

Popis kinematiky, pracovního prostoru a dynamiky existujícího robota a analýza řízení jeho pohybu

Bc. Libor Kobyda

Diplomová práce
2016

 Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Libor Kobyda**

Osobní číslo: **A14395**

Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Popis kinematiky, pracovního prostoru a dynamiky existujícího robota a analýza řízení jeho pohybu**

Téma anglicky: **A Description of a Given Robot's Kinematics, Work-space and Dynamics and an Analysis of Its Motion Control**

Zásady pro vypracování:

1. Popište kompletně kinematiku existujícího robota se 4 stupni volnosti.
2. Určete jeho pracovní prostor.
3. Výsledek použijte na vytvoření pohybových rovnic.
4. Provedte analýzu řízení pohybu.
5. Porovnejte použití stejnosměrných motorů, krokových motorů a synchronních motorů s permanentním magnetem jako akčních členů v kloubech daného robota.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Robotika [online]. 1. vyd. 2012 [cit. 2016-02-02]. ISBN 978-80-7454-223-7. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18589>
2. ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. Elektromechanické akční členy. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009, 127 s. ISBN 978-80-7318-835-1.
3. CRAIG, John J. Introduction to robotics: mechanics & control. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1986, viii, 303 p. ISBN 0201103265.
4. BRADLEY, D. Mechatronics: electronics in products and processes. London: Chapman & Hall, 1991, vii, 510 s. ISBN 0-412-58290-2.
5. Softwarový systém DYNAST. [online]. [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: <http://virtual.cvut.cz/dynastcz/>

Vedoucí diplomové práce:

doc. RNDr. Ing. Zdeněk Úředníček, CSc.
Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

19. února 2016

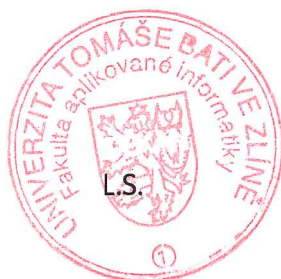
Termín odevzdání diplomové práce:

25. května 2016

Ve Zlíně dne 19. února 2016



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

10.5.2016



.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cieľom diplomovej práce bolo vytvorenie kompletného popisu kinematiky existujúceho robotického ramena so 4 stupňami voľnosti. Pomocou tohto popisu vypočítať jeho pracovný priestor a vytvoriť pohybové rovnice pre popis jeho dynamických vlastností, vďaka ktorým nakoniec navrhnuť riadenie v kĺboch daného robota.

Klíčová slova:

Kinematika, Denavit-Hartenberg, Pohybové rovnice, Robot

ABSTRACT

The aim of this thesis is complete kinematic description of robotic manipulator with 4 degrees of freedom. Its workspace and equations of motion will be determined according this description to acquire its dynamic properties. With the use of dynamic description, the control scheme of joints will be designed.

Keywords:

Kinematics, Denavit-Hartenberg, Equations of motion, Robot

Týmto by som sa chcel poďakovať môjmu vedúcemu diplomovej práce, ktorým bol pán doc. RNDr. Ing. Zdeňek Úředníček, CSc., za jeho odbornú pomoc, cenné rady a čas, ktorý mi venoval pri vedení tejto práce. Ďalej by som sa chcel poďakovať mojej rodine a priateľke, ktorá pri mne stále počas celého štúdia.

Nemožné je len silné slovo, ktoré okolo seba rozhadzujú malí ľudia, ktorí si myslia, že je ľahšie žiť na svete, kde budú len dostávať, namiesto toho, aby objavovali silu, ktorá to dokáže zmeniť. Nemožné nie je fakt, je to postoj. Nemožné nie je tvrdenie, je to výzva. Nemožné je nevyužitá sila. Nemožné je dočasný stav. Nemožné neexistuje.

[Muhammad Ali]

OBSAH

| | |
|--|----|
| ÚVOD..... | 9 |
| I TEORETICKÁ ČASŤ..... | 10 |
| 1 KINEMATIKA..... | 11 |
| 1.1 SÚRADNICOVÝ SYSTÉM | 11 |
| 1.2 PRAVOTOČIVÁ SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA | 12 |
| 1.3 ODVODENIE ROTAČNÝCH MATÍC | 12 |
| 1.3.1 Príklad | 14 |
| 1.4 HOMOGÉNNA TRANSFORMÁCIA..... | 15 |
| 1.4.1 Inverzná homogénna transformácia | 16 |
| 1.5 DENAVIT-HARTENBERG | 16 |
| 1.5.1 Denavit-Hartenbergove parametre | 17 |
| 1.6 ODVODENIE VŠEOBECNEJ TRANSFORMAČNEJ MATICE | 17 |
| 1.7 RIEŠENIE GONIOMETRICKEJ ROVNICE TYPU $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = c$ | 18 |
| 1.7.1 Podmienky riešiteľnosti | 19 |
| 1.8 UMIESTNENIE ÔS NA MANIPULÁTOR | 20 |
| 1.9 TABUĽKA DENAVIT-HARTENBERGOVÝCH PARAMETROV | 20 |
| 1.10 TRANSFORMAČNÉ MATICE | 21 |
| 1.11 TRANSFORMAČNÁ MATICA 0T_6 | 21 |
| 1.12 VÝPOČET PRACOVNÉHO PRIESTORU ROBOTA | 22 |
| 1.13 VÝPOČET INVERZNEJ KINEMATICKEJ ÚLOHY | 23 |
| 1.13.1 Výpočet uhlu φ_1 | 24 |
| 1.13.2 Výpočet uhlu φ_2 | 25 |
| 1.13.3 Výpočet uhlu φ_3 | 28 |
| 2 DYNAMIKA | 29 |
| 2.1 LAGRANGEOVE ROVNICE..... | 30 |
| 2.1.1 Lagrangeova rovnica 2 druhu..... | 30 |
| 2.2 KINETICKÁ A POTENCIÁLNA ENERGIA | 31 |
| 2.2.1 Kinetická energia | 31 |
| 2.2.2 Potenciálna energia | 31 |
| 2.3 VÝPOČET KINETICKEJ A POTENCIÁLNEJ ENERGIE KLÍBOV..... | 32 |
| 2.3.1 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie základne | 32 |
| 2.3.2 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu m_1 | 32 |
| 2.3.3 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu m_2 | 35 |
| 2.4 VÝPOČET CELKOVEJ KINETICKEJ A POTENCIÁLNEJ ENERGIE..... | 37 |
| 2.4.1 Celková kinetická energia | 37 |
| 2.4.2 Celková potenciálna energia | 38 |
| 2.5 POHYBOVÉ ROVNICE | 38 |
| 2.5.1 Pohybová rovnica pre prvý kĺb | 39 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.5.2 | Pohybová rovnica pre druhý kĺb | 40 |
| 2.5.3 | Pohybová rovnica pre tretí kĺb | 40 |
| 2.6 | MATICOVÁ FORMA POHYBOVÝCH ROVNÍC | 41 |
| 2.6.1 | Symetrická matica zotrvačnosti D | 41 |
| 2.6.2 | Vektor rýchlostných väzieb H | 42 |
| 2.6.3 | Vektor gravitačnej sily G | 42 |
| 3 | ELEKTROMECHANICKE AKČNÉ ČLENY | 44 |
| 3.1 | KROKOVÝ MOTOR | 44 |
| 3.2 | JEDNOSMERNÝ MOTOR | 45 |
| 3.3 | SYNCHRÓNNY MOTOR | 46 |
| 3.3.1 | Synchrónny motor vyžadujúci pomocný štartér | 46 |
| 3.3.2 | Synchrónny motor podporujúci self-štart..... | 47 |
| II | PRAKTICKÁ ČASŤ | 48 |
| 4 | ROBOT MOVER4 | 49 |
| 4.1 | KONŠTRUKČNÉ PARAMETRE..... | 49 |
| 4.2 | PROGRAMOVÉ PROSTREDIE CPROG | 50 |
| 5 | DYNAST..... | 52 |
| 5.1 | PROSTREDIE PROGRAMU DYNAST | 53 |
| 6 | SIMULÁCIA..... | 56 |
| 6.1 | SIMULOVANIE ROBOTICKÉHO RAMENA | 56 |
| 6.2 | NÁVRH REGULÁCIE JEDNOSMERNÉHO MOTORA PRE UHOL φ_1 | 57 |
| 6.2.1 | Regulátor prúdu pre jednosmerný motor č.1..... | 59 |
| 6.2.2 | Regulátor polohy pre jednosmerný motor č.1 | 61 |
| 6.3 | NÁVRH REGULÁCIE JEDNOSMERNÉHO MOTORA PRE UHLY φ_2 A φ_3 | 63 |
| 6.4 | NÁVRH KROKOVÉHO MOTORA V REŽIME OTVORENEJ SLUČKY PRE UHOL φ_1 | 65 |
| 6.5 | NÁVRH KROKOVÉHO MOTORA V REŽIME OTVORENEJ SLUČKY PRE UHLY φ_2 A φ_3 | 66 |
| | ZÁVER | 68 |
| | ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY..... | 69 |
| | ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK..... | 71 |
| | ZOZNAM OBRÁZKOV | 72 |
| | ZOZNAM TABULIEK | 74 |
| | ZOZNAM PRÍLOH..... | 75 |

ÚVOD

V tejto diplomovej práci sa budeme venovať problematike robotiky. V dnešnej dobe sa s robotikou stretávame v mnohých odvetviach a to hlavne v priemysle alebo medicíne. Moderné technológie ako napríklad robotické manipulátory nám uľahčujú život a dokážu ušetriť podstatnú časť nášho času. V budúcnosti bude tento trend len pokračovať a začneme sa stretávať s čoraz viac prípadmi, kde bude možné robota využiť. Už dnes napríklad firma Google testuje použitie neurónových sietí v spojení s robotickými manipulátormi. Alebo projekt RoboEarth, ktorý je vlastne akýmsi konceptom samostatného internetu pre robotov, prostredníctvom ktorého budú môcť roboti pristupovať ku obrovskej databáze znalostí, ktorá by bola akýmsi kolektívnym vedomím.

Náplňou tejto práce bude objasniť problematiku matematického popisu robotického ramena, a to hlavne odvodenie kompletnej kinematiky, výpočet inverznej úlohy a odvodenie dynamiky robotického ramena. Nakoniec sa budeme zaoberať simuláciou tohto robotického ramena ako aj návrhom jednoduchej regulácia pre motory v kĺboch robotickej štruktúry.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 KINEMATIKA

Kinematika je časť vedy, ktorá sa zaoberá popisom pohybu telesa bez ohľadu na to čo ho spôsobilo. Pohyb teda je akákoľvek zmena polohy alebo orientácie telesa. Ak poznáme polohu v čase vieme pomocou derivácie získať :

1. Rýchlosť (dráha derivovaná podľa času)
2. Zrýchlenie (rýchlosť derivovaná podľa času)
3. RYV (trhnutie) (zrýchlenie derivované podľa času)

Kinematika sa delí na 2 zásadné problémy:

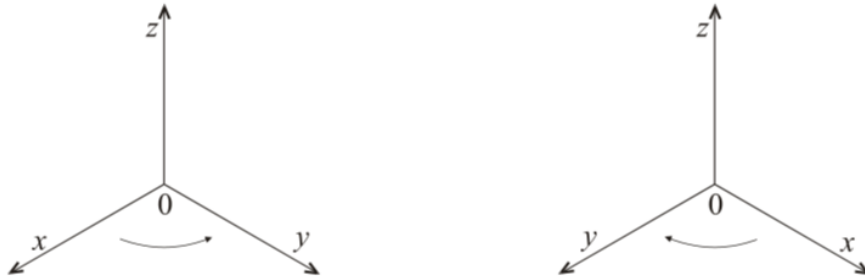
1. Priamy kinematický problém
 - a. Nastáva ak poznáme kinematické dáta pre kĺbové súradnice, ktoré použijeme na hľadanie polohy efektora v globálnej sústave súradníc.
2. Inverzný kinematický problém
 - a. Nastáva ak poznáme kinematické dáta pre polohu koncového efektora v kartézskej sústave súradníc a našou úlohou je nájsť kinematické dáta pre kĺbové súradnice. Inverzná kinematická úloha je väčšinou problém, ktorý ma viacero riešení. Vzhľadom na jej nelineárnosť je táto úloha náročnejšia na odvodenie. [16]

1.1 Súradnicový systém

Základná úloha, ktorú musíme sformulovať pri tvorbe popisu robotického systému, ktorý nám umožní jeho riadenie, je vytvorenie kinematických transformácií jednotlivých súčastí robota do globálnych súradníc. Najdôležitejšia súradná sústava je globálna ss. Táto ss. je pevne spojená s rámom (nepohyblivá časť priestoru, kde sa robot nachádza). Každý súčasti robota teda priradíme jednu alebo viacero lokálnych súradných sústav, ktoré nám umožnia popis robotického systému. Potom algebraický vzťah vyjadrujúci prepočet medzi jednotlivými sústavami sa nazýva transformačný vzťah. Najpoužívanejšia súradná sústava pri popise robotických systémov je kartézska sústava súradníc. Používajú sa ale aj cylindrické a sférické ss. [1]

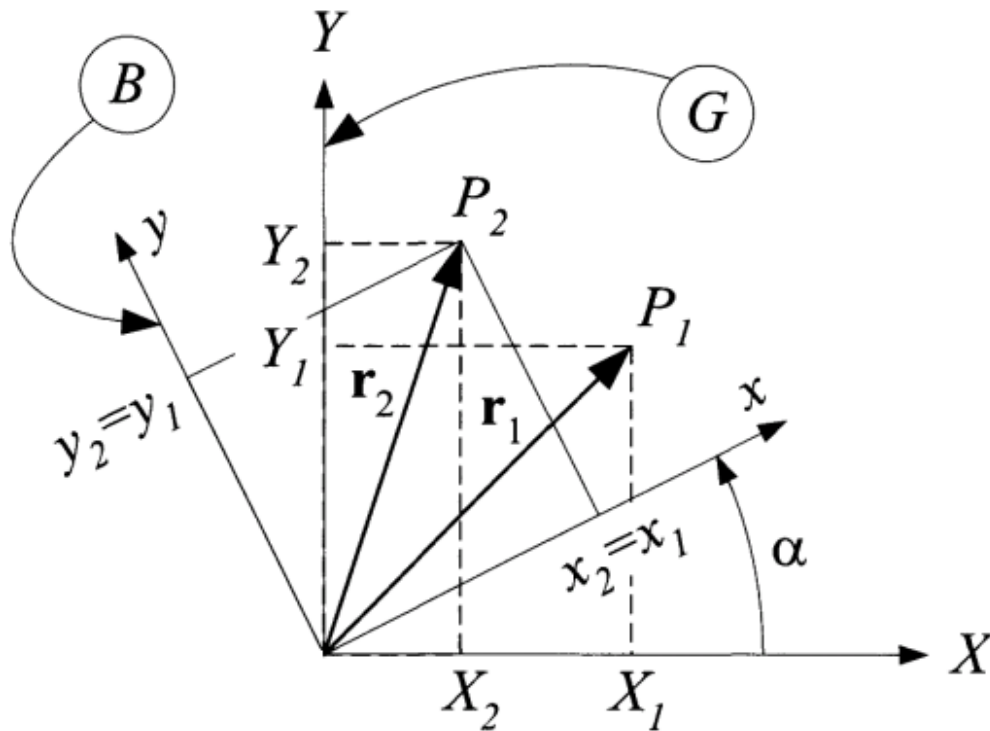
1.2 Pravotočivá súradnicová sústava

Pravotočivá sústava je sústava, v ktorej ak chceme premietnuť osu X do osy Y tak najkratšia možná cesta je doprava.



Obrázok 1 Zobrazenie pravotočivej a ľavotočivej ss. [2]

1.3 Odvodenie rotačných matíc



Obrázok 2 Zobrazenie rotácie okolo osy Z [1]

Ak sa tuhé teleso pootočí o uhol α okolo osy Z , potom sa bod P_1 presunie do bodu P_2 .

Nech $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ a $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ sú jednotkové vektory v osách súradných systémov O_{xyz} a O_{XYZ} .

Oba súradné systémy nech majú rovnaký počiatok. Potom bude polohový vektor \vec{r}_2 bodu P_2 vyjadrený v oboch ss. ako :

$${}^B\vec{r}_2 = x_2 \cdot \hat{i} + y_2 \cdot \hat{j} + z_2 \cdot \hat{k}$$

$${}^G\vec{r}_2 = X_2 \cdot \hat{I} + Y_2 \cdot \hat{J} + Z_2 \cdot \hat{K}$$

S použitím skalárneho súčinu a predchádzajúcej rovnice môžeme napísať:

$$X_2 = \hat{I} \cdot \vec{r}_2 = \hat{I} \cdot x_2 \cdot \hat{i} + \hat{I} \cdot y_2 \cdot \hat{j} + \hat{I} \cdot z_2 \cdot \hat{k}$$

$$Y_2 = \hat{J} \cdot \vec{r}_2 = \hat{J} \cdot x_2 \cdot \hat{i} + \hat{J} \cdot y_2 \cdot \hat{j} + \hat{J} \cdot z_2 \cdot \hat{k}$$

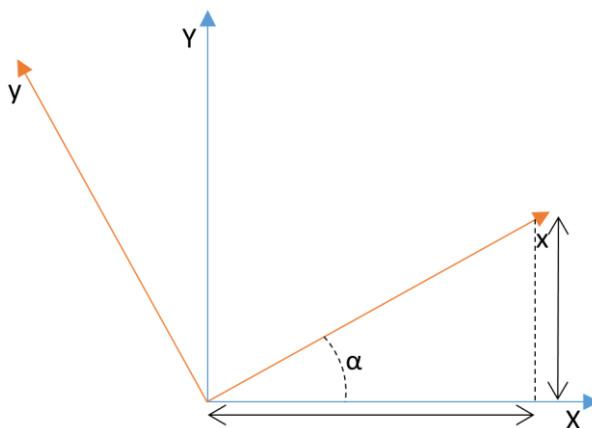
$$Z_2 = \hat{K} \cdot \vec{r}_2 = \hat{K} \cdot x_2 \cdot \hat{i} + \hat{K} \cdot y_2 \cdot \hat{j} + \hat{K} \cdot z_2 \cdot \hat{k}$$

Alebo pomocou matice:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I} \cdot \hat{i} & \hat{I} \cdot \hat{j} & \hat{I} \cdot \hat{k} \\ \hat{J} \cdot \hat{i} & \hat{J} \cdot \hat{j} & \hat{J} \cdot \hat{k} \\ \hat{K} \cdot \hat{i} & \hat{K} \cdot \hat{j} & \hat{K} \cdot \hat{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Ak teda chceme odvodiť rotačnú maticu pre os Z musíme postupovať nasledovne. Vektory $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ sa rovnajú:

$${}^G\hat{I} = (1, 0, 0), {}^G\hat{J} = (0, 1, 0), {}^G\hat{K} = (0, 0, 1) [1]$$



Obrázok 3 Zobrazenie jednotkových vektorov

Na obrázku 3 vidíme, že je nutné vypočítať označené vzdialenosti. Ak teda budeme uvažovať, že zobrazené ss. sú zložené z jednotkových vektorov, výpočet parametrov je nasledovný. Vzdialenosť na osy X je rovná $\sin(\alpha)$ a vzdialenosť na ose Y je rovná $\cos(\alpha)$.

Keďže vektor ${}^G\hat{j}$ sa pootočil o rovnaký uhol ako vektor ${}^G\hat{i}$ bude jeho výpočet rovnaký, ale k uhlu α pripočítame $\frac{\pi}{2}$. Posledný vektor ${}^G\hat{k}$ zostane nezmenený, pretože sme rotovali okolo osy Z .

$${}^G\hat{i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), {}^G\hat{j} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right), 0 \right), {}^G\hat{k} = (0, 0, 1)$$

$${}^G\hat{i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), {}^G\hat{j} = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), {}^G\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Následne stačí dosadiť do predom odvodenej matice a dostaneme maticu rotácie okolo osy Z .

$$Q_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Obdobným spôsobom môžeme vypočítať aj ostatné matice rotácií.

$$Q_{Y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, Q_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Tieto matice sú ortogonálne čo znamená, že ich inverzná matica je rovná ich transponovanej matici.[1]

1.3.1 Príklad

Bod P tuhého telesa B má počiatkový polohový vektor ${}^B\vec{r}_P$. Následne teleso rotujeme o 45° okolo osy x a následne sa tento bod posunie do bodu ${}^G\vec{d}$, potom konečná poloha bodu P bude.

$${}^B\vec{r}_P = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}; {}^G\vec{d} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

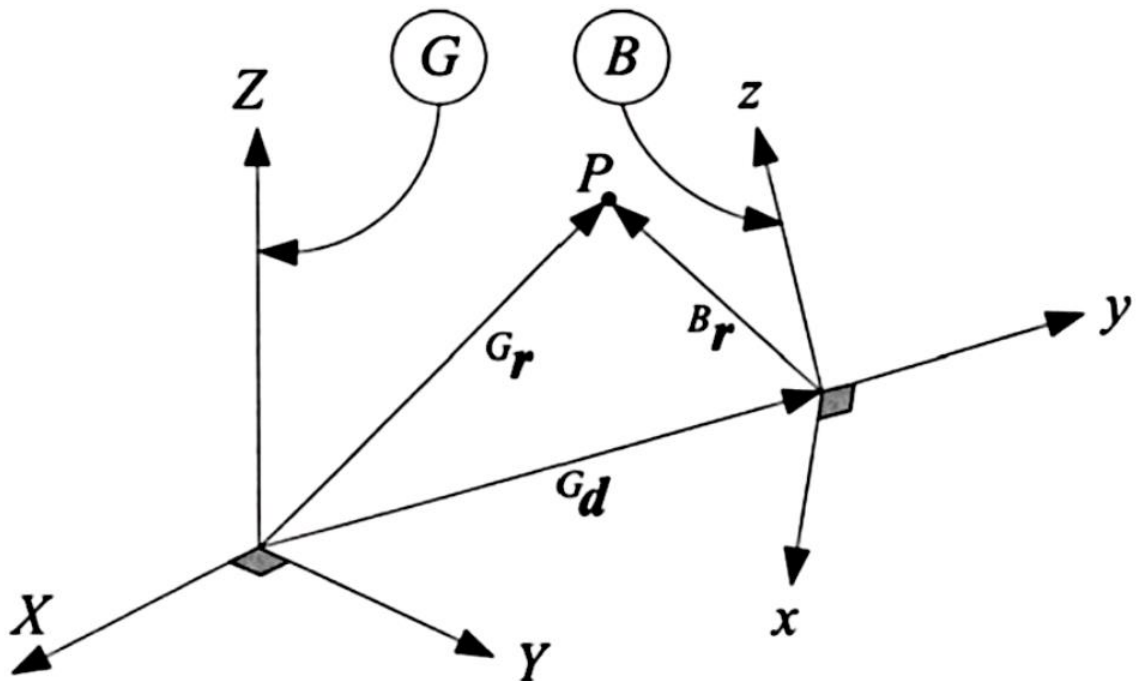
$${}^G\vec{r}_P = Q_{X,45} \cdot {}^B\vec{r}_P + {}^G\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7.2929 \\ 16.7782 \end{bmatrix}$$

1.4 Homogénna transformácia

Ak popisujeme n rozmerný polohový vektor $n+1$ rozmerným vektorom, potom používame homogénne súradnice. Pridaný prvok je zosilňovací faktor ω . Takže obecné vektor v 3 rozmernom priestore popísaný homogénnymi súradnicami bude vyzerat' nasledovne.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ je vlastne } \vec{r} = \begin{bmatrix} \omega \cdot x \\ \omega \cdot y \\ \omega \cdot z \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ak teda použijeme homogénne súradnice zistíme, že absolútne hodnoty všetkých štyroch súradníc nie sú dôležité. Dôležité parametre sú práve pomery $\omega/x, \omega/y, \omega/z$. Ak teda budeme voliť $\omega = 1$ potom budú hodnoty homogénnych súradníc rovnaké ako súradnice v kartézskej sústave súradníc.



Obrázok 4 Zobrazenie bodu P v globálnej a lokálnej ss. [1]

Ľubovoľný bod P , ktorý je súčasťou tuhého telesa spojeného s lokálnou sústavou B je definovaný polohovým vektorom ${}^B\vec{r}_P$ a v globálnej sústave je definovaný ako vektor ${}^G\vec{r}_P$.

Vektor ${}^G\vec{d}$ vyjadruje posunutie lokálnej sústavy v globálnej súradnicovej sústave. Vieme, že pohyb tuhého telesa v lokálnej ss. sa dá v globálnej ss. nájsť pomocou rotácie a translácie.

$${}^G\vec{r} = {}^G R_B \cdot {}^B\vec{r} + {}^G\vec{d}$$

Kde ${}^G\vec{r}$ je polohový vektor v globálnej ss., ${}^G R_B$ je matica rotácie, ${}^B\vec{r}$ je polohový vektor v lokálnej ss. a nakoniec ${}^G\vec{d}$ je vektor translácie v globálnej sústave.

Ak tento popis chceme zjednodušiť je možné ho napísať ako maticu homogénnej transformácie ${}^G T_B$. Táto matica obsahuje informácie ako o rotácií tak aj o translácií. Je to teda jedna matica, ktorá popisuje transformáciu polohového vektoru z jednej ss. do druhej. Z toho vyplýva nasledujúce :

$${}^G\vec{r} = {}^G T_B \cdot {}^B\vec{r}$$

$${}^G T_B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & X_0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & Y_0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1]$$

1.4.1 Inverzná homogénna transformácia

Tým, že sme sa snažili si zjednodušiť výpočty pomocou homogénnej matice sme stratili vlastnosť ortogonalitu. To znamená, že inverzná homogénna matica sa nerovná transponovanej homogénnej matici.

Výpočet inverznej matice:

$${}^G T_B = \begin{bmatrix} I & {}^G\vec{d} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^G R_B & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^G R_B & {}^G\vec{d} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B T_G = ({}^G T_B)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^G R_B & {}^G\vec{d} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ({}^G R_B)^T & -({}^G R_B)^T \cdot {}^G\vec{d} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} [1]$$

1.5 Denavit-Hartenberg

Ak chceme modelovať zložitejšie robotické ramená je dobré priradiť súradnicový systém pre každý článok kinematického reťazca nejakým vhodným spôsobom. Páni Denavit a Hartenberg v roku 1955 navrhli maticovú metódu, pomocou ktorej priradíme súradnicový systém každému článku kinematického reťazca. Táto metóda využíva matice 4x4 homogénnych transformácií pre každý článok robotického ramena. Každý sériový robot má n kĺbov a $n+1$ článkov. Očíslujeme články, kde článok číslo 0 bude pevne spojený

s rámom. Následne očísľujeme kĺby a to od čísla 1. Kĺb 1 sa nachádza vždy medzi článkom 1 a článkom 0, ktorý je pripevnený k rámu.

Postup pre nájdenie transformačných matíc pomocou D-H notácie je nasledovný:

1. Nájďme osy rotácie alebo translácie článkov $i-1, i, i+1$
2. Následne priradíme osy z
3. Osa x je definovaná pozdĺž spoločnej normály os z_{i-1} a z_i a jej smer je od z_{i-1} k z_i . Ak sú dve osy z navzájom rovnobežné, potom existuje nekonečný počet spoločných normál. V tomto prípade vyberieme spoločnú normálu, ktorá je kolineárna so spoločnou normálou predchádzajúcich kĺbov. Ak sa osy z pretínajú, potom medzi nimi neexistuje spoločná normála a v tomto prípade budeme osu x voliť kolmú na rovinu ktorú tvoria príslušné osy z .
4. Osa y je definovaná pomocou vektorového súčinu a tak aby bola sústava pravotočivá [3]

1.5.1 Denavid-Hartenbergove parametre

Denavid a Hartenberg určili 4 základné parametre.

1. Parameter je daný vzdialenosťou osy z_{i-1} a z_i pozdĺž osy x_i . Parameter a_i určuje teda kinematickú dĺžku článku.
2. Parameter α_i vyjadruje skrútenie článku. Je to rotácia osy z_{i-1} okolo osy x_i a to tak aby sa stala paralelnou s osou z_i
3. Parameter d_i popisuje vzdialenosť kĺbov. Táto vzdialenosť je medzi osami x_{i-1} a x_i pozdĺž osy z_{i-1} .
4. Parameter φ_i je uhol článku, ktorý je požadovaným osočením osy x_{i-1} okolo osy z_{i-1} a to práve tak aby sa stala paralelnou s osou x_i . [15]

1.6 Odvodenie všeobecnej transformačnej matice

Pre vytvorenie transformačnej matice vychádzame z dvoch zhodných súradných systémov B_{i-1} a B_i v polohe. Následne vykonáme také pohyby, ktoré sústavu B_i prekryjú so sústavou B_{i-1} . Sústava B_{i-1} slúži ako globálna sústava a všetky tieto pohyby a rotácie sa vykonávajú okolo a podľa globálnych os.

1. Otočiť ss. B_i o uhol α_i okolo osy x_{i-1}
2. Posunúť ss. B_i podľa osy x_{i-1} o vzdialenosť a_i
3. Otočiť ss. B_i o uhol θ_i okolo osy z_{i-1}
4. Posunúť ss. B_i podľa osy z_{i-1} o vzdialenosť d_i

$${}^{i-1}T_i = D_{z_{i-1}, d_i} \cdot R_{z_{i-1}, \theta_i} \cdot D_{x_{i-1}, a_i} \cdot R_{x_{i-1}, \alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

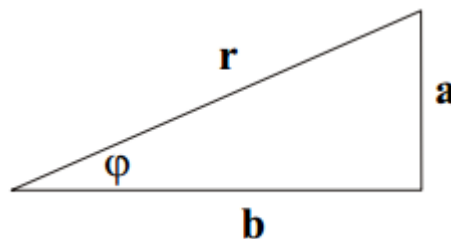
$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & a_i \cdot \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & a_i \cdot \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

[1]

1.7 Riešenie goniometrickej rovnice typu $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = c$

Tento typ rovnice je možné riešiť zavedením nových premenných r a φ tak aby platilo nasledujúce.

$$a = r \cdot \sin(\varphi); b = r \cdot \cos(\varphi)$$



Obrázok 5 Pomocný trojuholník

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \sin(j) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos(j) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Následným dosazením nových premenných do rovnice dostaneme

$$a \cdot \cos(\Theta) + b \cdot \sin(\Theta) = c$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta)) = c$$

$$\sin(\varphi) \cdot \cos(\Theta) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\Theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\varphi + \Theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin^2(\varphi + \Theta) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

$$1 - \cos^2(\varphi + \Theta) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}; \cos(\varphi + \Theta) = \pm \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\cos(\varphi + \Theta) = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2}}$$

Máme teda 2 rovnice pre určenie φ a to $\sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ v ďalšom

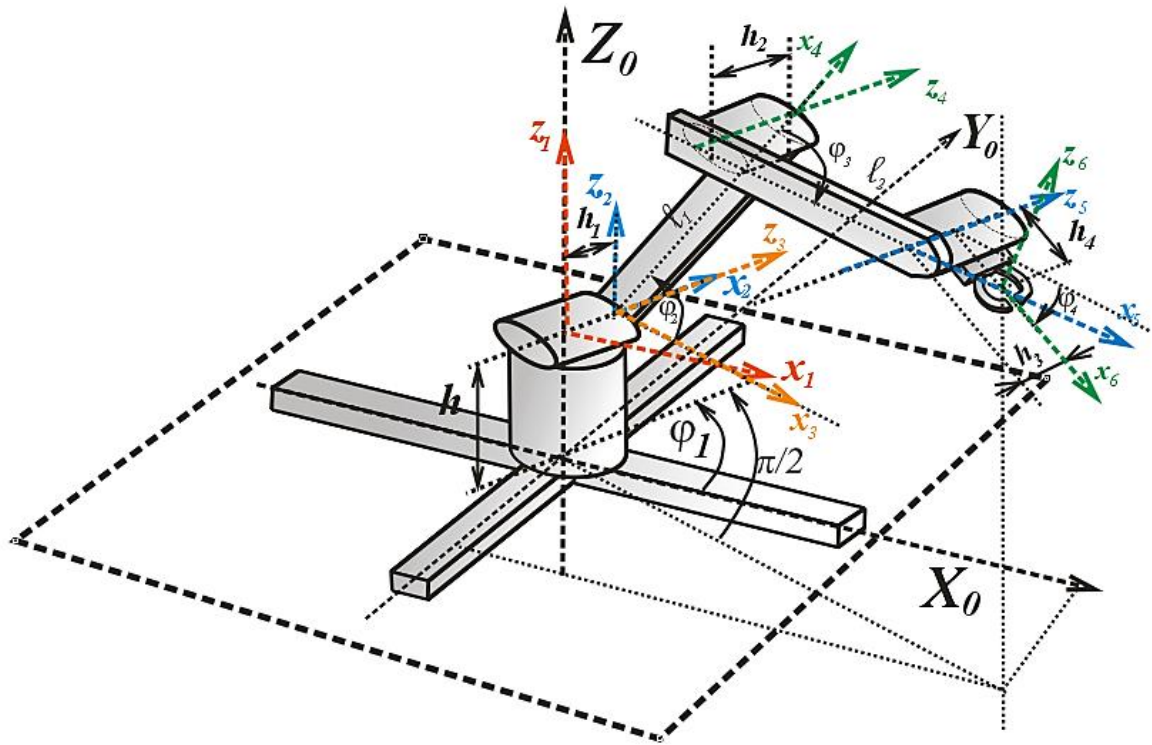
roku sme teda schopný určiť $(\varphi + \Theta)$ a to pomocou rovníc $\sin(\varphi + \Theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ a

$$\cos(\varphi + \Theta) = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + b^2}}. [1]$$

1.7.1 Podmienky riešiteľnosti

Rovnica $a \cdot \cos(\varphi_1) + b \cdot \sin(\varphi_1) = c$ má dve riešenia ak $a^2 + b^2 > c^2$ pre $a^2 + b^2 = c^2$ existuje len jedno riešenie a pre $a^2 + b^2 < c^2$ neexistuje reálne riešenie tejto rovnice. V prípade, že výsledok je v komplexnej rovine znamená to, že požadujeme polohu efektora mimo pracovného priestoru robota. [1]

1.8 Umiestnenie ôs na manipulátor



Obrázok 6 Zobrazenie ôs a uhlov na manipulátore

1.9 Tabuľka Denavit-Hartenbergových parametrov

| | a_i | α_i | d_i | θ_i |
|---|---|---|--|---|
| 1 | $z_0 \rightarrow z_1$ podľa $x_1 = 0$ | $z_0 \rightarrow z_1$ okolo $x_1 = 0^\circ$ | $x_0 \rightarrow x_1$ podľa $z_0 = h$ | $x_0 \rightarrow x_1$ podľa $z_0 = 0^\circ$ |
| 2 | $z_1 \rightarrow z_2$ podľa $x_2 = h_1$ | $z_1 \rightarrow z_2$ okolo $x_2 = 0^\circ$ | $x_1 \rightarrow x_2$ podľa $z_1 = 0$ | $x_1 \rightarrow x_2$ podľa $z_1 = \phi_1$ |
| 3 | $z_2 \rightarrow z_3$ podľa $x_3 = 0$ | $z_2 \rightarrow z_3$ okolo $x_3 = -90^\circ$ | $x_2 \rightarrow x_3$ podľa $z_2 = 0$ | $x_2 \rightarrow x_3$ podľa $z_2 = -90^\circ$ |
| 4 | $z_3 \rightarrow z_4$ podľa $x_4 = l_1$ | $z_3 \rightarrow z_4$ okolo $x_4 = 0^\circ$ | $x_3 \rightarrow x_4$ podľa $z_3 = 0$ | $x_3 \rightarrow x_4$ podľa $z_3 = -\phi_2$ |
| 5 | $z_4 \rightarrow z_5$ podľa $x_5 = l_2$ | $z_4 \rightarrow z_5$ okolo $x_5 = 0^\circ$ | $x_4 \rightarrow x_5$ podľa $z_4 = -h_2$ | $x_4 \rightarrow x_5$ podľa $z_4 = \phi_3$ |
| 6 | $z_5 \rightarrow z_6$ podľa $x_6 = h_4$ | $z_5 \rightarrow z_6$ okolo $x_6 = 90^\circ$ | $x_5 \rightarrow x_6$ podľa $z_5 = h_3$ | $x_5 \rightarrow x_6$ podľa $z_5 = \phi_4$ |

Tabuľka 1 Denavit-Hartenbergové parametre

1.10 Transformačné matice

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) & 0 & h_1 \cdot \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & 0 & h_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) & 0 & l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) & 0 & -l_1 \cdot \sin(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) & 0 & l_2 \cdot \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 & l_2 \cdot \sin(\varphi_3) \\ 0 & 0 & 1 & -h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_4) & 0 & \sin(\varphi_4) & h_4 \cdot \cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_4) & 0 & -\cos(\varphi_4) & h_4 \cdot \sin(\varphi_4) \\ 0 & 1 & 0 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

1.11 Transformačná matica 0T_6

Pre riešenie kinematiky robotického ramena je potrebné vypočítať transformačnú maticu 0T_6 , ktorá nám udáva aký je prepočet zo sústavy umiestnenej v strede gripu do globálnej sústavy. Maticu 0T_6 vypočítame vynásobením matic (4) až (9).

$${}^0T_6 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6$$

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & 0 & \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$t_{14} = \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + h_4 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)$$

$$t_{24} = -\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + h_4 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)$$

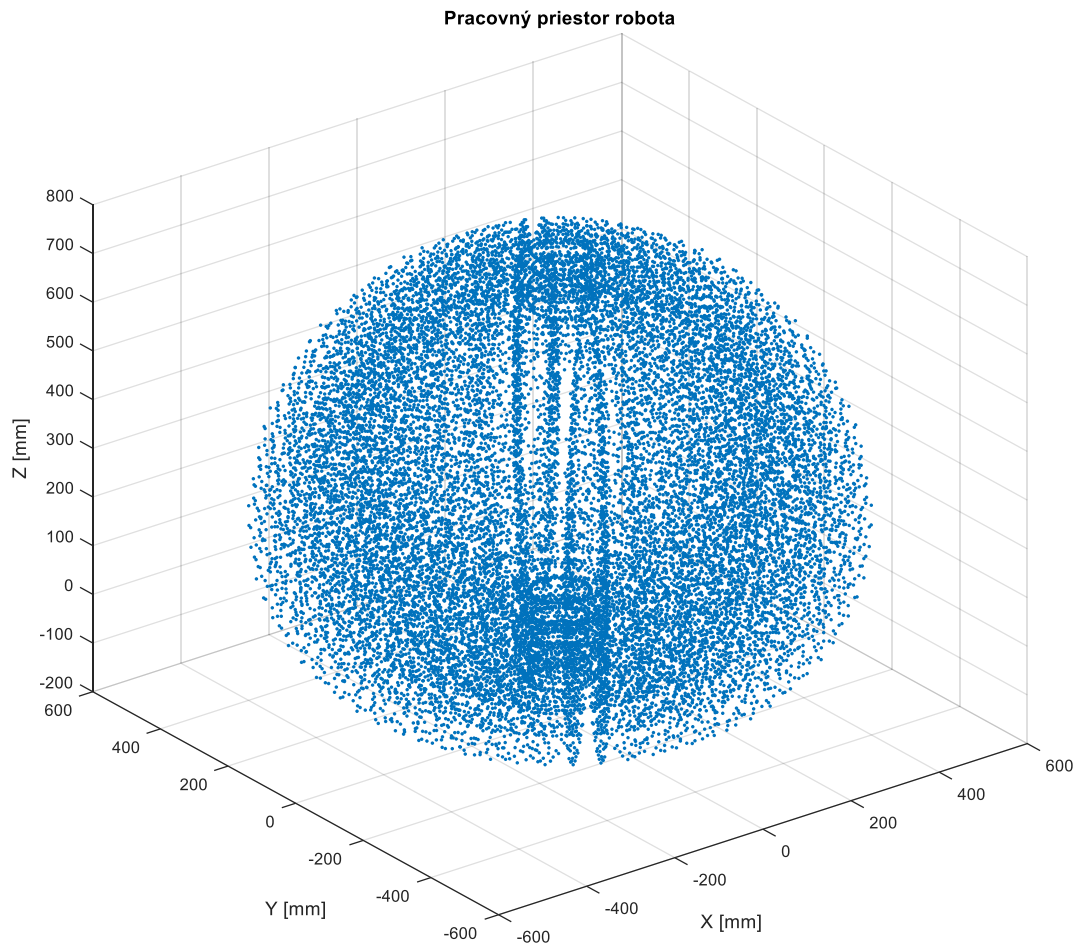
$$t_{34} = h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h_4 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)$$

1.12 Výpočet pracovního priestoru robota

Pre výpočet pracovního priestoru robota je nutné mať k dispozícii rovnicu polohy stredú efektoru. Na základe znalosti, že transformačná matica sa skladá z rotačnej a translačnej matice si vieme jednoducho odvodiť maticu, ktorou keď vynásobíme transformačnú maticu číslo (10) dostaneme translačnú maticu, ktorá obsahuje potrebné rovnice polohy pre x , y a z súradnice.

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & 0 & \cos(\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{14} \\ t_{24} \\ t_{34} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Následne boli tieto rovnice vložené do programu MATLAB, kde bol vytvorený skript pre výpočet polohy stredú efektoru. Vstupom do skriptu boli konštrukčné parametre reálneho robota a rovnice polohy stredú efektoru. Výstupom bolo grafické zobrazenie útvaru, kde je možné s efektorom robota pracovať. Výpočet bol realizovaný pomocou troch jednoduchých cyklov, ktoré postupne naplňajú vektory X, Y a Z dátami, ktoré sa nakoniec zobrazujú v grafe.



Obrázok 7 Pracovní priestor robota

1.13 Výpočet inverznej kinematickej úlohy

Pre výpočet kinematickej úlohy som uvažoval len rovnice manipulátoru. To znamená, že je potrebné vypočítať len uhol φ_1, φ_2 a φ_3 . Ako prvé je treba vypočítať transformačnú maticu 0T_5 , ktorú využijeme pri výpočte.

$${}^0T_5 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5$$

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \cos(\varphi_1) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_2 - \varphi_3) & 0 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
t_{14} &= \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2) \\
t_{24} &= -\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2) \\
t_{34} &= h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)
\end{aligned}$$

Translačný vektor v transformačnej matici číslo (11) musíme ešte vynásobiť premennou h_3 , čo je vzdialenosť stredu hmoty m_2 . Vďaka tomu sa dostaneme do stredu hmoty m_2 .

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \cos(\varphi_1) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_2 - \varphi_3) & 0 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \\ -\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \\ h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pomocou translačného vektoru číslo (12) vypočítame všetky potrebné uhly φ_1, φ_2 a φ_3 .

1.13.1 Výpočet uhlu φ_1

Sústava nelineárnych algebraických rovníc získaných z matice číslo (12) je:

$$\begin{aligned}
X_{m_2} &= \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \\
Y_{m_2} &= -\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \\
Z_{m_2} &= h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)
\end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobíme $\cos(\varphi_1)$ a druhú rovnicu vynásobíme $\sin(\varphi_1)$, následne obe rovnice sčítame.

$$\begin{aligned}
&X_{m_2} \cdot \cos(\varphi_1) + Y_{m_2} \cdot \sin(\varphi_1) = \\
&= \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) - \\
&- \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) = \\
&= (h_1 - h_2 + h_3) \cdot (\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1)) = (h_1 - h_2 + h_3)
\end{aligned}$$

Takže výsledok je :

$$X_{m_2} \cdot \cos(\varphi_1) + Y_{m_2} \cdot \sin(\varphi_1) = (h_1 - h_2 + h_3)$$

Toto je rovnica typu $a \cdot \cos(\varphi_1) + b \cdot \sin(\varphi_1) = c$, ktorej všeobecné riešenie bolo odvodené v kapitole 1.7. Takže výpočet bude nasledovný :

$$a = X_{m_2}, b = Y_{m_2}, c = (h_1 - h_2 + h_3)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{X_{m_2}}{\sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2}}; \cos(\varphi) = \frac{Y_{m_2}}{\sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2}} \quad (13)$$

$$\sin(\varphi + \varphi_1) = \frac{h_1 - h_2 + h_3}{\sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2}}; \cos(\varphi + \varphi_1) = \pm \sqrt{\frac{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2}} \quad (14)$$

1.13.2 Výpočet uhlu φ_2

Všetky rovnice z translačného vektoru číslo (12) umocníme na druhú a následne je nutné prvé dve rovnice sčítať a zjednodušiť. Posledným krokom bolo pričítanie poslednej rovnice k predchádzajúcim. Týmto krokom z rovnice vypadol uhol φ_3 a vďaka tomu je možné vypočítať uhol φ_2 a to znova pomocou trigonometrickej rovnice.

$$\begin{aligned} X_{m_2}^2 &= \left(\sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right)^2 \\ Y_{m_2}^2 &= \left(-\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right)^2 \\ X_{m_2}^2 &= \sin^2(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + 2 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \cos^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \\ Y_{m_2}^2 &= \cos^2(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 - 2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \sin^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 &= \sin^2(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + 2 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \\
&\cdot \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \cos^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 + \cos^2(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 - \\
&- 2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \sin^2(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \\
X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 &= (\sin^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_1)) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + \\
&+ (2 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1) - 2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \\
&+ (\sin^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_1)) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 &= (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + (h_1 - h_2 + h_3)^2 \\
X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 &= (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 \\
l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) &= \pm \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} \\
l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) &= \pm \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} - l_1 \cdot \cos(\varphi_2)
\end{aligned}$$

$$l_2^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) = \left(\pm \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} - l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \right)^2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
Z_{m_2} &= h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \\
Z_{m_2} - h - l_1 \cdot \sin(\varphi_2) &= l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)
\end{aligned}$$

$$l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) = (Z_{m_2} - h - l_1 \cdot \sin(\varphi_2))^2 \quad (16)$$

Teraz obe výsledné rovnice číslo (15) a (16) sčítame.

$$\begin{aligned}
l_2^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) &= \\
= \left(\pm \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} - l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \right)^2 + (Z_{m_2} - h - l_1 \cdot \sin(\varphi_2))^2 \\
l_2^2 &= \left(\pm \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} - l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \right)^2 + (Z_{m_2} - h - l_1 \cdot \sin(\varphi_2))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2^2 &= X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 \pm 2 \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} + l_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + \\
&+ (Z_{m_2} - h)^2 - 2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_1^2 \cdot \sin^2(\varphi_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2^2 &= X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 \pm 2 \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} + \\
&+ (Z_{m_2} - h)^2 - 2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_1^2 \cdot (\sin^2(\varphi_2) \cdot \cos^2(\varphi_2)) \\
X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2 + l_1^2 - l_2^2 &= \pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2} \cdot \cos(\varphi_2) + \\
&+ 2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1 \cdot \sin(\varphi_2)
\end{aligned}$$

To je znova rovnica typu $a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi) = c$, ktorej riešenie je odvodené v kapitole

1.7. Takže výpočet bude nasledovný :

$$a = \pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}; b = 2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1$$

$$c = X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2 + l_1^2 - l_2^2$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}}{\sqrt{\left(\pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}\right)^2 + \left(2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1\right)^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1}{\sqrt{\left(\pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}\right)^2 + \left(2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1\right)^2}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}}{\sqrt{4 \cdot l_1^2 \cdot \left(X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2\right)}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1}{\sqrt{4 \cdot l_1^2 \cdot \left(X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2\right)}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\pm 2 \cdot l_1 \cdot \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2}}{2 \cdot l_1 \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2 \cdot (Z_{m_2} - h) \cdot l_1}{2 \cdot l_1 \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2}}$$

(17)

$$\sin(\varphi + \varphi_2) = \frac{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2 + l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \sqrt{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2}} \quad (18)$$

$$\cos(\varphi + \varphi_2) = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot l_1^2 \cdot (X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2) - (X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2 + l_1^2 - l_2^2)^2}{4 \cdot l_1^2 \cdot (X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (Z_{m_2} - h)^2)}}$$

1.13.3 Výpočet uhlu φ_3

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + Z_{m_2}^2 = (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))^2$$

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 = (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + (h_1 - h_2 + h_3)^2 + (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))^2$$

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 = (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))^2 + (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))^2$$

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 = l_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_2^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + l_1^2 \cdot \sin^2(\varphi_2) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + l_2^2 \cdot \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 = l_1^2 \cdot (\sin^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_2)) + l_2^2 \cdot (\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3)) + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot (\sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))$$

$$X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$\cos(\varphi_3) = \frac{X_{m_2}^2 + Y_{m_2}^2 + (Z_{m_2} - h)^2 - (h_1 - h_2 + h_3)^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2} \quad (19)$$

2 DYNAMIKA

Dynamika sa zaoberá objektami, ktoré v čase menia svoj stav. Ak sa zameriame hlavne na mechanické systémy ako sú napríklad priemyselné roboty, potom zmena stavu robota zahŕňa aj pohyb. Hlavnou úlohou dynamickej analýzy je odvodenie pohybových rovníc, ktoré sú jednou z najdôležitejších pre návrh riadenia alebo simuláciu takéhoto systému.

Newtonove pohybové zákony :

1. Zotrvačnosť
 - a. Každé teleso zotrva vo svojom stave a to buď v klúde alebo v priamočiaram pohybe ak na neho nepôsobí ďalšia sila, ktorá by ho donútila tento stav zmeniť.
2. Akcia a reakcia
 - a. Každá akcia spôsobuje vždy rovnakú reakciu opačného smeru.
3. Hybnosť a sila
 - a. Časová zmena hybnosti je úmerná sile, ktorá na teleso pôsobí a zároveň má totožný smer. [4]

Dynamika sa delí na 2 podskupiny:

1. Priamy dynamický problém
 - a. Vyriešením priameho dynamického problému dostaneme predstavu po akej trajektórii sa bude koncový efektor pohybovať, ak poznáme momenty v aktívnych kĺboch.
2. Inverzný dynamický problém
 - a. Vyriešením inverzného dynamického problému dostaneme momenty potrebné pre dosiahnutie požadovaného pohybu koncového efektora.

Dynamický popis robotického systému nám určí aké veľké odstredivé, coriolisove a gravitačné sily budú pôsobiť v jednotlivých kĺboch. Hlavnou úlohou dynamického popisu je teda určenie akou silou majú akčné členy pôsobiť na jednotlivé kĺby, aby sme dosiahli požadované uhly v kĺboch aj napriek pôsobeniu porúch ako sú coriolisove, odstredivé a gravitačné sily. [1] [4]

2.1 Lagrangeove rovnice

Pre pohyb hmotného bodu m_i umiestneného na súradniciach $[x_i \ y_i \ z_i]^T$ v kartézskej sústave súradníc $O_{x,y,z}$ platia Newtonove rovnice :

$$\begin{aligned} F_{xi} &= m_i \cdot \ddot{x}_i \\ F_{yi} &= m_i \cdot \ddot{y}_i \\ F_{zi} &= m_i \cdot \ddot{z}_i \end{aligned} \quad (20)$$

Tieto vzťahy sú zložky výslednej sily, ktorá pôsobí na tento hmotný bod a to v smeroch os x, y, z . V tejto diplomovej práci uvažujeme nehmotné ramená a hmotné body v kĺboch a preto môžeme povedať, že celá hmota je sústredená v hmotných bodoch. Potom z hľadiska translačných pohybov sa bude sústava chovať ako pôvodný článok a to podľa rovníc 18. Tieto rovnice síce umožňujú úplný popis mechaniky ale je možné zvoliť vhodnejší prístup a to pomocou Lagrangeových rovníc. Ak použijeme na popis mechanickej sústavy Lagrangeove rovnice budeme počítat' s obecnými súradnicami čo nám zjednoduší analýzu systému. Trajektórie pohybu hmotných bodov získame riešením Lagrangeovej rovnice.[1]

2.1.1 Lagrangeova rovnica 2 druhu

Táto rovnica nám umožní získať sústavu pohybových rovníc pre popis mechanickej sústavy, ktorá je tvorená hmotnými bodmi umiestnenými v konzervatívnom poli. Všeobecný zápis Lagrangeovej rovnice 2 druhu má tvar :

$$F_i = \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}; i = 1, 2 \dots n; L = W_k - W_p \quad (21)$$

Kde L je Lagrangeova funkcia a je rovná $W_k - W_p$ čo je celková kinetická mínus celková potenciálna energia sústavy. Ďalej \dot{q}_i predstavuje všeobecnú rýchlosť čo je vlastne časová derivácia všeobecnej polohy q_i . Nakoniec F_i je výslednica vonkajších všeobecných síl.
[1]

2.2 Kinetická a potenciálna energia

Pre výpočet Lagrangeových rovníc druhého druhu je potrebné poznať kinetickú a potenciálnu energiu hmotných bodov m_1 , m_2 a základne robotického ramena. Najskôr si definujeme čo to je kinetická a potenciálna energia.

2.2.1 Kinetická energia

Ak na voľnú časticu pôsobí sila ovplyvňuje to jej rýchlosť a smer v prípade, že voľná častica zmenila rýchlosť vzhľadom ku predom definovanej sústave, potom musela byť vykonaná práca. Z toho vyplýva, že kinetická energia je dynamická veličina, ktorá súvisí s pohybom telesa, a ktorá sa dôsledku vykonania práce zmenila. Kinetickú energiu teda vypočítame nasledovne $W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, kde m je hmotnosť hmotného bodu a v je rýchlosť hmotného bodu. [5]

2.2.2 Potenciálna energia

Potenciálna energia je energia, ktorú má každé teleso nachádzajúce sa v potenciálovom poli určitej sily. Potenciálna energia sa dá rozdeliť na 4 skupiny :

1. Gravitačná potenciálna energia
2. Potenciálna energia pružnosti
3. Tlaková potenciálna energia
4. Elektrostatická potenciálna energia

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať len gravitačnou potenciálnou energiou. Potom teda potenciálnu energiu majú telesá, ktoré sa nachádzajú v gravitačnom poli Zeme. Toto gravitačné pole budeme chápať ako homogénne gravitačné pole. Ak chceme určiť veľkosť potenciálnej energie telesa je nutné určiť, kde je hladina s potenciálnou energiou rovnou nule. Toto urobíme zavedením globálnej sústavy súradníc. Následne môžeme napísať vzťah $W_p = m \cdot g \cdot h$, ktorý nám definuje výpočet potenciálnej energie, kde m je hmotnosť hmotného bodu, g je gravitačné zrýchlenie a h je výška telesa v globálnej sústave súradníc. [6]

2.3 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie kĺbov

Po tom ako sme si v kapitole 2.2 zaviedli čo to je kinetická a potenciálna energia môžeme vypočítať potrebné kinetické a potenciálne energie hmotných bodov m_1 , m_2 a základne. Po ich výpočte môžeme prejsť k výpočtu Lagrangeových rovníc druhého druhu.

2.3.1 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie základne

Servopohon má moment zotrvačnosti J_0 .

$$W_{k_zakladna} = \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\varphi}_1^2 \quad (22)$$

$$W_{p_zakladna} = m_0 \cdot g \cdot h \quad (23)$$

2.3.2 Výpočet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu m_1

Súradnice hmotného bodu v sústave O_{x_4, y_4, z_4} sú :

$$\begin{bmatrix} X_{m1} \\ Y_{m1} \\ Z_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{h_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformačná matica ${}^0T_4 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4$

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 + \cos(\varphi_1) \cdot h_1 \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) & \sin(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \cdot h_1 - \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 \\ \sin(\varphi_2) & -\cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Súradnice hmotného bodu m_1 v globálnej sústave sú :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_{m1} \\ Y_{m1} \\ Z_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0T_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{h_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 + \cos(\varphi_2) \cdot h_1 \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) & \sin(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) \cdot h_1 - \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 \\ \sin(\varphi_2) & -\cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{h_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} X_{m1} \\ Y_{m1} \\ Z_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 - \frac{\cos(\varphi_1) \cdot h_2}{2} + \cos(\varphi_1) \cdot h_1 \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 - \frac{\sin(\varphi_1) \cdot h_2}{2} + \sin(\varphi_1) \cdot h_1 \\ \sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)
\end{aligned}$$

Následne je potrebné získať absolútne zložky rýchlosti hmotného bodu m_1 , tak že vypočítanú polohu hmotného bodu m_1 zderivujeme v čase. Ak budeme derivovať v čase to znamená, že musíme urobiť parciálne derivácie všetkých premenných meniacich sa v čase. Premenné meniace sa v čase v tomto prípade sú φ_1 a φ_2 , preto výpočet bude nasledovný.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{X}_{m1} \\ \dot{Y}_{m1} \\ \dot{Z}_{m1} \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdot \begin{bmatrix} X_{m1} \\ Y_{m1} \\ Z_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \begin{bmatrix} X_{m1} \\ Y_{m1} \\ Z_{m1} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_2 \\
\begin{bmatrix} \dot{X}_{m1} \\ \dot{Y}_{m1} \\ \dot{Z}_{m1} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 + \frac{\sin(\varphi_1) \cdot h_2}{2} - \sin(\varphi_1) \cdot h_1 \right) \cdot \dot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \\ \left(\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 - \frac{\cos(\varphi_1) \cdot h_2}{2} - \cos(\varphi_1) \cdot h_1 \right) \cdot \dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \\ \cos(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

Po tom ako boli získané absolútne zložky rýchlosti hmotného bodu m_1 v matici číslo (26) môžeme pristúpiť k výpočtu absolútnej rýchlosti.

$$|\vec{v}_{m1}|^2 = \left(\sqrt{\dot{X}_{m1}^2 + \dot{Y}_{m1}^2 + \dot{Z}_{m1}^2} \right)^2 = \dot{X}_{m1}^2 + \dot{Y}_{m1}^2 + \dot{Z}_{m1}^2$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{m1}|^2 = & \left(\left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 + \frac{\sin(\varphi_1) \cdot h_2}{2} - \sin(\varphi_1) \cdot h_1 \right) \cdot \dot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \right)^2 + \\ & + \left(\left(\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot l_1 - \frac{\cos(\varphi_1) \cdot h_2}{2} - \cos(\varphi_1) \cdot h_1 \right) \cdot \dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \right)^2 + \\ & + (\cos(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \dot{\varphi}_2)^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{v}_{m1}|^2 = \dot{\varphi}_2^2 \cdot l_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot \left(\cos^2(\varphi_2) \cdot l_1^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right) + 2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \quad (27)$$

Následne dosadíme vypočítanú rýchlosť z rovnice číslo (27) do vzorca kinetickej energie

$$W_{k_m1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot |\vec{v}_{m1}|^2$$

$$W_{k_m1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 \cdot l_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot \left(\cos^2(\varphi_2) \cdot l_1^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right) + 2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \right) \quad (28)$$

Výpočet potenciálnej energie

$$W_p = m_1 \cdot g \cdot h_g$$

h_g je výška hmotného bodu m_1 v globálnej sústave, takže je to vlastne jeho polohová súradnica Z_{m1} .

$$W_{p_m1} = m_1 \cdot g \cdot (\sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h) \quad (29)$$

2.3.3 Výpočet kinetické a potenciální energie hmotného bodu m_2

Súradnice hmotného bodu v sústave O_{x_5, y_5, z_5} sú

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformačná matica ${}^0T_5 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5$

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \cos(\varphi_1) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_2 - \varphi_3) & 0 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t_{14} = \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2)$$

$$t_{24} = -\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2)$$

$$t_{34} = h + l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \cos(\varphi_1) & t_{14} \\ -\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & \sin(\varphi_1) & t_{24} \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_3) & -\cos(\varphi_2 - \varphi_3) & 0 & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \cdot \cos(\varphi_1) - h_2 \cdot \cos(\varphi_1) + h_3 \cdot \cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \\ h_1 \cdot \sin(\varphi_1) - h_2 \cdot \sin(\varphi_1) + h_3 \cdot \sin(\varphi_1) - \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Pre jednoduchší výpočet maticu číslo (30) zjednodušíme.

$$\begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \\ \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) - \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Následne je potrebné opäť získať absolútne zložky rýchlosti, tak že vypočítanú polohu hmotného bodu m_2 zderivujeme v čase. Premenné meniace sa v čase v tomto prípade sú φ_1 , φ_2 a φ_3 , preto výpočet bude nasledovný.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{m_2} \\ \dot{Y}_{m_2} \\ \dot{Z}_{m_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdot \begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \cdot \begin{bmatrix} X_{m_2} \\ Y_{m_2} \\ Z_{m_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}_3$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_{m_2} \\ \dot{Y}_{m_2} \\ \dot{Z}_{m_2} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-\sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_1 \\ (\cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} (\sin(\varphi_1) \cdot (-l_1 \cdot \sin(\varphi_2) - l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_2 \\ (-\cos(\varphi_1) \cdot (-l_1 \cdot \sin(\varphi_2) - l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_2 \\ (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \dot{\varphi}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sin(\varphi_1) \cdot (l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_3 \\ (-\cos(\varphi_1) \cdot (l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \cdot \dot{\varphi}_3 \\ (-l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \cdot \dot{\varphi}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

Z rovnice číslo (31) vyberieme príslušné časti a dosadíme do vzorca pre výpočet absolútnej rýchlosti hmotného bodu m_2 .

$$|\vec{v}_{m_2}|^2 = \left(\sqrt{\dot{X}_{m_2}^2 + \dot{Y}_{m_2}^2 + \dot{Z}_{m_2}^2} \right)^2 = \dot{X}_{m_2}^2 + \dot{Y}_{m_2}^2 + \dot{Z}_{m_2}^2$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{m_2}|^2 &= \left(\dot{\varphi}_1 \cdot (\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) - \sin(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)) - \right. \\ &\quad \left. - \dot{\varphi}_2 (\sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) + \dot{\varphi}_3 (l_2 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) \right)^2 + \\ &+ \left(\dot{\varphi}_1 \cdot (\sin(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) + \cos(\varphi_1) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)) + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_1) \cdot (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) - \dot{\varphi}_3 (l_2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) \right)^2 + \\ &+ \left(\dot{\varphi}_2 \cdot (l_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) - \dot{\varphi}_3 \cdot (l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{v}_{m2}|^2 &= \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 \right) \cdot l_2^2 + \\
&+ \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + 2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} - \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 \right) \right) \cdot l_1 \cdot l_2 + \\
&+ \left(2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \right) \cdot l_2 + \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \right) \cdot l_1^2 + \\
&+ \left(2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot l_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \\
W_{k_{m2}} &= \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\begin{aligned} &\left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 \right) \cdot l_2^2 + \\ &+ \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + 2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} - \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 \right) \right) \cdot l_1 \cdot l_2 + \\ &+ \left(2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \right) \cdot l_2 + \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \right) \cdot l_1^2 + \\ &+ \left(2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot l_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \end{aligned} \right) \quad (32)
\end{aligned}$$

$$W_{p_{m2}} = m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h) \quad (33)$$

2.4 Výpočet celkovej kinetickej a potenciálnej energie

Pre výpočet celkovej kinetickej a potenciálnej energie nám následne stačí príslušné energie v jednotlivých hmotných bodoch jednoducho sčítať čím dostaneme celkovú hodnotu kinetickej a potenciálnej energie.

2.4.1 Celková kinetická energia

$$W_k = W_{k_{zakladna}} + W_{k_{m1}} + W_{k_{m2}}$$

$$\begin{aligned}
W_k &= \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 \cdot l_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot \left(\cos^2(\varphi_2) \cdot l_1^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right) + 2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\begin{aligned} &\left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 \right) \cdot l_2^2 + \\ &+ \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + 2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} - \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 \right) \right) \cdot l_1 \cdot l_2 + \\ &+ \left(2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \right) \cdot l_2 + \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \right) \cdot l_1^2 + \\ &+ \left(2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot l_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

2.4.2 Celková potenciálna energia

$$W_p = W_{p_zakladna} + W_{p_m1} + W_{p_m2}$$

$$W_p = m_0 \cdot g \cdot h + m_1 \cdot g \cdot (\sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h) + m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h)$$

2.5 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice budeme počítat pomocou Lagrangeových rovníc, ktorých popis je v kapitole 2.1. Ako prvé je nutné vypočítať si lagrangeián, ktorého výpočet je nasledujúci :

$$L = W_k - W_p$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 \cdot l_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot \left(\cos^2(\varphi_2) \cdot l_1^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right) + 2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2 - \varphi_3) + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 \right) \cdot l_2^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + 2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \left(\dot{\varphi}_2^2 + \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} - \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 \right) \right) \cdot l_1 \cdot l_2 + \right.$$

$$\left. + \left(2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) \right) \cdot l_2 + \left(\dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos^2(\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \right) \cdot l_1^2 + \right.$$

$$\left. + \left(2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot l_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 \right)$$

$$- (m_0 \cdot g \cdot h + m_1 \cdot g \cdot (\sin(\varphi_2) \cdot l_1 + h) + m_2 \cdot g \cdot (l_1 \cdot \sin(\varphi_2) + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h)) \quad (34)$$

Po tom ako sme vypočítali lagrangeián môžeme pristúpiť k výpočtu pohybových rovníc.

2.5.1 Pohybová rovnice pre prvý kĺb

Pre výpočet pohybovej rovnice použijeme vzorec pre výpočet lagrangeovej rovnice 2. druhu, ktorá bola popísaná v kapitole 2.1.1.

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \\
 Q_1(t) &= \left(\begin{aligned} &J_0 + m_2 \cdot \left(l_1^2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + (h_1 - h_2 + h_3)^2 \right) + \\ &+ m_2 \cdot \left(l_2^2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot (\cos(\varphi_3) + \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3)) \right) \end{aligned} \right) \cdot \ddot{\varphi}_1 + \\
 &+ m_1 \cdot \left(l_1^2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right) \\
 &+ \left(m_1 \cdot \left(\sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \right) + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot (\sin(\varphi_2) \cdot l_1 + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) \right) \cdot \ddot{\varphi}_2 + \\
 &+ \left(-l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot \ddot{\varphi}_3 + \\
 &+ \left(\begin{aligned} &-l_1^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) - l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) - \\ &-2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) \end{aligned} \right) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \\
 &+ \left(l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (\sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) - \sin(\varphi_3)) \right) \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_3 + \\
 &+ \left(\begin{aligned} &\cos(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \left(m_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) + \\ &+ l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \end{aligned} \right) \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \\
 &+ \left(-2 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 + \\
 &+ \left(l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot \dot{\varphi}_3^2
 \end{aligned} \tag{35}$$

2.5.2 Pohybová rovnice pro druhý klb

$$\begin{aligned}
 Q_2(t) &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \\
 Q_2(t) &= \left(l_1 \cdot m_1 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) + l_1 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \right. \\
 &\quad \left. + l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \cdot \ddot{\varphi}_1 + \\
 &\quad + (l_1^2 \cdot m_1 + l_1^2 \cdot m_2 + l_2^2 \cdot m_2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3)) \cdot \ddot{\varphi}_2 + \\
 &\quad + (-l_2^2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3)) \cdot \ddot{\varphi}_3 + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot (l_1^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) + l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3)) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) \right) \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \\
 &\quad + (-2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3)) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\varphi}_3 + \\
 &\quad + (l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3)) \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \\
 &\quad + g \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) + g \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)
 \end{aligned} \tag{36}$$

2.5.3 Pohybová rovnice pro třetí klb

$$\begin{aligned}
 Q_3(t) &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_3} \\
 Q_3(t) &= (-l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)) \cdot \ddot{\varphi}_1 + \\
 &\quad + (-l_2 \cdot m_2 \cdot (l_2 + l_1 \cdot \cos(\varphi_3))) \cdot \ddot{\varphi}_2 + (l_2^2 \cdot m_2) \cdot \ddot{\varphi}_3 + \\
 &\quad + \left(-\frac{l_2 \cdot m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + l_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) - l_1 \cdot \sin(\varphi_3))}{2} \right) \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \\
 &\quad + (l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3)) \cdot \dot{\varphi}_2^2 - \\
 &\quad - g \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)
 \end{aligned} \tag{37}$$

2.6 Maticová forma pohybových rovnic

Maticová forma pohybových rovnic pre sériový robotický manipulátor má obecné tvar :

$$D(\bar{\varphi}) \cdot \ddot{\bar{\varphi}} + \bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) + \bar{G}(\bar{\varphi}) = \bar{Q}$$

Kde $D(\bar{\varphi})$ je symetrická matica zotrvačnosti, $\bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}})$ je vektor rýchlostných väzieb a $\bar{G}(\bar{\varphi})$ je vektor gravitačnej sily. Pomocou tohto zápisu sa postupne dopracujeme k tvaru, ktorý bude možné vložiť do simulačného programu.

$$D(\bar{\varphi}) \cdot \ddot{\bar{\varphi}} + \bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) + \bar{G}(\bar{\varphi}) = \bar{Q}$$

$$D(\bar{\varphi}) \cdot \ddot{\bar{\varphi}} = \bar{Q} - \bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) - \bar{G}(\bar{\varphi})$$

$$D^{-1}(\bar{\varphi}) \cdot D(\bar{\varphi}) \cdot \ddot{\bar{\varphi}} = \bar{Q} - \bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) - \bar{G}(\bar{\varphi}) \cdot D^{-1}(\bar{\varphi})$$

$$\ddot{\bar{\varphi}} = D^{-1}(\bar{\varphi}) \cdot (\bar{Q} - \bar{H}(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) - \bar{G}(\bar{\varphi})) \quad (38)$$

[1] [15]

2.6.1 Symetrická matica zotrvačnosti D

$$d_{11} = J_0 + m_2 \cdot \left(l_1^2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + (h_1 - h_2 + h_3)^2 \right) +$$

$$+ m_2 \cdot \left(l_2^2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot (\cos(\varphi_3) + \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3)) \right)$$

$$+ m_1 \cdot \left(l_1^2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 \right)$$

$$d_{12} = m_1 \cdot \left(\sin(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) \right) + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \cdot$$

$$\cdot (\sin(\varphi_2) \cdot l_1 + l_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3))$$

$$d_{13} = -l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)$$

$$d_{21} = l_1 \cdot m_1 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) + l_1 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) +$$

$$+ l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)$$

$$d_{22} = l_1^2 \cdot m_1 + l_1^2 \cdot m_2 + l_2^2 \cdot m_2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$d_{23} = -l_2^2 \cdot m_2 - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3)$$

$$d_{31} = -l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)$$

$$d_{32} = -l_2 \cdot m_2 \cdot (l_2 + l_1 \cdot \cos(\varphi_3))$$

$$d_{33} = l_2^2 \cdot m_2$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Následne z tejto rovnice vypočítame inverznú maticu, ktorú budeme potrebovať pri výpočte. Tento zápis je však príliš dlhý na to, aby bol zapísaný v tejto práci. Preto bola táto matica vypočítaná len v programovom prostredí, kde sa s ňou následne pracovalo.

2.6.2 Vektor rýchlostných väzieb H

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_{11} = & \left(-l_1^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) - l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) - \right. \\ & \left. - 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) \right) + \\ & + \left(l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (\sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) - \sin(\varphi_3)) \right) + \\ & + \left(\cos(\varphi_2) \cdot l_1 \cdot \left(m_1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right) + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) + \right. \\ & \left. + l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) + \\ & + \left(-2 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) + \left(l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) \right) \\ h_{21} = & \left(\frac{1}{2} \cdot (l_1^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) + l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3)) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) \right) + \\ & + \left(-2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3) \right) + \left(l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3) \right) \\ h_{31} = & \left(-\frac{l_2 \cdot m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + l_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) - l_1 \cdot \sin(\varphi_3))}{2} \right) + \left(l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3) \right) \end{aligned}$$

2.6.3 Vektor gravitačnej sily G

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = 0$$

$$g_{21} = g \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot (m_1 + m_2) + g \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$g_{31} = -g \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)$$

Výpočtom rovnice číslo (38) dostaneme vzťahy, ktoré nám definujú výpočet druhej derivácie pre uhly φ_1, φ_2 a φ_3 . Toto sú výsledné rovnice, ktoré už stačí len vložiť do simulačného programu. V tomto prípade do programu DYNAST, ktorý aj so schémami bude popísaný ďalej. Výsledné rovnice pre simuláciu zadaného robotického ramena sú pre ich veľkosť priložené v prílohe na konci diplomovej práce.

3 ELEKTROMECHANICKÉ AKČNÉ ČLENY

Elektromechanické akčné členy sú prevodníky energie elektrickej na energiu mechanickú.

Používajú sa ako pohon a to hlavne v oblastiach:

- obrábacích strojov, priemyselných robotov, čerpadiel, ventilátorov
- dopravných systémov

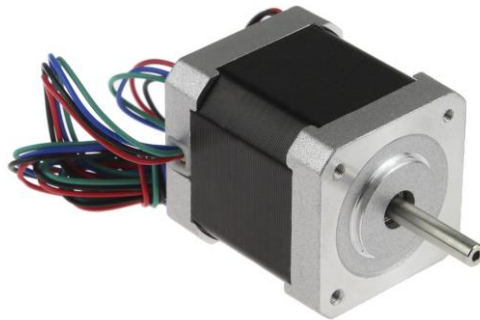
Elektromechanické akčné členy sa delia :

- Podľa napájacieho napätia
 - AC stroje
 - Asynchrónne motory
 - Synchronne motory
 - Krokové motory
 - DC stroje
 - S permanentným magnetom
 - S budenými pólmi

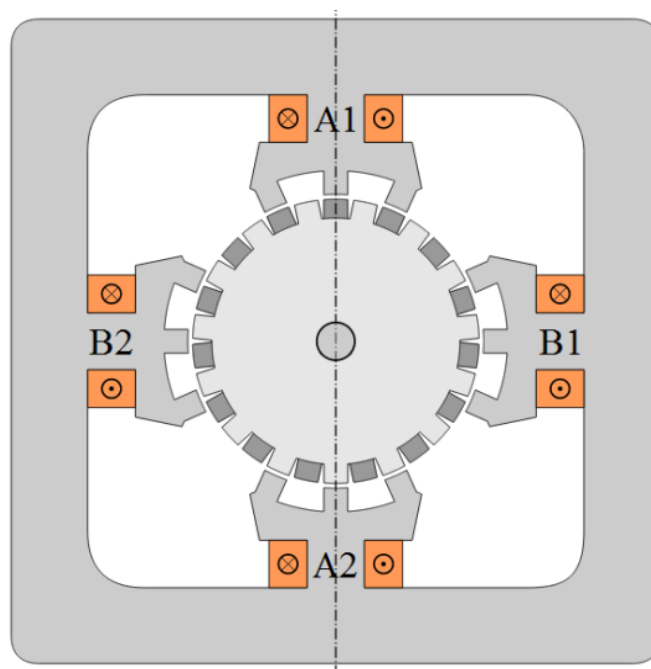
[8]

3.1 Krokový motor

Krokový motor je synchronný stroj, kde je nutné mať aspoň dve cievky, ktoré budú voči sebe posunuté o 90° a zároveň je ich potrebné napájať harmonickým napätím posunutým o 90° elektrických. Krokový motor tak ako každý iný elektromotor sa skladá z rotora a statora. Stator krokového motoru je tvorený väčšinou z niekoľkých dvojíc cievok. Tieto dvojice je možné postupne aktivovať, a tým sa vytvorí točivé magnetické pole. Vhodným aktivovaním susedných dvojíc je možné zdvojnásobiť počet krokov motora. Rotor je valec z magnetického materiálu s vystúpenými pólmi. Existujú 2 typy rotorov pre krokové motory a to buď rotor s permanentným magnetom alebo rotor so železom, ktoré majú vystúpené póly. Kvôli prechodovým magnetickým javom je obmedzená rýchlosť takéhoto motora na niekoľko stoviek krokov za sekundu (závisí na typu motora a ja záťaži). Ak túto maximálnu rýchlosť prekročíme potom dôjde k strate kroku. [9] [10] [14]



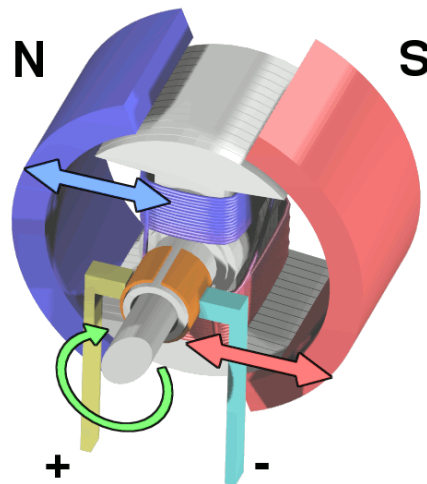
Obrázok 8 Krokový motor [11]



Obrázok 9 Vnútorná konštrukcia krokového motoru [12]

3.2 Jednosmerný motor

Motor, ktorý využíva princípy minimálnej energie. Stator býva zložený z permanentného magnetu alebo z cievky, ktorá generuje statické magnetické pole. Rotor jednosmerného motora je zložený z cievok a komutátora. Prúd sa do rotora dostane pomocou uhlíkov a komutátora. Komutátor je súčiastka, ktorá zabezpečuje to aby bolo statorové a rotorové pole navzájom kolmé. To že sú statorové a rotorové pole navzájom kolmé zapríčiňuje nerovnováhu v systéme, vďaka ktorej sa motor točí. [14]



Obrázok 10 Princíp jednosmerného motora [13]

3.3 Synchronný motor

Synchronný motor pracuje so synchronnými otáčkami. To znamená, že má nulový sklz. Stator býva tvorený 3-fázovým vinutím, ktorým ak prechádza 3-fázový prúd vytvorí točivé magnetické pole. [14]

3.3.1 Synchronný motor vyžadujúci pomocný štartér

V prípade že máme motor, ktorý vyžaduje na svoj rozbeh ďalší motor je konštrukcia jeho rotorovej časti nasledovná. Rotor je napájaný jednosmerným prúdom, vďaka ktorému vznikne na rotore statické magnetické pole. Avšak rýchlosť statorového magnetického poľa je tak vysoká, že rotorové pole sa nestačí roztočiť. Toto je spôsobené tým, že vzájomná rýchlosť týchto dvoch magnetických polí je príliš vysoká čo spôsobuje, že opačné póly statora a rotora sa nestihnú uzamknúť, vďaka čomu sa rotor neroztočí. Preto je potrebný štartér, ktorý roztočí rotor na synchronne otáčky a následne sa privedie prúd na cievky rotora, ktoré vytvoria magnetické pole. V tomto prípade už je vzájomná rýchlosť magnetických polí teoreticky nulová, vďaka čomu sa opačné póly rotora a statora dokážu uzamknúť. V tomto momente sa štartér odpája a synchronný motor funguje samostatne. Tento typ motorov sa však v robotike nepoužíva. [14]

3.3.2 Synchronný motor podporující self-štart

V případě že máme motor, který podporuje self-štart nepotřebujeme žádné další zařízení na počátečné roztočení motoru. Motor se liší v konstrukci rotorové části a to následovně. Rotor obsahuje navíc rozbehové vinutí nakrátko což způsobí, že točivé magnetické pole statora indukuje v rotore proud, který vytváří magnetické pole, které se otáčí asynchronními otáčkami. Toto magnetické pole roztočí rotor na otáčky blízké synchronním otáčkám. V tomto momente se připojí jednosměrný proud na rotor a rotor se stabilizuje na synchronních otáčkách. [14]

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

4 ROBOT MOVER4

Popisované bolo robotické rameno MOVER4 od spoločnosti Commonplace Robotics je štvor osí robotický manipulátor navrhnutý priamo pre potreby výuky. Dokáže uniesť záťaž 0.5kg a maximálny dosah má 0.55m. Programové prostredie CPRog umožňuje programovanie jednoduchých pohybov, ktoré následne môžeme spustiť na reálnom zariadení. MOVER4 je riadený pomocou USB rozhrania cez štandardné PC.

4.1 Konštrukčné parametre

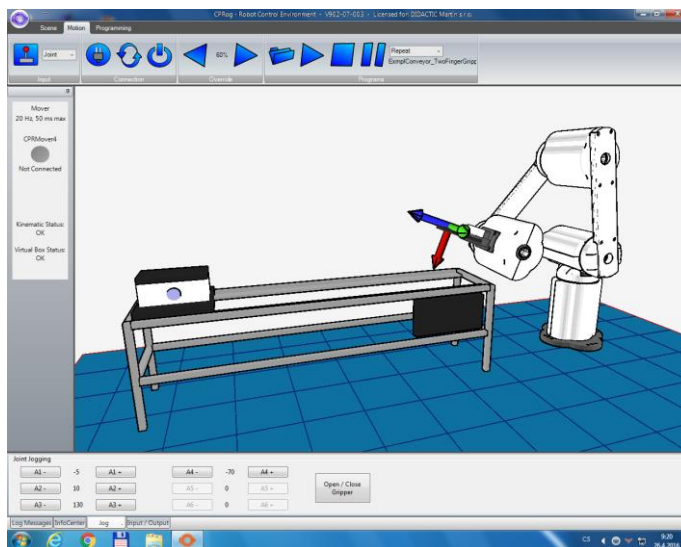
- Maximálna záťaž: 0.5kg
- Maximálny dosah: 0.55m
- Hmotnosť: 3,5 kg
- Komunikácia: USB, interne CAN
- Napájanie: cez adaptér 12V, <60W
- Konštrukcia: 4 servá s prevodovkou
- Software: CPRog (Windows), ROS (Linux)



Obrázok 11 Robot MOVER4

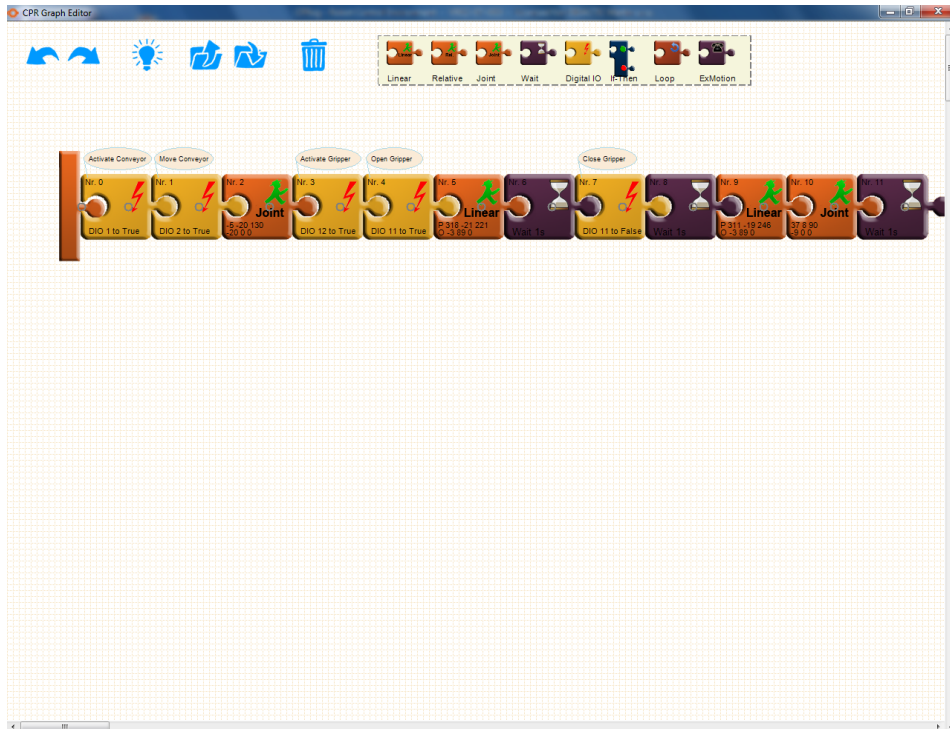
4.2 Programové prostredie CPRog

Programové prostredie CPRog umožňuje programovanie robota MOVER4. Toto programovanie môže byť buď grafickou alebo textovou formou. Na obrázku číslo 12 je zobrazená základná obrazovka, ktorá sa nám ukáže po spustení programu. Na tejto obrazovke je potrebné pripojiť robota a odomknúť používanie akčných členov. Následne je na tejto obrazovke možné ručne pohybovať s robotickým ramenom a tým overiť jeho funkčnosť.



Obrázok 12 Vizualizácia robota v programe CPRog

Na obrázku číslo 13 a 14 je možné vidieť grafické a textové programovacie rozhranie. Ak bude vytvorený program v grafickom rozhraní, automaticky sa tento program prepisuje aj do textového rozhrania, v ktorom je možné meniť viac parametrov pohybu. Z tohto rozhrania je evidentné, že sa nejedná o žiadne priemyselné riešenie ale o robotické rameno určené priamo na výuku.



Obrázok 13 Ukážka grafického programovania v programe CPRog

Program Editor

File Edit Add Command Edit Command

ExmplConveyor_TwoFingerGripper.xml n/a

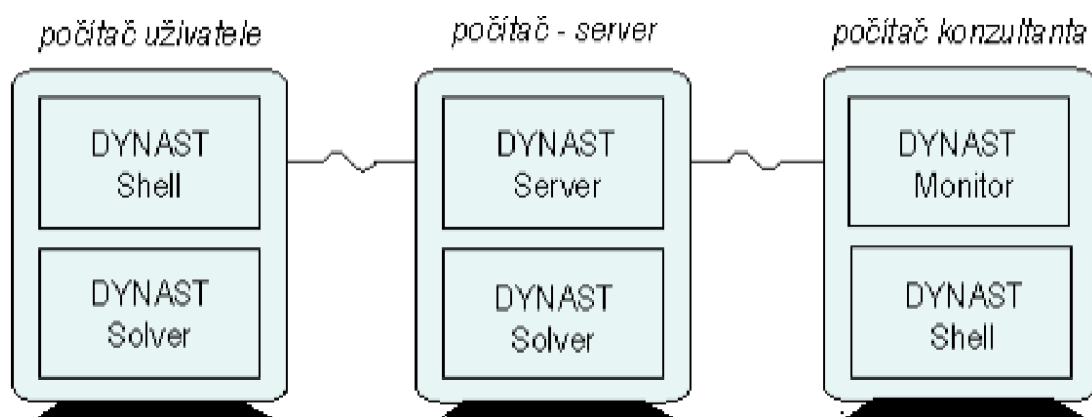
| Nr | Cmd | X | Y | Z | A | B | C | E1 | E2 | E3 | vel | acc | smooth | Description |
|----|--------|--------------|----------|--------------|----------|---------|-------|------|------|------|---------|------|--------|-------------------|
| 0 | DOut | Local: False | Ch: 1 | State: True | | | | | | | | | | Activate Conveyor |
| 1 | DOut | Local: False | Ch: 2 | State: True | | | | | | | | | | Move Conveyor |
| 2 | Joint | A1-5 | A2-20 | A3-130 | A4-20 | A5-0 | A6-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 40 % | 40 % | true | Activate Gripper |
| 3 | DOut | Local: True | Ch: 12 | State: True | | | | | | | | | | Open Gripper |
| 4 | DOut | Local: True | Ch: 11 | State: True | | | | | | | | | | |
| 5 | Linear | X-318.2 | Y-21.7 | Z-221.7 | A-3.9 | B-89.78 | C-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 80 mm/s | 40% | true | |
| 6 | Wait | 1 s | | | | | | | | | | | | |
| 7 | DOut | Local: True | Ch: 11 | State: False | | | | | | | | | | Close Gripper |
| 8 | Wait | 1 s | | | | | | | | | | | | |
| 9 | Linear | X-311.7 | Y-19.4 | Z-246.7 | A-3.55 | B-89.7 | C-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 80 mm/s | 40% | true | |
| 10 | Joint | A1-37.88 | A2-8.94 | A3-90.75 | A4-9.24 | A5-0 | A6-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 40 % | 40 % | true | |
| 11 | Wait | 1 s | | | | | | | | | | | | |
| 12 | Linear | X-256.5 | Y-198.6 | Z-244.7 | A-142.26 | B-89.27 | C-180 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 80 mm/s | 40% | true | |
| 13 | Joint | A1-0.06 | A2-12.19 | A3-86.35 | A4-7.81 | A5-0 | A6-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 40 % | 40 % | true | |
| 14 | Linear | X-318.2 | Y-21.7 | Z-221.7 | A-3.9 | B-89.78 | C-0 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 80 mm/s | 40% | true | |
| 15 | DOut | Local: True | Ch: 11 | State: True | | | | | | | | | | |
| 16 | Wait | 1 s | | | | | | | | | | | | |
| 17 | DOut | Local: False | Ch: 2 | State: False | | | | | | | | | | |
| 18 | Linear | X-324.4 | Y-0.4 | Z-244.7 | A-179.94 | B-89.27 | C-180 | E1-0 | E2-0 | E3-0 | 80 mm/s | 40% | true | |
| 19 | Wait | 2 s | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | | |

File loaded: C:\CPRog\Data\Programs\ExmplConveyor_TwoFingerGripper.xml

Obrázok 14 Ukážka textového programovania v programe CPRog

5 DYNAST

Program DYNAST je simulačné programové prostredie vytvorené pre jednoduché a efektívne modelovanie rôznych fyzikálnych a elektrických javov. Zadávanie do programu prebieha buď graficky alebo textovo. Ak budeme používať vstavané knižnice programu DYNAST, potom je možné veľmi rýchlo vytvoriť potrebný model. Pre knižnice nie je potrebné písať rovnice. Stačí bloky spojiť a program si už sám vygeneruje potrebné rovnice. DYNAST navyše oproti ostatným programom podporuje aj vzájomnú spoluprácu na projekte. [7]



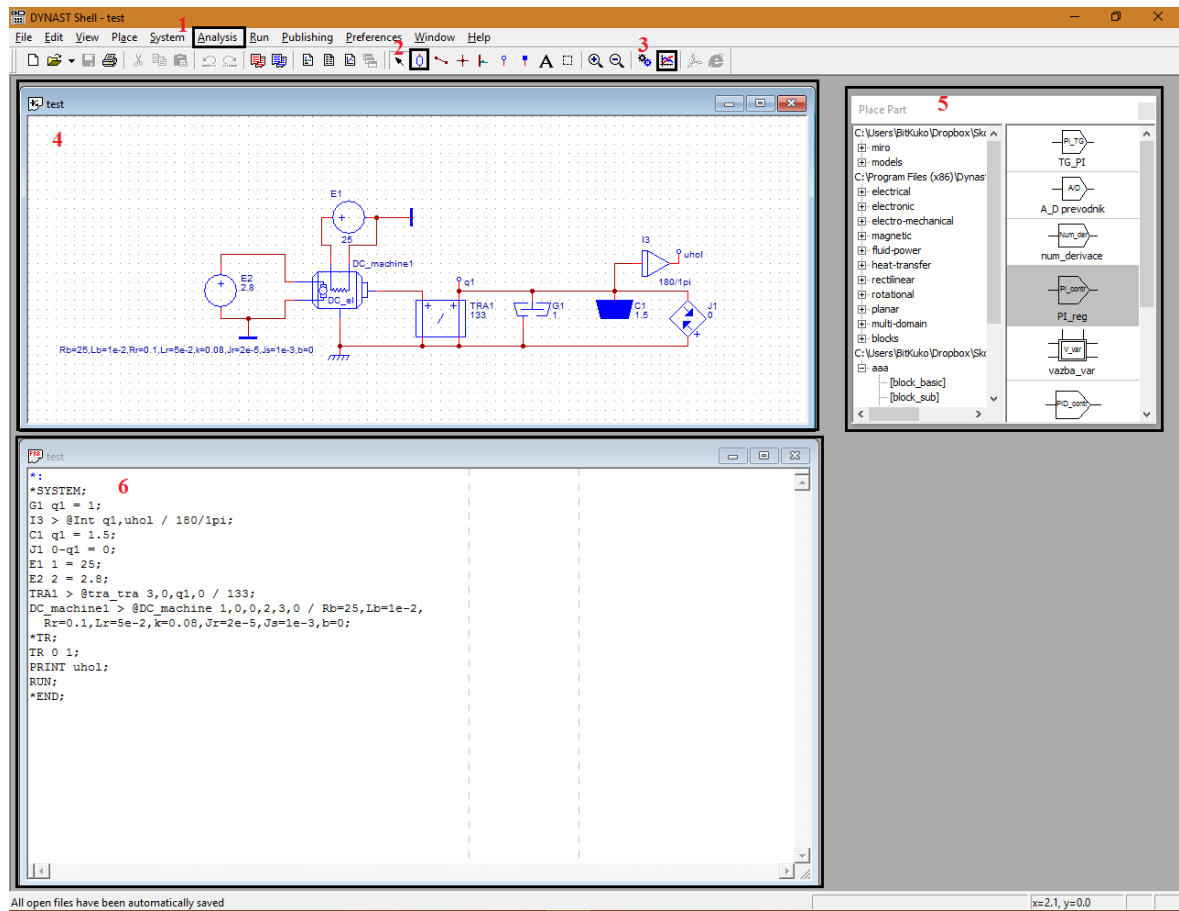
Obrázok 15 Konfigurácia programového prostredia DYNAST [7]

Ako je vidieť z obrázku číslo 15 ide v podstate o distribuovaný systém, kde sa všetky výpočty riešia na vzdialenom servere ale je možné si zaobstarat' aj licenciu s lokálnym riešiteľom, kde už nie je nutnosťou internetové pripojenie.

Výpočtové jadro DYNASTu (DYNAST Solver) umožňuje riešiť:

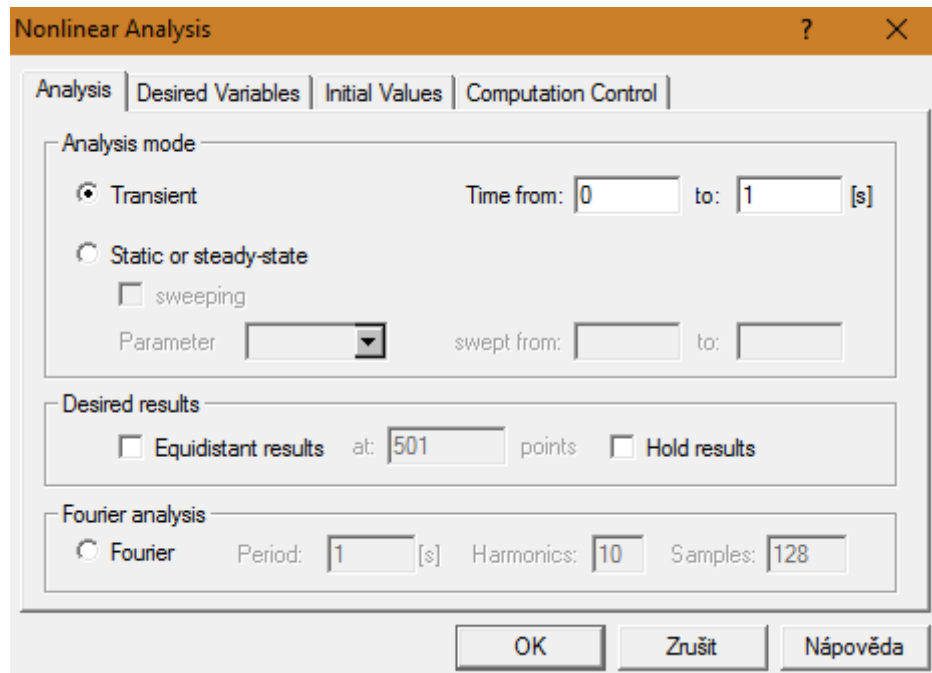
1. Nelineárne a nestacionárne problémy
 - a. Automatickú formuláciu a riešenie rovníc zadané pomocou grafického návrhu
 - b. Riešenie sústav zadaných textovo
 - c. Riešenie rovníc zadaných graficky ako blokovú schému
 - d. Výpočet závislosti ustáleného riešenia na zmenách parametrov
 - e. Linearizáciu schém v okolí pracovného bodu
2. Linearizované úlohy zadané v podobe grafickej schémy
 - a. Výpočet núl a pólov prenosovej funkcie
 - b. Vyjadrenie časovej odozvy

5.1 Prostredie programu DYNAST



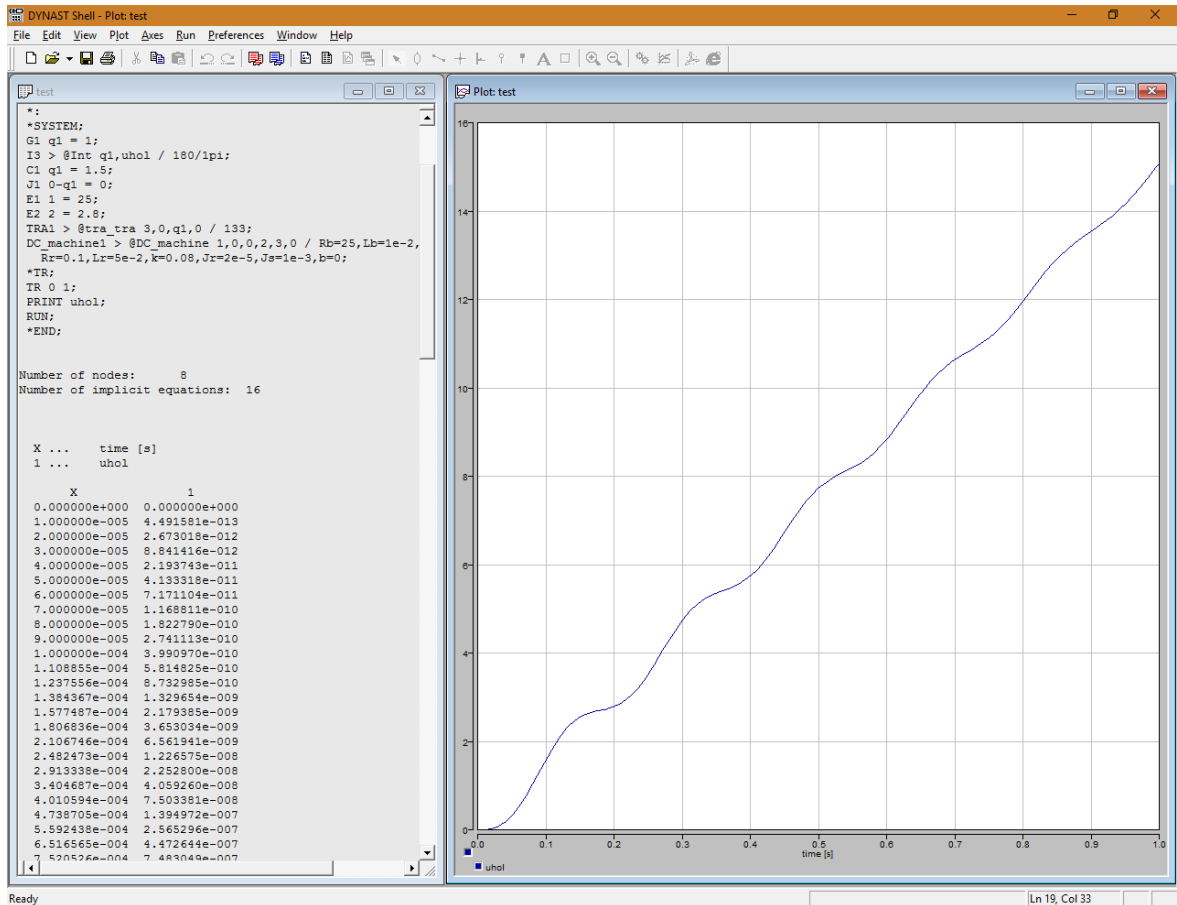
Obrázok 16 Zobrazenie prostredia DYNAST

Na obrázku je vyznačených 6 oblastí, ktoré sú pre prácu s programom DYNAST dôležité. Oblasť číslo 1 je tlačidlo Analysis, pomocou ktorého sa dostaneme do menu kde je možné vybrať z nasledovných možností (Nonlinear, Numerical Frequency a Semisymbolic Linear). Najdôležitejšia časť menu Analysis je Nonlinear a táto položka bude popísaná nižšie. Oblasť číslo 2 označuje tlačidlo, ktoré vyvolá okno číslo 5 čo je knižnica modelov súčastok, ktoré sú predprogramované v DYNASTE. Túto knižnicu je možné rozširovať o ďalšie vlastné modely. Vyznačená oblasť číslo 3 je opäť tlačidlo, ktoré prikáže spustiť riešiteľa. V tomto momente sa spustí výpočet zadaného problému. Nakoniec oblasti číslo 4 a 6 sú rozhrania pre zadávanie grafického alebo textového tvaru modelu. Ak začneme s tvorbou grafického modelu, textový model sa po zobrazení automaticky vygeneruje. Textový model je možné meniť prípadne do neho doplniť dodatočné informácie.



Obrázok 17 Zobrazenie možností po stlačení tlačidla Analysis - Nonlinear

Na obrázku 17 sú zobrazené nastavenia analýzy problému. V prvej záložke Analysis je možné meniť napríklad čas simulácie. V ďalšej záložke Desired Variables je možnosť výberu premenných, ktoré budú vypočítané s možnosťou zobrazenia v grafe. Záložka Initial Values je rozhranie, v ktorom je možné zadávať počiatočné podmienky do výpočtu. Napríklad v tejto diplomovej práci bolo nutné zadať počiatočné hodnoty uhlov φ_1, φ_2 a φ_3 . V poslednej záložke je možné meniť nastavenia výpočtu.



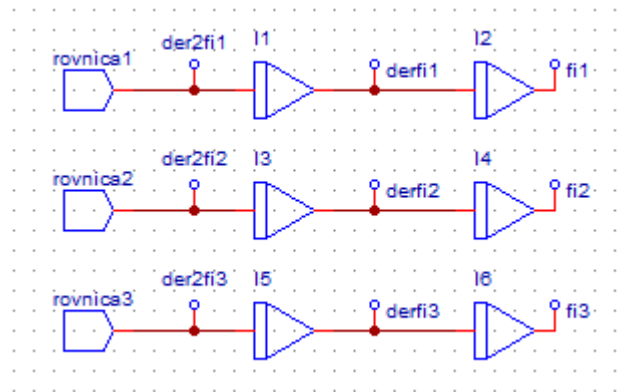
Obrázok 18 Zobrazenie výsledkov textovo a graficky

Na obrázku číslo 18 sú zobrazené 2 okná. V prvom okne na ľavej strane sú zobrazené výsledky simulácie v textovej podobe. Počítajú sa všetky premenné, ktoré si v Desired Variables zaškrtneme. Na pravej strane sú výsledky zobrazené graficky. No väčšine prípadoch nám postačí grafické zobrazenie výsledkov simulácie. V grafickom zobrazení výsledkov je možné zvoliť si zobrazenie aj viacerých premenných, čo zároveň umožňuje ich porovnávanie.

6 SIMULÁCIA

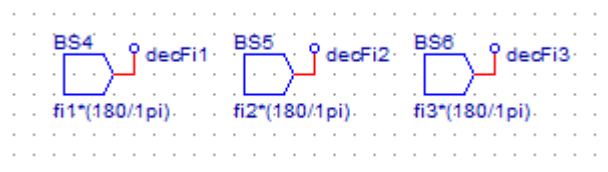
6.1 Simulovanie robotického ramena

Nasledujúca simulácia obsahuje vypočítané pohybové rovnice, ktoré sú mierne upravené do formátu programu DYNAST. Rovnice sú postupne vložené do blokov rovnica1, rovnica2 a rovnica3. Výstupom týchto blokov je uhlové zrýchlenie, ktoré následne vstupuje do integrátora, ktorého výstupom je uhlová rýchlosť jednotlivých uhlov. Nakoniec uhlová rýchlosť vstupuje do posledného integrátora, ktorého výstupom sú uhly φ_1, φ_2 a φ_3 . Táto schéma nám teda vypočíta uhlové zrýchlenie, uhlovú rýchlosť a nakoniec veľkosť uhlu φ_1, φ_2 a φ_3 . Tieto veličiny potrebujeme pri následnom rozširovaní schémy o akčné členy.



Obrázok 19 Bloková schéma pohybových rovníc

Vypočítané parametre φ_1, φ_2 a φ_3 sú vypočítané v radiánoch a pre jednoduchšiu prácu je potrebné si tieto hodnoty premeniť na stupne. To zaisťíme nasledovne.

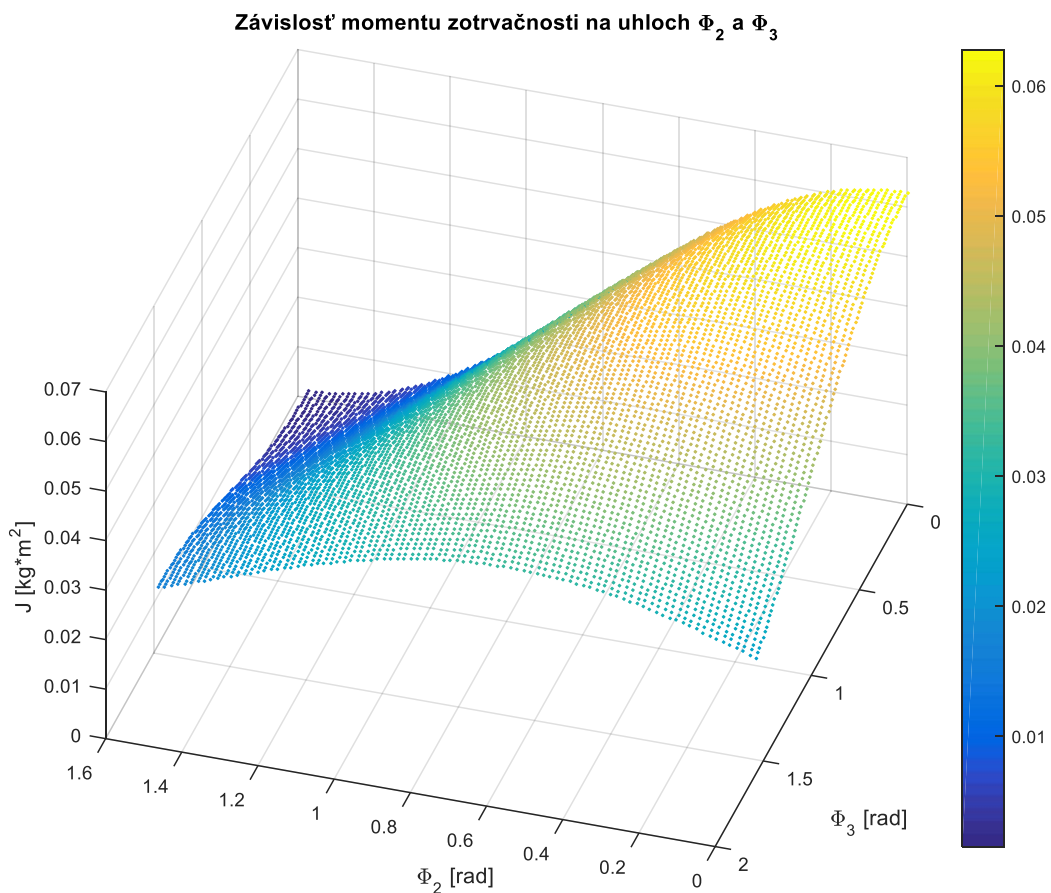


Obrázok 20 Bloková schéma prepočtu radiánov na stupne.

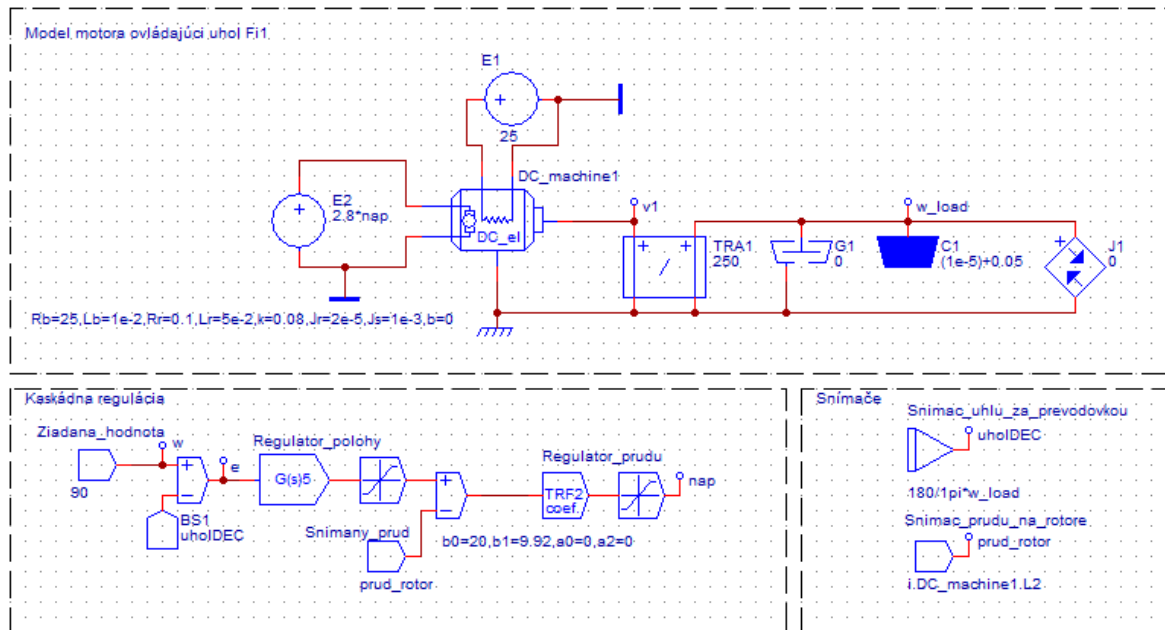
Bloky BS4, BS5 a BS6 postupne počítajú hodnoty uhlov φ_1, φ_2 a φ_3 v čase. Výsledné hodnoty v stupňoch sa následne ukladajú do vektorov decFi1, decFi2 a decFi3. Výpočetný vzťah je nutné zadať ručne a zadávame ho do parametru jednotlivých blokov BS4, BS5 a BS6.

6.2 Návrh regulácie jednosmerného motora pre uhol φ_1

Regulátor pre motor 1 bude navrhovaný ako autonómne servo. To znamená, že všetky vplyvy odstredivej alebo coriolisovej sily budú brané ako poruchy. Predtým ako bude vypočítaný regulátor, je potrebné zistiť v akom rozsahu sa asi bude pohybovať moment zotrvačnosti na motore 1. Toto zistíme z časti pohybovej rovnice prvého kĺbu a to z člena, ktorý je pri druhej derivácii uhlu φ_1 . Tento člen bol vložený do MATLABu, kde boli postupne dosadzované možné hodnoty uhlov φ_2 a φ_3 . Výsledné hodnoty boli postupne ukladané do premennej a následne prezentované na obrázku nižšie.



Obrázok 21 Závislosť momentu zotrvačnosti na uhloch φ_2 a φ_3

Obrázok 22 Regulátor uhlu φ_1

Pri návrhu regulátora pre uhol φ_1 bol zvolený nasledovný postup. Ako prvé bolo potrebné regulovať prúd na zdroji E_2 . Pri návrhu regulátora prúdu bolo potrebné najskôr získať prenos medzi E_2 a snímačom prúdu. Toto je možné urobiť priamo v DYNASTE a to nasledovne. V záložke Analysis bola zvolená možnosť Semisymbolic Analysis, kde hneď v prvej záložke zvolíme názov prenosu, ďalej vyberieme závislú premennú a nakoniec zvolíme zdroj. Následne je možné zvoliť možnosť vypočítania polynomiálnych koeficientov. Nakoniec v záložke Time-Domain Responses zvolíme možnosť jednotkového skoku. Následne je možné spustiť výpočet, ktorý prebieha štandardne, avšak ak si dáme zobrazit' textové výsledky simulácie môžeme tu vidiet' vypočítaný prenos. V tomto prípade vyšiel prenos nasledovne.

6.2.1 Regulátor prúdu pre jednosmerný motor č.1

$$G(s) = \frac{K \cdot b_0}{a_1 \cdot s + a_0} = \frac{20 \cdot 1}{s + 2} \quad (39)$$

Na získaný prenos bola aplikovaná polynomiálna metóda 1DoF.

$$G(s) = \frac{b}{a}; Gr(s) = \frac{q}{p}$$

$$b = K \cdot b_0$$

$$a = a_1 \cdot s + a_0$$

$$q = q_1 \cdot s + q_0$$

$$p = p_0$$

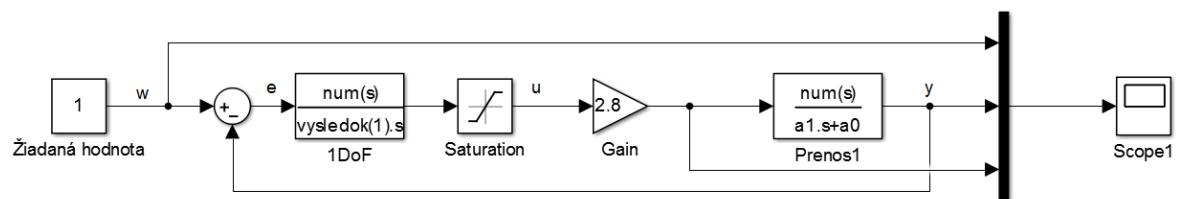
$$d = (s + \alpha)^2$$

$$a \cdot p \cdot s + b \cdot q = d$$

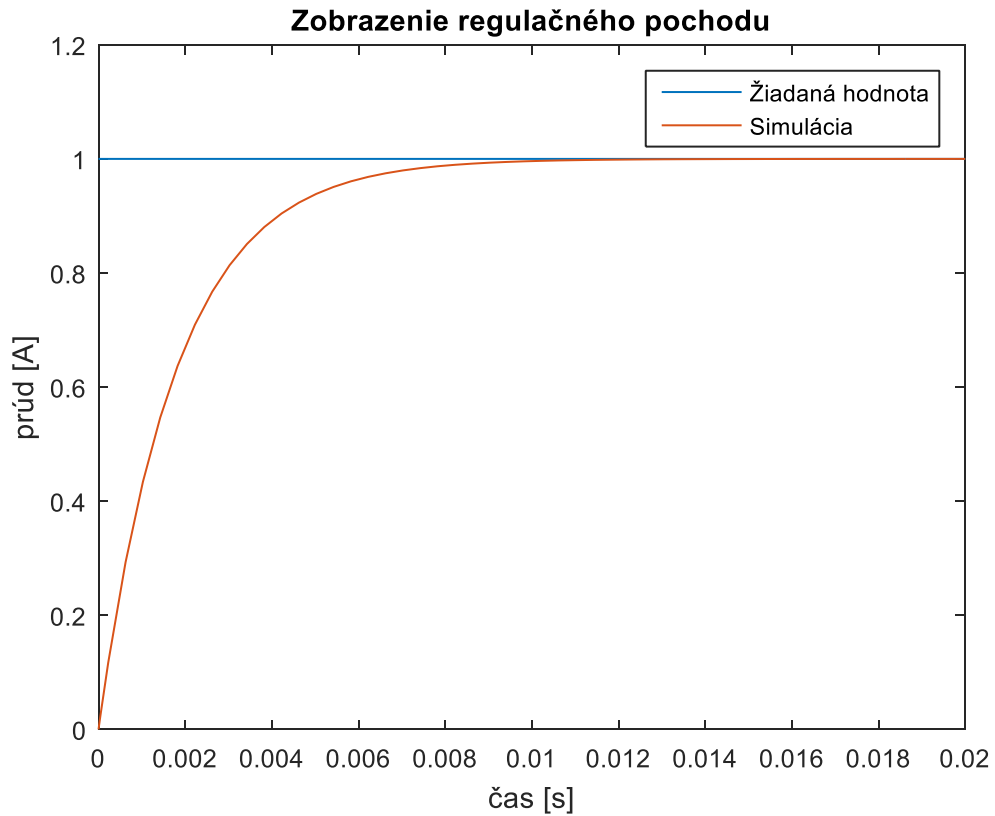
$$(a_1 \cdot p_0) \cdot s^2 + (a_0 \cdot p_0 + K \cdot b_0 \cdot q_1) \cdot s + K \cdot b_0 \cdot q_0 = (s + \alpha)^2$$

Následne bol tento zápis v maticovej forme zapísaný do scriptu v programe MATLAB, kde bol vypočítaný regulátor, ktorý bol následne odsimulovaný v prostredí Simulink.

$$Gr(s) = \frac{q_1 \cdot s + q_0}{p_0 \cdot s} = \frac{9.92 \cdot s + 20}{s} \quad (40)$$

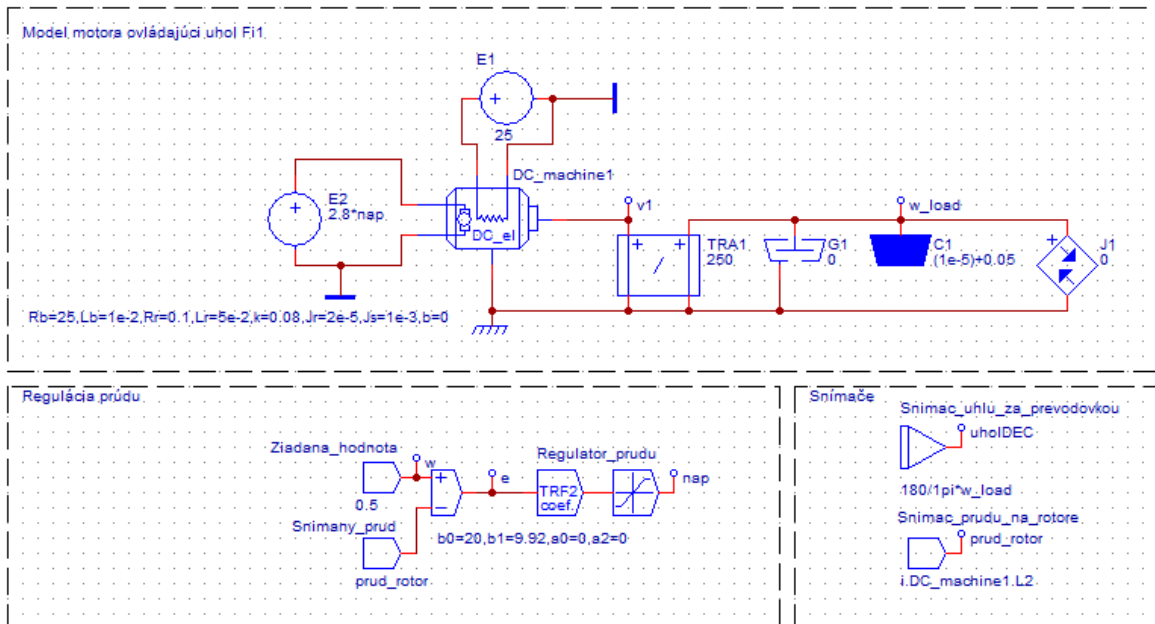


Obrázok 23 Regulačné schéma prúdu pre motor č.1



Obrázok 24 Zobrazenie regulácie prúdu

Navrhnutý regulátor bol následne prenesený do modelu v programe DYNAST.



Obrázok 25 Regulátor prúdu pre motor č.1

Z obrázku číslo 24 je vidieť, že návrh regulátora prúdu je funkčný a je možné na ňom ďalej stavať nadradený regulátor polohy.

6.2.2 Regulátor polohy pre jednosmerný motor č.1

Regulátor polohy bol navrhovaný rovnakým spôsobom ako regulátor prúdu. Ako prvé bolo nutné si znova vypočítať prenos tento krát ale prenos medzi žiadanou hodnotou prúdu a snímanou polohou. Výsledný prenos bol.

$$G(s) = \frac{K \cdot (b_1 \cdot s + b_0)}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{4936214 \cdot (s + 1000)}{s^4 + 5602 \cdot s^3 + 5606154 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 0} \quad (41)$$

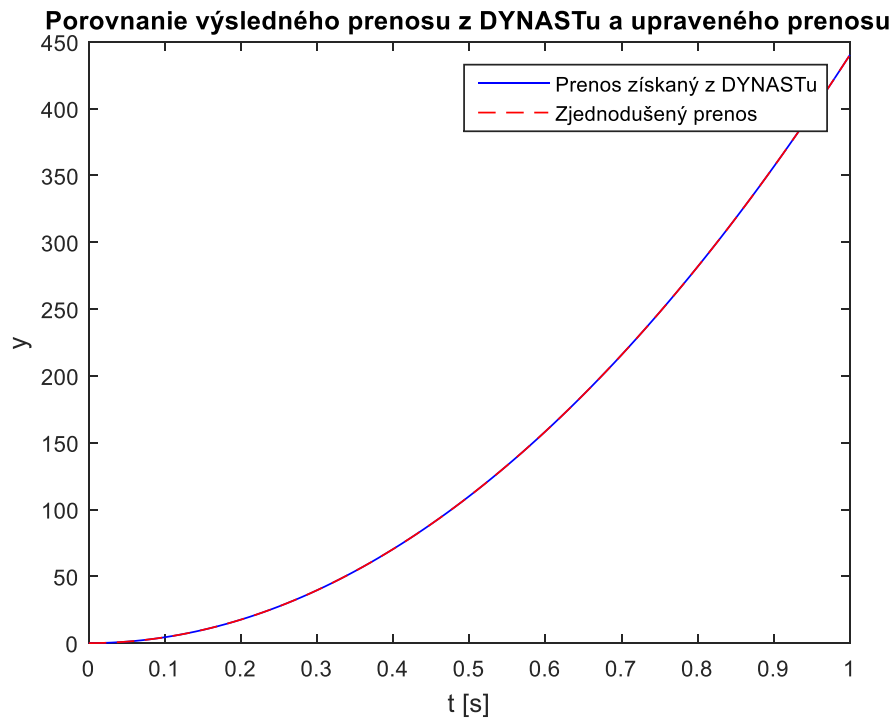
Tento prenos je ale potrebné upraviť nasledujúcim spôsobom.

$$G(s) = \frac{K \cdot (b_1 \cdot s + b_0)}{a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{(b_1 \cdot s + b_0)}{\frac{(a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)}{K}}$$

$$G(s) = \frac{(b_1 \cdot s + b_0)}{\frac{(a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)}{K}} = \frac{(s + 250)}{2.026e-07 \cdot s^4 + 0.001135 \cdot s^3 + 1.136 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 0}$$

Vzhľadom na to, že člen a_4 je extrémne malý môžeme napísať výsledný prenos v tvare :

$$G(s) = \frac{(s + 1000)}{0.001135 \cdot s^3 + 1.136 \cdot s^2} \quad (42)$$



Obrázok 26 Porovnanie prenosu získaného z DYNASTu a upraveného prenosu

V ďalšom kroku bolo potrebné vypočítať regulátor pre tento systém.

$$G(s) = \frac{b}{a}; Gr(s) = \frac{q}{p}$$

$$b = b_1 \cdot s + b_0$$

$$a = a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$$

$$q = q_3 \cdot s^3 + q_2 \cdot s^2 + q_1 \cdot s + q_0$$

$$p = p_2 \cdot s^2 + p_1 \cdot s + p_0$$

$$d = (s + \alpha)^6$$

$$a \cdot p \cdot s + b \cdot q = d$$

$$(a_3 \cdot p_2) \cdot s^6 + (a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_1) \cdot s^5 + (a_1 \cdot p_2 + a_2 \cdot p_1 + a_3 \cdot p_0 + b_1 \cdot q_3) \cdot s^4 +$$

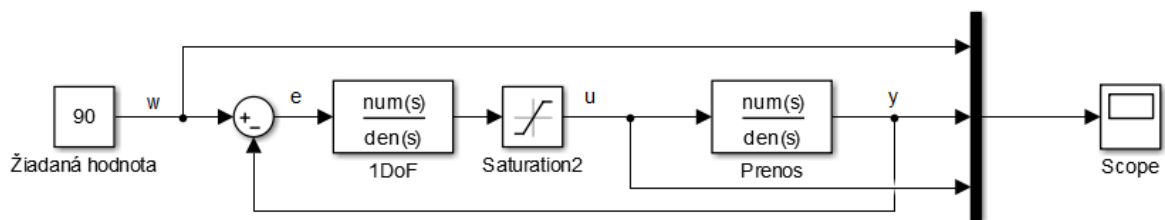
$$(a_0 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_0 + b_0 \cdot q_3 + b_1 \cdot q_2) \cdot s^3 +$$

$$+ (a_0 \cdot p_1 + a_1 \cdot p_0 + b_0 \cdot q_2 + b_1 \cdot q_1) \cdot s^2 +$$

$$+ (a_0 \cdot p_0 + b_0 \cdot q_1 + b_1 \cdot q_0) \cdot s + (b_0 \cdot q_0) = (s + \alpha)^6$$

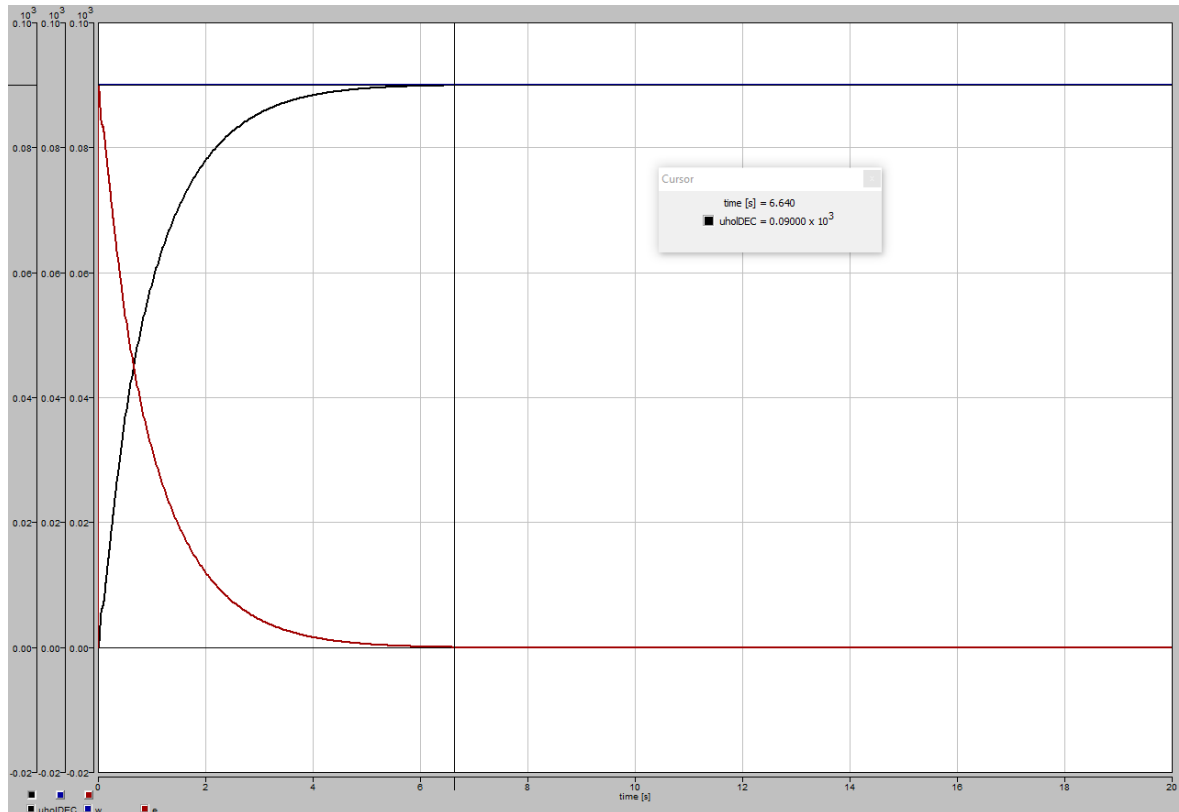
Táto diofantická rovnica bola prepísaná v maticovej forme do scriptu v MATLABe, kde bol navrhnutý regulátor typu 1DoF.

$$Gr(s) = \frac{1498 \cdot s^3 + 8154 \cdot s^2 + 3976 \cdot s + 3.968}{806.5 \cdot s^3 + 9.636e4 \cdot s^2 + 3.087e5 \cdot s} \quad (43)$$



Obrázok 27 Regulačná schéma polohy pre motor č.1

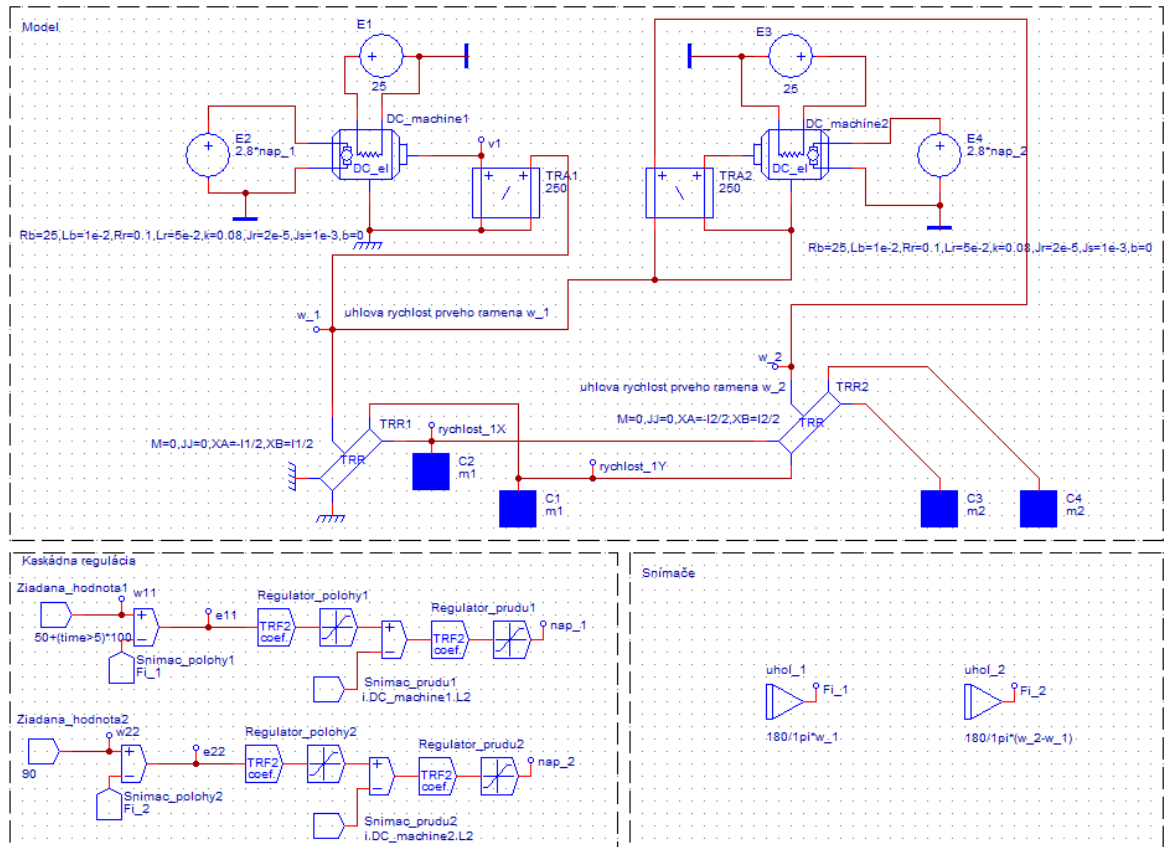
Navrhnutý regulátor bol následne prenesený do modelu v programe DYNAST, kde bola znova overená jeho funkčnosť. Schéma zapojenia v DYNASTE sa nachádza na obrázku 16.

Obrázok 28 Zobrazenie regulácie φ_1

Na obrázku 28 je vidieť, že kaskádna regulácia jednosmerného motora 1 funguje. Ak zažiadame hodnotu 90° tak pri súčasnom nastavení regulátorov dosiahneme žiadanú hodnotu za približne 6.6 sekundy. Túto hodnotu dosiahneme bez prekmitu.

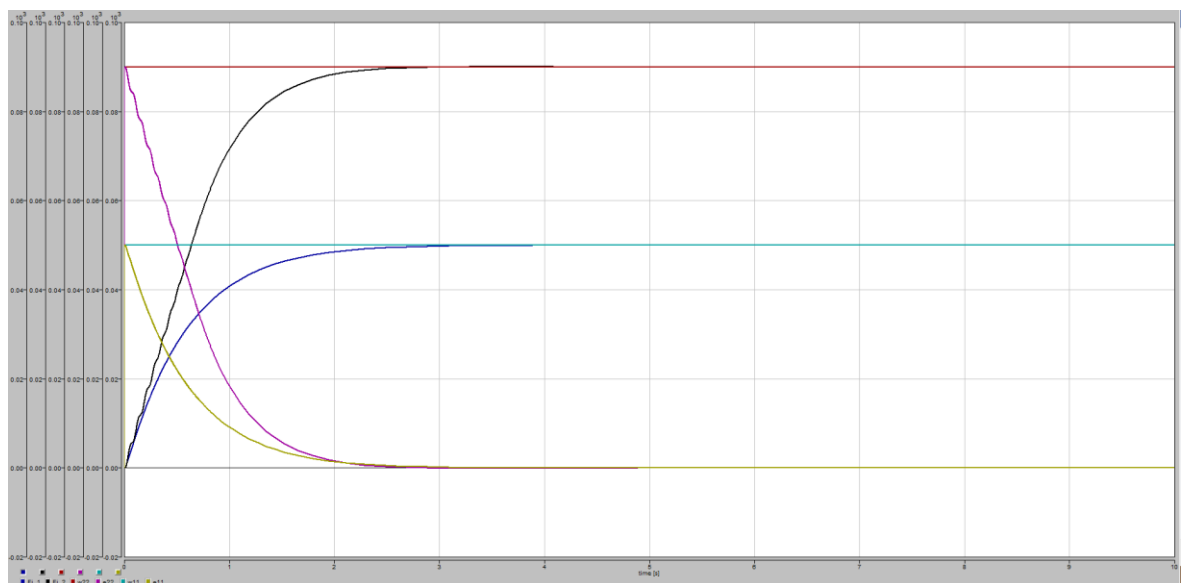
6.3 Návrh regulácie jednosmerného motora pre uhly φ_2 a φ_3

Regulátor pre uhol φ_2 a φ_3 bol navrhovaný v prostredí MATLAB je typu PID. Pre zistenie optimálneho nastavenia bola použitá metóda minimalizácie integrálneho kritéria. Po otestovaní v prostredí Simulink bolo potrebné ešte prepísať nastavený PID regulátor na prenos, ktorý vieme jednoducho vložiť do simulácie v DYNASTE.



Obrázok 29 Model 2 kľbovej štruktúry s reguláciou jednosmerných motorov

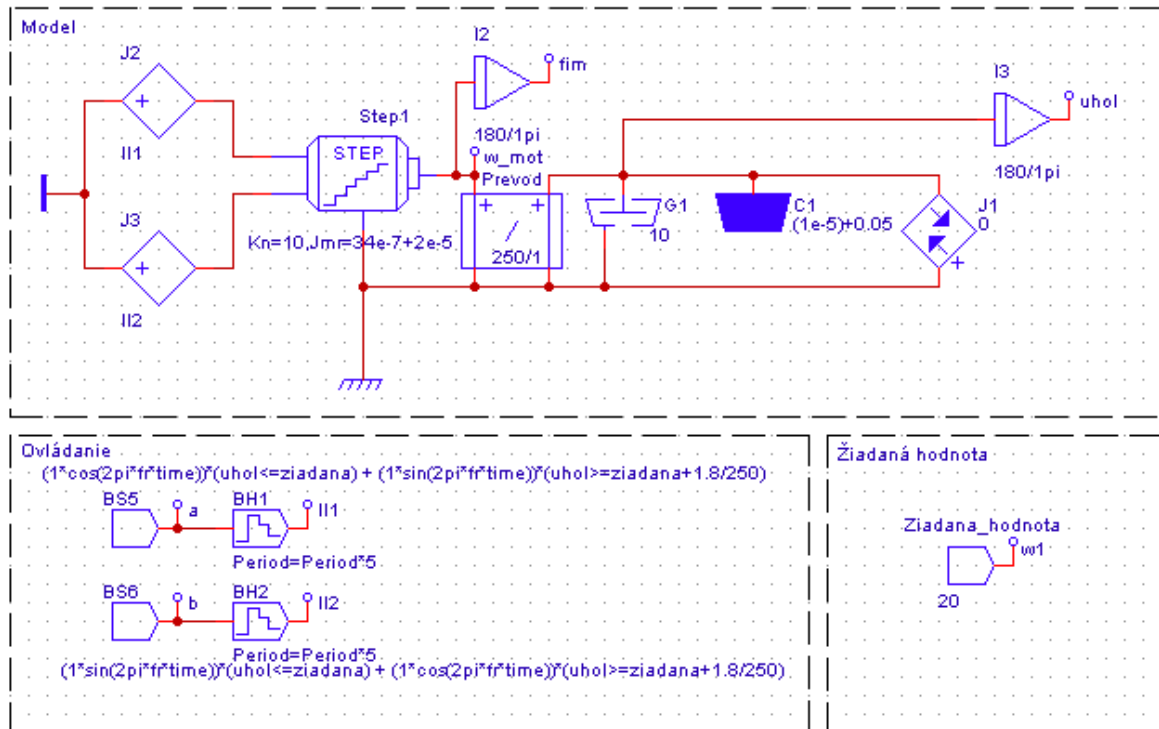
Obrázok číslo 29 zobrazuje schému zapojenie dvojkľbovej štruktúry robotického ramena. Do tejto schémy boli pridané akčné členy formou jednosmerných motorov, ktoré sú riadené kaskádou reguláciou zobrazenou na obrázku.



Obrázok 30 Zobrazenie regulácie

Na obrázku 30 je vidieť, že regulácia je dobrá a obe žiadané hodnoty sú dosiahnuté za približne 4.5 sekundy.

6.4 Návrh krokového motora v režime otvorenej slučky pre uhol φ_1



Obrázok 31 Schéma zapojenia krokového motora v režime ovládania

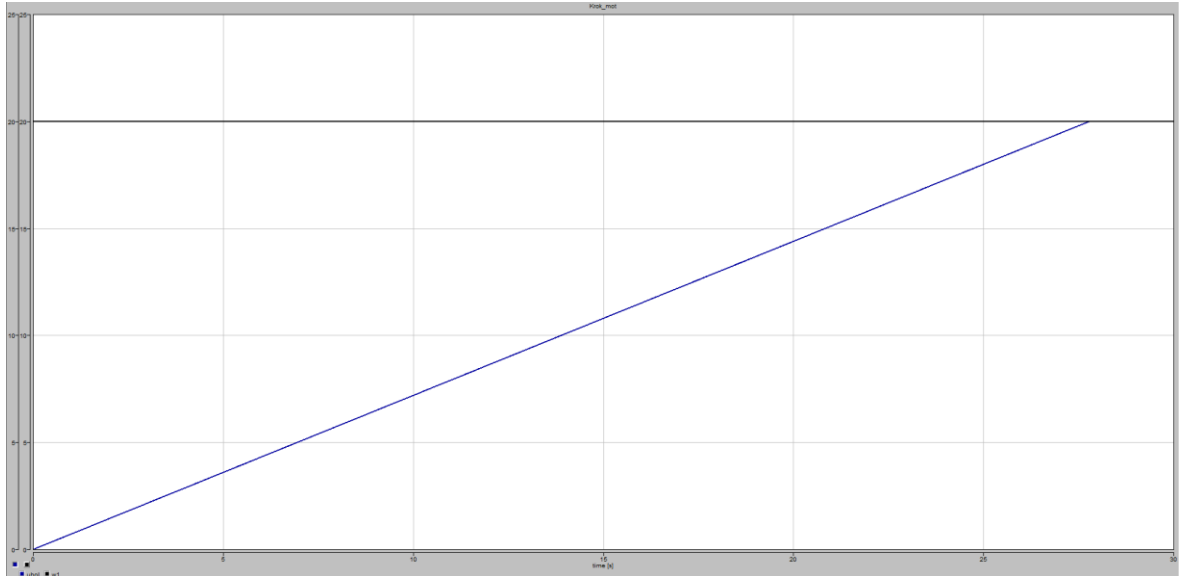
Použitý krokový motor je ovládaný prúdom, ktorý je riadený blokmi BS5 a BS6. V týchto blokoch sú zapísané rovnice chovania prúdu. Na začiatku je snímaný uhol rovný 0° a žiadaný uhol rovný 20° . Z toho vyplýva, že rovnica zapísaná v bloku BS5 bude mať nasledovný tvar :

$$BS5 = (\cos(2 \cdot \pi \cdot fr \cdot time)) \cdot (uhol \leq ziadana)$$

A to z dôvodu, že žiadaná hodnota je väčšia ako skutočná. Avšak ak snímaná hodnota bude väčšia ako žiadaná rovnica v bloku BS5 sa zmení nasledovne :

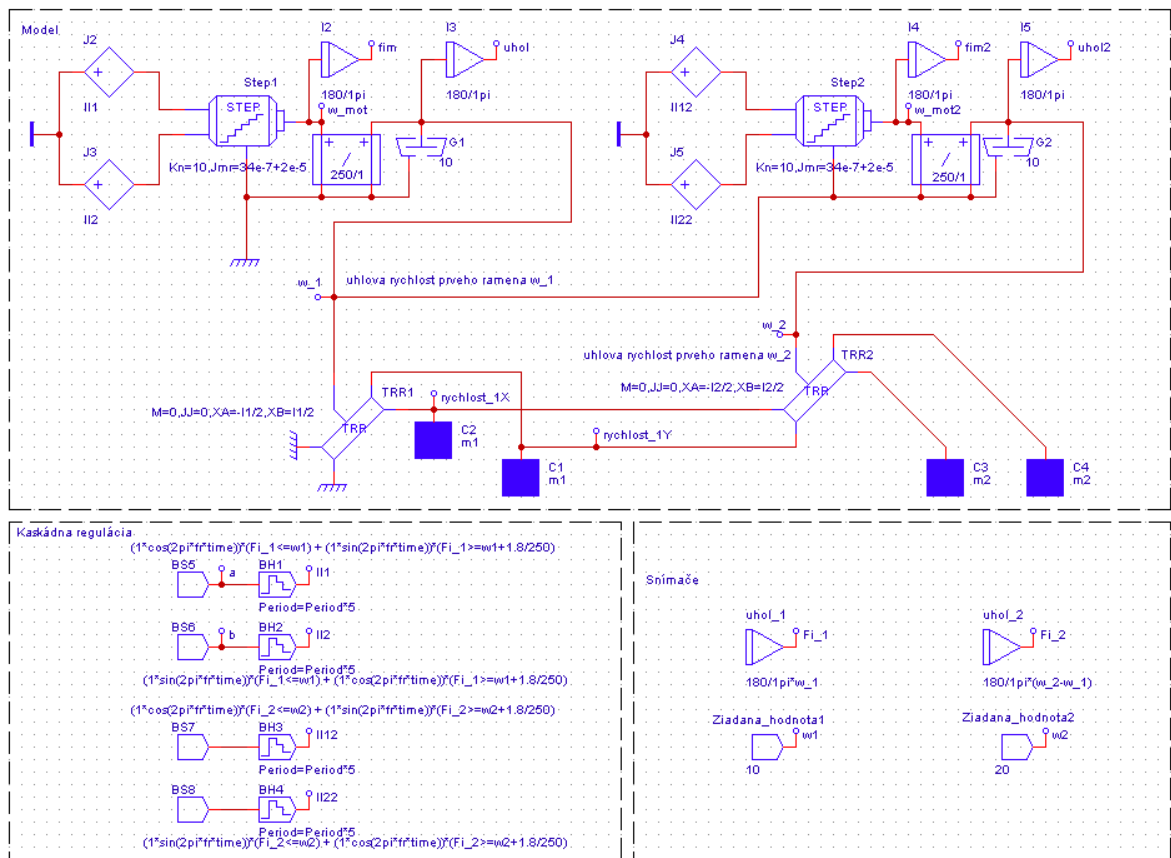
$$BS5 = (\sin(2 \cdot \pi \cdot fr \cdot time)) \cdot (uhol \geq ziadana + 1.8 / 250)$$

Podobne je to aj v prípade rovnice zapísanej v bloku BS6.



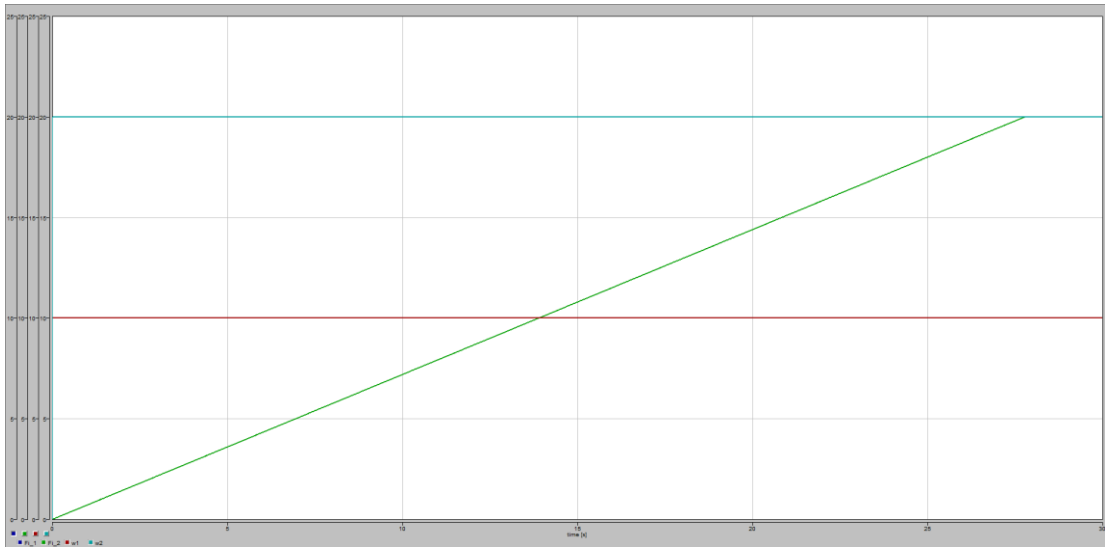
Obrázok 32 Zobrazenie priebehu žiadanej hodnoty a skutočnej hodnoty uhlu φ_1

6.5 Návrh krokového motora v režime otvorenej slučky pre uhly φ_2 a φ_3



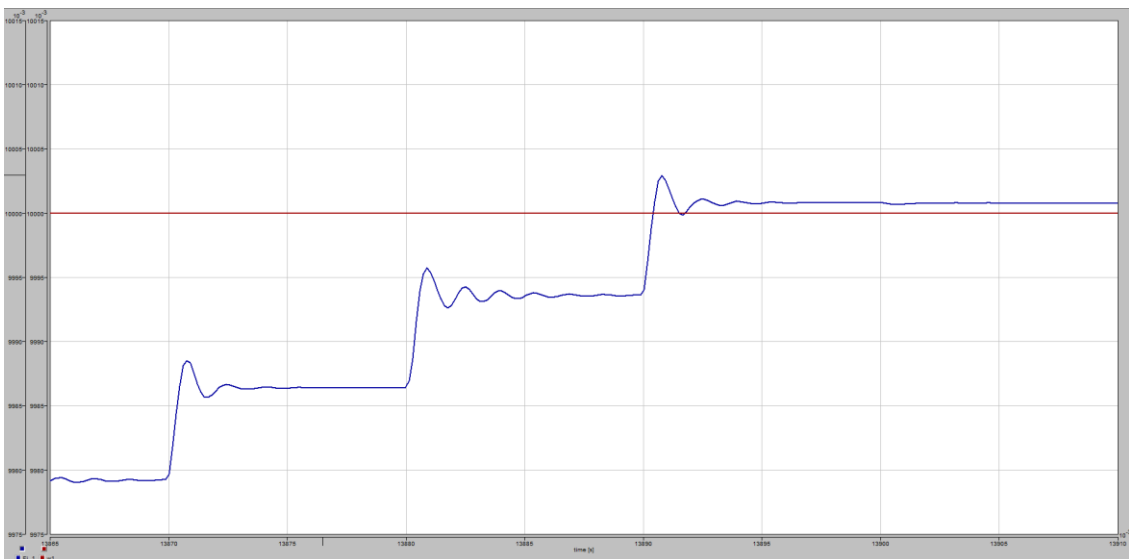
Obrázok 33 Schéma zapojenia krokových motorov v dvojkĺbovej štruktúre

Na obrázku číslo 33 je možné vidieť schému zapojenia krokových motorov do dvojkľbovej štruktúry. Ovládame ich rovnako ako v prípade schémy pre simuláciu krokového motora pre uhol φ_1 .



Obrázok 34 Zobrazenie priebehu žiadaných a skutočných hodnôt uhlov φ_2 a φ_3

Obrázok číslo 34 zobrazuje priebeh žiadaných a snímaných hodnôt uhlov. Obe žiadané hodnoty boli dosiahnuté.



Obrázok 35 Zobrazenie kroku krokového motora a regulačnej odchýlky.

Obrázok číslo 35 ukazuje že krokový motor skutočne krokuje a zároveň ukazuje stálu regulačnú odchýlku približne 0.001° . Tento nedostatok musíme akceptovať, nedá sa úplne vykompenzovať vieme ho len zmenšiť a to použitím prevodovky s väčším prevodovým stupňom.

ZÁVER

Táto práca sa zaoberala matematickým popisom reálneho robotického ramena, ktorý má štyri stupne voľnosti. Na začiatku tejto diplomovej práce boli objasnené všetky potrebné matematické vzťahy, ktoré bolo nutné pri zostavovaní kinetických a dynamických rovníc použiť. Následne boli zostavené zjednodušené simulačné schémy jednotlivých častí robota, kde boli implementované regulácie. Ako pohon boli použité 2 typy akčných členov a to jednosmerný a krokový motor. Následne boli tieto regulácie otestované na simuláciách, ktorých výsledky boli prezentované na grafoch. Výstupom tejto diplomovej práce sú teda pohybové rovnice chovania reálneho robotického ramena spolu s príkladom regulácie akčných členov osadených do jednotlivých kĺbov.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY

- [1] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Robotika [online]. 1. vyd. 2012 [cit. 2016-02-02]. ISBN 978-80-7454-223-7. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18589>
- [2] Súradnicové sústavy [online]. Žilina: Žilinská univerzita, 2016 [cit. 2016-04-05]. Dostupné z: fpedas.uniza.sk/~vojtek/21_SurSustavy.pdf
- [3] PRO ŘÍZENÍ HUMANOIDNÍHO ROBOTU [online]. BRNO, 2007 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: http://autnt.fme.vutbr.cz/szz/2007/DP_Stastny.pdf
- [4] TRKAL, Viktor. Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.
- [5] STUonline: Energia. STUonline [online]. Bratislava, 2016 [cit. 2016-04-07]. Dostupné z: [http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20I/II%20kapitola/2.2/mechanikaHB 2-5.htm](http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20I/II%20kapitola/2.2/mechanikaHB%202-5.htm)
- [6] Encyklopedie fyziky: Potenciální energie. Encyklopedie fyziky [online]. Bratislava, 2016 [cit. 2016-04-07]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/48-potencialni-energie>
- [7] Softwarový systém DYNAST. [online]. [cit. 2014-03-25]. Dostupné z: <http://virtual.cvut.cz/dynastcz/#resic>
- [8] VRÁNA, Václav. ELEKTRICKÉ STROJE. Ostrava, 2006. Fakulta elektrotechniky a informatiky, VŠB - TU Ostrava.
- [9] Krokové motory [online]. Brno, 2016 [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: <https://robotika.cz/articles/steppers/cs>

- [10] Krokový motor - princip [online]. Brno, 2016 [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: <http://www.mylms.cz/text-krokovy-motor-princip/>
- [11] Stepper motor [online]. [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: http://2.bp.blogspot.com/-yh-KSTGwrIX4/UfrLm60CnOI/AAAAAAAAADM/NY5BMn1oOp0/s1600/stepper_motor.jpg
- [12] Krokovy motor [online]. [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: <http://www.mylms.cz/obrazky/elektronika/krokovy-motor-14.png>
- [13] Electric motor cycle [online]. [cit. 2016-04-25]. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Electric_motor_cycle_2.png
- [14] Elmchn. akční členy [online]. Zlín, 2013 [cit. 2016-05-02]. Dostupné z: http://vyuka.fai.utb.cz/pluginfile.php?forcedownload=1&file=%2F32730%2Fmodule_resource%2Fcontent%2F0%2FElmech._akcni_cleny_pdf.zip
- [15] CORKE, Peter I. Robotics, vision and control: fundamental algorithms in MATLAB. Berlin: Springer, 2013. Springer tracts in advanced robotics, 73. ISBN 978-3-642-20143-1.
- [16] CRAIG, John J. Introduction to robotics: mechanics and control. 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall, c2005. ISBN 0201543613.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

ss Súradnicová sústava.

ZOZNAM OBRÁZKOV

| | |
|---|----|
| Obrázok 1 Zobrazenie pravotočivej a ľavotočivej ss. [2]..... | 12 |
| Obrázok 2 Zobrazenie rotácie okolo osy Z [1]..... | 12 |
| Obrázok 3 Zobrazenie jednotkových vektorov..... | 13 |
| Obrázok 4 Zobrazenie bodu P v globálnej a lokálnej ss. [1]..... | 15 |
| Obrázok 5 Pomocný trojuholník..... | 18 |
| Obrázok 6 Zobrazenie ôs a uhlov na manipulátore..... | 20 |
| Obrázok 7 Pracovný priestor robota..... | 23 |
| Obrázok 8 Krokový motor [11]..... | 45 |
| Obrázok 9 Vnútoraná konštrukcia krokového motoru [12]..... | 45 |
| Obrázok 10 Princíp jednosmerného motoru [13]..... | 46 |
| Obrázok 11 Robot MOVER4..... | 49 |
| Obrázok 12 Vizualizácia robota v programe CPRog..... | 50 |
| Obrázok 13 Ukážka grafického programovania v programe CPRog..... | 51 |
| Obrázok 14 Ukážka textového programovania v programe CPRog..... | 51 |
| Obrázok 15 Konfigurácia programového prostredia DYNAST [7]..... | 52 |
| Obrázok 16 Zobrazenie prostredia DYNAST..... | 53 |
| Obrázok 17 Zobrazenie možností po stlačení tlačidla Analysis - Nonlinear..... | 54 |
| Obrázok 18 Zobrazenie výsledkov textovo a graficky..... | 55 |
| Obrázok 19 Blokovaná schéma pohybových rovníc..... | 56 |
| Obrázok 20 Blokovaná schéma prepočtu radiánov na stupne..... | 56 |
| Obrázok 21 Závislosť momentu zotrvačnosti na uhloch φ_2 a φ_3 | 57 |
| Obrázok 22 Regulátor uhlu φ_1 | 58 |
| Obrázok 23 Regulačná schéma prúdu pre motor č.1..... | 59 |
| Obrázok 24 Zobrazenie regulácie prúdu..... | 60 |
| Obrázok 25 Regulátor prúdu pre motor č.1..... | 60 |
| Obrázok 26 Porovnanie prenosu získaného z DYNASTu a upraveného prenosu..... | 61 |
| Obrázok 27 Regulačná schéma polohy pre motor č.1..... | 62 |
| Obrázok 28 Zobrazenie regulácie φ_1 | 63 |
| Obrázok 29 Model 2 kĺbovej štruktúry s reguláciou jednosmerných motorov..... | 64 |
| Obrázok 30 Zobrazenie regulácie..... | 64 |
| Obrázok 31 Schéma zapojenia krokového motoru v režime ovládania..... | 65 |

| | |
|--|----|
| Obrázok 32 Zobrazenie priebehu žiadanej hodnoty a skutočnej hodnoty uhlu φ_1 | 66 |
| Obrázok 33 Schéma zapojenia krokových motorov v dvojkľbovej štruktúre..... | 66 |
| Obrázok 34 Zobrazenie priebehu žiadaných a skutočných hodnôt uhlov φ_2 a φ_3 | 67 |
| Obrázok 35 Zobrazenie kroku krokového motora a regulačnej odchýlky..... | 67 |

ZOZNAM TABULIEK

| | |
|---|----|
| Tabuľka 1 Denavit-Hartenbergové parametre | 20 |
|---|----|

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha 1 : Pohybová rovnica $\ddot{\varphi}_1$

Príloha 2 : Pohybová rovnica $\ddot{\varphi}_2$

Príloha 3 : Pohybová rovnica $\ddot{\varphi}_3$

Príloha 4 : Substitúcia menovateľa *sub*

PRÍLOHA 1: POHYBOVÁ ROVNICA $\ddot{\varphi}_1$

$$\begin{aligned} & ((l_2^2 * m_2 * (l_1^2 * m_1 + l_1^2 * m_2 + l_2^2 * m_2 + 2 * l_1 * l_2 * m_2 * \cos(\varphi_3)) - l_2 * m_2 * (l_2 + \\ & l_1 * \cos(\varphi_3)) * (m_2 * l_2^2 + l_1 * m_2 * \cos(\varphi_3) * l_2)) * (q_1 - (m_2 * (2 * l_1 * \cos(\varphi_2) * (h_1 - h_2 + h_3) + \\ & 2 * l_2 * \cos(\varphi_2 - \varphi_3) * (h_1 - h_2 + h_3))) / 2 + (m_2 * (2 * \sin(2 * \varphi_2) * l_1^2 + 4 * \sin(2 * \varphi_2 - \varphi_3) * l_1 * l_2 \\ & + 2 * \sin(2 * \varphi_2 - 2 * \varphi_3) * l_2^2)) / 2 + l_1^2 * m_1 * \sin(2 * \varphi_2) - l_2^2 * m_2 * \sin(2 * \varphi_2 - 2 * \varphi_3) + \\ & l_2 * m_2 * \cos(\varphi_2 - \varphi_3) * (h_1 - h_2 + h_3) - l_1 * m_1 * \cos(\varphi_2) * (h_1 - h_2 / 2) - (l_1 * l_2 * m_2 * (2 * \sin(2 * \varphi_2 \\ & - \varphi_3) - 2 * \sin(\varphi_3)) / 2)) / \text{sub} - (((m_2 * l_2^2 + l_1 * m_2 * \cos(\varphi_3) * l_2) * (m_2 * (l_1 * \sin(\varphi_2) + \\ & l_2 * \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) * (h_1 - h_2 + h_3) + l_1 * m_1 * \sin(\varphi_2) * (h_1 - h_2 / 2)) - l_2 * m_2 * \sin(\varphi_2 - \varphi_3) * (h_1 - \\ & h_2 + h_3) * (l_1^2 * m_1 + l_1^2 * m_2 + l_2^2 * m_2 + 2 * l_1 * l_2 * m_2 * \cos(\varphi_3))) * (q_3 + \\ & (l_2 * m_2 * (l_1 * \sin(2 * \varphi_2 - \varphi_3) + l_2 * \sin(2 * \varphi_2 - 2 * \varphi_3) - l_1 * \sin(\varphi_3)) / 2 - l_1 * l_2 * m_2 * \sin(\varphi_3) + \\ & g * l_2 * m_2 * \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) / \text{sub} + ((l_2^2 * m_2 * (m_2 * (l_1 * \sin(\varphi_2) + l_2 * \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) * (h_1 - h_2 + \\ & h_3) + l_1 * m_1 * \sin(\varphi_2) * (h_1 - h_2 / 2)) - l_2^2 * m_2^2 * \sin(\varphi_2 - \varphi_3) * (l_2 + l_1 * \cos(\varphi_3)) * (h_1 - h_2 + \\ & h_3)) * (g * (l_1 * m_1 * \cos(\varphi_2) + l_1 * m_2 * \cos(\varphi_2) + l_2 * m_2 * \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) - q_2 + \\ & (l_1^2 * m_1 * \sin(2 * \varphi_2)) / 2 + (l_1^2 * m_2 * \sin(2 * \varphi_2)) / 2 + (l_2^2 * m_2 * \sin(2 * \varphi_2 - 2 * \varphi_3)) / 2 + \\ & l_1 * l_2 * m_2 * \sin(2 * \varphi_2 - \varphi_3) - l_1 * l_2 * m_2 * \sin(\varphi_3)) / \text{sub} \end{aligned}$$

PRÍLOHA 2: POHYBOVÁ ROVNICA $\ddot{\varphi}_2$

$$\begin{aligned} &(((m_2 \cdot l_2^2 + l_1 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot l_2) \cdot (J_0 + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 + m_1 \cdot (h_1 - h_2/2)^2 + \\ &l_1^2 \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + l_1^2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + l_2^2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \\ &l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3) + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3)) - l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \\ &\varphi_3) \cdot (l_1 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \\ &l_1 \cdot m_1 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2/2)) \cdot (h_1 - h_2 + h_3)) \cdot (q_3 + (l_2 \cdot m_2 \cdot (l_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) + \\ &l_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) - l_1 \cdot \sin(\varphi_3))) / 2 - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3) + g \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3))) / \text{sub} - \\ &(((l_2^2 \cdot m_2 \cdot (l_1 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + \\ &l_1 \cdot m_1 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2/2)) - l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (m_2 \cdot l_2^2 + l_1 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3) \cdot l_2) \cdot (h_1 - \\ &h_2 + h_3)) \cdot (q_1 - (m_2 \cdot (2 \cdot l_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) + 2 \cdot l_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3))) / 2 + \\ &(m_2 \cdot (2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) \cdot l_1^2 + 4 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) \cdot l_1 \cdot l_2 + 2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) \cdot l_2^2)) / 2 + \\ &l_1^2 \cdot m_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) - l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3) + l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (h_1 - h_2 + h_3) - \\ &l_1 \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot (h_1 - h_2/2) - (l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot (2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) - 2 \cdot \sin(\varphi_3))) / 2)) / \text{sub} - \\ &(((l_2^2 \cdot m_2 \cdot (J_0 + m_2 \cdot (h_1 - h_2 + h_3)^2 + m_1 \cdot (h_1 - h_2/2)^2 + l_1^2 \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + \\ &l_1^2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2)^2 + l_2^2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_3) + \\ &l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3)) - l_2^2 \cdot m_2^2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_3)^2 \cdot (h_1 - h_2 + \\ &h_3)^2) \cdot (g \cdot (l_1 \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_2) + l_1 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2) + l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) - q_2 + \\ &(l_1^2 \cdot m_1 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2)) / 2 + (l_1^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2)) / 2 + (l_2^2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - 2 \cdot \varphi_3)) / 2 + \\ &l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2 - \varphi_3) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \sin(\varphi_3))) / \text{sub} \end{aligned}$$

PRÍLOHA 3: POHYBOVÁ ROVNICA $\ddot{\varphi}_3$

$$\begin{aligned} & - \left((m_2(l_1 \sin(\varphi_2) + l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3))(h_1 - h_2 + h_3) + l_1 m_1 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2/2)) \right. \\ & \left. (l_1 m_2 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2 + h_3) + l_2 m_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)(h_1 - h_2 + h_3) + l_1 m_1 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2/2)) - (l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_3)) \right) (J_0 \\ & + m_2 (h_1 - h_2 + h_3)^2 + m_1 (h_1 - h_2/2)^2 + l_1^2 m_1 \cos(\varphi_2)^2 + l_1^2 m_2 \cos(\varphi_2)^2 + l_2^2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 \\ & + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_3) + l_1 l_2 m_2 \cos(2\varphi_2 - \varphi_3)) (q_3 + (l_2 m_2 (l_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3) + l_2 \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3) - l_1 \sin(\varphi_3))) / 2 - l_1 l_2 m_2 \sin(\varphi_3) + \\ & g l_2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) / \text{sub} - ((l_2 m_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi_3)) (l_1 m_2 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2 + h_3) + l_2 m_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)(h_1 - h_2 + h_3) \\ & + l_1 m_1 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2/2)) - l_2 m_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)(h_1 - h_2 + h_3) (l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_3))) (q_1 - \\ & (m_2 (2 l_1 \cos(\varphi_2)(h_1 - h_2 + h_3) + 2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)(h_1 - h_2 + h_3))) / 2 + (m_2 (2 \sin(2\varphi_2) l_1^2 + 4 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3) l_1 l_2 + 2 \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3) l_2^2)) / 2 + \\ & l_1^2 m_1 \sin(2\varphi_2) - l_2^2 m_2 \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3) + l_2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)(h_1 - h_2 + h_3) - l_1 m_1 \cos(\varphi_2)(h_1 - h_2/2) - \\ & (l_1 l_2 m_2 (2 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3) - 2 \sin(\varphi_3))) / 2) / \text{sub} - ((l_2 m_2 (l_2 + l_1 \cos(\varphi_3)) (J_0 + m_2 (h_1 - h_2 + h_3)^2 + m_1 (h_1 - h_2/2)^2 + \\ & l_1^2 m_1 \cos(\varphi_2)^2 + l_1^2 m_2 \cos(\varphi_2)^2 + l_2^2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_3) + l_1 l_2 m_2 \cos(2\varphi_2 - \varphi_3)) - l_2 m_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) (m_2 (l_1 \sin(\varphi_2) + \\ & l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3))(h_1 - h_2 + h_3) + l_1 m_1 \sin(\varphi_2)(h_1 - h_2/2)) (h_1 - h_2 + h_3)) (g (l_1 m_1 \cos(\varphi_2) + l_1 m_2 \cos(\varphi_2) + l_2 m_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)) - q_2 + \\ & (l_1^2 m_1 \sin(2\varphi_2)) / 2 + (l_1^2 m_2 \sin(2\varphi_2)) / 2 + (l_2^2 m_2 \sin(2\varphi_2 - 2\varphi_3)) / 2 + l_1 l_2 m_2 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3) - l_1 l_2 m_2 \sin(\varphi_3)) / \text{sub} \end{aligned}$$

PRÍLOHA 4: SUBSTITÚCIA MENOVATEĽA *sub*

$$\begin{aligned} & (l_2 * (l_2 + \cos(\varphi_3) * l_1) * m_2 * (-l_2^2 * m_2 - \\ & \cos(\varphi_3) * l_1 * l_2 * m_2) + l_2^2 * m_2 * (l_2^2 * m_2 + 2 * \cos(\varphi_3) * l_1 * l_2 * m_2 + l_1^2 * m_2 + l_1^2 * m_1)) * ((h_1 - \\ & h_2 / 2)^2 * m_1 + \cos(\varphi_2)^2 * l_1^2 * m_1 + (h_1 - \\ & h_2 + h_3)^2 * m_2 + \cos(\varphi_2)^2 * l_1^2 * m_2 + \cos(\varphi_3) * l_1 * l_2 * m_2 + \cos(\varphi_3 - 2 * \varphi_2) * l_1 * l_2 * m_2 + \cos(\varphi_3 - \\ & \varphi_2)^2 * l_2^2 * m_2 + J_0) + \sin(\varphi_3 - \varphi_2) * (h_1 - h_2 + h_3) * l_2 * m_2 * (- \\ & l_2 * (\cos(\varphi_3) * l_1 + l_2) * m_2 * (\sin(\varphi_2) * (h_1 - h_2 / 2) * l_1 * m_1 + \sin(\varphi_2) * (h_3 - h_2 + h_1) * l_1 * m_2 - \sin(\varphi_3 - \\ & \varphi_2) * (h_1 - h_2 + h_3) * l_2 * m_2) - \sin(\varphi_3 - \varphi_2) * (h_1 - \\ & h_2 + h_3) * l_2 * m_2 * (l_1^2 * m_1 + l_1^2 * m_2 + 2 * \cos(\varphi_3) * l_1 * l_2 * m_2 + l_2^2 * m_2)) + (\sin(\varphi_2) * (h_1 - \\ & h_2 / 2) * l_1 * m_1 + (h_3 - h_2 + h_1) * (\sin(\varphi_2) * l_1 - \sin(\varphi_3 - \varphi_2) * l_2) * m_2) * (\sin(\varphi_3 - \varphi_2) * (h_3 - \\ & h_2 + h_1) * l_2 * m_2 * (-l_2^2 * m_2 - \cos(\varphi_3) * l_1 * l_2 * m_2) - l_2^2 * m_2 * (\sin(\varphi_2) * (h_1 - \\ & h_2 / 2) * l_1 * m_1 + \sin(\varphi_2) * (h_3 - h_2 + h_1) * l_1 * m_2 - \sin(\varphi_3 - \varphi_2) * (h_1 - h_2 + h_3) * l_2 * m_2)) \end{aligned}$$