

# Wolfram Mathematica

## Algebraické výrazy

### Zjednodušení algebraického výrazu

**Příklad 1.** Zjednodušte:

$$\text{a) } V_1 = \frac{8x-6}{x^3+27} \cdot \frac{x^2-3x+9}{9-12x}, \quad \text{b) } V_2 = \frac{25 + \frac{1}{a^2} - \frac{10}{a}}{5 - \frac{1}{a}}, \quad \text{c) } V_3 = \frac{216 - k^3}{k^2 + 36 + 6k}, \quad \text{d) } V_4 = \frac{\text{Sin}[x]^2 \text{Cot}[x]}{\text{Sin}[x]^2 - 1}.$$

**Řešení:** Ke zjednodušení výrazu slouží příkaz *Simplify*[výraz].

$$\text{Simplify}\left[\frac{8x-6}{x^3+27} \cdot \frac{x^2-3x+9}{9-12x}\right]$$

$$-\frac{2}{9+3x}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{25 + \frac{1}{a^2} - \frac{10}{a}}{5 - \frac{1}{a}}\right]$$

$$5 - \frac{1}{a}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{216 - k^3}{k^2 + 36 + 6k}\right]$$

$$6 - k$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\text{Sin}[x]^2 \text{Cot}[x]}{\text{Sin}[x]^2 - 1}\right]$$

$$-\text{Tan}[x]$$

### Rozložení výrazu na součin

**Příklad 2.** Rozložte na součin:

$$\text{a) } V_1 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{b) } V_2 = x^4 - 15x^3 + 53x^2 - 135x + 396, \quad \text{c) } V_3 = x^3 + 3x^2y - xy^2 - 3y^3.$$

**Řešení:** K rozložení výrazu na součin slouží příkaz *Factor*[výraz].

$$\text{Factor}[a^2 + 2ab + b^2]$$

$$(a + b)^2$$

Factor  $[x^4 - 15x^3 + 53x^2 - 135x + 396]$

$$(-11 + x)(-4 + x)(9 + x^2)$$

Factor  $[x^3 + 3x^2y - xy^2 - 3y^3]$

$$(x - y)(x + y)(x + 3y)$$

## Roznásobení výrazů

**Příklad 3.** Vynásobte:

a)  $V_1 = (m - n)(2m - 3)$ , b)  $V_2 = (x^2 + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ , c)  $V_3 = (a - b - c)(d - e - f)$ .

**Řešení:** K roznásobení mnohočlenů slouží příkaz *Expand[výraz]*.

Expand  $[(m - n)(2m - 3)]$

$$-3m + 2m^2 + 3n - 2mn$$

Expand  $[(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)]$

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5$$

Expand  $[(a - b - c)(d - e - f)]$

$$ad - bd - cd - ae + be + ce - af + bf + cf$$

## Doplnění na čtverec

(\*Wolfram Mathematica neobsahuje funkci pro převedení výrazu na čtverec, proto je zde vložena.\*)

```
CompleteTheSquare[f_, x_] := Module[{a, b, c},
  {c, b, a} = CoefficientList[f, x];
  a (x + b/2/a)^2 + Simplify[(c - b^2/4/a)]]
```

**Příklad 4.** Doplňte na čtverec:

a)  $V_1 = x^2 - 3x$ , b)  $V_2 = x^2 + 10x + 28$ , c)  $V_3 = 2x^2 - 7x - 1$ .

**Řešení:** Výraz doplníme na čtverec tak, že užijeme příkaz *CompleteTheSquare[výraz,proměnná]*, jak je ukázáno níže na příkladech.

CompleteTheSquare  $[x^2 - 3x, x]$

$$-\frac{9}{4} + \left(-\frac{3}{2} + x\right)^2$$

```
CompleteTheSquare[x^2 + 10 x + 28, x]
```

```
3 + (5 + x)^2
```

```
CompleteTheSquare[2 x^2 - 7 x - 1, x]
```

```
- 57/8 + 2 (-7/4 + x)^2
```

## Rovnice, nerovnice a jejich soustavy

### Řešení rovnice

**Příklad 1.** Řešte rovnice v  $\mathbb{R}$ :

a)  $4x - 16 = 9 - x$ , b)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ , c)  $\sin[x] + \cos[x] = 1$ , d)  $2^{3x-1} = 8^{2x+1}$ .

**Řešení:** K vyřešení rovnice použijeme příkaz *Solve[rovnice, proměnná]*.

Pozn.: Místo klasického rovná se (=) používáme dvojité (==).

```
Solve[4 x - 16 == 9 - x, x]
```

```
{{x -> 5}}
```

```
Solve[x^3 - 2 x^2 - x + 2 == 0, x]
```

```
{{x -> -1}, {x -> 1}, {x -> 2}}
```

```
Solve[Sin[x] + Cos[x] == 1, x]
```

```
{x -> ConditionalExpression[2 π C[1], C[1] ∈ Integers]},  
{x -> ConditionalExpression[π/2 + 2 π C[1], C[1] ∈ Integers]}}
```

```
Solve[2^3 x - 1 == 8^2 x + 1, x, Reals]
```

```
{{x -> -4/3}}
```

### Vyjádření neznámé ze vzorce

**Příklad 2.** Vyjádřete ze vzorce  $r$ .

a)  $2q - 3r = \frac{q-2}{2} + 1$ , kde  $q$  je reálný parametr,

b)  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , kde  $V$  je reálný kladný parametr.

**Řešení:** K vyjádření neznámé ze vzorce budeme postupovat stejně jako při řešení rovnice, ale místo proměnné píšeme neznámou, kterou chceme vyjádřit.

$$\text{Solve}[2q - 3r == \frac{q-2}{2} + 1, r]$$

$$\{\{r \rightarrow \frac{q}{2}\}\}$$

$$\text{Solve}[V == \frac{4}{3} \pi r^3, r]$$

$$\{\{r \rightarrow -\frac{(-\frac{3}{\pi})^{1/3} V^{1/3}}{2^{2/3}}\}, \{r \rightarrow \frac{(\frac{3}{\pi})^{1/3} V^{1/3}}{2^{2/3}}\}, \{r \rightarrow \frac{(-1)^{2/3} (\frac{3}{\pi})^{1/3} V^{1/3}}{2^{2/3}}\}\}$$

## Řešení soustavy rovnic

**Příklad 3.** Řešte soustavu rovnic:

$$\text{a) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} a+b+c = 8 \\ a-b-c = 4 \\ a+c = 2 \end{cases}$$

**Řešení:** K vyřešení soustavy rovnic použijeme funkci `Solve` s následujícím nastavením: `Solve[{rovnice1,rovnice2,...,rovniceN},{proměnná1,proměnná2,...,proměnnáN}]`.

$$\text{Solve}[\{(x-2)^2 + (y-1)^2 == 4, x^2 + y^2 == 1\}, \{x, y\}]$$

$$\{\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow \frac{4}{5}, y \rightarrow -\frac{3}{5}\}\}$$

$$\text{Solve}[\{a+b+c == 8, a-b-c == 4, a+c == 2\}, \{a, b, c\}]$$

$$\{\{a \rightarrow 6, b \rightarrow 6, c \rightarrow -4\}\}$$

## Řešení nerovnice

**Příklad 4.** Řešte nerovnice v  $\mathbb{R}$ :

$$\text{a) } 2x - 4 > 0, \quad \text{b) } x^2 - x > 0, \quad \text{c) } \frac{2x+1}{2x-1} \leq 0.$$

**Řešení:** K řešení nerovnice slouží příkaz `Reduce[nerovnice,proměnná]`.

$$\text{Reduce}[2x - 4 > 0, x]$$

$$x > 2$$

$$\text{Reduce}[x^2 - x > 0, x]$$

$$x < 0 \mid \mid x > 1$$

$$\text{Reduce}[\frac{2x+1}{2x-1} \leq 0, x]$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$

## Řešení soustavy nerovnic

**Příklad 5.** Řešte soustavu nerovnic v  $\mathbb{R}$ :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 1 \leq x + 6 \\ x + 2 > 3 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 17 > 8x - 10 \\ 3 - x \leq 5 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2 \leq 2x + 3 \\ x \leq 5 \end{cases}.$$

**Řešení:** K řešení soustavy nerovnic slouží příkaz `Reduce[{nerovnice1,nerovnice2,...nerovnicen},proměnná]`.

```
Reduce[{2 x - 1 ≤ x + 6, x + 2 > 3}, x]
```

```
1 < x ≤ 7
```

```
Reduce[{5 x + 17 > 8 x - 10, 3 - x ≤ 5}, x]
```

```
-2 ≤ x < 9
```

```
Reduce[{3 x - 2 ≤ 2 x + 3, x ≤ 5}, x]
```

```
x ≤ 5
```

## Funkce a jejich vlastnosti

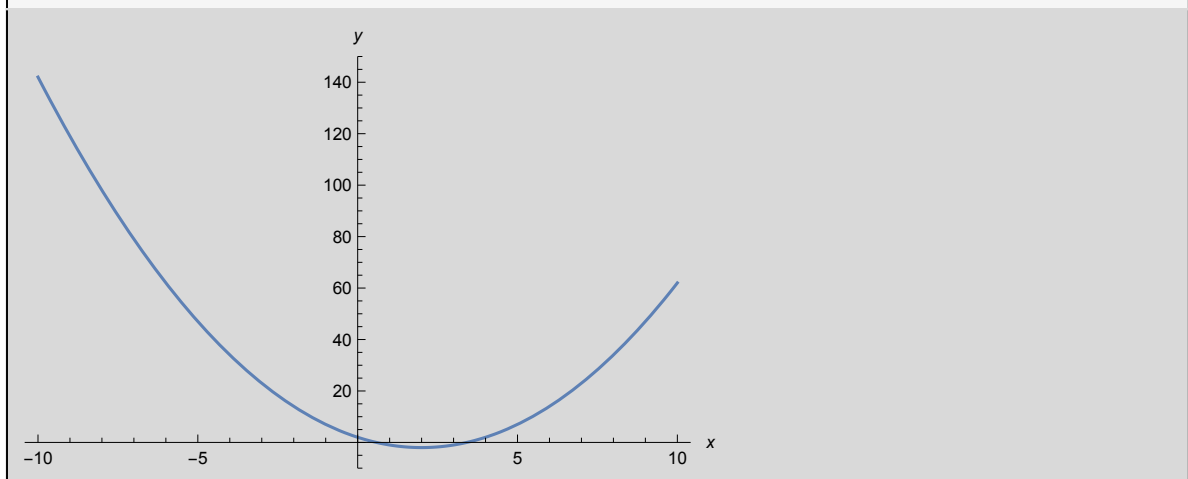
### Vykreslení grafů funkcí

**Příklad 1.** Vykreslete grafy funkcí:

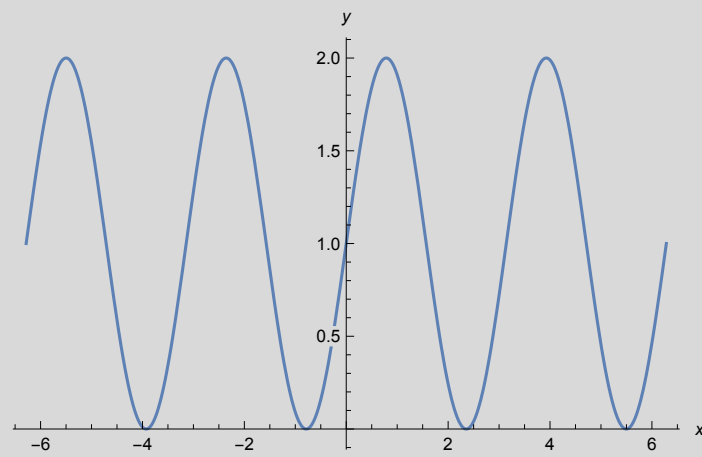
$$\text{a) } y = x^2 - 4x + 2, \quad \text{b) } y = \sin[2x] + 1, \quad \text{c) } y = \sqrt{9 - x^2}, \quad \text{d) } y = \ln 4x.$$

**Řešení:** K vykreslení grafu použijeme funkci `Plot` tak, jak je ukázáno na příkladech níže.

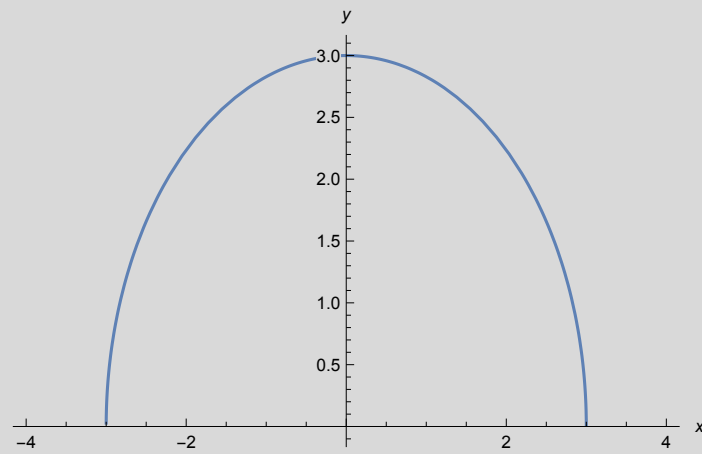
```
Plot[x^2 - 4 x + 2, {x, -10, 10}, AxesLabel -> {x, y}]
```



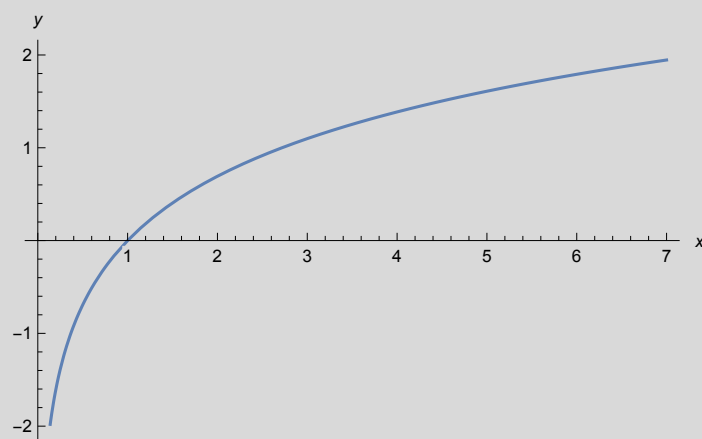
```
Plot[Sin[2 x] + 1, {x, -2 Pi, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y}]
```



```
Plot[Sqrt[9 - x^2], {x, -4, 4}, AxesLabel -> {x, y}]
```



```
Plot[Log[x], {x, 0, 7}, AxesLabel -> {x, y}]
```



**Příklad 2.** Do jednoho grafu vykreslete grafy funkcí:

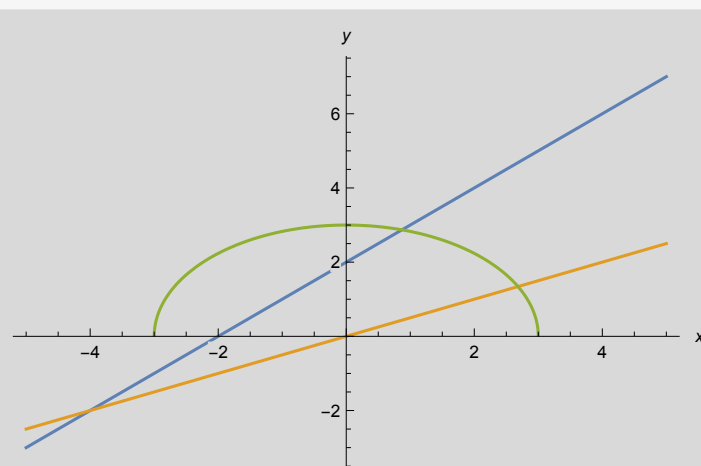
a)  $y = x + 2$ ,  $y = 0,5x$ ,  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ,

b)  $y = x^2 + 2x + 11$ ,  $y = 3 - x^2$ ,  $y = x^2 + 3x - 11$ ,

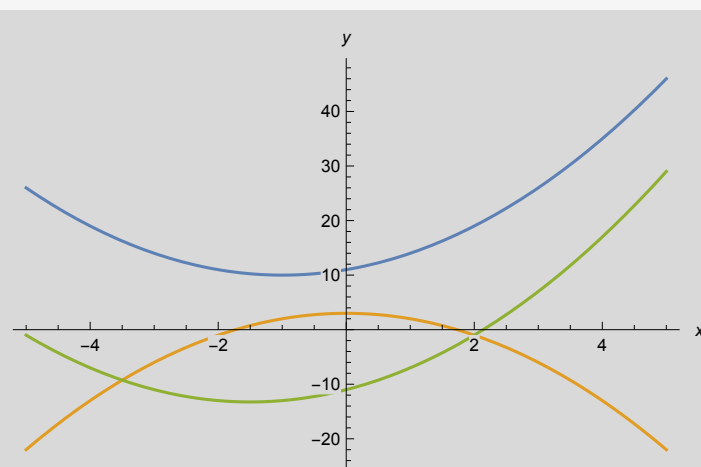
c)  $y = 2 \sin[2x]$ ,  $y = -\cos[4x]$ ,  $y = \tan\left[\frac{x}{4}\right]$ .

**Řešení:** K vykreslení grafu použijeme funkci *Plot* tak, jak je ukázáno na příkladech níže.

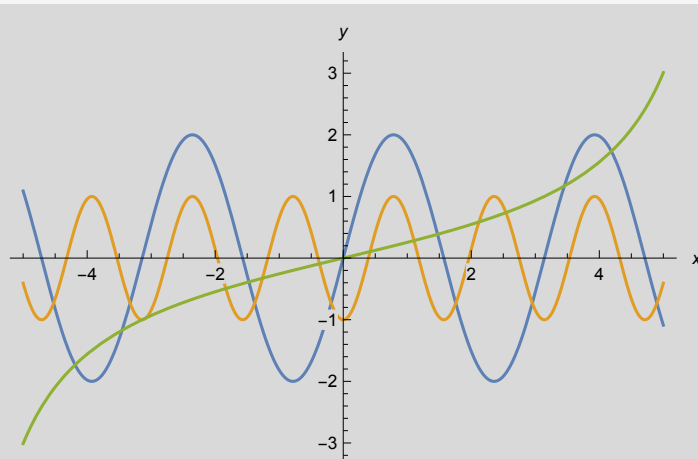
```
Plot[{x + 2, 0.5 x, Sqrt[9 - x^2]}, {x, -5, 5}, AxesLabel -> {x, y}]
```



```
Plot[{x^2 + 2 x + 11, 3 - x^2, x^2 + 3 x - 11}, {x, -5, 5}, AxesLabel -> {x, y}]
```



```
Plot[{2 Sin[2 x], -Cos[4 x], Tan[x/4]}, {x, -5, 5}, AxesLabel -> {x, y}]
```

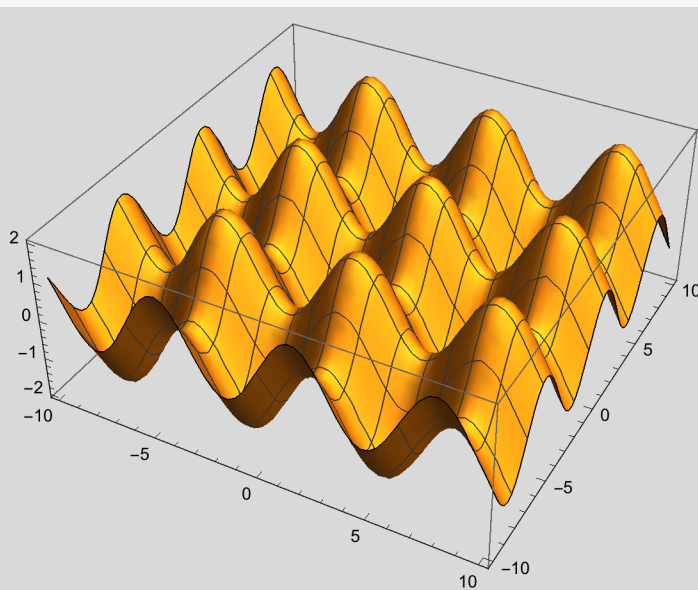


**Příklad 3.** Vykreslete grafy prostorových funkcí:

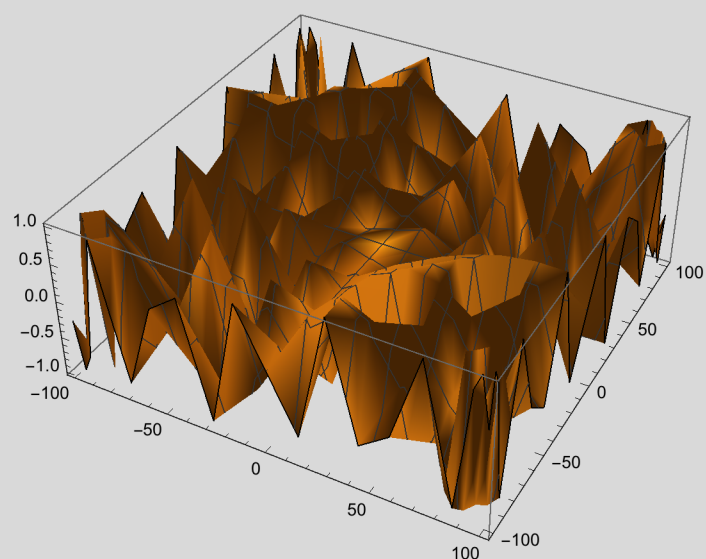
a)  $z = \sin[x] + \sin[y]$ , b)  $z = \sin[x*y]$ , c)  $z = \sqrt{|x y|}$ , d)  $z = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x^2 + y^2)}$ .

**Řešení:** K vykreslení grafu použijeme funkci `Plot3D` tak, jak je ukázáno na příkladech níže.

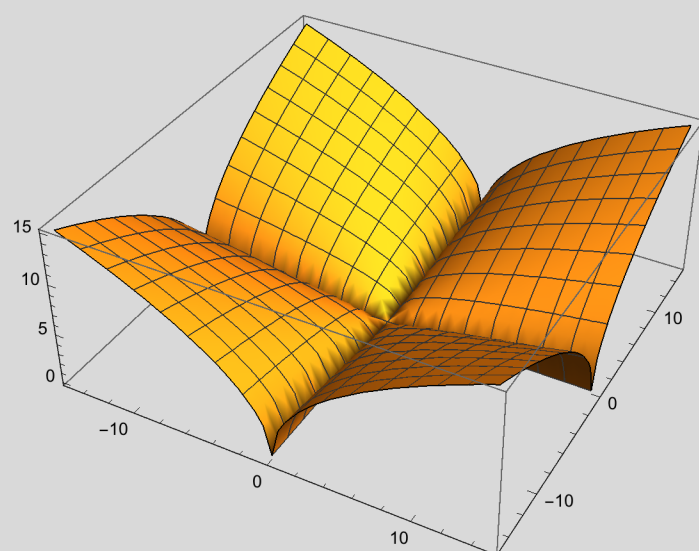
```
Plot3D[Sin[x] + Sin[y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

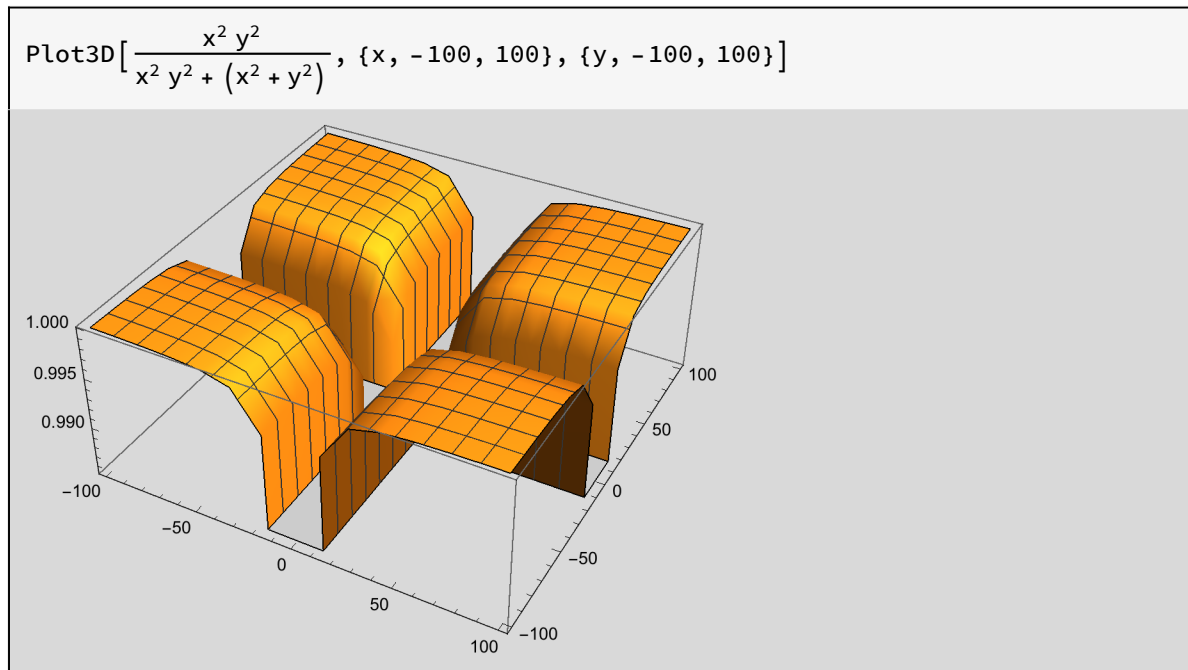


```
Plot3D[Sin[x * y], {x, -100, 100}, {y, -100, 100}]
```



```
Plot3D[Sqrt[Abs[x*y]], {x, -15, 15}, {y, -15, 15}]
```





## Určení vlastností funkcí

**Příklad 1.** Určete definiční obor  $D(f)$  a obor hodnot  $H(f)$  funkcí:

a)  $y = \sqrt{x-8}$ , b)  $y = \text{Log}[4x^2 - 8]$ , c)  $y = \frac{4x}{3x-9}$ , d)  $y = x^2 + 6x$ .

**Řešení:** Definiční obor zjistíme použitím funkce `FunctionDomain[funkce,x]` a obor hodnot pomocí funkce `FunctionRange[funkce,x,y]`.

`FunctionDomain[ $\sqrt{x-8}$ , x]`

$x \geq 8$

`FunctionRange[ $\sqrt{x-8}$ , x, y]`

$y \geq 0$

`FunctionDomain[ $\text{Log}[4x^2 - 8]$ , x]`

$x < -\sqrt{2} \ || \ x > \sqrt{2}$

`FunctionRange[ $\text{Log}[4x^2 - 8]$ , x, y]`

True

`FunctionDomain[ $\frac{4x}{3x-9}$ , x]`

$x < 3 \ || \ x > 3$

$$\text{FunctionRange}\left[\frac{4x}{3x-9}, x, y\right]$$

$$y < \frac{4}{3} \mid \mid y > \frac{4}{3}$$

$$\text{FunctionDomain}[x^2 + 6x, x]$$

True


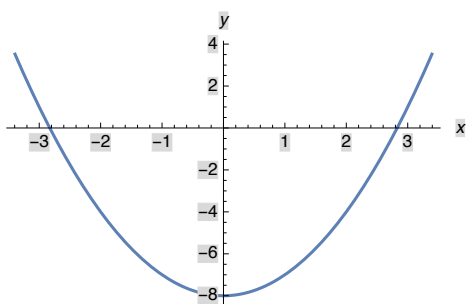
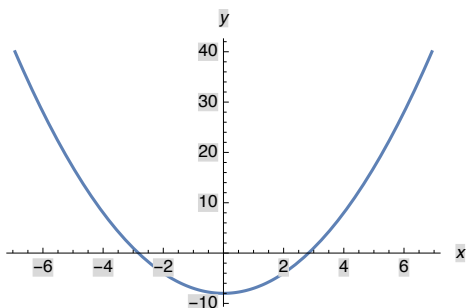
$$\text{FunctionRange}[x^2 + 6x, x, y]$$

$$y \geq -9$$

**Příklad 2.** Určete paritu funkcí a případnou periodu:

a)  $y = x^2 - 8$ , b)  $y = \frac{1+x}{1-x}$ , c)  $y = \frac{\text{Sin}[x]}{\text{Cos}[x]}$ , d)  $y = \frac{1}{4x}$ .

**Řešení:** Mathematica neobsahuje příkaz pro vyšetření parity. Využijeme tzv. Wolfram | Alpha query.

 parity  $y = x^2 - 8$ 
Input interpretation: +
 
Result: + $y(x) = -8 + x^2$  is an even functionParity relation: + $y(-x) = -8 + (-x)^2 = -8 + x^2 = y(x)$ Plots: +
 min   max  

 min   max  
Alternate form: + $-x^2 + y + 8 = 0$ Properties as a real function: +

Domain:


 $\mathbb{R}$  (all real numbers)

Range:

 $\{y \in \mathbb{R} : y \geq -8\}$ 

$\mathbb{R}$  is the set of real numbers »

WolframAlpha +

 parity  $y = \frac{1+x}{1-x}$

Input interpretation: +

parity  $y(x) = \frac{1+x}{1-x}$

Result: +

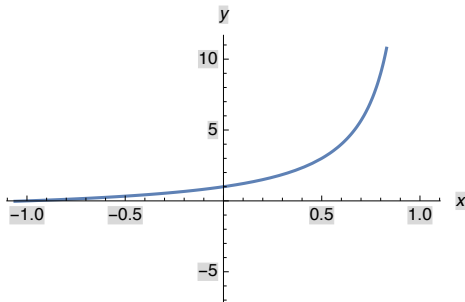
$y(x) = \frac{1+x}{1-x}$  is neither even nor odd

Expanded forms: Step-by-step solution +

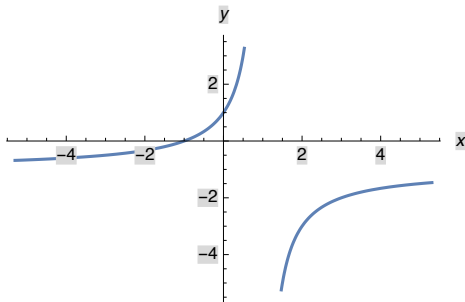
$$y = \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x}$$

Plots: +



min  max



min  max

Alternate forms: +

$$y = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{-x-1}{x-1}$$

Alternate form assuming x and y are positive: +

$$\frac{x+1}{x-1} + y = 0$$

Properties as a real function:

Domain:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

Range:


$$\{y \in \mathbb{R} : y \neq -1\}$$

Injectivity:

injective (one-to-one) on its domain

$\mathbb{R}$  is the set of real numbers >>

WolframAlpha +

 parity  $y = -\frac{\text{Sin}[x]}{\text{Cos}[x]}$

Input interpretation:

parity  $y(x) = -\tan(x)$

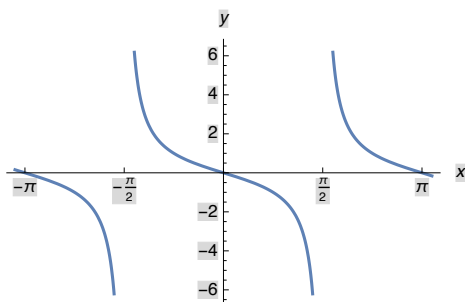
Result:

$y(x) = -\tan(x)$  is an odd function

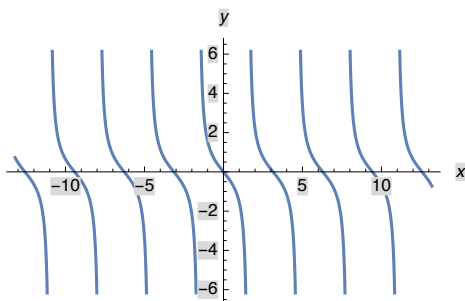
Parity relation:

$$y(-x) = -\tan(-x) = -(-\tan(x)) = -y(x)$$

Plots:



min  max



min  max

Alternate forms:

$$\tan(x) + y = 0$$

$$y = -\frac{i(e^{-ix} - e^{ix})}{e^{-ix} + e^{ix}}$$

Alternate form assuming x and y are real: +

$$y = -\frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$$

Properties as a real function: Approximate forms +

Domain:

$$\{x \in \mathbb{R} : (2x < \pi(4n + 3) \text{ and } 2x > 4\pi n + \pi \text{ and } n \in \mathbb{Z}) \text{ or } (-\frac{\pi}{2} < x - 2\pi n < \frac{\pi}{2} \text{ and } n \in \mathbb{Z})\}$$

Range:

$\mathbb{R}$  (all real numbers)

Periodicity:

periodic in x with period  $\pi$


Surjectivity:

surjective onto  $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$  is the set of real numbers »

$\mathbb{Z}$  is the set of integers »

WolframAlpha +

 parity  $y = \frac{1}{4x}$

Input interpretation: +

parity	$y(x) = \frac{1}{4x}$
--------	-----------------------

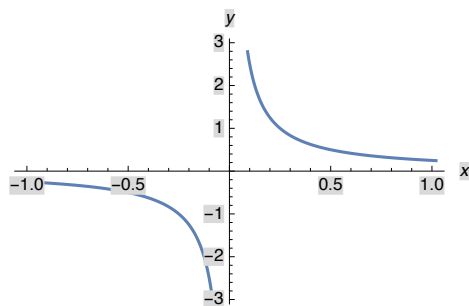
Result: +

$y(x) = \frac{1}{4x}$  is an odd function

Parity relation: +

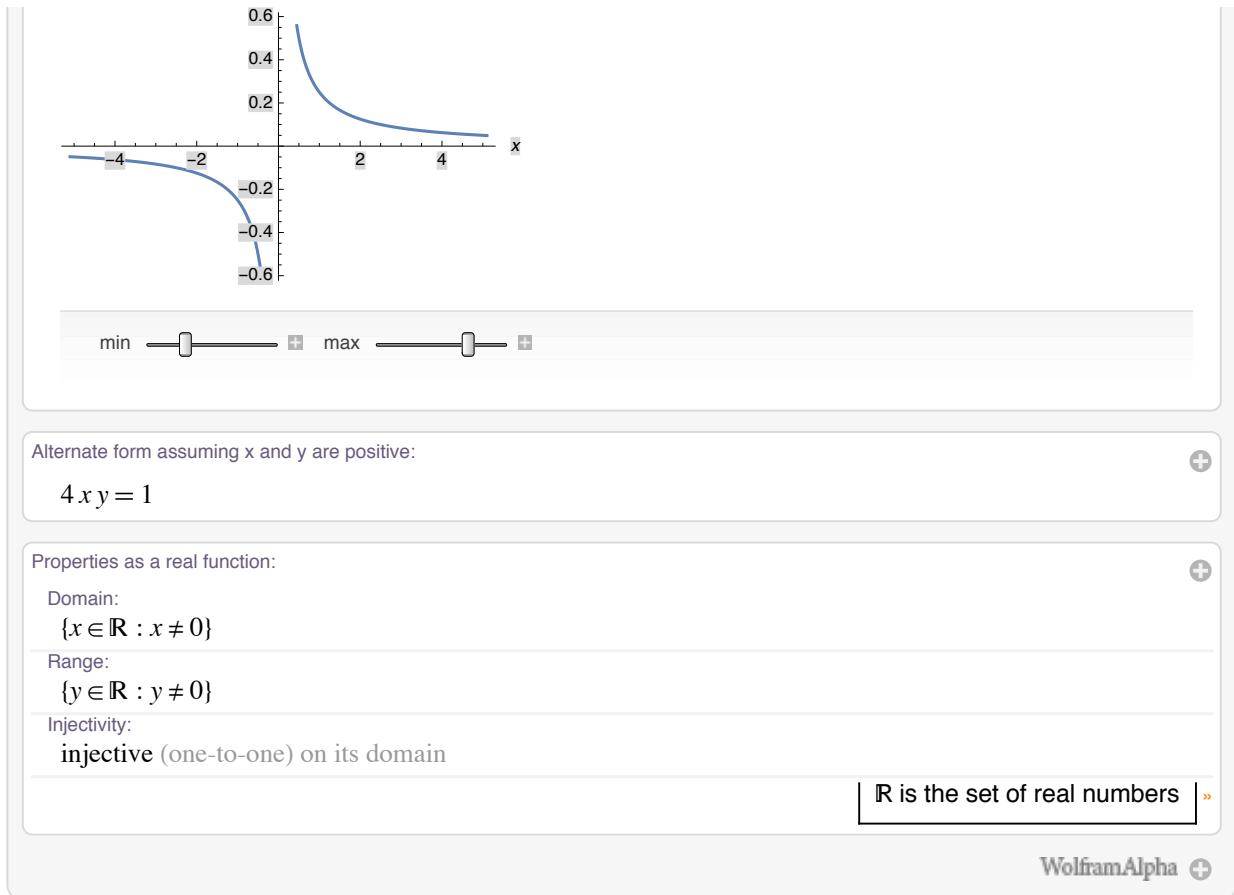
$$y(-x) = \frac{1}{4(-x)} = -\frac{1}{4x} = -y(x)$$

Plots: +



min  max

y



## Využití ve vyšší matematice

### Maticový počet

**Příklad 1.** Jsou dány matice  $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Vypočtěte:

a)  $A^{-1}$  b)  $B^{-1}$ , c)  $A \cdot B$  d)  $B \cdot A$ , e)  $|A|$ , f)  $|B|$ .

**Řešení:** Inversní matici vypočítáme příkazem `Inverse[matice]` a determinant příkazem `det[matice]`.  
Ve všech případech využíváme ještě funkci `MatrixForm`, aby se nám výsledek zobrazil jako matice.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{MatrixForm}[\text{Inverse}[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}]]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{MatrixForm}[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}]$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 16 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\text{MatrixForm}\left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{array}\right)\right]$$

$$\left(\begin{array}{cc} 7 & 8 \\ 31 & 36 \end{array}\right)$$

$$\text{Det}\left[\left(\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{array}\right)\right]$$

$$-2$$

$$\text{Det}\left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right)\right]$$

$$-2$$

## Diferenciální a integrální počet

**Příklad 1.** Vypočtěte derivace funkcí:

$$\text{a) } y = x^4 - 3x + 9 \quad \text{b) } y = \text{Sin}[x] \text{Cos}[x], \quad \text{c) } y = x \sqrt{9 - x^2}.$$

**Řešení:** K výpočtu derivace se použije příkaz  $\partial_x$  (funkce).

$$\partial_x (x^4 - 3x + 9)$$

$$-3 + 4x^3$$

$$\partial_x (\text{Sin}[x] \text{Cos}[x])$$

$$\text{Cos}[x]^2 - \text{Sin}[x]^2$$

$$\partial_x (x \sqrt{9 - x^2})$$

$$-\frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} + \sqrt{9 - x^2}$$

**Příklad 2.** Integrujte:

$$\text{a) } y = x^3 + x^2 + x + 1, \quad \text{b) } y = \text{Log}[x], \quad \text{c) } y = \frac{x}{x-1}.$$

**Řešení:** K výpočtu integrace použijeme funkci  $\text{Integrate}$  [funkce, proměnná].

$$\text{Integrate}[x^3 + x^2 + x + 1, x]$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

$$\text{Integrate}[\text{Log}[x], x]$$

$$-x + x \text{Log}[x]$$

$$\text{Integrate}\left[\frac{x}{x-1}, x\right]$$

$$x + \text{Log}[-1 + x]$$

## Součet nekonečné řady

**Příklad 1.** Určete součet číselných řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-4)(n+1)}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 11^n}{44^n}, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}.$$

**Řešení:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+4)(n+1)}$$

$$\frac{13}{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 11^n}{44^n}$$

$$\frac{8}{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{20}$$