Teorie her a rozhodování pro bezpečnostní aplikace

Bc. Laura Holotová

Diplomová práca
2016

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2015/2016

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Laura Holotová**
Osobní číslo:	**A15614**
Studijní program:	**N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Bezpečnostní technologie, systémy a management**
Forma studia:	**kombinovaná**
Téma práce:	**Teorie her a rozhodování pro bezpečnostní aplikace**
Téma anglicky:	**Game and Decision Theory for Security Applications**

Zásady pro vypracování:

1. **Nastudujte klasifikaci úloh a metody v teorii rozhodování.**
2. **Udělejte přehled her v normálním tvaru bez účasti a s účastí náhody.**
3. **Nastudujte problematiku nekooperativní a kooperativní hry (koaliční hry) dvou hráčů.**
4. **Uveďte metody převodu maticových her dvou hráčů na úlohu lineárního programování.**
5. **Uveďte ilustrativní příklady konfliktů dvou a více hráčů.**
6. **Navrhněte řešení pro aplikaci teorie her v bezpečnostním inženýrství.**

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **CIBULKA, Jan.Strategické hry v bezpečnostním inženýrství. Dipl. práce, FAI UTB, Zlín 2010.**
2. **DLOUHÝ, Martin; FIALA, Petr. Úvod do teorie her. první. Praha : Oeconomica, 2007. 114 s. ISBN 978-80-245-1273-0.**
3. **DOCKNER, Engelbert et al. Differential games in economics and management science. New York, USA : Cambridge University Press, 2001. 382 s. ISBN 0-521-63732-4.**
4. **FERGUSON, Thomas. Výukové texty k předmětu Game Theory vyučovaném na UCLA.**
5. **MAŇAS, Miroslav. Teorie her a optimální rozhodování. Praha : SNTL, 1974. IČ 04-012-74.**
6. **MAŇAS, M. Teorie her a konflikty zájmů. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 114 s. ISBN 80-245-0450-2.**
7. **MAŇAS, Miroslav. Teorie her a její aplikace. Praha : SNTL, 1991. 280 s. ISBN 80-03-00358-X.**
8. **MAREŠ, Milan. Principy strategického chování. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2003. 120 s. ISBN 80-246-0616-x.**
9. **MARKL, Jaroslav: Teorie her a modely rozhodování v podmínkách neurčitosti. Skriptum VŠB Ostrava.**

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Roman Prokop, CSc.**
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: **5. února 2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **16. května 2016**

Ve Zlíně dne 5. února 2016

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan

doc. RNDr. Vojtěch Křesálek, CSc.
ředitel ústavu

Jméno, příjmení: Laura Holotová

Název diplomové práce: Teorie her a rozhodování pro bezpečnostní aplikace

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 16. 5. 2016

....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Diplomová práca sa zaoberá aplikáciami a ukážkami ako možno teóriu hier a teóriu rozhodovania využiť pri riešení vybraných situácii v oblasti bezpečnosti. V jednotlivých kapitolách sú definované a vysvetlené princípy a pojmy potrebné pre antagonistické a neantagonistické hry. V príkladoch je pozornosť zameraná najmä na riešenie konfliktov bezpečnostného charakteru.

Klíčová slova:

teória hier, teória rozhodovania, bezpečnosť, maticové hry, antagonistický a neantagonistický konflikt

ABSTRACT

This thesis is focused on applications and examples how the game theory and decision theory can be utilized for solution of critical situations in security management. In every chapter there are defined and explained principles and terms necessary for antagonistic and non-antagonistic games. In examples there is attention focused mainly on safety conflicts solving.

Keywords:

game theory, theory of choice, security, matrix games, antagonistic and non-antagonistic conflict

Chcela by som sa touto cestou poďakovať môjmu vedúcemu práce, pánovi profesorovi Ing. Romanovi Prokopovi, CSc., za odborné vedenie práce a cenné rady pri spracovaní diplomovej práce.

Ďalej by som sa chcela poďakovať mojej rodine a priateľovi, ktorí ma podporovali počas celej doby štúdia.

OBSAH

ÚVOD

V dnešnej dobe zaznamenávame veľký vývoj informačných technológii, ktorý so sebou prináša rastúce možnosti v oblasti spracovania a následného využitia dát a informácii. Naša spoločnosť bez týchto dát už nedokáže existovať. Na jednu stranu sú informácie pre ňu prínosom ale na druhú stranu sú zdrojom rizík v zmysle zneužitia voči bezpečnosti objektov, poprípade zdravia kohokoľvek z nás.

Popri všetkých problémoch, ktorým čelíme, je dôležité poznať nástroj, ktorý nám pomôže činiť správne rozhodnutia. Jedným z takýchto nástrojov je aj teória rozhodovania, ktorá patrí pod teóriu hier. Teória rozhodovania, ako matematická veda, získala svoju obľúbenosť hlavne kvôli tomu, že dokáže interpretovať matematické výsledky spôsobom, ktorému ľudia rozumejú. Táto disciplína aplikovanej matematiky, môže byť použitá v mnohých vedných odvetviach ako napríklad biológia, psychológia, vojenská stratégia, ekonómia apod. Hry založené na rozhodovaní bývajú ukázané na skutočných situáciách z jednotlivých odborov, a tým sa matematika dostáva k ľuďom, ktorí by o ňu inak záujem nemali.

Teória rozhodovania sa snaží v konfliktnej situácii nájsť takzvané optimálne stratégie. Tieto rozhodovacie situácie, pri ktorých je protihráč schopný zareagovať na naše doterajšie rozhodnutie a ovplyvniť tak náš stav, sú typické pre bezpečnostný sektor. Práca si kladie za ciel aplikovať teóriu rozhodovania podľa dostupných matematických prostriedkov na bezpečnostnú problematiku.

Prvá časť práce sa zameriava na klasifikáciu teórie hier a rozhodovania. Sú tu vysvetlené základné pojmy, s ktorými sa pri teórii hier najčastejšie stretávame a ponúka nám aj náhľad do histórie.

V ďalších častiach je práca zameraná hlavne na modely rozhodovacích situácii, konkrétne diskrétny model rozhodovania. Je tu detailne popísaná antagonistická a neantagonistická hra a posledná časť práce sa zameriava hlavne na príklady z praxe, kde je vidieť využitie teórie rozhodovania v praktických ukážkach.

1 ÚVOD DO TEÓRIE ROZHODOVANIA A KLASIFIKÁCIA ÚLOH

Teória rozhodovania patrí pod teóriu hier. Je to disciplína aplikovanej matematiky, ktorá analyzuje široké spektrum konfliktných a rozhodovacích situácii. Tieto situácie môžu nastať kdekoľvek, kde dochádza ku stretu záujmov. Pomocou teórie rozhodovania môžeme tieto situácie analyzovať a vypočítať optimálnu stratégiu, ktorá bude vyhovovať všetkým aktérom v danej rozhodovacej situácii. Tým sa líši od rozhodovania jedného subjektu, kedy sa neuvažuje o interakcii s okolím.

1.1 História a známe osobnosti

Prvé úlohy, ktoré sú veľmi podobné tým z dnešnej teórie rozhodovania je možné pozorovať už v dobách antiky, hlavne v oblasti vojenskej stratégie. Mnoho filozofov sa snažilo odpovedať na otázku, ako by sa mal vojak pri boji čo najracionálnejšie zachovať, a to ako z pohľadu svojho tak z pohľadu protivníka. [4]

V 17. storočí sa začali objavovať náznaky teórie rozhodovania. Vznikol pojem pravdepodobnosť na základe analýzy hrania spoločenských hier (kocky, kartové hry, apod.). O vznik teórie pravdepodobnosti sa zaslúžil B. Pascal a P. de Fermant. [4] V 19. storočí sa narodil Adolf Hurwitz (1859-1918, Nemecko), ktorý vytvoril jedno z kritérií rozhodovania tzv. Hurwitzovo kritérium. Pri rozhodovacích situáciách je využívané dodnes. Prvá naozajstná zmienka teórie rozhodovania siaha do prvej polovice 18. storočia kedy James Waldegrave, britský veľvyslanec, vo svojom liste z roku 1713 popisuje stratégiu ku kartovej hre Le Her .Tento list je považovaný za prvú zmienku o teórii rozhodovania. Matematizácia teórie hier nastala až po tom, ako John von Neumann, publikoval tzv. fundamentálnu vetu. V roku 1944 vydal knihu *Teória hier a ekonomického chovania.* Napísal ju spoločne s Oskarom Morgensternom. Dielo sa zaoberá metódou pre nájdenie vzájomného konzistenčného riešenia pre hry dvoch osôb s nulovým súčtom. Jednou z najvýznamnejších osobností v rámci teórie rozhodovania bol John Forbes Nash, americký matematik a profesor na Princetonskej univerzite. Vytvoril koncept známi ako Nashova rovnováha. Tú je možné aplikovať na viac druhov hier než koncept vytvorený Morgensterneom a von Neumanneom, Dokážeme pomocou neho vytvoriť analýzu nekooperatívnych hier. Po tom, čo sa John Nash ocitol na vrchole svojej kariéry, začala sa u neho prejavovať ťažká choroba – paranoidná schizofrénia, kedy Nash veril, že s ním prostredníctvom novín komunikujú obyvatelia inej galaxie. Túto chorobu sa u Nasha nikdy nepodarilo úplne vyliečiť, ale pomohlo mu začlenenie do komunity na princetonskej univerzite [1]. John Nash spolu s Reinhardom Seltenom (1930, Nemecko) a Johnom Harsanym (1920-2000, Maďarsko) dostali v roku 1994 Nobelovu cenu za ekonómiu za prínos v teórii hier. Za zmienku stojí aj John Manard Smith, britský teoretický biológ a genetik, ktorého zásluhou bola prvý krát teória hier aplikovaná na biológiu pomocou stratégie stabilnej evolúcie. Viac o tomto probléme je možné nájsť v [2].

V dnešnom svete je teória hier využívaná v mnohých vedných disciplínach a svoje uplatnenie nachádza aj v otázkach armádnej a bezpečnostnej problematiky.

1.2 Koncept a základné pojmy v teórii hier a rozhodovania

Základnou myšlienkou teórie rozhodovania je modelovanie konfliktných situácii, v ktorých pôsobia dvaja alebo viacerí hráči. Ich snahou je maximalizovať svoju výhru. Hráči majú protichodné záujmy a rozhodujú sa buď individuálne alebo kolektívne. Stratégia jednania jedného hráča môže ovplyvniť výsledok nie len jeho samotného, ale aj ostatných, takže výhry všetkých účastníkov sú navzájom ovplyvňované.

Pre jednoduchšie pochopenie teórie rozhodovania je potrebné pomocou si definovať podľa [5] niekoľko základných pojmov:

Hra – každá konfliktná situácia

Hráč – aktívny účastník hry, ktorý svojím chovaním môže ovplyvniť jej výsledok

Racionálny hráč – hráč, ktorý sa usiluje o optimálny výsledok hry

Neinteligentný hráč – hráč, ktorému je výsledok hry ľahostajný

Stratégia hráča – jedna z možností chovania sa hráča pri hre. Množinu všetkých stratégii sa nazýva priestorom stratégii tohto hráča

Výplata hráča – kvantitatívne vyjadrenie výsledku hry, posudzované z hľadiska uvažovaného hráča pričom kladná hodnota výplaty predstavuje skutočný úžitok hráča z hry (získaná čiastka peňazí, bodov apod.), záporná výplata je prehrou

Nashova rovnováha – používa sa na analýzu výsledku strategickej interakcie niekoľkých hráčov. Ak si každý hráč zvolil stratégiu a žiaden hráč nemôže ťažiť zo zmeny svojej stratégie, zatiaľ čo si ostatní hráči ich stratégie udržia v nezmenenej podobe, potom aktuálne súbory výberu stratégie a zodpovedajúce výnosy predstavujú Nashovu rovnováhu

1.3 Klasifikácia hier

Často sa stretávame s výrazmi typu optimálny variant alebo najlepšie riešenie. Tento pojem nie je až tak jednoducho definovateľný a to hlavne preto, že definícia podstatne závisí na type situácie, o ktorej sa rozhoduje. Pre jednoduchšiu definíciu si podľa [16] zavedieme pojem rozhodovacia situácia.

Rozhodovacia situácia je taká situácia, v ktorej vystupuje jeden alebo viac účastníkov. Predpokladáme, že rozhodovaciu situáciu vždy posudzujeme z hľadiska prvého účastníka. Ten vyberá jedno z rozhodnutí danej a jemu známej množiny prípustných rozhodnutí. Rozhodnutie má na účastníka istý dôsledok. Predpokladá sa, že účastník dokáže rozpoznať, ktoré rozhodnutie je pre neho priaznivejšie ako iné a zároveň koná tak, aby dôsledok bol pre neho čo najpriaznivejší. Podľa toho delíme rozhodovacie situácie na nekonfliktné a konfliktné.

Jednoduchším prípadom sú nekonfliktné situácie, v ktorých vystupuje len jeden hráč. Je tu jednoznačne priradený dôsledok ku každému rozhodnutiu. Príkladom nekonfliktnej situácie je napríklad rozhodovanie o programe podniku pre zaistenie odbytu a pevne stanovených cien. Vyberáme ten program, ktorý nám maximalizuje jediný ukazovateľ kvality podniku.

Zložitejší prípad nastáva pri rozhodovacích situáciách, kde nastáva konflikt. Sú to takzvané konfliktné situácie. Vtedy dôsledok nezávisí len na rozhodnutí jedného hráča, ale aj na rozhodnutí ďalších účastníkov situácie. Predpokladá sa, že prvý účastník je inteligentný subjekt. Ostatní účastníci môžu byť buď rovnakej povahy ako prvý účastník alebo náhodné mechanizmy bez záujmu vlastného prospechu - neinteligentný hráč.

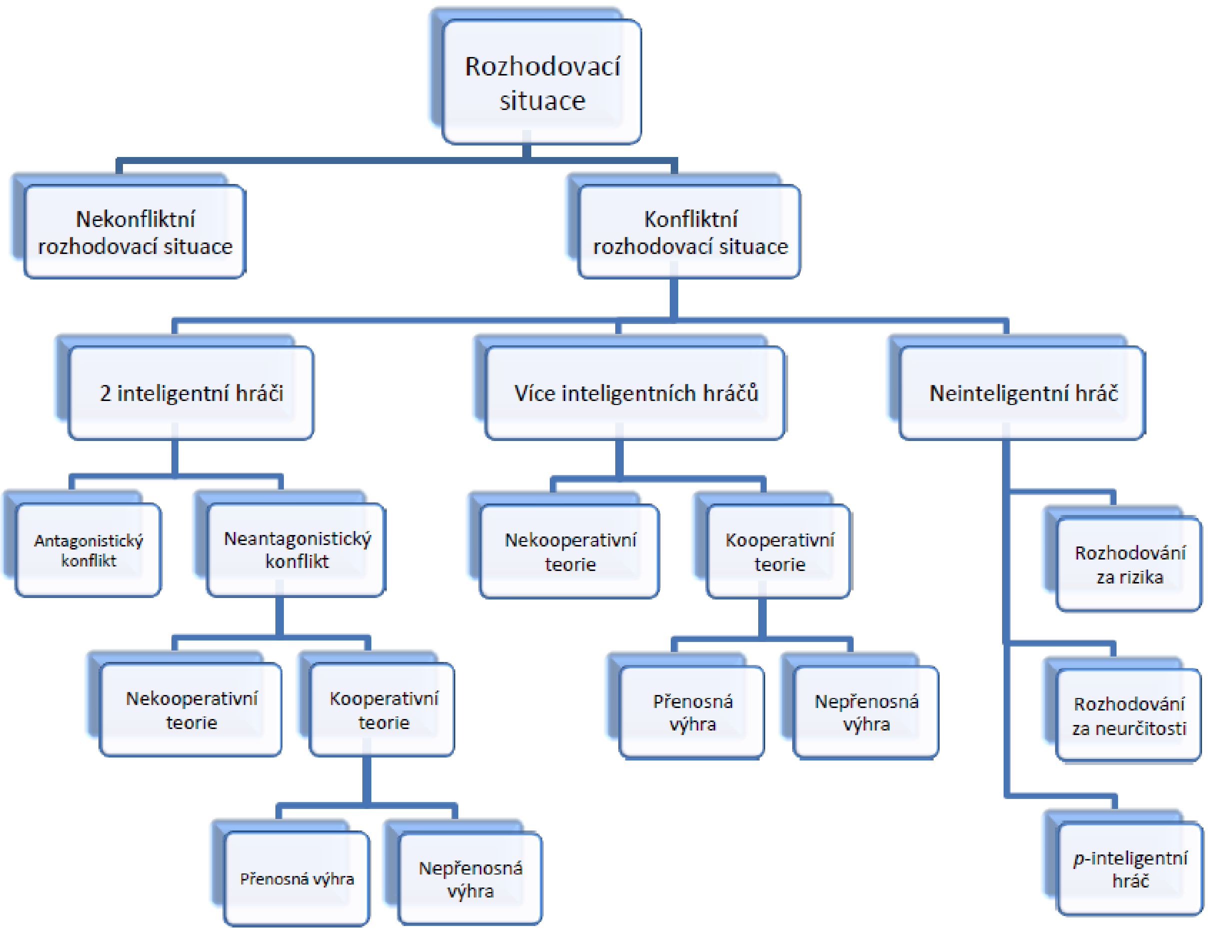
Aby sme mohli správne definovať optimálne rozhodnutie, musíme si konfliktnú situáciu ďalej rozdeliť podľa ďalších kritérií.

Najskôr uvažujeme konflikt, ktorého sa zúčastnia dvaja inteligentní hráči. Pokiaľ jeden z účastníkov stráca práve to čo druhý získa, jedná sa o antagonistický konflikt. V tomto prípade nemá zmysel uvažovať o spolupráci. Pokiaľ si každý z oboch účastníkov sleduje svoje vlastné záujmy, ale nie sú v priamom protiklade so záujmami druhého účastníka, jedná sa o hru neantagonistickú. Pri neantagonistickej hre, má zmysel uvažovať o spolupráci. Delíme ju teda ďalej na kooperatívnu a nekooperatívnu. Pri kooperácii musíme uvažovať o dvoch prípadoch rozdelenia výhry. V prvom prípade je možný prenos výhry, čo v praxi znamená, že jeden hráč dá časť svojej výhry druhému hráčovi za to, že mu k nej dopomohol. Vtedy hovoríme o kooperatívnej antagonistickej hre s prenosnou výhrou. Pokiaľ prenos výhry nie je možný, jedná sa o kooperatívnu antagonistickú hru s neprenosnou výhrou.

Rozdelenie na kooperatívne a nekooperatívne hry pretrváva aj pri konflikte viac inteligentných hráčov. V tomto prípade musíme však uvažovať aj o koalícii. Tak nazývame skupinu hráčov, ktorá medzi sebou vytvorí strategickú spoluprácu, aby získali výhody, ktoré by bez spolupráce nedosiahli. Ak nie je možné tvoriť koalície, ide vo všeobecnosti o rovnaký konflikt ako pri prípade dvoch hráčov.

Častým typom situácie je prípad konfliktu s neinteligentným hráčom. Tento hráč sa rozhoduje podľa rozloženia pravdepodobnosti. Ak poznáme rozdelenie pravdepodobností jednotlivých možností ide o rozhodovanie za rizika. Inak hovoríme o rozhodovaní za neurčitosti. Niekedy nastane prípad, kedy sa hráč snaží dosiahnuť najlepší výsledok, ale z rôznych dôvodov nepostupuje úplne racionálne. O týchto účastníkoch hovoríme, že sú p-inteligentní.

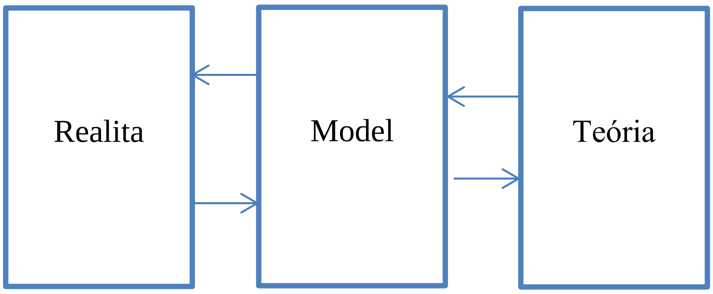
Na obrázku nižšie je graficky zobrazené delenie rozhodovacích situácii:



Obrázok 1 Klasifikácia hier podľa [16]

2 MODELY A PRINCÍPY TEÓRIE ROZHODOVANIA

Model je zjednodušená reprodukcia reálneho objektu, kde existuje istá zhoda v štruktúre alebo funkcii so skúmaným objektom. Podľa [20], každý model je vlastne zjednodušeným obrazom objektu, čo nám umožňuje experimentovať s modelom t.j. meniť podmienky fungovania a získavať skúsenosti o následkoch. Výstavba modelu je svojím spôsobom proces abstrahovania. Model je dôležitým medzičlánkom medzi realitou a teóriou.



Obrázok 2 Prepojenie teórie, modelu a reality

Sú známe nasledujúce základné rozhodovacie modely:

- Diskrétny model rozhodovania
- Spojitý model rozhodovania
- Viackriteriálny diskrétny model rozhodovania
- Viackriteriálny spojitý model rozhodovania

Táto kapitola bude venovaná opisu diskrétneho modelu rozhodovania.

2.1 Diskrétny model rozhodovania

Diskrétny model rozhodovania sa podľa [20] zapisuje v tvare:

$$f(a_j) \rightarrow max$$

$$a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \qquad (2.1)$$

Kde A je množina p rozhodovacích variant a_1 ,a_2 , ..., a_p, ktoré sa porovnávajú podľa hodnôt, ktoré tieto varianty dosiahli podľa kritériálnej funkcie *f*. Pokiaľ je funkcia explicitne známa, jedná sa o jednoduchú úlohu. Pokiaľ však hodnotiaca funkcia nie je explicitne známa, môže rozhodovateľ vychádzať z párových porovnávacích variant. Následne je treba vytvoriť funkciu úžitku, podľa ktorej vyberie variantu, a tá maximalizuje jeho úžitok. Takýmto spôsobom sa dá postupovať, pokiaľ sa jedná o rozhodovanie za istoty, to znamená, že výber z varianty prináša s istotou určitý výsledok. Existuje však veľa rozhodovacích diskrétnych situácii, pri ktorých dôsledok rozhodnutia nie je známy s istotou. Pokiaľ nepoznáme pravdepodobnosti výskytu jednotlivých stavov, hovoríme o rozhodovaní za neurčitosti. Ak nepoznáme pravdepodobnostné rozdelenie výskytu jednotlivých stavov, hovoríme o rozhodovaní za rizika.

2.1.1 Rozhodovanie za istoty

Podľa [20] môžeme povedať, že pokiaľ je explicitne známa kritériálna funkcia môžeme vybrať optimálnu variantu zo zoznamu variant porovnávaním podľa hodnôt kritériálnej funkcie.

Pre optimálnu variantu $a_j \epsilon A$, platí:

$$f\left(a_j\right) \geq f(a_i), \text{ pre } i = 1,2,\dots,p \tag{2.2}$$

Toto platí pre prípad, kedy poznáme hodnotiacu funkciu. Ak nám hodnotiaca funkcia nie je známa, musíme si zostaviť funkciu úžitku.

Princíp maximalizácie úžitku radí rozhodovateľovi vybrať takú variantu, ktorá maximalizuje jeho výhru.

2.1.2 Rozhodovanie za neurčitosti

Rozhodovanie za neurčitosti podľa [20] vychádza z existencie n možných náhodných stavov $s_1, s_2, \dots, s_n$, ktorých pravdepodobnostné rozdelenie nepoznáme.

Takúto rozhodovaciu situáciu je možné modelovať ako maticu. Riadky predstavujú varianty $a_1, a_2, \dots, a_p$, stĺpce nám ukazujú možné stavy $s_1, s_2, \dots, s_n$. Prvky a_{ij} nasledujúcej matice A nám vyjadrujú ohodnotenie dôsledkov rozhodnutia a_p pri situácii s_n.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{2.3}$$

Odporúčania pri výbere najvhodnejšej varianty sú založené na rôznych princípoch:

a) Princíp ekvivalentnej pravdepodobnosti

Vychádza z predpokladu, že pri neexistencii informácie o pravdepodobnosti je vhodné brať u všetkých stavov rovnakú pravdepodobnosť výskytu. Potom je vybraný taký variant a_i, ktorý maximalizuje strednú hodnotu plynúcu z výberu *i-tého* rozhodovacieho variantu.

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} a_{ij} = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{2.4}$$

b) Optimistické (maximax)

Optimistické rozhodovacie pravidlo, ktoré je založené na predpoklade, že nastane najviac priaznivý stav a vyberá taký variant, ktorý maximalizuje hodnotu plynúcu z výberu rozhodovacieho variantu. Matematicky minimax vyjadríme ako:

$$\max_i \left(\max_j a_{ij} \right) \tag{2.5}$$

c) Pesimistické (maximin)

Pesimistické rozhodovacie pravidlo, ktoré predpokladá, že vždy nastane najmenej priaznivý stav, ktorý mu zaistí pri výbere akéhokoľvek variantu vždy najmenšiu hodnotu. Rozhodovateľ vyberá z pesimistických hodnôt tú najvyššiu. Výber variantu je určený výberom minimálnych prvkov v riadkoch a z týchto hodnôt je vybraná najvyššia hodnota podľa vzťahu:

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) \tag{2.6}$$

d) Hurwitzovo kritérium

Je kombináciou pesimistického a optimistického kritéria. Označíme ako $a_{max\ i}$ najvyššiu hodnotu a ako $a_{min\ i}$ najmenšiu hodnotu riadku matice.

$$a_{\max\ i} = \max_j a_{ij} \qquad a_{\min i} = \min_j a_{ij} \tag{2.7}$$

Zavedieme koeficient optimizmu

$$\alpha \epsilon \langle 0,1 \rangle \tag{2.8}$$

Tento ukazovateľ meria stupeň optimizmu rozhodovateľa. Ak sa koeficient optimizmu rovná $\alpha = 0$, znamená to, že rozhodovateľ je úplne pesimistický a riadi sa kritériom pesimizmu (maximin). Naopak ak sa $\alpha = 1$, potom je rozhodovateľ úplne optimistický a riadi sa kritériom optimizmu (maxmax). V ostatných prípadoch si vyberá variant, ktorý maximalizuje kombinovanú hodnotu.

$$max[\alpha \; a_{\max\; i} + (1-\alpha) a_{\min i}] \tag{2.9}$$

Koeficient optimizmu môže byť zadaný na pevno, alebo to môže byť meniteľný parameter. Ak by bol meniteľný, je možné pomocou parametrickej analýzy ukázať, ako sa bude meniť výber variantu v závislosti na hodnote koeficientu optimizmu.

e) Kritérium straty príležitosti (minimax)

Najskôr sa pomocou nasledujúceho vzorca definuje matica strát Z.

$$z_{ij} = \max_k a_{kj} - a_{ij} \tag{2.10}$$

To znamená, že od najväčšieho prvku v každom stĺpci matice A odčítame jej prvky. Pre každý variant vyberieme najväčšiu stratu. Následne vyberáme variant, kde je strata najmenšia.

$$\min_i \left(\max_j z_{ij} \right) \tag{2.11}$$

2.1.3 Rozhodovanie za rizika

Rozhodovanie za rizika vychádza podľa [20] z existencie n možných náhodných stavov S_1, S_2,..., S_n. Ich pravdepodobnostné rozdelenie p_j=*1, 2,..., n* je známe. Podľa [20] takúto rozhodovaciu situáciu je rovnako možné zapísať aj pomocou matice, ktorej riadky predstavujú varianty $a_1, a_2, ..., a_p$ a stĺpce stavy $s_1, s_2, ..., s_n$. Prvky tejto matice a_{ij}, $i=1,2,...,p$ a $j=1,2,...,n$ vyjadrujú ohodnotenie dôsledku rozhodnutia a_i za predpokladu, že nastala situácia s_j. Matica je rovnaká ako matica (2.3) pri rozhodovaní za neurčitosti.

V tomto prípade sa používa princíp maximalizácie očakávanej hodnoty *EV*, podľa ktorého je vybraná možnosť a_i maximalizujúca nasledujúci ukazovateľ.

$$EV = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \tag{2.12}$$

Rozhodovanie za rizika býva doplnené Bayesovskou analýzou. Vytvorí sa matica strát Z rovnakým spôsobom ako pri princípe straty príležitosti (minimax) pri rozhodovaní za neurčitosti. Určí sa očakávaná strata pri znalosti pravdepodobnosti stavov. Táto hodnota sa takisto rovná očakávanej hodnote perfektnej informácie *EVPI*, to znamená hodnote, ktorú je rozhodovateľ ochotný zaplatiť za perfektnú informáciu o uskutočnení stavov.

$$EVPI = \min_i \sum_{j=1}^{n} p_j z_{ij} \tag{2.13}$$

Predpokladá sa, že je možné učiniť experimenty, ktorých možné výsledky sú doplnené znalosťou podmienených pravdepodobností výsledku I_i, $i=1,2,...m$ za podmienky, že nastane stav s_j, $j=1,2,...,n$. Následne je možné na základe výsledkov experimentov spresniť apriórne pravdepodobnosti stavov na aposteriórnej pravdepodobnosti.

$$p(s_j|I_i) = [p(s_j)p(I_i|s_j) \;/\; p(I_i)] \text{, kde}$$

$$p(I_i) = \sum_{j=1}^{n} p(s_j)\, p(I_i|s_j) \tag{2.14}$$

Tieto aposteriórne pravdepodobnosti sa používajú pre spresnené rozhodovanie pri riziku. Vďaka nim získame hodnoty EVB_i pri jednotlivých výsledkoch experimentu, $i=1,2,...,m$. Celková očakávaná hodnota po Bayesoveskej analýze *EVB* sa rovná:

$$EVB = \sum_{i=1}^{n} p(I_i) EVB_i \tag{2.15}$$

Očakávaná hodnota informácie experimentu EVSI=EVB – EV.

Efektívnosť informácie *E* z experimentu je daná vzťahom:

$$E = \left(\frac{EVSI}{EVPI}\right)(100) \tag{2.16}$$

2.2 Príklad použitia diskrétneho modelu rozhodovania

Na nasledujúcom príklade bude jednoduchou formou vysvetlené, akým spôsobom sa uvažuje pri diskrétnych typoch rozhodovacích modelov:

Vo firme vznikol návrh zvýšiť objem činnosti firmy výrobou úplne nového výrobku. Existujú tri možnosti ako sa s návrhom naložiť:

- Vybudovať novú továreň na výrobu nového výrobku a v plnom rozsahu zahájiť výrobu – m_1
- Rozšíriť existujúce zariadenie a v menšom rozsahu zahájiť výrobu nového výrobku – m_2
- Výrobu nového výrobku nezahájiť – m_3

Existujú dve situácie, ktoré môžu nastať:

- o výrobok bude záujem – s_1
- o výrobok nebude záujem – s_2

Pomocou rozhodovacích situácii je možné nájsť akciu, ktorá je dobrá pre pomerne široký interval hodnôt x_{ij} odhadnutých pre rôzne kombinácie (S_i,A_j), čo naznačuje použiteľnosť rozhodovacej analýzy.

Nasledujúca tabuľka ukazuje možný zisk alebo stratu v miliónoch:

Situácia S_i	Akcia m_i		
	m_1	m_2	m_3
s_1	20	10	0
s_2	18	2	0

Tabuľka 1 Možné zisky pri rozhodovacích situáciách

Rozhodovanie za istoty

Ak sú známe presne a spoľahlivo všetky dôsledky a žiadna budúca situácia túto skutočnosť nezmení, tak stačí vybrať najvýhodnejšiu možnosť. Napr. v prípade zaisteného veľkého záujmu o výrobok, sa oplatí postaviť nový závod.

Rozhodovanie za rizika

Pri rozhodovaní za rizika vzniká snaha maximalizovať očakávaný výnos alebo minimalizovať očakávané náklady alebo očakávanú stratu. Rozhodovanie za rizika je pravdepodobnostnou úlohou, v ktorej sa dáva prednosť možnosti s najnižšou alebo najvyššou strednou hodnotou.

$$E(X_j) = \sum_{i=1}^{l} x_{ij} P(S_i)$$

V príklade chýba informácia o pravdepodobnostiach preto sa predpokladá že situácia S_1 (veľký záujem) a situácia S_2 (malý záujem) majú rovnakú pravdepodobnosť

$P(S_1) = P(S_2) = 0{,}5$, potom:

$$\begin{aligned} &E(X_1) = 20 \,.\, 0{,}5 + (-18) \,.\, 0{,}5 = 1 \\ &E(X_2) = 10 \,.\, 0{,}5 + (-2) \,.\, 0{,}5 = 4 \\ &E(X_3) = 0 \,.\, 0{,}5 + 0 \,.\, 0{,}5 = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pretože najvyššiu strednú hodnotu má akcia E_2, je pri daných vstupných údajoch najvýhodnejšie rozšíriť výrobu v existujúcom zariadení.

Rozhodovanie pri neistote

K dispozícii nie sú žiadne ani nedokonalé subjektívne odhady pravdepodobnosti. Vychádza sa z nasledujúcich kritérií:

a) Optimistické (maximax) kritérium – snaha presadiť možnosť, pri ktorej je výnos najvyšší. V tomto príklade je to výstavba nového závodu, kedy je možné dosiahnuť zisk 20 miliónov.
b) Pesimistické (maximin) kritérium – vychádza z najvyššej hodnoty zisku pri najnepriaznivejšej situácii. V tomto prípade je to predpoveď , že o výrobok nebude záujem. Podľa tohto kritéria sa firma do novej výroby púšťať nebude.
c) Laplaceov princíp – predpokladá sa, že všetky situácie nastanú s rovnakou pravdepodobnosťou. Nastáva rovnaký výsledok ako pri rozhodovaní za rizika vysvetlenom vyššie.
d) Hurwitzovo kritérium – ide o kompromis medzi optimistickým a pesimistickým kritériom. Vychádza z koeficientu optimizmu, čo je číslo ležiace v intervale ‹0,1›. Čím bližšie je k 1 tým je optimistickejšie a čím bližšie je k 0 tým je pesimistickejšie. Podľa Hurwitzovho kritéria sa za najlepší výsledok považuje akcia s najvyšším kritériom optimizmu.

$$KO_j = a \max(x_{ij}) + (1-a)min(x_{ij}) \tag{2.2}$$

V prípade optimistického myslenia sa zvolí možnosť a = 0,8, potom:

$$\begin{aligned} &KO_1 = 0{,}8\ .\ 20 + 0{,}2\ .\ (-18) = 12{,}4 \\ &KO_2 = 0{,}8\ .\ 10 + 0{,}2\ .\ (-2) = 7{,}6 \\ &KO_3 = 0{,}8\ .\ 0 + 0{,}2\ .\ 0 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Z tohto výpočtu vyplýva, že najvýhodnejšia je akcia KO_1.

e) Kritérium straty príležitosti (minimax) – za najlepšie sa považujú akcie s najmenšou hodnotou najväčšej straty príležitostí. Hľadá sa:

$$min[max(z_{ij})] \tag{2.4}$$

V príklade sa hovorí o hodnotách 18,10 a 20 mil. Podľa kritéria straty príležitosti je najlepšia druhá akcia.

3 HRY DVOCH HRÁČOV V TEÓRII HIER – ANTAGONISTICKÝ KONFLIKT

Antagonistickým konfliktom sa podľa [5] rozumie hra s tzv. konštantným súčtom, kde pre ľubovoľné $x \in X$ a $y \in Y$platí :

$$M_1(x,y) + M_2(x,y) = K \tag{3.1}$$

Ak poznáme $M_1(x_1, x_2)$ a K, potom poznáme aj hodnotu výplatnej funkcie hráča dva. O antagonistickom konflikte vieme z predchádzajúcej kapitoly 1.3, že obaja účastníci sú inteligentní a každý z nich sa snaží o dôsledok, ktorý je pre nich najlepší. Optimálnou stratégiou pri antagonistických hrách je taká stratégia, pri ktorej žiadna odchýlka nemôže priniesť hráčovi výhodu za predpokladu, že druhý hráč zachová svoju optimálnu stratégiu. Tato vlastnosť je uvedená v nasledujúcej definícii:

Nech

$$\{Q = \{1,2\}; X, Y; M_1(x,y), M_2(x,y)\} \tag{3.2}$$

je hra s konštantným súčtom. Optimálnou stratégiou hráča jedna v tejto hre nazveme takú stratégiu $\bar{x} \in X$, ku ktorej existuje stratégia $\bar{y} \in Y$, že

$$\begin{gathered} M_1(x,\bar{y}) \leq M_1(\bar{x},\bar{y}), \\ M_2(\bar{x},y) \leq M_2(\bar{x},\bar{y}) \end{gathered} \tag{3.3}$$

pre všetky $x \in X$ a $y \in Y$. Stratégia $\bar{x}$ sa nazýva optimálna stratégia hráča jedna.

Ak je

$$\{Q = \{1,2\}; X, Y; M(x,y),\} \tag{3.4}$$

hra s nulovým súčtom, môžeme nerovnosť (3.3) zapísať v tvare

$$M(x,\bar{y}) \leq M(\bar{x},\bar{y}) \leq M(\bar{x},y) \tag{3.5}$$

Dvojicu stratégie $(\bar{x},\bar{y})$ s vlastnosťami požadovanými v (3.3) poprípade (3.5) nazveme riešením hry v normálnom tvare (3.2) poprípade (3.4). U hier s nulovým súčtom sa číslo $M(\bar{x},\bar{y})$ nazýva cena hry.

Antagonistické hry sa väčšinou vyjadrujú v normálnom tvare. Hry v normálnom tvare popisujú čo najvšeobecnejšie situáciu a umožňujú teda univerzálne riešenia v rámci konkrétnych situácii. Zobrazujeme ich pomocou matice. Môžeme ju definovať aj ako funkciu, ktorá priraďuje zisk každému hráčovi na základe danej kombinácie ťahov – stratégie.

Matematická definícia:

$$\{Q; X_1, X_2, \dots X_N; M_1(x) M_2(x), \dots, M_N(x)\} \tag{3.6}$$

Množinu *Q = {1,2,…,N}* nazveme množinou hráčov, X_i je priestor stratégii i-tého hráča a funkciou M_i (x) nazveme výplatnou funkciou i-tého hráča. Výplatné funkcie sú definované na kartézkom súčine $X_1 \times \ldots \times X_N$

3.1 Konečné maticové hry

Antagonistický konflikt, v ktorom pre oboch hráčov existuje konečný počet rozhodnutí patrí ku klasickým typom konfliktov. Matematickým modelom tohto konfliktu podľa [16] je tzv. maticová hra. V jej definícii sa vychádza z toho, že je počet rozhodnutí konečný a teda je možné ich očíslovať.

Konečnú hru s nulovým súčtom

$$\left\{Q = \{1,2\}\,; X = \{1,2,\dots,m\}, Y = \{1,2,\dots,n\}; M(i,j) = a_{ij}, i \in X, j \in Y\right\} \tag{3.7}$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

je daná matica , nazveme maticovou hrou.

Maticu (3.8) budeme nazývať maticou hry. Matica hry je úplne určená maticová hra. Teraz je treba nájsť optimálnu stratégiu hráčov v maticovej hre. Situácia je jednoduchá ak existuje prvok, ktorý je zároveň najmenší na riadku a najväčší v stĺpci. Podľa vzorca (3.5) môžeme jednoducho overiť , či sa jedná o sedlový prvok.

Napr. v maticovej hre A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & \boxed{4} & 5 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

je cena hry 4. Optimálna stratégia hráča 1 je $i = 1$ a hráča 2 $j = 3$. Sedlový prvok je v matici zarámovaný. Ak je sedlový prvok jednoznačne určiteľný hovoríme o čistých stratégiách.

Ďalej uvažujeme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

V tomto príklade je vidieť, že matica sedlový prvok nemá. Chýba jej teda aj riešenie. Optimálne rozhodnutie v danom konflikte nevedie k jednoznačnému záveru. V tomto prípade ide o zmiešanú stratégiu.

3.2 Čistá stratégia

Podľa [5] môžeme čistú optimálnu stratégiu hráča A budeme značiť $A_{0,}$ a táto stratégia prinesie hráčovi A maximálnu výhru, pričom hráč B môže zvoliť akúkoľvek stratégiu. Čistú optimálnu stratégiu hráča B budeme značiť B_0. Táto stratégia zaručí hráčovi B minimálnu prehru, ak hráč A zvolí akúkoľvek stratégiu. Pre stratégie $i = 1,2,...m$ a $j = 1,2,...,n$ platí:

$$M(A_i, B_0) \leq M(A_0, B_0) \leq M\left(A_0, B_j\right) \tag{3.9}$$

Môžeme povedať, že ktorýkoľvek hráč, ktorý sa odkloní od svojej optimálnej čistej stratégie, si pohorší. Takto definované rovnovážne stratégie predstavujú sedlový bod.

Sedlový bod v matici môžeme nájsť pokiaľ platí rovnosť

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} \tag{3.10}$$

Cena hry *(v)* je hodnota výplatnej funkcie $M(A_0,B_0)$. Pokiaľ je cena hry nulová, jedná sa o spravodlivú hru. V opačnom prípade hovoríme o hre nespravodlivej.

Príklad 3.1

Je zadaná nasledujúca matica. Hľadáme sedlový bod.

$$\begin{array}{cc} & \text{Hráč 2} \\ \text{Hráč 1} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 12 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Predpokladá sa, že zisk jedného hráča sa rovná strate druhého hráča a zároveň, že každý z hráčov sa usiluje o čo najvyšší zisk na úkor druhého hráča. Podľa [9] hráči uvažujú všetky možné stratégie protihráča. V prvom rade si hráč 1 vyberá svoju optimálnu stratégiu, ktorú hľadá v riadkoch.

$$\text{Hráč 1:} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{5} \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hráč 1 najskôr vyberá riadok, ktorý je pre neho najviac priaznivý a následne z neho vyberá číslo, ktoré je pre neho najnevýhodnejšie. Túto metódu nazývame aj dolná cesta hry. Podľa zadanej matice vidíme, že najvýhodnejší riadok pre hráča 1 je riadok prvý. Z neho najhoršou variantov je číslo tri. Hráč 2 vyberá najhoršie možnosti v jednotlivých stĺpcoch.

$$\begin{array}{c} \text{Hráč 2} \\ \begin{pmatrix} 4 & \mathbf{3} & \mathbf{12} & 5 \\ \mathbf{7} & -1 & 3 & \mathbf{13} \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Treba si pamätať, že pre hráča 2 sú hodnoty v matice opačné ako pre hráča 1. Po tom čo vybral najhoršie možnosti následne vyberá z nich tú najpriaznivejšiu. Tejto metóde sa hovorí horná cesta hry. Hornou cestou hry pre hráča 2 je číslo tri.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Hráč 2} \\
\text{Hráč 1} & \begin{pmatrix} 4 & \boxed{3} & 12 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

V tomto príklade je Nashovým rovnovážnym bodom číslo tri v prvom riadku matice. Rovnovážny bod, teda situácia kedy sa dolná cesta hry sa rovná hornej ceste hry, nazývame aj sedlovým prvkom matice.

Príklad 3.2

Máme dvoch hráčov. Každý má dve karty. Na povel musia obidvaja ukázať jednu z kariet. Ak dôjde ku zhode vo farbe, dostane prvý hráč od druhého absolútnu hodnotu z rozdielu hodnôt ukázaných kariet.

Hráč č.2

Hráč č. 1

	♣5 (c)	♥3 (d)
♣5 (a)	0	8
♥2 (b)	-7	1

Tabuľka 2 Pravdepodobnosti pri príklade 3.2

Ako hrať túto hru, aby bol zisk čo najvyšší a súčasne čo najmenej poškodili pri ťahu protivníka?

Z pozície hráča číslo jedna je nevýhodný riadok b, kde môže stratiť 7 alebo získať 1. To znamená, že s pozície hráča číslo jedna je potrebné zvoliť stratégiu ♣5. Pre hráča číslo dva je nevýhodným stĺpcom stĺpec d, preto jeho stratégiou bude ♣5. Takto sme získali pre obidvoch hráčov optimálnu voľbu stratégie – Nashovu rovnováhu.

3.3 Zmiešaná stratégia

V príklade 3.1 a 3.2 bolo možné nájsť sedlový prvok. Ak však sedlový prvok nie je možné nájsť, je potrebné použiť zmiešanú stratégiu. Jedná sa o striedanie jednotlivých stratégii s určitou pravdepodobnosťou tak, aby v priemere bola dosiahnutá najvyššia možná výhra. Výplata hráča je náhodná veličina a jej očakávanú hodnotu označujeme E(x,y). Ak hráči volia nezávisle na sebe pre očakávanú výhru podľa [5] platí:

$$E(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j \tag{3.11}$$

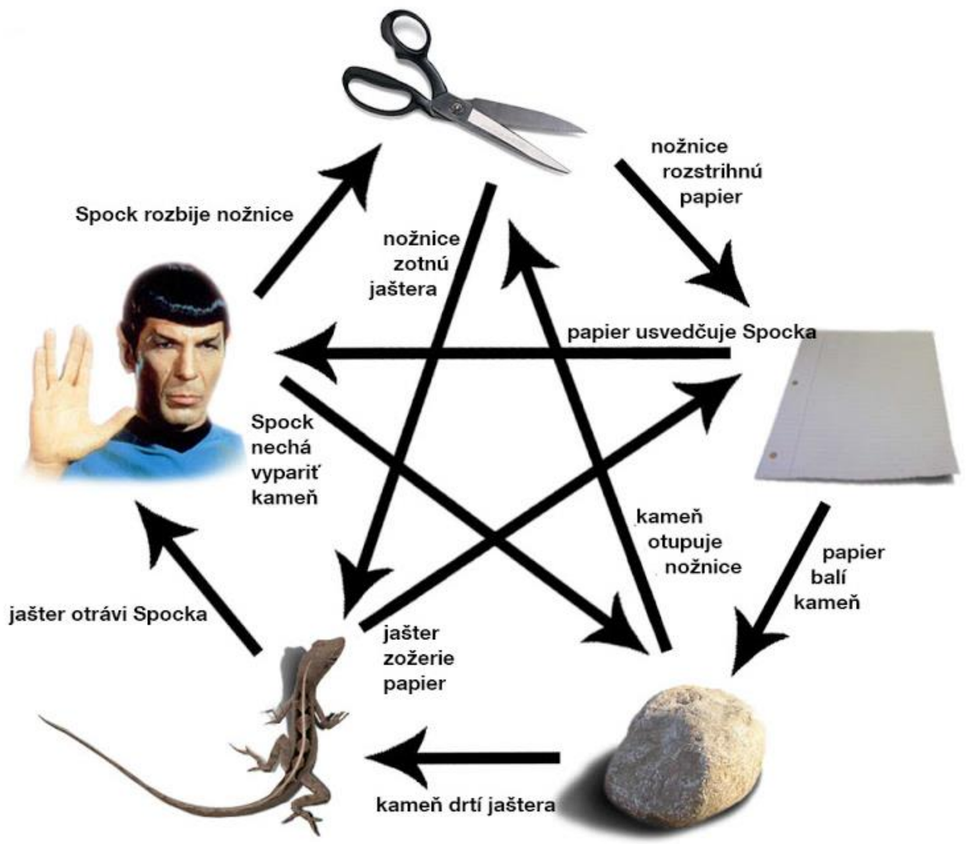
Pre hráča A zmiešanú stratégiu značíme $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, zmiešanú stratégiu hráča B značíme $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$. Zložky týchto vektorov sú nezáporné čísla, ktorých súčet sa rovná jednej. Čistá stratégia je potom zvláštnym prípadom zmiešanej stratégie, kedy jeden prvok je 1 a ostatné 0. Aj v tomto prípade môžeme zaviesť termín optimálna stratégia, ktorý značíme $[x_0, y_0]$.

$$E(x, y_0) \le E(x_0, y_0) \le E(x_0, y) \tag{3.12}$$

Matematickým modelom hry s konštantným súčtom je $M_1(A_{ij}, B_{ij}) + M_2(A_{ij}, B_{ij}) = k$. Uvažujeme nad hrou so súčtom nula, pretože všetky hry s konštantným súčtom je možné previesť na hry so súčtom nula.

Príklad 3.3

Klasickým prípadom pre zmiešané stratégie je hra kameň, papier, nožnice. Aby hra bola zložitejšia bude pridaný ku kameňu, papieru a nožniciam ešte jašter a Spock.



Obrázok 3 Znázornenie hry kameň, papier, nožnice, jašter, Spock

Na obrázku sú znázornené jednotlivé možnosti voľby hráča. Nožnice rozstrihnú papier, papier balí kameň, kameň rozdrví jaštera, jašter otrávi Spocka, Spock rozbije nožnice, nožnice zotnú jaštera, jašter zožerie papier, papier usvedčí Spocka, Spock nechá vypariť kameň a kameň tupí nožnice.

Pomocou matice môžeme hru zobraziť nasledovne:

Hráč 2

Hráč 1

stratégia	Kameň	Papier	Nožnice	Jašter	Spock
Kameň	0	-1	1	1	-1
Papier	1	0	-1	-1	1
Nožnice	-1	1	0	1	-1
Jašter	-1	1	-1	0	1
Spock	1	-1	1	-1	0

Matica zobrazuje výplatu prvého. Výplata druhého hráča má opačné znamienko ako výplata prvého hráča. Na prvý pohľad je jasné, že hra neobsahuje sedlový prvok. Preto je potrebné nájsť zmiešanú stratégiu. Pomocou zmiešanej stratégie zistíme, že najlepší výsledok dosiahneme tým, že budeme náhodne s rovnakou pravdepodobnosťou striedať všetky možnosti. Je to jediná stabilná stratégia pre oboch hráčov.

3.4 Grafické riešenie maticových hier pre matice typu (2,n)

Stredné hodnoty výhry hráča jedna pri zmiešanej stratégii (p,1-p) a pri čistých stratégiách hráča dva podľa [9]:

$$g_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j} \qquad j = 1,2,\dots n. \tag{3.13}$$

Hľadáme:

$$p^* \coloneqq \arg \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j = 1,2,\dots n} g_j(p) \tag{3.14}$$

Najskôr budeme uvažovať o funkcii:

$$\varphi(p) \coloneqq \min_{j = 1,2,\dots n} g_j(p) \tag{3.15}$$

Táto funkcia je konkávna, po častiach lineárna. Ľahko nájdeme bod jej maxima. Hľadaná cena hry je potom rovná:

$$v = \varphi(p^*) \coloneqq \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p) \tag{3.16}$$

A hľadaná zmiešaná rovnovážna stratégia hráča jedna je $(p^*, 1 - p^*)$

Podľa [9] nastáva extrém v bode $p^*, kde\ g_j(p^*) = g_k(p^*) = v$ pre jednoznačne určené stratégie j,k potom zložky zmiešanej rovnovážnej stratégie hráča dva s indexmi rôznymi od j,k sú rovné nule. Zložky, ktoré môžu byť nenulové, získame vyriešením nasledujúcich sústav rovníc

$$\begin{aligned} &a_1 q_j + a_1 q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \qquad q_j \geq 0, \qquad q_k \geq 0 \\ &a_{2j} q_j + a_{2k} q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \qquad q_j \geq 0, \qquad q_k \geq 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Príklad 3.4

Určenie rovnovážnych stratégii pre hru s maticou

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$g_1(p) = 5p + 4(1 - p) = p + 4$$

$$g_2(p) = \frac{5}{2}p + 8(1 - p) = -\frac{11}{2}p + 8$$

$$g_3(p) = 3p + 6(1 - p) = -3p + 6$$

$\varphi(p)$ má maximum v bode $p = \frac{1}{2}$, hodnota tohto maxima je

$$v(M) = 4{,}5$$

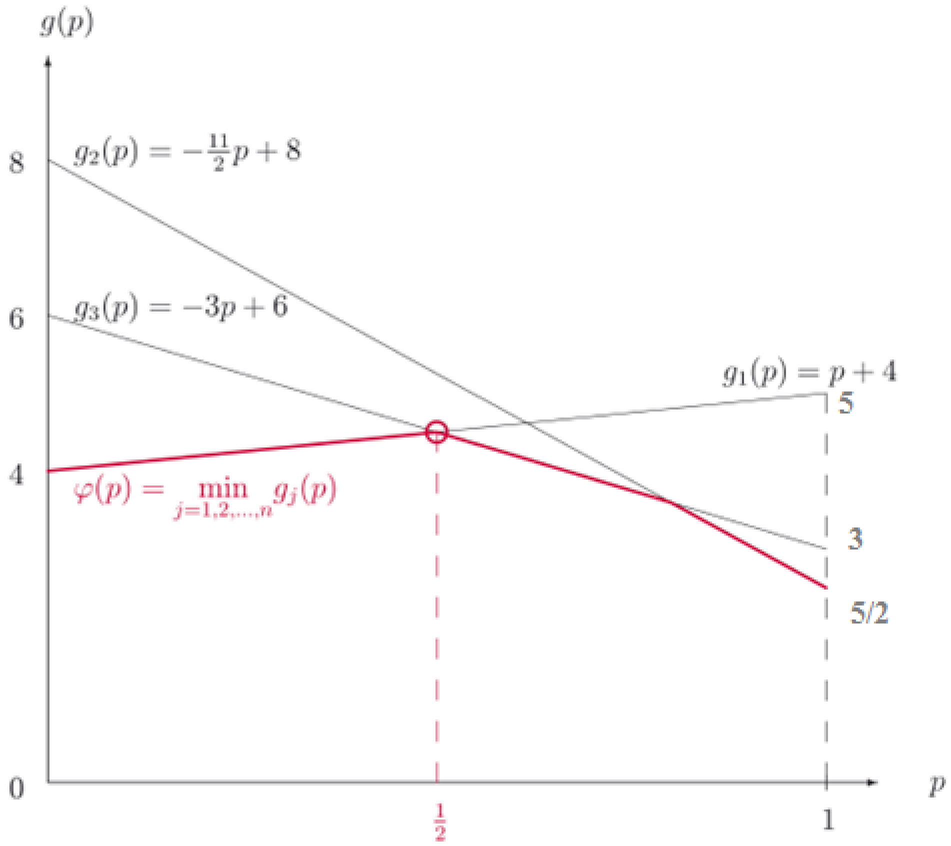
Ďalej sa rieši sústava rovníc

$$5_{q1} + 3_{q3} = 4{,}5, \qquad q_1 + q_3 = 1, \quad q_1 \geq 0 \quad q_3 \geq 0$$

Z toho vypláva, že q_1=0,75, q_2=0,25.

Rovnovážny bod je teda $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ q^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Graficky sa príklad zobrazí nasledovne:



Obrázok 4 Zobrazenie príkladu 3.4 pomocou grafu

3.5 Dominované stratégie

V niektorých prípadoch sa môžeme podľa [4] stretnúť s prípadmi, kedy čistá stratégia neprináša hráčovi lepší výsledok, ako iná čistá stratégia, a to pri voľbe akejkoľvek stratégie druhého hráča. Táto stratégia sa nazýva dominovaná a neposkytuje lepší výsledok ako stratégia dominujúca.

Stratégia $s_i \in S$ hráča 1 sa nazýva dominovaná inou stratégiou $s_k \in S$, ak pre každú stratégiu $t \in T$ hráča 2 podľa [6] platí

$$u_1(s_k, t) \leq u_1(s_i, t) \tag{3.18}$$

Príklad 3.5

Príklad prevzatý zo [7] predstavuje dvoch hráčov s jednou maticou, ktorá ilustruje dominované stratégie

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

V prvom riadku matice A sú prvky, ktoré sú všetky väčšie než čísla v druhom riadku matice. Racionálne teda hráč druhý riadok voliť nebude. Matica hry sa redukuje nasledovne

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Pri matici B si môžeme všimnúť, že prvý stĺpec je dominujúci a tretí dominovaný. Odstráni sa teda tretí stĺpec. Je nutné podotknúť, že pre hráča sú výplatné funkcie opačné hodnoty. Zostáva nasledujúca matica:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Z matice je jasne viditeľné, že nemá sedlový prvok. Význam týchto úprav spočíva v tom, že umožňuje zjednodušiť model konfliktnej situácie.

3.6 Lineárne programovanie

Príklady lineárneho programovania sa podľa [4] zameriavajú na nájdenie minima resp. maxima lineárnej funkcie n premenných, popísané sústavou lineárnych nerovností, ktoré definuj obmedzenie úlohy. Pomocou tohto typu úlohe je veľmi jednoduché nájsť optimálne riešenie maticových hier.

Máme hráčov p a q, ktorý sa riadia nasledujúcimi stratégiami:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m), \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = \{1,2, \dots, m\}$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m), \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, j = \{1,2, \dots, n\} \tag{3.19}$$

Ďalej máme maticu A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

pre ktorú platí, že všetky jej prvky sú kladné. Pokiaľ by to tak nebolo, je treba pričítať vhodne zvolenú konštantu K. Úpravou je možné získať strategicky ekvivalentnú hru a z pohľadu stratégie sa nič nezmení.

Pre túto konštantu K platí:

$$k > \left|mina_{ij}\right|, i = \{1,2, \dots m\}; j = \{1,2, \dots n\} \tag{3.21}$$

Postup pri riešení sa podobá hľadaniu rovnovážnych čistých stratégii. Hráč jedna sa snaží nájsť pre akékoľvek *p* minimálnu zaručenú výhru *v*.

Máme nasledujúci výraz:

$$v = min\left\{a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + .. + a_{mj}p_m\right\};\ \forall j = \{1,2 \dots, n\} \tag{3.22}$$

Z toho vyplýva že:

$$v \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + .. + a_{mj}p_m;\ \forall j = \{1,2 \dots, n\} \tag{3.23}$$

Môžeme povedať, že pre každé j udáva výraz na pravej strane očakávanú výhru hráča 1 pri voľbe jeho zmiešanej stratégie p.

Podľa [9] je očakávaná stredná hodnota výhry $\pi(p, q)$ pre zmiešanú stratégiu hráča 2 lineárnou kombináciou týchto hodnôt s koeficientmi $q_1, q_2 \dots q_n$, ktorých súčet je rovný 1.

Nerovnosť

$$v \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + .. + a_{mj}p_m;\ \forall j = \{1,2 \dots, n\} \tag{3.24}$$

môžeme previesť na lineárne kombinácie:

$$q_1 v \leq q_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m)$$

$$q_2 v \leq q_2(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$q_n v \leq q_n(a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m)$$

$$(q_1 + q_2 + \dots q_n)v \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \pi(p, q)$$

$$v \leq \pi(p, q) \tag{3.25}$$

Hodnota v je minimálnou zaručenou výhrou hráča 1, nech už protihráč volí akúkoľvek stratégiu.

Ak vydelíme nerovnosť $v \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + .. + a_{mj}p_m;\ \forall j = \{1,2 \dots, n\}$ hodnotou v, dostaneme novo vzniknutú nerovnosť:

$$1 \leq a_{1j}\frac{p_1}{v} + a_{2j}\frac{p_2}{v} + \dots + a_{mj}\frac{p_m}{v} \tag{3.26}$$

Pokiaľ označíme $y_i = \frac{p_i}{v}$, platí $y_1 + y_2 + \cdots y_m = \frac{1}{v}$

Nakoniec prídeme k nerovnosti:

$$1 \leq a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots a_{mj}y_m \tag{3.27}$$

Ako bolo spomínané, hráč jedna sa snaží maximalizovať svoju minimálnu výhru v pre svoju optimálnu stratégiu *p*. Za týchto predpokladov, to znamená minimalizovať

$$y_1 + y_2 + \cdots y_m = \frac{1}{v} \tag{3.28}$$

Pri obmedzeniach $1 \leq a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots a_{mj}y_m$, pre všetky $j = \{1,2, \ldots, n\}$.

Takto zavedená úloha nám poskytuje riešenie optimálnej stratégie hráča 1.

Príklad 3.6

Príklad o streľbe penált prebraný z [9] je udaná nasledujúcou maticou pravdepodobnosti gólov pre rôzne stratégie strelca a brankára. Hľadá sa rovnovážny bod v čistých alebo zmiešaných stratégiách.

Stratégia	Skoč vľavo	Skoč vpravo	Čakaj v strede
Strieľaj vľavo	0,6	0,7	1
Strieľaj vpravo	1	0,8	0,7

Tabuľka Pravdepodobnosti strelenia gólu pri príklade 3.6

$$g_1(p) = 0{,}6p + 1 - p = 1 - 0{,}4p$$

$$g_2(p) = 0{,}7p + 0{,}8(1 - p) = 0{,}8 - 0{,}1p$$

$$g_3(p) = p + 0{,}7(1 - p) = 0{,}7 + 0{,}3p$$

Najvyššia zaručená výhra pre strelca: $g_2(p) = g_3(p) \Leftarrow p = \frac{1}{4}$

Rovnovážny bod $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$,$\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, cena hry: v = 0,775

4 NEANTAGONISTICKÉ HRY

V prípade neantagonistických konfliktov nie sú záujmy hráčov v priamom protiklade. Výhra jedného hráča nemusí byť nutne prehrou toho druhého. Neantagonistické konflikty môžeme rozdeliť do dvoch skupín – kooperatívne a nekooperatívne hry. Ich hlavný rozdiel je v tom, či si hráči na začiatku spolu uzavrú dohodu alebo nie. Uzavretie dohody podmieňuje aj situácia, v ktorej sa hráči nachádzajú. (napríklad pri väzňovom dilema nemali hráči možnosť spolu komunikovať)

4.1 Dvojmaticové hry

Matematickým modelom neantagonistických konfliktov dvoch hráčov sú hry dvojmaticové. Dvojmaticová hra je určená maticami A a B, ktoré charakterizujú výplatné funkcie prvého a druhého hráča. Pri výbere *i-tej* stratégie prvého hráča a *j-tej* stratégie druhého hráča je hodnota výplatnej funkcie 1. Hráča sa rovná prvku a_{ij} a druhého hráča b_{ij}. Medzi hodnotami výhier hráčov nie je na rozdiel od hier s nulovým súčtom priamy vzťah.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Matice A a B sa pre výpočet spojujú do tabuľky nasledujúceho typu

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \dots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

Hodnoty vľavo vždy vyjadrujú stratégie prvého hráča zatiaľ čo hodnoty vpravo sú stratégiami hráča druhého.

Hľadanie optimálnych riešení dvojmaticových hier prebieha podobne ako pri antagonistických konfliktoch avšak líši sa od možnosti spolupráce.

4.1.1 Väzňovo dilema

Typickým príkladom, ktorý nájdeme v [11], neantagonistického konfliktu je hra s názvom väzňovo dilema. Väzňovo dilema je špecifická matica preferencií dvoch či viacerých hráčov. Je závislá od rozhodnutia toho druhého. Jej názov pochádza z dilemy zadržaného, ktorý sa síce dohodol s kumpánom, že polícii o ich spoločnom zločine nič nevyzradí, ak však na spolupáchateľa žaluje, dostane sa z väzby von. Hrozí mu ale, že rovnako naňho žaluje aj jeho kumpán, a potom obaja skončia v chládku pekne dlho. Dilema teda znie: žalovať či zatĺkať? Skúsme si naše možnosti znázorniť graficky. Jednotlivé bunky tabuľky ukazujú, aký bude trest pre zločincov. Konflikt môžeme pomocou matice zapísať nasledovne:

Väzeň A

Väzeň B

	Zatĺka	Žaluje
Zatĺka	Pol roka; Pol roka	10 rokov; Je voľný
Žaluje	Je voľný; 10 rokov	5 rokov; 5 rokov

Tabuľka 3 Maticové zobrazenie príkladu väzňov dilema

Z tabuľky je vidieť, že akokoľvek sa rozhodne druhý spoluväzeň, vždy je lepšie žalovať t.j. spolupracovať s políciou, nespolupracovať s kumpánom. To však v konečnom dôsledku spôsobí, že obaja väzni skončia s piatimi rokmi vo väzení a nie s pol rokom, ktorý by obaja dostali, keby svoj zločin zatĺkali. Individuálna racionalita vedie ku kolektívnej iracionalite. Optimálnym riešením v tomto prípade je teda pre obidvoch väzňov zatĺkať.

4.1.2 Konflikt typu „kura“

Pri väzňovom dilema pramenil hlavný dôvod konfliktov z možnosti spolupráce. Pri konfliktoch nazývaných ako „kura“ vychádzajú z otázky prestíže, nie výhodnosti jednotlivých riešení situácie. Pre hráča je v niektorých prípadoch dôležitejšia výhra ako samotná veľkosť výhry. V príklade [12] vystupujú dvaja hráči, ktorí majú dve možnosti ako sa zachovať a to buď ustúpiť alebo neustúpiť. Dôsledky rozhodnutia sú popísané v tabuľke.

Hráč 2

Hráč 1		Ustúpiť	Neustúpiť
	Ustúpiť	1;1	-5;5
	Neustúpiť	5;-5	-20;-20

Tabuľka 4 Hodnoty výhry a prehry pri rozpore „kura“

Pokiaľ sa budú obaja hráči snažiť držať svojej stratégie, čiže neustúpiť, potom pre nich hra dopadne najhoršie. Možnosť ústupku by tu nastala vo chvíli, kedy by bol odmenený výplatou s vyššou hodnotou ako je pre nich hodnota získanej prestíže.

4.2 Kooperatívne hry

Pri kooperatívnych hrách je možné pred začiatkom hry uzavrieť dohodu o voľbe stratégii. Inteligentný hráči budú spolupracovať, pokiaľ to bude pre nich výhodné, respektíve pokiaľ získajú viac ako keby nespolupracovali.

4.2.1 Hry s prenosnou výhrou

Kooperatívne hry s prenosnou výhrou sú podľa [16] typické v konfliktných situáciách, kedy hráči môžu pred začiatkom hry uzavrieť zmluvu o vzájomnej spolupráci a taktiež sa dohodnúť na prípadnom rozdelení výhry. Najčastejšie sa pri tomto type hier stretávame s otázkami:

- Kedy uzavrieť dohodu
- Na akej stratégii sa dohodnúť
- Akým spôsobom prerozdeliť výhru

Nasledujúcim vzorcom môžeme podľa [12] vypočítať zaručenú výhru hráča, ktorá nemôže byť protihráčom ohrozená:

$$v(2) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_1(x, y)$$

$$v(2) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_2(x, y) \tag{5.1}$$

Výhru plynúcu z hry s prenosnou výhrou hľadáme pomocou Nashových rovnovážnych stratégii ako v prípade hry jednomaticovej.

Pomocou vzorcu celkovú časť výhry vzniknutej spoluprácou definujeme ako:

$$v(1,2) = \max_{x \in X, y \in Y} \{M_1(x, y) + M_2(x, y)\} \tag{5.2}$$

Hráči sa pre spoluprácu rozhodnú v situácii kedy platí:

$$v(1,2) > v(1) + v(2) \tag{5.3}$$

V tomto okamžiku sa oplatí spolupracovať, nakoľko každý z hráčov dostane svoju zaručenú výhru a navyše si rozdelia čiastku, ktorú získajú na základe vzájomnej spolupráce.

Ďalej sa musíme pýtať, akým spôsobom bude táto čiastka rozdelená. V prvom rade definujeme čiastku a_1, ktorú získa hráč 1 zo spoločnej výhry *v(1,2),* a podobne označíme čiastku a_2.

Rozdelením budeme teda nazývať množinu všetkých rozdelení *(a1 a a2)*, ktoré splňujú vzťah (3.2.) a pre ktoré platí:

$$a_1 + a_2 = v(1,2) \tag{5.4}$$

$$a_1 \geq v(1), a_2 \geq v(2)$$

Prvý vzorec vzťahu (3.4) nám hovorí, že pri delení si hráči rozdelia celú spoločnú výhru. Druhý vzorec stanovuje, že každý z hráčov musí dostať najmenej toľko, koľko by získal keby nespolupracoval.

Ďalej sa dostávame k otázke, akým spôsobom môžeme čiastku rozdeliť. Najčastejšie sa v literatúre vyskytujú 2 spôsoby rozdelenia :

- Spravodlivé

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\left(v(1,2) - v(2)\right)}{\left(v(1,2) - v(1)\right)}$$

- Optimálne

$$a_1 = v(1) + \frac{\left(v(1,2) - v(1) - v(2)\right)}{2}$$

$$a_2 = v(2) + \frac{\left(v(1,2) - v(1) - v(2)\right)}{2}$$

(5.5)

Optimálne rozdelenie definujeme tak, že každý z hráčov si ponechá to, čo môže sám získať a zvyšok spoločnej výhry si rozdelia rovným dielom.

4.2.2 Hry s neprenosnou výhrou

Situácie, ktoré je možné riešiť podľa tejto teórie, nie sú v praxi príliš rozšírené. Podľa [13], pokiaľ sa rozhodnú dva subjekty spolupracovať, býva táto spolupráca podložená záväznou písomnou dohodou. Kooperatívne teórie s neprenosnou výhrou sú navrhnuté pre tie prípady, kedy spolupráce je legálna, ale prenos výhry má povahu úplatku, a je teda nelegálny. Takisto ho môžeme použiť pri prípadoch, kedy chýba mechanizmus, pomocou ktorého by bolo možné prenos realizovať, napr. pri uzatváraní zmluvy o obmedzení zbrojenia je nezmysel, aby jedna mocnosť platila druhej za to, aby nezbrojila. Oproti hre s prenosnou výhrou už neporovnávame súčet zaručených výhier s celkovou výhrou získanou spoluprácou, ale hľadáme takú stratégiu, ktorá prinesie vyššiu výhru každému hráčovi zvlášť.

Uvažujeme hru $\{P = \{1,2\}; X, Y; M_1(x, y), M_2(x, y)\}$ s neprenosnou výhrou. Dvojicu čísel $[a_1, a_2]$, nazveme dosiahnuteľným rozdelením, ak $a_1 \geq v_1, a_2 \geq v_2$, a ak existujú stratégie $x \epsilon X$a $y \epsilon Y$ tak, že $a_1 = M_1(x, y)$, $a_2 = M_2(x, y)$. Množinu všetkých dosiahnuteľných rozdelení označíme D. Dosiahnuteľné rozdelenie $[b_1, b_2] \epsilon D$ nazveme paretovským, ak neexistuje rozdelenie $[a_1, a_2] \epsilon D$ s vlastnosťami $a_1 \geq b_1, a_2 > b_2$ a $a_1 > b_1, a_2 \geq b_2$. Množinu všetkých paretovských rozdelení označíme O.

Pokiaľ existuje jediné paretovské rozdelenie, je to pre nás optimálne riešenie. Komplikáciou nastáva pokiaľ je ich viac. Optimálne riešenie potom hľadáme pomocou nasledujúcej definície: Nech $b^0 = [b_1^O, b_2^0]$ je stredná hodnota rozloženia pravdepodobnosti s najmenším obsahom informácie na množine O. Rozdelenie $a^0 = [a_1^O, a_2^0] \in O$ nazveme optimálnym, ak má vlastnosť $\rho(a^0, b^0) = \min_{a \in Q} \rho(a, b^0)$ kde ρ je euklidovská metrika v E2. Optimálnymi stratégiami nazveme tie stratégie $x^0 \epsilon X, y^0 \epsilon Y$, pre ktoré platí $a_1^0 = M_1(x^0, y^0), a_2 = M_2(x^0, y^0)$. Ak existuje a^0, existujú aj optimálne stratégie x^0 a y^0.

4.3 Nekooperatívne hry

Nekooperatívne hry sú charakteristické tým, že nie je možné spolupracovať s protivníkom, a to či už zo zákona alebo z princípu. Rovnako ako u hier s konštantným súčtom hľadáme optimálne riešenie v – Nashov rovnovážny bod. Pri nekooperatívnych konfliktoch platí, že pokiaľ hráči nájdu optimálnu stratégiu a jeden z nich ju poruší, príde o časť svojej výhry. Druhý hráč nezískava však takú čiastku, o ktorú je prvý hráč poškodený. Matematicky sa príklady nekooperatívnej hry zapisujú pomocou dvojmaticovej hry.

4.3.1 Manželský spor

Tento príklad je spojený s manželmi, ktorý chcú spolu stráviť večer vonku . Muž preferuje návštevu futbalového zápasu a jeho manželka by radšej strávila čas v kine. Každý z manželov dostane jednu jednotku za to, že strávia večer spolu a ďalšiu jednotku môže získať tým, že bude zvolený program, ktorý dotyčný preferuje. Ak zostanú manželia oddelene, ich zisk bude nulový. Konflikt zapisujeme nasledujúcou maticou:

Manželka

Manžel

	Futbal	Kino
Futbal	2;1	0;0
Kino	0;0	1;2

Tento konflikt je charakteristický tým, že existuje viac rovnovážnych riešení. Žiadne z riešení nie je dominujúce. Manželka uprednostňuje kino a manžel volí futbal. Takým spôsobom však vyjde riešenie 0;0 ktoré nie je vhodné ani pre jedného hráča. Viac o tejto hre je možné sa dočítať v [19].

4.3.2 Investori

V hre prevzatej z [18] vystupujú dvaja investori, ktorí chcú vstúpiť na trh v troch rôznych odvetviach. Tieto odvetvia si navzájom konkurujú. Každý z investorov si vyberá, do ktorého odvetvia vstúpi. V nasledujúcej tabuľke sú zobrazené zisky jednotlivých investorov:

	Zisk	Sám	Obidvaja
Prvý investor	1. odvetvie	9,5	6
	2. odvetvie	13	7
	3. odvetvie	12	8
Druhý investor	1. odvetvie	8,9	5,5
	2. odvetvie	8	7
	3. odvetvie	10	7

Tabuľka 5 Zisky jednotlivých investorov

Túto hru je možné zapísať pomocou dvoch samostatných matíc, kde jedna vyjadruje výplatu prvého hráča a druhá výplatu druhého hráča. Druhou možnosťou je zápis pomocou jednej matice. Nižšie je zobrazená druhá možnosť:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Investor 1} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{1.odvetvie} & \text{2.odvetvie} & \text{3.odvetvie} \end{array} \\ \text{Investor 2} & \begin{array}{c} 1.\text{odvetvie} \\ 2.\text{odvetvie} \\ 3.\text{odvetvie} \end{array} & \begin{pmatrix} (6;5{,}5) & (9{,}5;8) & (9{,}5;10) \\ (13;8{,}9) & (7;7) & (13;10) \\ (12;8{,}9) & (12;8) & (8;7) \end{pmatrix} \end{array}$$

Pri hľadaní optimálnej stratégie najskôr hľadáme maximá pre investora číslo jedna v stĺpcoch. Následne hľadáme maximá pre investora číslo dva v riadkoch. Nižšie je sú zobrazené preferované riadky a stĺpce pre jednotlivých investorov.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Investor 1} \\ & & \begin{array}{ccc}\text{1.odvetvie} & \text{2.odvetvie} & \text{3.odvetvie}\end{array} \\ \text{Investor 2} & \begin{array}{c}\text{1. odvetvie}\\ \text{2. odvetvie}\\ \text{3. odvetvie}\end{array} & \begin{pmatrix} (6;5{,}5) & (9{,}5;8) & (9{,}5;10) \\ (13;8{,}9) & (7;7) & (\mathbf{13};\mathbf{10}) \\ (12;8{,}9) & (12;8) & (8;7)\end{pmatrix}\end{array}$$

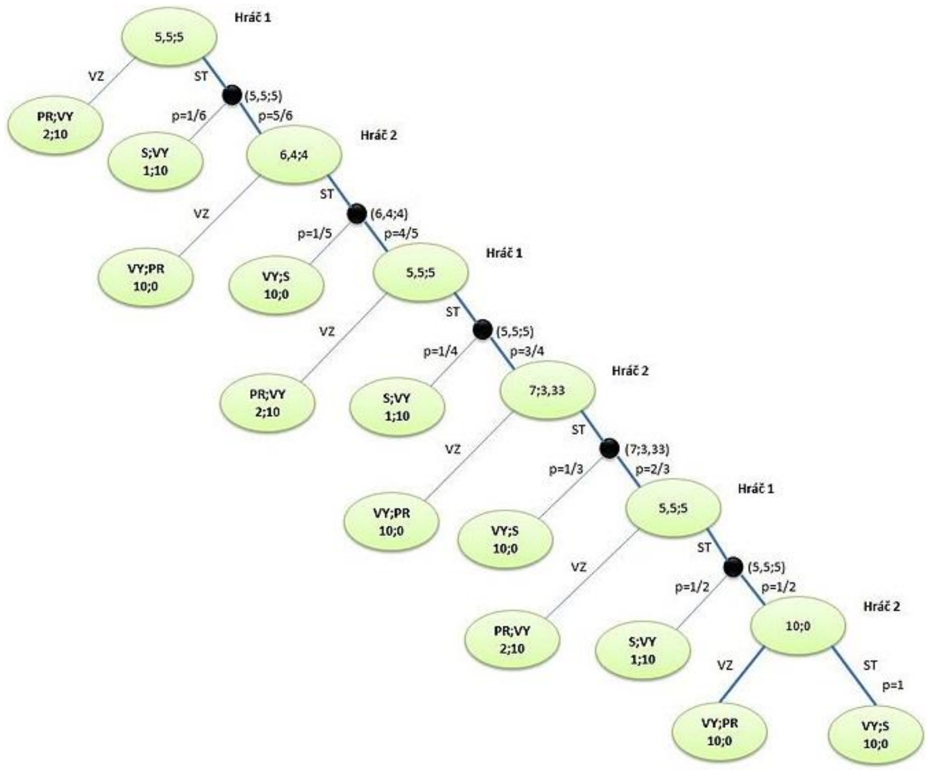
Pomocou tejto metódy nachádzame, že rovnovážna stratégie je v bode [2,3], teda pokiaľ si investor jedna vyberie tretie odvetvie a investor dva druhé odvetvie.

5 HRY DVOCH HRÁČOV V EXPLICITNOM TVARE

Hra v explicitnom tvare je zostavená zo série po sebe nasledujúcich ťahov, pričom hráči sa v ťahoch striedajú. Patrí sem napr. šach, kocky, dáma, atď.
Zobrazujú sa pomocou stromového grafu. Je to acyklický graf, ktorý má počiatočný uzol. Ten určuje začiatočný bod hry. Ďalej má rozhodovacie uzly a koncové uzly, ktoré reprezentujú koniec hry. Hra sa rieši pomocou spätnej indukcie. Je potrebné rozložiť hru na podhry a pokračuje sa o úroveň vyššie. Takto sa hľadá tzv. dokonalá rovnováha podhry. Tá jednoznačne ukazuje, ktorú stratégiu by mali hráči hrať v jednotlivých rozhodujúcich uzloch, aby pre nich bola stratégia optimálna.

5.1 Ruská ruleta

Hráči sa rozhodujú v každom kole, či vystreliť alebo odstúpiť. Pokiaľ odstúpi, prehrá. Pokiaľ vystrelí a padne naňho ostrý náboj, potom zomrie. V opačnom prípade hra pokračuje a rozhoduje sa ďalší hráč, či vystrelí. V každom ďalšom kole sa zvyšuje pravdepodobnosť ostrého náboja.
Postup pri hre ruská ruleta môžeme zobraziť podľa [3] nasledujúcim stromovým grafom:

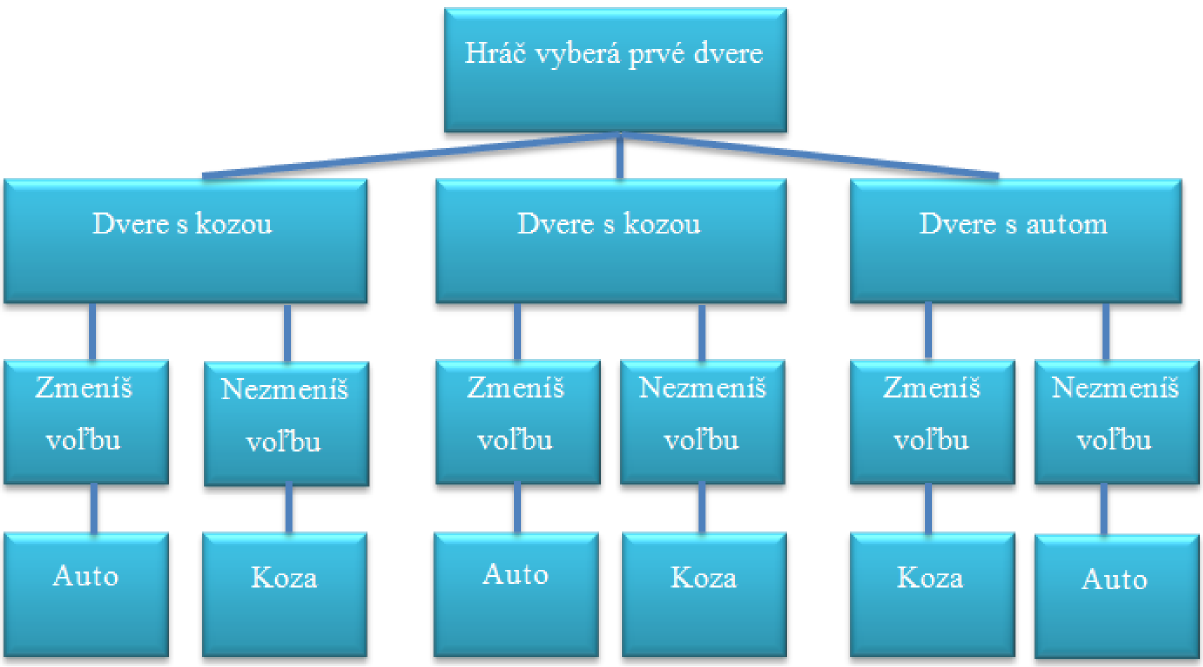


Obrázok 5 Explicitné zobrazenie hry Ruská ruleta

Na začiatku sa Hráč 1 rozhoduje či sa vzdá alebo vystrelí. Ak sa rozhodne strieľať je pravdepodobnosť ostrého náboja 1:6. Šanca, že Hráč 2 trafí ostrý náboj v druhom kole sa zvyšuje na 1:5. Za predpokladu, že žiadny z hráčov neustúpi ani netrafí ostrý náboj, hra končí v 6. kole kedy je pravdepodobnosť, že hráč natrafí na guľku 1:1 .

5.2 Monty Hallov problém

Hráč je účastníkom hry Montyho Halla. Má na výber troje dvere. Za dvoma z nich sa nachádza koza za jednými je auto. Úlohou hráča je zvoliť si jedny dvere. Potom moderátor otvorí jedny z dvoch zostávajúcich dverí, za ktorými je koza. Teraz má hráč možnosť ponechať si svoju pôvodnú voľbu alebo zmeniť voľbu na zostávajúce dvere. Súťažiaci vyhráva cenu, ktorá je za dverami, ktoré si zvolil. Zvýši sa šanca na výhru auta pokiaľ hráč zmení voľbu?



Obrázok 6 Explicitné zobrazenie Monty Hallovho problému

Na začiatku hry hráč vyberá dvere, za ktorými je auto s pravdepodobnosťou 1:3. Má teda tretinovú šancu, že trafí auto a dvojtretinovú šancu, že trafí kozu. Následne na grafe vidíme, čo sa stane po tom, ako hráč zmení alebo nezmení voľbu. Pokiaľ na začiatku trafí kozu a svoju voľbu zmení má dvojtretinovú šancu vyhrať auto. Ak voľbu nezmení tak zo 66% pravdepodobnosťou trafí kozu. Odpoveďou na otázku je, že zmenou voľby dverí sa šanca, že trafí auto, zvyšuje o 33%.

6 PŘÍKLADY APLIKACE

Táto kapitola bude venovaná príkladom, ktoré názorne zobrazujú akým spôsobom sa dá teória hier a rozhodovania používať v bežnom živote.

6.1 Sofistikovaná voľba v súdnych systémoch

Uvažujeme o troch právnych systémoch, v ktorých rozhodujú vždy traja sudcovia. Súdne systémy môžeme podľa [9] rozdeliť nasledovne:

1. Status quo – najprv sa rozhodujeme o vine/nevine obžalovaného a až po uznaní viny sa ďalej rozhoduje o výške trestu
2. Rímska tradícia – po tom, čo sa súdu predložia dôkazy sa začne postupne hlasovať od najprísnejšieho trestu po najmiernejší (uložiť trest smrti – áno//nie; doživotie – áno/nie; atď.)
3. Mandatórny súd – najskôr sa určí trest pre daný zločin a následne sa určuje, či je obžalovaný vinným.

Uvažujeme 3 možné výsledky: trest smrti, doživotie a prepustenie.

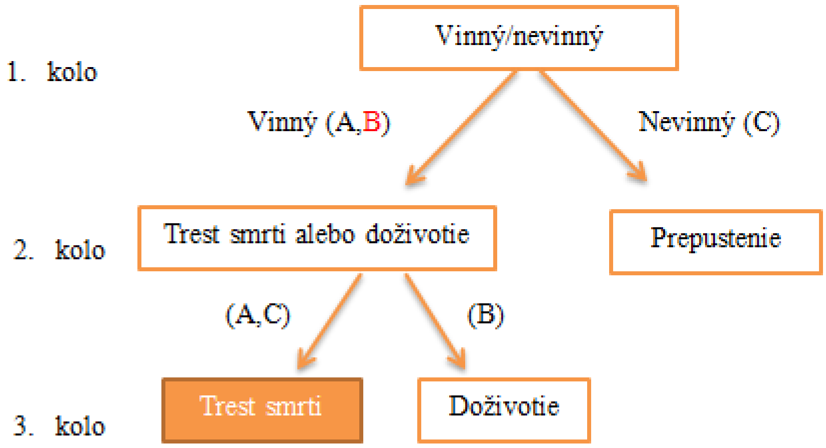
Preferencie jednotlivých sudcov:

Poradie	Sudca A	Sudca B	Sudca C
1.	Trest smrti	Doživotie	Prepustenie
2.	Doživotie	Prepustenie	Trest smrti
3.	Prepustenie	Trest smrti	Doživotie

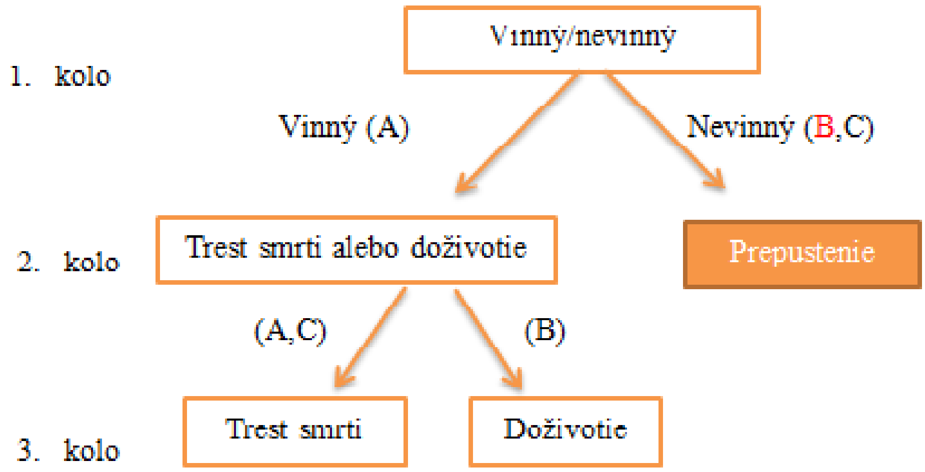
Tabuľka 6 Tabuľka preferencii jednotlivých sudcov

1. Status Quo

   V prvom kole sa hlasuje o vine či nevine; pri úprimnom hlasovaní by zvíťazilo vinný (sudcovia A,B). V druhom kole pri rozhodovaní medzi trestom smrti a doživotím, by zvíťazil trest smrti (sudcovia A,C). Prvé kolo je v podstate hlasovanie medzi prepustením a trestom smrti. Ak budú sudcovia uvažovať racionálne a budú predvídať, čo sa stane v druhom kole, zvíťazí prepustenie. Okrem sudcu C dá v prvom kole hlas prepustenia aj sudca B lebo inak by druhé kolo viedlo k jeho najmenej preferovanej variante.



Obrázok 7 Status Quo, úprimná voľba

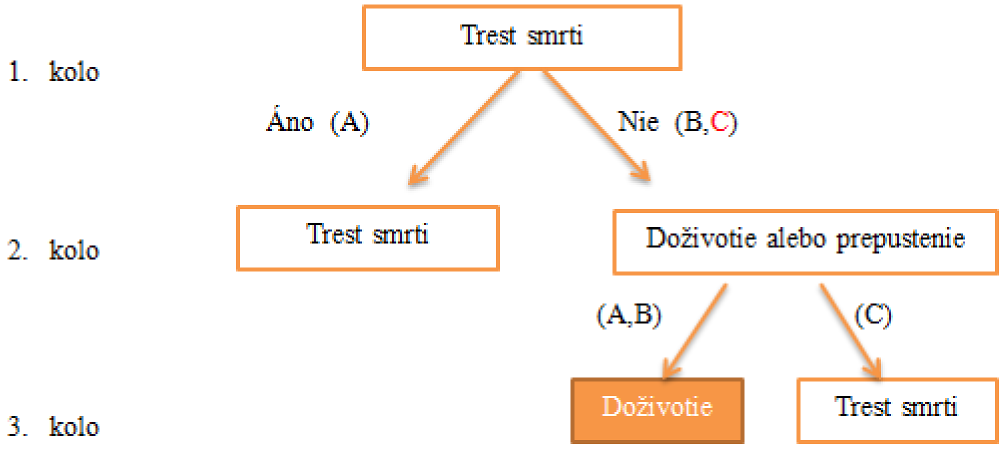


Obrázok 8 Status Quo, racionálna voľba

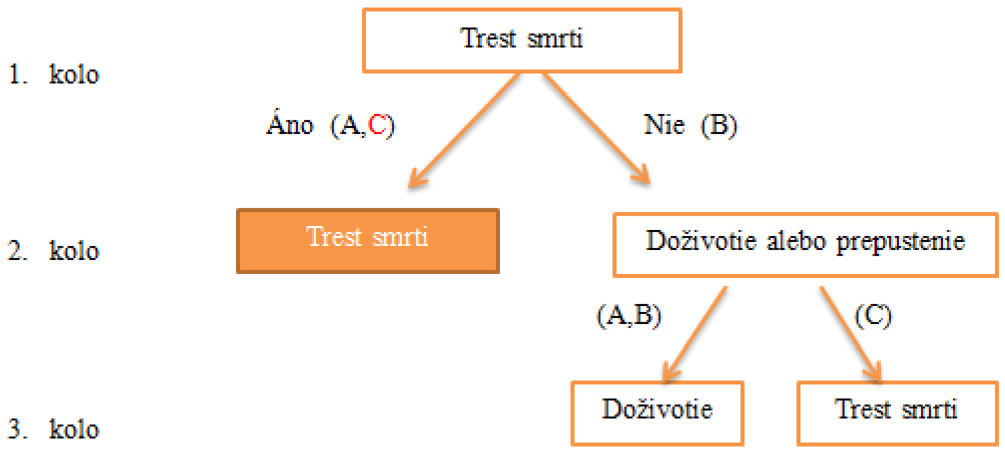
2. Rímska tradícia

V prvom kole sa hlasuje o najprísnejšom treste, tj. trest smrti. Pokiaľ bude odhlasované, bude trest vykonaný, pokiaľ nie, nastane druhé kolo, v ktorom sa bude hlasovať o doživotí alebo prepustení.

Pretože v druhom kole by zvíťazilo doživotie (sudcovia A,B), je prvé kolo hlasovaním medzi trestom smrti a doživotím – pri sofistikovanej voľbe preto zvíťazí trest smrti. Okrem sudcu A dá v prvom kole hlas trestu smrti aj sudca C, lebo v opačnom prípade by druhé kolo viedlo k jeho najmenej preferovanej variante.



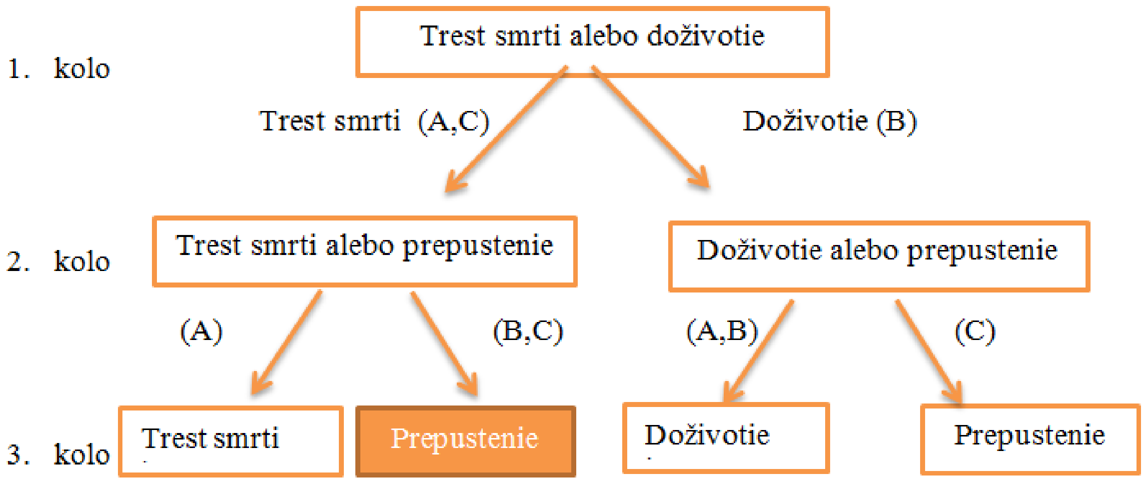
Obrázok 9 Rímska tradícia, úprimná voľba



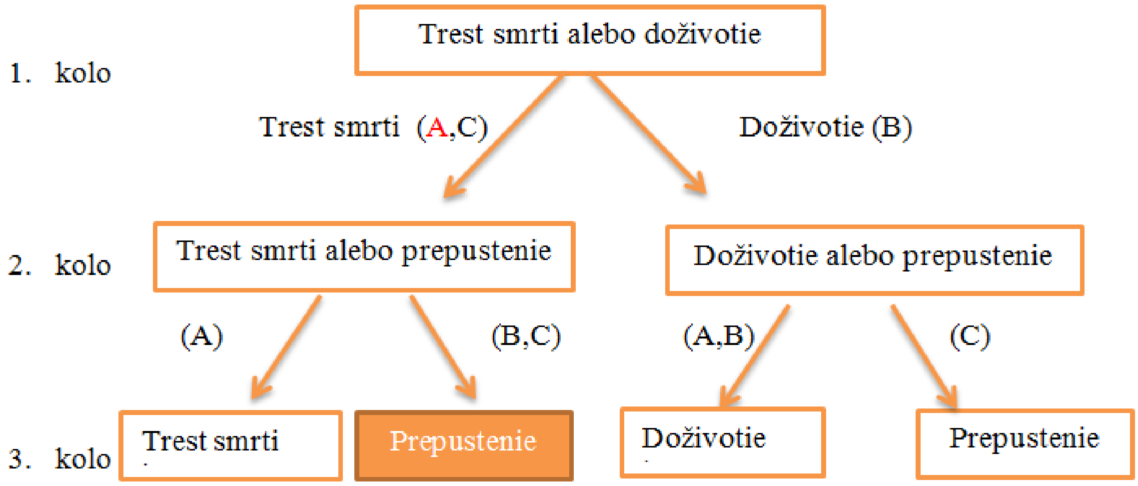
Obrázok 10 Rímska tradícia, sofistikovaná voľba

3. Mandatórny systém

V prvom kole sa hlasuje o trestu za daný zločin, to znamená, či uložiť trest smrti alebo doživotie. V druhom kole sa potom hlasuje o tom, či daný trest uložiť alebo nie. Pri rozhodovaní medzi trestom smrti a prepustením by zvíťazilo prepustenie (B,C), pri rozhodovaní medzi doživotím a prepustením by zvíťazilo doživotie . (A,C). V prvom kole sa teda rozhoduje medzi prepustením a doživotím.



Obrázok 11 Mandatórny systém, úprimná voľba



Obrázok 12 Mandatórny systém, sofistikovaná voľba

6.2 Medzinárodný konflikt

Uvažuje sa o príklade v ktorom sú v konflikte USA a Irak. Vystupujú tu dvaja inteligentní hráči a jedná sa o normálnu formu hry. Konflikt môžeme zobraziť pomocou tabuľky nasledovne:

Irak

USA

	Na vlastnú päsť	Medzinárodná podpora
Vojenský útok	(10,-10)	(-5,5)
Diplomatický tlak	(0,0)	(-2,2)

Pomocou Nashovej rovnováhy hľadáme rovnovážny bod:

$$Z_1(S_1^*, S_2^*) \geq Z_1(S_1, S_2^*) \text{ a zároveň } Z_2(S_2^*, S_1^*) \geq Z_2(S_2, S_1^*)$$

Uvedený príklad, nám opisuje hru, ktorá má viacero Nashových rovnováh, ktoré sú rovnako stabilné. Ak by sme vo vzorci vyššie nahradili ≥ na ostré znamienko >, našli by sme práve jeden rovnovážny bod.

Ďalej sa pri Nashovej rovnováhe usudzuje, či je pareto-optimálna. Pareto-optimálna je taká situácia, kde ani jeden z hráčov nemôže zlepšiť svoju situáciu bez toho, aby zhoršil situáciu toho druhého. Stratégia pareto-dominuje a je efektívnejšia, než druhá stratégia pokiaľ platí:

$$\text{pre } i \epsilon N, zisk_i(s) \geq zisk_i(s')$$

a zároveň

$$\text{existuje } j \in N, \text{ pre ktoré platí } zisk_j(s) > zisk_j(s')$$

Pokiaľ neexituje stratégia s’, ktorá by pareto-dominovala s, je stratégia s pareto-optimálna. Každá hra má minimálne jednu pareto-optimálnu situáciu.

6.3 Newcombov paradox

V príklade zo [6] sú dvaja hráči – Alica a Bob. Ďalej sú v hre dve skrinky, ktoré obsahujú peniaze. Alica si môže zobrať buď jednu alebo obidve skrinky. Ak by jej išlo len o peniaze, existuje jednoduchá odpoveď. Situáciu, kedy si vezme iba jednu skrinku nazveme holubica a situáciu s dvoma skrinkami nazveme jastrab. Tým pádom by Alica mala zvoliť jastraba, aby získala minimálne toľko ako pri holubici.

Hra má ale háčik. Druhá skrinka obsahuje 100 korún. Prvá skrinka môže obsahovať 200 korún alebo nič. O obsahu prvej skrinky rozhoduje Bob. Predpokladáme, že Bob pozná Alicu natoľko, že dokáže odhadnúť, ktorú stratégiu Alica zvolí. Pre Boba tak isto existujú dve možné stratégie. Holubica pre neho znamená dať do prvej skrinky dva doláre a jastrab znamená, že do prvej skrinky nedá nič. Bob sa snaží taktizovať a preto ak hrá Alica holubicu, bude hrať aj on holubicu a naopak ak vie, že Alica bude hrať jastraba, bude aj on hrať jastraba.

V tomto momente, už jastrab pre Alicu nevyzerá ako ideálna stratégia. Ak Bob predvída, že zahrá jastraba, vyhrá práve 100 korún. Ak však bude hrať holubicu odnesie si minimálne 100 a maximálne 200 korún.

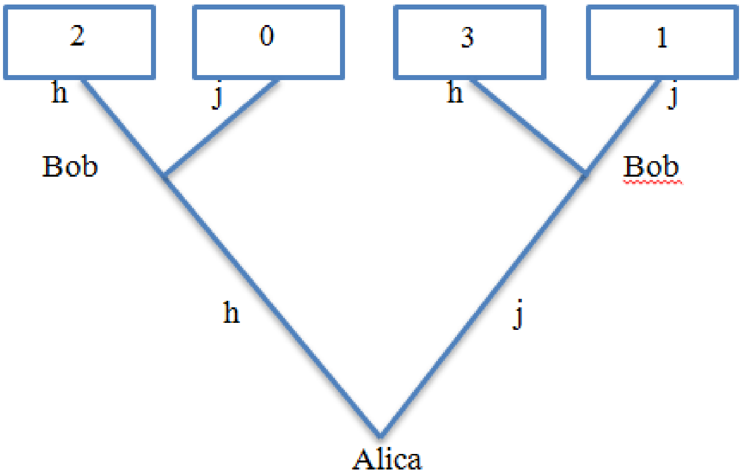
Newcombov paradox ukazuje, že pri niektorých situáciách je možné maximalizovať výhru použitím striktne dominovanej stratégie. Samotný spor predpokladá, že existuje nasledujúca hra:

1. Alica ťahá po Bobovi
2. Bob pozná Alicinu voľbu
3. Alica má viac ako jednu voľbu.

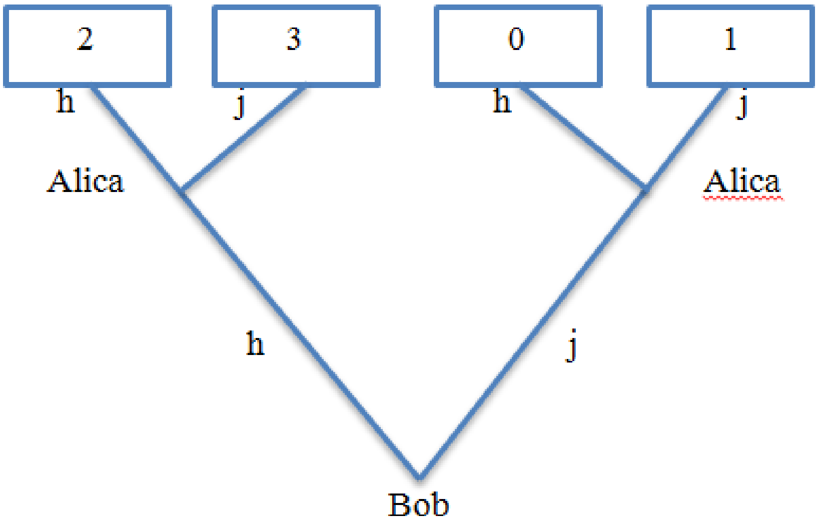
Obrázok 13 nižšie nám ukazuje pokus o vytvorenie hry, ktorá nám explicitne zobrazuje, aké možnosti môžu nastať pri jednotlivých stratégiách. Na tomto však nie je splnená podmienka číslo jedna. Naopak na Obrázok 14 môžeme vidieť hru, kde chýba splnená prvá podmienka.

Ak má platiť tvrdenie, že Alica musí hrať holubicu, aby maximalizovala svoju výhru, predpokladá sa, že Bob bude hrať na Obrázok 13, holubicu ak bude hrať Alica holubicu, a jastraba, ak bude Alica hrať jastraba. Ak ale má platiť, že Alicina stratégia je dominovaná, treba poukázať na hru na Obrázok 14.

Nech sa však bude diať čokoľvek, nikdy nebude optimálnou hrou dominovaná stratégia.



Obrázok 13 Newcombov paradox zobrazenie číslo 1



Obrázok 14 Newcombov paradox zobrazenie číslo 2

6.4 Hra vyjednávanie

Veľmi často používaným prostriedkom na dosiahnutie konsenzu pri spoločenskom rozhodovaní je podľa [15] vyjednávací proces. Pre účastníka, v zásade, nie je dôležitá pozícia, ktorú dosiahne vyjednávaním, ale predovšetkým ako táto pozícia spĺňa jeho záujmy, pretože niektoré záujmy účastníkov môžu byť spoločné a niektoré, naopak, protichodné. Ide o vystihnutie spoločných záujmov a pri presadzovaní protichodných záujmov pomocou vzájomných ústupkov prísť k rozhodnutiu prijateľnému pre všetkých účastníkov rozhodovania.

Ak sa pri presadzovaní rozdielnych záujmov orientujeme len podľa jedného kritéria, je presadenie vzájomného kompromisu veľmi zložité, pretože zisk jedného sa prejavuje ako ústupok druhého, ktorý nie je kompenzovaný ziskom na podľa iného kritéria. Preto hľadanie konsenzu je jednoduchšie v prípade väčšieho poštu hodnotiacich kritérií, teda, kde je možnosť kompenzácie ústupku podľa rôznych kritérií.

Pri modelovaní vyjednávacieho procesu je teda nutné sa zamerať na určité koncepcie multikriteriálnych modelov. Koncepcia úžitku je založená na maximalizácii zisku pre všetkých účastníkov pri dosiahnutí spoločného konsenzu. Koncepcia tlaku naopak predpokladá, že všetci účastníci sú pri vyjednávaní pod určitým vnútorným aj vonkajším tlakom nútení k určitým ústupkom až do momentu, kedy je dosiahnutý spoločný konsenzus. Koncepcia zbližovania protinávrhov je založená na postupnom zmenšovaní vzdialeností medzi protinávrhmi v rozhodovacom procese, až je dosiahnutý spoločný konsenzus. Ďalším postupom je vytváranie koalícií, ktoré môžu presadiť svoje spoločné záujmy na úkor ostatných účastníkov. Všetky tieto modely je možné kombinovať a vytvoriť tak základ na podporu vyjednávaní, ktoré neobmedzujú tvorivosť a originalitu účastníkov v riadení vyjednávaní alebo v príprave kompromisných návrhov. Tieto systémy vyjednávania by ale vlastnosti účastníkov nemali nahradiť, ale poskytovať množstvo analýz, uľahčiť komunikáciu medzu účastníkmi a pomôcť sústrediť sa na otázky vyjednávania.

Väčšina reálnych rozhodovacích situácií zahŕňa niekoľko rozhodujúcich subjektov. Vyjednávanie je často používaným prostriedkom pri riešení množstva rozhodovacích situácií, preto je častým objektom výskumu. Proces vyjednávania je vo všeobecnosti zle štruktúrovaný problém. Rozhodujúce subjekty, alebo aj účastníci vyjednávania, sú obdarované tvorivosťou a originalitou ľudského myslenia. Znalosti a schopnosti účastníkov ale nemôžu byť považované za čisto subjektívne, ale majú na znalostiach založené racionálne vysvetlenie. Prístupy k riešeniu problémov je možné rozdeliť do dvoch základných skupín, a to na prístupy:

- Behaviorálne
- Formálne

Behaviorálny prístup sa snaží racionalizovať, resp. hľadať racionalitu, zatiaľ čo formálny prístup vychádza zo všeobecnej racionality, ktorá potom môže byť aplikovaná vo špecifických situáciách. Dôležitosť problematiky vyjednávania preto ovplyvňuje tvorbu systémov na podporu vyjednávania, ktorých už existujú desiatky, a ktoré sú založené na rôznych princípoch. Systémy na podporu vyjednávania sú ďalej tvorené systémami na podporu rozhodovania jednotlivých účastníkov s komunikačným systémom, ktorý umožňuje komunikáciu medzi všetkými účastníkmi. Najdôležitejšou súčasťou takých systémov sú modely vyjednávacieho procesu. V snahe zachytiť viac aspektov vyjednávania je množstvo systémov na podporu vyjednávania založené jednom formálnom modeli, ktorý popisuje celý proces vyjednávania. Ale taký prístup eliminuje niektoré vyjednávacie činnosti a iné zjednodušuje. Navyše sa účastníci málokedy prispôsobujú klasickým modelom racionálneho chovania, skrývajú svoje záujmy menia svoje stratégie v priebehu vyjednávacieho procesu. Tieto okolnosti spôsobujú vytvorenie jedného komplexného modelu celého vyjednávacieho procesu veľmi zložitým, preto sa niekedy používa niekoľko prepojených modelov, ktoré zachytávajú rôzne činnosti vykonávané účastníkmi vyjednávania. Niekedy sa pri vyjednávaní využíva tzv. sprostredkovateľ, ktorý svojimi činnosťami pomáha k dosiahnutiu konsenzu medzi účastníkmi.

Ako už bolo spomenuté vyššie, pre účastníka vyjednávania nie sama o sebe dôležitá pozícia, ktorou vyjednávaním dosiahne, ale predovšetkým, ako táto pozícia spĺňa jeho záujmy. Orientácia na záujmy vo vyjednávaní a nie na pozíciu v rozhodovacom priestore, je jednou z kľúčových otázok vyjednávania.

Klasickým príkladom je situácia, kde otec chce rozdeliť spravodlivo jablko medzi dvoch synov. Obaja synovia chcú celé jablko. Spravodlivým riešením sa zdá byť rozdelenie jablka na 2 polky. Neskôr ale otec zistí, že starší syn chce z jablka hlavne šupku kvôli lepšej chuti a zrniečka pre jeho pestovateľské aktivity, a že mladší syn si jablko okrajuje a teda šupku vyhadzuje, spoločne so zrniečkami. Keby otec poznal záujmy svojich synov, starší mohol dostať šupku a zrniečka, zatiaľ čo mladší zvyšok.

Podobne bolo vyššie spomenuté, že niektoré záujmy účastníkov sú spoločné, iné protichodné. Ide o vystihnutie spoločných záujmov a pri presadzovaní protichodných záujmov pomocou vzájomných ústupkov prísť k rozhodnutiu prijateľnému pre všetkých účastníkov vyjednávania. Platí tiež, že orientácia na jedno kritérium znamená, že ústupok jedného je ziskom druhého.

Príkladom je vyjednávanie o cene. Predávajúci chce cenu svojho tovaru maximalizovať, kupujúci, naopak, minimalizovať. Vyjednávanie prebieha v niekoľkých kolách, kde predávajúci aj kupujúci prezentujú svoje návrhy ceny. Predávajúci pozná svoju minimálnu cenu, za ktorú je ešte ochotný tovar predať, kupujúci zase svoje maximum, ktoré je ochotný za tovar zaplatiť. Rozmedzie medzi týmito cenami je vyjednávacím priestorom, v ktorom sa bude kompromisná cena pohybovať. V prvej ponuke sa predávajúci snaží cenu maximalizovať a kupujúci minimalizovať, oba tieto návrhy sa ešte môžu nachádzať mimo vyjednávací priestor. Postupne by sa návrhy mali približovať k nejakej kompromisnej cene. Výška kompromisnej ceny záleží na množstve okolností, na skutočných možnostiach účastníkov, na ich taktike a spôsobe presadzovania svojho záujmu. Najlepším odhadom pre kompromisnú cenu pri neznalosti ďalších informácií je priemerná cena z prvého kola ponúk predávajúceho a kupujúceho.

Príklad. Predpokladajme, že pán Novák chce kúpiť pozemok a podľa jeho finančných možností si nemôže dovoliť kúpiť pozemok drahší ako 200.000 EUR. Páči sa mu pozemok, ktorý predáva pán Horváth. Pán Horváth má niekoľko ponúk a vie, že svoj pozemok nepredá lacnejšie než za 120.000 EUR. Obaja sa snažia uspokojiť svoje záujmy a vyjednávajú o cene. Pán Horváth ponúkne svoj pozemok na predaj za 250.000 EUR, pán Novák dá protinávrh 100.000 EUR. Aký je teda vyjednávací priestor a aký je odhad kompromisnej ceny?

p. Horváth: minimálna cena 120.000 EUR

p. Novák: maximálna cena 200.000 EUR

Vyjednávací priestor je interval <120.000 , 200.000>

Vyjednávanie:

p. Horváth: prvá ponuka 250.000 EUR

p. Novák: prvá ponuka 100.000 EUR

Odhad kompromisnej ceny je 175.000 EUR

ZÁVĚR

Úvodná kapitola diplomovej práce sa zameriava na históriu teórie hier. Sú tu vymenované najvýznamnejšie osobnosti spájané s teóriou hier a teóriou rozhodovania. Ďalej sú tu objasnené základné pojmy, s ktorými sa je možné stretnúť v príkladoch. Posledná časť úvodnej kapitoly je venovaná podrobnej klasifikácii teórie hier.

Druhá kapitola sa venuje modelom teórie hier, konkrétne diskrétnemu modelu. Sú tu opísané stratégie, akými možno riešiť rozhodovaciu situáciu. Kapitola hovorí o troch základných rozhodovacích situáciách a to rozhodovaní za rizika, za istoty a za neistoty. Pri každej z týchto situácii je vysvetlené, ako sa počíta matematicky. Pre lepšie vysvetlenie problematiky je uvedení príklad, na ktorom sú jednotlivé rozhodovacie situácie ukázané v praxi.

Tretia kapitola je zameraná na konflikt dvoch hráčov pri antagonistických hrách. Táto časť práce sa snaží jednoduchým spôsobom vysvetliť maticové hry. Ku každému rozdeleniu je pre jednoduchšie pochopenie uvedený príklad. Sú tu spomínané čisté stratégie, zmiešané stratégie, dominované stratégie a pod.

Štvrtá kapitola sa venuje neantagonistickému konfliktu. Sú tu detailnejšie opísané dvojmaticové hry, kooperatívne hry a nekooperatívne hry. Hovorí sa tu o koalíciách a takisto je tu ku každej kapitole uvedený príklad.

Predposledná, teda piata kapitola, sa venuje hrám v explicitnom tvare. Tieto hry, ktoré sú zobrazené pomocou stromového grafu, sú tu demonštrované na dvoch príkladoch zo života. Prvým je ruská ruleta a druhým je známy Monty Hallov problém.

V poslednej kapitole sú uvedené zaujímavé príklady z praxe, kde vidíme ako možno teóriu hier aplikovať do bežných situácii, ako sú napríklad volebné systémy alebo konflikty medzi krajinami.

Cieľom diplomovej práce je zoznámiť čitateľa s problematikou teórie hier a teórie rozhodovania. Uviesť mu základné príklady ako možno aplikovať teóriu rozhodovania do praxe, mimo iného aj do bezpečnostného inžinierstva. Práca môže slúžiť aj ako prvotný materiál pre zoznámenie s teóriou hier.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] *Teorie her* [online]. , 4 [cit. 2016-04-24]. Dostupné z: http://www.pupa.6f.sk/studenti/hry.pdf

[2] "Reinhard Selten - Biographical". *Nobelprize.org.* Nobel Media AB 2014. Web. 24 Apr 2016. <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/selten-bio.html>

[3] Autor: Veronika H. – Vlastní dílo, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15397027

[4] CIBULKA, Jan.Strategické hry v bezpečnostním inženýrství. Dipl. práce, FAI UTB, Zlín 2010.

[5] TEORIE HER. *Ekonomická fakulta* [online]. České Budějovice [cit. 2016-05-08]. Dostupné z: http://www2.ef.jcu.cz/~houda/oa/soubory/TEORIE_HER.pdf

[6] CHVOJ, Martin. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4620-3.

[7] DLOUHÝ, Martin; FIALA, Petr. *Úvod do teorie her*. první. Praha : Oeconomica, 2007. 114 s. ISBN 978-80-245-1273-0.

[8] Teorie her. *Berkovi* [online]. Brno, 2009 [cit. 2016-05-08]. Dostupné z: http://www.berkovi.cz/milan/berka/

[9] HYKŠOVÁ, Magdalena. Teorie her a optimální rozhodování \matsymb{lbrack}online\matsymb{rbrack}. 2009 \matsymb{lbrack}cit. 2010-03-15\matsymb{rbrack}. Dostupné z WWW: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/.

[10] Fiala, P., Dlouhý, J.: Základy kvantitativní ekonomie a ekonomické analýzy
, Praha, Oeconomica, 2006

[12] MAREŠ, Milan. Principy strategického chování. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2003. 120 s. ISBN 80-246-0616-x.

[13] MAŇAS, Miroslav. Teorie her a její aplikace. Praha : SNTL, 1991. 280 s. ISBN 80-03-00358-X.

[14] ROUBAL, Jiří. *Teorie her : Optimální rozhodování a řízení*. In . [s.l.] : [s.n.], 2006, 2004-03-01 [cit. 2010-03-28]. Dostupné z WWW: <http://support.dce.felk.cvut.cz/pub/roubalj/teaching/ORR/seminars/ORR_cv4_ths.pdf>.

[15] DOCKNER, Engelbert et al. Differential games in economics and management science. New York, USA : Cambridge University Press, 2001. 382 s. ISBN 0-521-63732-4.

[16] MAŇAS, Miroslav. Teorie her a optimální rozhodování. Praha : SNTL, 1974. IČ 04-012-74.

[17] FERGUSON, Thomas. Výukové texty k předmětu Game Theory vyučovaném na UCLA.

[18] MARKL, Jaroslav: Teorie her a modely rozhodování v podmínkách neurčitosti. Skriptum VŠB Ostrava.

[19] MAŇAS, M. Teorie her a konflikty zájmů. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 114 s. ISBN 80-245-0450-2.

[20] FIALA, Petr. *Modely a metody rozhodování*. 2., přeprac. vyd. V Praze: Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1345-4.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK