit studenti, učitelé to budou chválit a odborníci oceňovat. A ať Vás to příliš nepohltí!
15. V hodinách matematiky používám nejčastěji tužku a papír, ale učím i informatiku a tam pracujeme na tématech z hodin matematiky.
16. Viz výše. Některé učebny jsou a některé nejsou vybaveny. :)
17. Důležitá je jednoduchost, rychlost a intuitivnost ovládnutí, aby se člověk v hodině příliš nezdržoval a ostatně ani při vytváření materiálů doma.
18. U druhé otázky bych odpověděl často - dle potřeby. Ale ne každou hodinu ani každou druhou. Např. ve 2.ročníku při tvorbě grafů funkcí (samozřejmě chci i tvorbu grafů ručně). Při rýsování (např. nyní v primě děláme souměrnost).
19. Volně dostupný software přednostně chci používat, protože je snazší přimět studenty, aby jej používali také a není nutné ztrácet čas řešením licenčních problémů. Také mám jistotu, že za pár let budu moci své materiály otevřít a znovu používat. Jinak největším omezením je právě nedostatek použitelných materiálů. Nemám dost času si je sám chystat. Podobně k otázce 3: elektronické materiály nepoužívám kvůli ušetření času, ale kvůli vyšší názornosti a univerzálnosti.
20. Moc bych si přála, aby se matematika opět stala povinným maturitním předmětem, jinak totiž nemáme šanci zvýšit úroveň vzdělanosti našich potomků.
21. Ve třídách máme počítače s projektory, ale plátna se stahují před tabuli, takže můžu použít buď projektor nebo tabuli, což znemožňuje využití v hodinách matematiky. Proto nyní počítač v hodinách téměř nevyužívám.
22. Bohužel gymnázia nedosáhnou na smart tabule finančně. Nebyl by nějaký projekt?
23. Pro studenty je důležité, aby měli k programům také přístup. Programy, na které má licenci pouze škola, nejsou výhodou.

24. ŠVP je tak nabitý na poměrně málo hodin, že aplikovat učivo pomocí softwaru, je téměř nereálné. Navíc mám pocit, že pokud opustím metodu křída a tabule, žáci si z hodin odnesou mnohem méně informací.
25. Obávám se, že nejlíp žáci chápou s křídou a tabulí. Využívám hlavně u ukázky grafů, řezů, konstrukcí, průběhu funkce a různých testů (pro skupiny, jednotlivce i celou třídu), dále při zadání příkladů. Pro kontrolu nafocených či naskenovaných domácích úkolů a jejich kontrole (Moodle, Classroom...).
26. Chybí nám učebnice s testovými příklady.
27. K otázce "Jak často používáte počítač" nemáte vhodnou nabídku odpovědí - používám jej v průměru 3 hodiny denně, ale ve výuce jen občas.
28. Chybí podpora využití matematického softwaru formou školení učitelů (vyjma GeoGebry).
29. Využívám DUMY, které jsou na portále RVP.
30. Výuka matematiky potřebuje vlastní počítání žáků, výpočetní technika je podpůrná činnost, která ovšem významně šetří čas při objasňování a procvičení učiva, škola nezakupuje matematický software z finančních důvodů.
31. Hodinová dotace matiky neposkytuje dostatek času k pravidelnému využívání poč. techniky. Chtělo by to i dělené hodiny.
32. V odpovědi na otázku jak často využívám počítač jsem odpověděl 1x týdně, což je ovšem průměrná hodnota. K přípravě písemných prací častěji, k vlastní výuce podle probíraného tématu.
33. V učebně je obvykle jen jeden učitelský počítač s projektorem. Používá se jen volně dostupný software, ale škola by se asi nebránila nějakému drobnému nákupu, pokud by byl zájem.
34. Využití počítače při hodině závisí na probírané látce i třídě.
35. Ráda bych nové programy využívala více, ale nestíhám se s nimi seznamovat natolik, abych s nimi uměla uspokojivě pracovat.
36. Hodin matematiky na naší škole ubývá, ale tematické celky se musí probrat, a proto není prostor na práci na PC. Jeho použití vždy znamená zdržení v hodině.
37. Žádný matematický program nikdy nenahradí základní dovednosti. Sčítání, odčítání, malá násobilka a zlomky jsou základ - pokud žákům chybí triviální dovednosti, tak jsou veškeré programy úplně zbytečné!!
38. Je málo dobrých, a ještě méně výborných českých výukových programů do matematiky.

39. Nepovažuji za důležité a potřebné v matematice používat tyto programy, naopak to brání tvořivé a samostatné práci. Viz model USA, nebrat!!
40. Používání PC ve výuce MAT není samospasitelné.
41. Chybí mi software pro procvičování učiva SŠ, nemám čas vše chystat sama.
42. V části, ve které se ptáte na časové využití počítače, by moje odpověď zněla: několikrát týdně.
43. Pro výuku matematiky považuji za nejvhodnější používat křidu a tabuli. V jiných předmětech počítač využívám.
44. Pro větší využití mě brzdí neznalost angličtiny.
45. V tématu práce softwarová podpora výuky matematiky na ŠŠ se zaměřujete na "čistý" matematický software (viz otázka číslo 6), neuvažoval jste o tom, že se zeptáte také na e-učebnice?
46. Učím v současné době jenom finanční gramotnost.
47. Nejsem dostatečně informovaná o „matematických“ programech a možnosti jejich využití.
48. Na střední škole jsou žáci zahlceni informacemi předkládanými k "podívání". Hodiny by měly být pestré, odlišné a žáci aktivní. V matematice se spoluúčastnit na řešení a hledat varianty a možná i slepé uličky. V těch pár hodinách, které máme, toho musíme stíhat mnoho.
49. Ve Wordu píšu zadání písemných prací, v PowerPointu mám prezentace výkladu nového učiva. Wolfram Alpha používám občas k ověření výsledků - nikoli ve výuce.
50. Odpovídal jsem ve smyslu "počítač" i aplikace na iPadech.
51. Škola nemá vyřešeno (technicky) využívání počítačů ve výuce pro žáky jedné třídy.
52. Používání drahého proprietárního software ve školství považuji za nerozumné. Je to drahé, studenti ho nemohou zdarma stáhnout pro domácí práci, alternativy dobře stačí. Překvapuje mě, že v dotazníku s otevřeným software nepočítáte.
53. Pro přípravy užívám i Maple, ale ve výuce počítač slouží hlavně jako podpora, tj. např. Classroom od Googlu pro kontakt se studenty. V hodinách řešit úlohy převážně s užitím výpočetní techniky je nesmysl, studenti se musí naučit hlavně postupy bez užití výpočetní techniky.
54. Ač jsem současně učitel ICT, v matematice zůstávám spíše u tradičních metod se zaměřením na použití vlastního uvažování žáků. :-)
55. Využívám internetové matematické učebnice (realisticky.cz), materiály jiných škol (ZŠ Brdičkova).

56. Chybí mi podpora počítačem podporované výuky v návaznosti na vzdělávací program (popřípadě na některé učebnice), dále podpora této výuky dle RVP pro nadané žáky či pomalejší (například tabletové aplikace či úlohy s rozšiřujícím učivem, problémové úlohy atd.). Vše je potřeba vyhledávat ad hoc a zjišťovat, zda nalezený program odpovídá rozsahem a obsahem probírané látce.
57. Máte představu o úrovni středního školství na technických školách, nezámem a lenost. Z mého pohledu. Není-li spolupráce s žáky, nezachrání výuku sebelepší software.
58. S programy nejsem obeznámena, bylo by třeba více osvěty do škol.
59. Nejlepšími pomůckami pro matematiku je papír a tužka.
60. Počítač používám v běžné výuce ve spojení s interaktivní tabulí, pro žáky jsou k dispozici počítače jen v počítačových učebnách.
61. Ne všechny učebny jsou vybaveny technikou, v případě použití techniky si musím se třídou vyměnit učebnu, proto preferuji pracovní listy.
62. Bylo by hezké mít testovací programy.
63. Z finančních důvodů vedení dává přednost volně dostupnému matematického softwaru.
64. Používání počítače usnadňuje práci přiměřeně (ani málo, ani hodně).
65. Používání aplikačního softwaru studenty matematiku nenaučí, postaví ještě další bariéru mezi myšlenku a požadovaný výstup.
66. Při využívání počítače v hodinách jsou studenti ještě méně soustředěni na výuku než obvykle.
67. Dotazník hodný diplomové práce.
68. Přeji Vám hodně úspěchů a pevné nervy. :)
69. Podporu matematiky se snaží i nakladatelství Fraus, ale pro SŠ nic moc.
70. Hodně zdaru při tvorbě diplomové práce. :)
71. Na naší škole je malá hodinová dotace. Matematika není prioritním předmětem.
72. S užíváním počítačů ve výuce je to složité. Před lety jsem s tím začal, ale studenti mě požádali, abych se vrátil ke klasice (křída + tabule) - chtěli vidět, jak řešení "vzniká". Otázka spokojenosti s nabídkou programů je připravena pro ty, kteří počítače ve výuce používají. Odpověděl jsem "ne", ale to jen proto, že je prostě nepoužívám - na tuto odpověď jste nepamatoval. Otázka "Jak často používáte počítač" je také zavádějící. Pro přípravu materiálů pro výuku ho používám denně (sbírky úloh, testy, obrázky v GeoGebře apod.), ale ve výuce výjimečně.

73. Ustupuji od používání, návrat ke klasice - tabule, křída. Společná práce, nikoli sledování počítače.
74. Počítače jsou dobrým pomocníkem, ale tabuli a křidu nenahradí; přespřílišné použití ve více předmětech unavuje i studenty.
75. Žádná technika nenahradí nutnost počítat, trénovat a řešit mnoho příkladů.
76. Využívám webové stránky: rvp.cz, <http://www.eucitel.cz/>, stránky CERMAT a VŠ (přijímačky), stránky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (diplomky) a další.
77. Na matematiku mívám celou třídu, ale počítačové učebny jsou jen pro poloviny tříd, proto málokdy využitelné pro samostatnou práci žáků na počítačích - musíme vymýšlet "projektové dny" s dalšími předměty. :) Při vlastní výuce využíváme elektronické materiály, které jsou umístěny také na "edu" - jako žákům dostupné elektronické učebnice (odpadá tak nákup papírových učebnic). Máme tam vysvětlenou teorii, několik řešených příkladů, neřešené příklady a odkazy na různé sbírky příkladů.
78. Není lehké využívat obecně na školách frontálně ICT techniku. Nelze spoléhat na stoprocentní funkčnost. Je to velký problém, který rychle odradí. Zahlcování dalšími a dalšími možnostmi využití je pro nás velice vysilující. Klasická hodina nelze nahradit. Mohu vám poslat kusé informace, protože jsem změnila místo, ale mám bohaté zkušenosti z předcházejícího působiště. Využití programů jsem napsala podle současných kolegů. Pozitivně hodnotím stránky MFF UK, paní Robová vypracovává s diplomanty výukový a procvičovací software po jednotlivých tématech.
79. Využití počítačů ve výuce pro studenty je na naší škole technicky téměř nemožné (2 počítačové třídy (15 PC) využité pro informatiku, na matematiku u počítače už, bohužel, není prostor).
80. Velmi záleží na počtu hodin/týden. Dotace je různá, tedy i možnost využití ICT.
81. Jaká je vhodná náhrada za Famulus, je free a běží pod Win10?
82. Jsem ráda, že se nabídka rozšiřuje.
83. Počítač ve výuce používám nejčastěji pro tvorbu pracovních listů. Vzhledem k tomu, že učím na odborné škole se zaměřením na cestovní ruch a hotelnictví, kde je RVP ve srovnání s gymnázii a technickými školami značně omezené, tak v hodinách nevyužiji aplikace na výpočty nebo rýsování složitějších příkladů.
84. Zařadit výuku pomocí počítače do RVP, upravit státní maturitu, aby u ní bylo možné používat matematický software.

85. Dané programy využívám hlavně pro domácí přípravu a osobní výpočty, protože ve škole nemáme dostatečné softwarové vybavení ani moc možností vyučovat matematiku v IT učebně.
86. Vyučující ve věku 40 - 50, nemáme zkušenosti s novými programy. GeoGebru znám, ale neumím používat. Finance na další vzdělávání jsou u nás ve škole problematické.
87. Jsem vždy ráda, za nové možnosti ve výuce, ale bohužel to nic nezmění na tom, že děti jsou čím dál tím méně inteligentní a snaživé. Někdy u nich technika rozvíjí spíše nepozornost a závislost na aplikacích.
88. Sbírky příkladů využitelné s nějakým vhodným free software bych uvítal.
89. Využívám hotové materiály na internetu.
90. Používám vlastní programy, či našich studentů programování.
91. Používám volně stažitelné programy.
92. Používám vlastní programy.
93. Ráda využívám freeware programy.
94. Speciální programy nepoužívám, používám materiály stáhnuté z internetu.
95. Používám vlastní prezentace.
96. Většinou používám hotové aplikace, kde si studenti vytvoří účet a mají okamžitou zpětnou vazbu, já jen vybírám úkoly, které mají plnit a v přehledné tabulce zkontroluji, zda studenti splnili a v hodinách reagují.
97. Používám program pro výuku funkcí ve středoškolské matematice od Daniela Míči.

PŘÍLOHA P VI: KRITICKÉ HODNOTY TESTOVACÍHO KRITÉRIA

χ^2

Stupeň volnosti	Hladina významnosti	
	0,05	0,01
1	3,841	6,635
2	5,991	9,210
3	7,815	11,341
4	9,488	13,277
5	11,070	15,086
6	12,592	16,812
7	14,067	18,475
8	15,507	20,090
9	16,919	21,666
10	18,307	23,209
11	19,675	24,725
12	21,026	26,217
13	22,362	27,688
14	23,685	29,141
15	24,996	30,578
16	26,296	32,000
17	27,587	33,409
18	28,868	34,805
19	30,144	36,191
20	31,410	37,576
21	32,671	38,932
22	33,924	40,289
23	35,172	41,638
24	36,415	42,980
25	37,652	44,314
26	38,885	45,642
27	40,113	46,963
28	41,337	48,278
29	42,557	49,588
30	43,773	50,892