

Analýza napjatosti čtvercové ortotropní desky

Aleš Viktorin

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická

Vložit oficiální zadání bakalářské práce

Tímto bych chtěl poděkovat panu Ing. Antonínu Poláškově CSc. za odborné vedení a konzultace při tvorbě mé bakalářské práce a zároveň děkuji svým rodičům za podporu ve studiu.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce a ředitele ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 02. 06. 2005

.....

podpis

RESUMÉ

V práci je provedena obecná charakteristika kompozitních materiálů a popis základního rozdělení. Pro vláknové kompozity jsou uvedeny základní rovnice pro napětí a deformace laminátu, základní princip a rovnice numerické metody konečných prvků MKP. V praktické části je aplikována MKP pro analýzu napjatosti vyztužené čtvercové ortotropní desky s následnou diskusí výsledku.

My thesis is divided into two parts. The first theoretical part solves a general characteristic of the composite materials and describes the basic classification. It contains the basic equation for the fibres composites for laminate's stress and strain, basic principle and equations of a numerical finite element methods (FEM). The second practical part is consecrated to the application of FEM for analysis reinforced square orthotropic plate on a discussion of the result.

OBSAH

ÚVOD	6
1 KOMPOZITNÍ MATERIÁLY	7
1.1 Kompozitní materiál.....	7
1.1.1 Definice	7
1.1.2 Materiálové složení	7
1.1.3 Plniva kompozitů	8
1.2 Charakteristické vlastnosti	9
1.3 Rozdělení kompozitních materiálů.....	11
1.3.1 Klasifikace kompozitů.....	11
1.4 Charakteristika vláknových kompozitů	13
1.4.1 Jednovrstvové kompozity.....	14
1.4.2 Vícevrstvé kompozity.....	15
1.4.3 Analýza ortotropních vrstev kompozitů	16
2 ZÁKLADNÍ ROVNICE PRO ANALÝZU NAPJATOSTI	19
2.1 Napětí a deformace vláknového kompozitu	19
2.2 Aplikace metody konečných prvků (MKP) pro řešení úlohy napjatosti čtvercové ortotropní desky	27
2.2.1 Teoretický úvod.....	27
2.2.2 Numerické řešení s praktickou aplikací.....	29
2.3 Diskuse výsledků.....	35
ZÁVĚR.....	36
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	37
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	38
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	39
SEZNAM TABULEK	40

ÚVOD

Využití kompozitních materiálů se v posledních letech rozšířilo do mnoha oborů a odvětví lidské činnosti. Tyto materiály mají vlastnosti, které je umožňují používat v aplikacích, kde to dříve nebylo možné. Jejich mechanické a také chemické vlastnosti umožňují nahrazovat kompozity materiály jako je ocel. Jejich široké použití se promítá do různých průmyslových odvětví, ale také do využití ve sportech nebo domácností. Spotřeba kompozitních materiálu se stále zvyšuje díky jejich vlastnostem, které lze upravovat podle konkrétních požadavků, přestože jsou tyto materiály dražší než materiály tradiční.

Pro uplatnění matematického modelu je důležité znát fyzikální podmínky celého procesu a fyzikální veličiny ovlivňující výrobu.

Úspěch vláknových kompozitů vyplývá z využití vynikající pevnosti, tuhosti a nízké hustoty vláken skleněných, uhlíkových nebo kevlarových a dalších. Při své schopnosti kombinovat vynikající mechanické vlastnosti s konstrukční přizpůsobivostí a snadné výrobě, které kompozity nabízejí, daleko předstihly rychlostí růstu výroby jiné materiály. Další charakteristikou, která vláknové kompozity odlišuje od jiných materiálů, je to, že zároveň s výrobou konstrukce nebo prvku je vytvářena i struktura materiálu. [1]

1 KOMPOZITNÍ MATERIÁLY

1.1 Kompozitní materiál

1.1.1 Definice

Kompozitem je každý materiálový systém, který je složen z více (nejméně dvou) složek, z nichž alespoň jedna je pevná, s makroskopicky rozeznatelným rozhraním mezi složkami, a který dosahuje vlastností, které nemohou být dosaženy kteroukoliv složkou samostatně ani prostou sumací. [1]

1.1.2 Materiálové složení

Termosetové kompozitní materiály jsou složeny ze dvou fází:

- matrice (pojivo)
- plnivo (výztuž)

Matrice (v našem případě je možné použít výraz pojivo) je polymerní materiál, kterým se impregnuje výztuž. Pojivo rozvádí mechanické namáhání rovnoměrně na všechna vlákna výztuže a chrání je před mechanickým nebo chemickým poškozením, tj. dodává kompozitu odolnost proti chemickým, povětrnostním a jiným vlivům.

Jako matrice se nejčastěji používá polyesterová pryskyřice ortoftalového typu. Z nich lze vyrábět nejrůznější výrobky, na které nejsou kladeny požadavky zvýšené chemické odolnosti. Pokud mají být výrobky vystaveny působení lehce agresivních médií, používají se pryskyřice izoftalového typu. Pokud se agresivita média zvyšuje, je možné

použít pryskyřice vinylesterové, pro některá speciální prostředí fenolické popř. furanové pryskyřice. Pro některé aplikace se rovněž používají pryskyřice epoxidové.

U pryskyřic je výhodné, že je lze zpracovávat bez zvýšené teploty a tlaku. K tomu se většinou používají více složkové systémy, kde se obvykle jedna složka přidává až těsně před zpracováním. Vzájemným poměrem jednotlivých složek je možné měnit dobu, po kterou jsou pryskyřice zpracovatelné. [2,3]

1.1.3 Plniva kompozitů

Plniva (výztuže) jsou přísady, kterými se upravují mechanické, technologické, vzhledové a další vlastnosti materiálu. Plnivy se také ovlivňuje cena výrobku. Obecně jsou za plniva považovány materiály, které jsou přidávány do směsí za účelem získání konkrétních vlastností. Důležitou úlohu při volbě vhodného plniva hraje snadná dostupnost, nízká cena, vysoká přilnavost k matrici, možnost řízení velikosti a distribuce. [1]

Plniva můžeme dělit podle chemické podstaty na:

- organická (aramidy, celulóza, dřevěné piliny apod.)
- anorganická (sklo, sádra, uhličitan vápenatý, oxid křemičitý, azbest)

Podle tvaru rozeznáváme plniva:

- anizotropní (plnivo má tři rozměry – jeden nebo dva převládají nad ostatními)
- izotropní (plnivo má jeden rozměr – výška, šířka a délka jsou stejné)

Mezi anizotropní plniva řadíme azbest, vlákna obecně, mastek, slídu apod. Příkladem izotropních plniv je uhličitan vápenatý, saze atd.

Jako výztuže se u kompozitů vyrobených pultruzí používají vláknité materiály. Mohou to být vlákna skleněná, uhlíková, kevlarová popř. jiná vlákna. Nejčastěji se

používají (z cenových důvodů) vlákna skleněná. Pro běžné výrobky jsou to vlákna z E skla (tzv. sklo Eutal – bezalkalické, hlinitoboritokřemičité sklo), pro výrobky používané v prostředí s korozním namáháním se používají materiály z chemicky odolného C nebo ECR skla.

1.2 Charakteristické vlastnosti

Kompozity tvoří jedna nebo více nespojitých fází, ponořených ve spojitě fázi. Diskontinuitní fáze je obvykle tvrdší a pevnější než spojitá fáze a nazývá se vyztužení nebo vyztužovací materiál, zatímco spojitá fáze se nazývá matrice. Nejpozoruhodnější výjimkou z tohoto pravidla je skupina materiálů známých jako polymery modifikované kaučukem, skládající se z tuhé polymerní matrice, plněné kaučukovými částicemi. [1]

Vlastnosti kompozitů jsou silně ovlivňovány vlastnostmi svých materiálových složek, jejich distribucí a interakcí mezi nimi. Vlastnosti systému může dávat součet vlastností složek podle objemových podílů nebo složky mohou na sebe vzájemně působit synergetickým způsobem, takže zajišťují kompozitu vlastnosti, které mohou být přičítány prostému součtu vlastností složek na základě jejich objemových podílů. Proto při popisu kompozitu jako materiálového systému je potřeba vedle specifikace materiálů složek a jejich vlastností specifikovat i geometrii vyztužení vzhledem k systému. Geometrie vyztužení může být popsána tvarem, velikostí a distribucí velikostí. Systémy s vyztužením se však liší při shodné geometrii od druhého v mnoha směrech; např. se může vyztužení lišit v koncentraci, koncentrační distribuci a orientaci. Všechny tyto faktory mohou být tedy důležité v určování vlastností kompozitů, ale zřídka bývají všechny brány v úvahu při odvozování teoretických vztahů pro kompozity.

Tvar jednotlivých částic nespojitě fáze lze často přibližně uvažovat jako kouli nebo válec. Jsou některé materiály, a některé člověkem vytvořené materiály, jako skleněné vločky, jejichž částice mohou nejlépe vystihovat hranoly s pravoúhlým průřezem destičky. Velikost a distribuce velikostí řídí texturu materiálu. Spolu s objemovým podílem určují také mezifázový povrch, který má důležitou úlohu při určování rozsahu vzájemného působení mezi vyztužením a matricí.

Koncentrace se obvykle udává v objemovém nebo hmotnostním podílu. Příspěvek určité složky k vlastnostem celého kompozitu je určován tímto parametrem. Koncentrace je obecně považována za jediný nejdůležitější parametr ovlivňující vlastnosti kompozitu.

Je též snadno kontrolovatelnou výrobní proměnnou používanou pro upravování vlastností kompozitu. Koncentrační distribuce je mírou homogenity nebo rovnoměrnosti systému. Homogenita je důležitou charakteristikou, která určuje rozsah, v kterém se může reprezentativní objem materiálu lišit ve fyzikálních a mechanických vlastnostech od průměrných vlastností materiálu. Nerovnoměrnosti by v systému neměly být připuštěny, protože zhoršují ty vlastnosti, které jsou řízeny nejslabším článkem v materiálu. Například lom v nezhomogenizovaném materiálu vznikne v oblasti nejnižší pevnosti, což nepříznivě ovlivňuje celkovou pevnost materiálu.

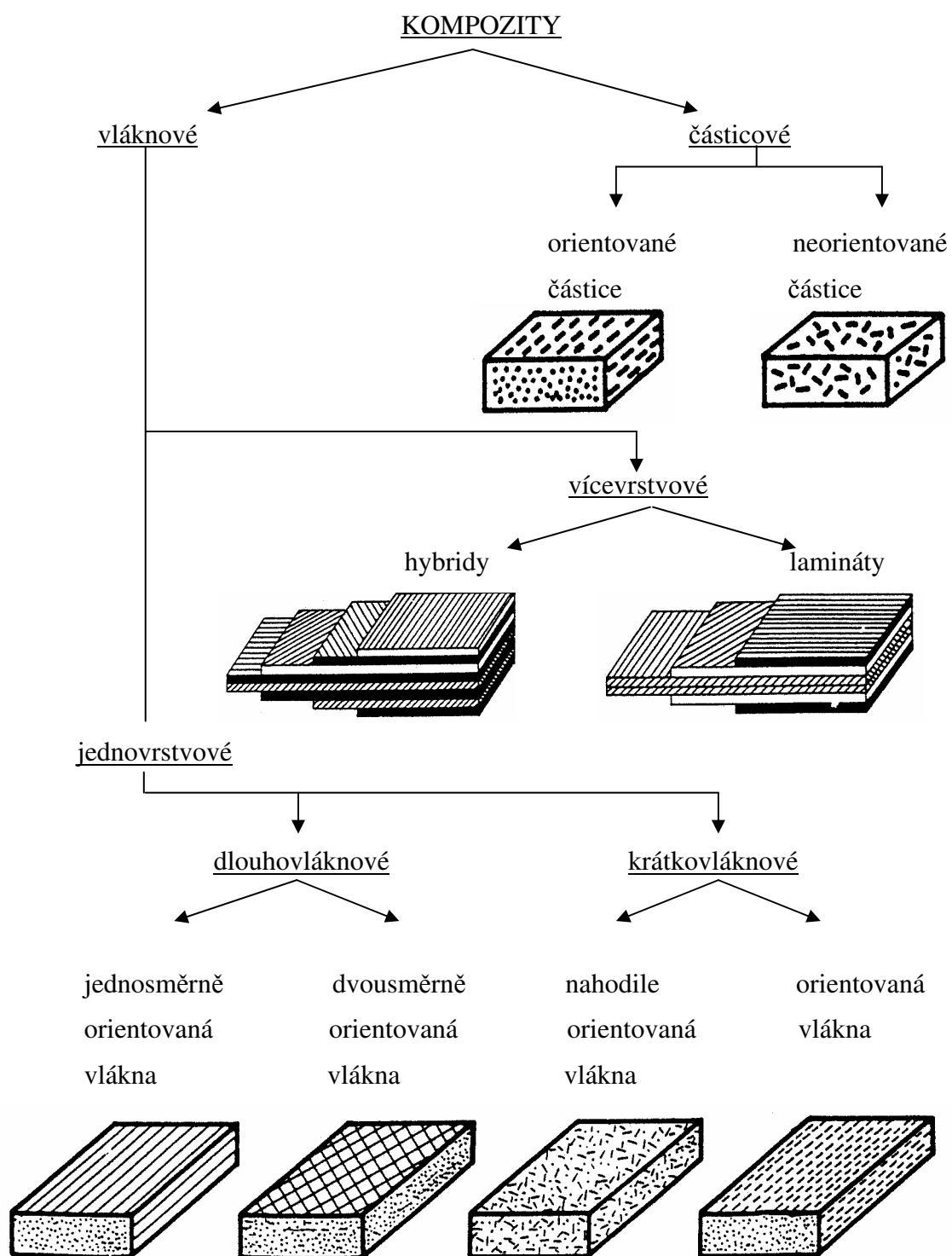
Orientace vyztužení ovlivňuje izotropii systému. Mají-li vyztužovací částice tvar s rozměry ve všech směrech přibližně stejnými (jsou rovnoosé), chová se kompozit v podstatě jako izotropní materiál, jehož vlastnosti jsou nezávislé na směru. Když jsou rozměry reprezentativních vyztužovacích částic nestejně, může se kompozit chovat jako izotropní materiál za předpokladu, že částice jsou náhodně uspořádány jako v náhodně orientovaném kompozitu vyztuženém krátkými vlákny. V ostatních případech může vyvolat výrobní proces (např. odlévání krátkovláknového kompozitu) orientaci vyztužení, a tudíž jistou anizotropii. V kompozitech vyztužovaných spojitými vlákny, např. v jednosměrových nebo ve vrstevných kompozitech, může být anizotropie žádoucí. Navíc je základní předností těchto kompozitů schopnost získat potřebnou anizotropii jejich vhodným návrhem a výrobou.

Koncentrační distribuce částic informuje o jejich vzájemných prostorových vztazích. Částice mohou být rovnoměrně rozptýleny v kompozitu a umístěny v pravidelných odstupech, takže se žádné dvě částice nedotýkají. Naproti tomu si je možné představit uspořádanou disperzi částic tak, že vytvářejí síť umožňující spojitě propojení všech částic. K tomu dochází při mnohem nižší koncentraci než je ta, při které je možné těsné seskupení všech částic. Taková disperze, vytvářející síť, může významně ovlivnit elektrické vlastnosti kompozitů. [4]

1.3 Rozdělení kompozitních materiálů

1.3.1 Klasifikace kompozitů

Většina dosud vyvinutých kompozitních materiálů je vyráběna pro zlepšení mechanických vlastností, jako je pevnost, tuhost, tažnost a vysokoteplotní odolnost. Je pak přirozené, že se společně studují kompozity, které mají společný mechanismus pevnostního chování. Tento mechanismus je silně závislý na geometrii vyztužení. Proto je vhodné roztrždit kompozitní materiály na základě geometrie reprezentativní jednotky vyztužení. Obr.1 představuje obecně přijaté klasifikační schéma pro kompozitní materiály. V této klasifikaci je rozlišovací charakteristikou částic v podstatě to, zda je vláknová, nebo nikoli. Může být kulová, krychlová, čtyřstěnová, destičková nebo jiného pravidelného či nepravidelného tvaru, ale je přibližně rovnoosá. Vláknem je charakterizováno svou délkou, která je mnohem větší v porovnání s jeho průřezovými rozměry. Kompozity vyztužené částicemi jsou někdy označovány jako partikulové kompozity. Kompozity vyztužené vlákny se pak pochopitelně nazývají vláknové kompozity. [4]



Obr.1 Obecné schéma pro rozdělení kompozitních materiálů.

1.4 Charakteristika vláknových kompozitů

Je dobře známo, že naměřené hodnoty pevnosti většiny materiálů jsou mnohem menší (o několik řádů) než jejich teoretické hodnoty. Rozpor v hodnotách pevnosti se přičítá vrozeným nedokonalostem a vadám v materiálu. Pevnost poškozují zvláště vady ve tvaru trhlin, které leží kolmo ke směru působícího zatížení. Proto plastová vlákna nebo vlákna z nepolymerních materiálů mají v porovnání s kompaktem z téhož materiálu mnohem větší pevnost ve směru délky, protože velké nečistoty, které mohou být přítomny v kompaktu materiálu, jsou minimalizovány v důsledku malých průřezových rozměrů vlákna. U polymerních materiálů je příčinou vysoké pevnosti a tuhosti orientace molekulární struktury. Vlastnosti některých běžných typů vláken, jakož i některých konvenčních materiálů, jsou uvedeny v tabulce I., která jasně ukazuje důležitost vláken pro dosažení vyšších pevností. Nejdůležitější vyztužovací vlákno je z E-skla, protože je poměrně levné. Pozoruhodná svými vysokými hodnotami tuhosti jsou však vlákna bórová a aramidová (polymerové vlákno Kevlar 49).

Tabulka I. Vlastnosti vláken a konvenčních materiálů v kompaktu.

Materiál	Modul pružnosti v tahu E (GPa)	Mez pevnosti v tahu σ_p (GPa)	Hustota ρ (g.cm ⁻³)	Měrný modul E/ ρ	Měrná pevnost σ_p/ρ
Vlákna					
E-sklo	72,4	3,5 ^{a)}	2,54	28,5	1,38
S-sklo	85,5	4,6 ^{a)}	2,48	34,5	1,85
Grafit (vysokomodulový)	390,0	2,1	1,90	205,0	1,1
Grafit (s vysokou pevností v tahu)	240,0	2,5	1,90	126,0	1,3
Bór	385,0	2,8	2,63	146,0	1,1
Křemen	72,4	5,8	2,19	33,0	2,65
Wolfram	414,0	4,2	19,30	21,0	0,22
Berylium	240,0	1,3	1,83	131,0	0,71
Kevlar 49 (aramidový polymer)	130,0	2,8	1,50	87,0	1,87
Konvenční materiály					
Ocel	210,0	0,34 - 2,1	7,8	26,9	0,043 - 0,027
Hliníkové slitiny	70,0	0,14 - 0,62	2,7	25,9	0,052 - 0,23
Sklo	70,0	0,7 - 2,1	2,5	28,0	0,28 - 0,84
Wolfram	350,0	1,1 - 4,1	19,30	18,1	0,057 - 0,21
Berylium	300,0	0,7	1,83	164,0	0,38

a) Hodnoty teoretické pevnosti. Hodnoty skutečné pevnosti před zabudováním do kompozitu jsou přibližně 2,1 GPa.

Z důvodu malých průřezových rozměrů se vlákna nemohou používat přímo v technických aplikacích. Vkládají se proto do matricových materiálů, aby vytvořily vláknové kompozity. Matrice spojuje vlákna dohromady, slouží k přenosu namáhání do vláken a chrání je proti narušení okolím a poškození při zpracování. V kompozitech s krátkými vyztužovacími vlákny je přenosová funkce matrice závažnější než v kompozitech se spojitými vlákny. Vláknové kompozity se stávají nejdůležitější třídou kompozitních materiálů, protože jsou schopny dosahovat vysokých pevností. Vláknové kompozity lze zhruba třídit na jednovrstvé a na vícevrstvé na základě studia jejich jak teoretických, tak experimentálních vlastností. [1,4]

1.4.1 Jednovrstvé kompozity

Jednovrstvé kompozity mohou být ve skutečnosti zhotoveny z několika samostatných vrstev, z nichž každá má tutéž orientaci a tytéž vlastnosti, a tudíž celý laminát lze uvažovat jako jednovrstvový kompozit. U kompozitů tvarovaných litím do forem, obsahujících diskontinuální vlákna, nevznikají žádné vrstvy (ačkoliv planární orientace nemusí být co do tloušťky rovnoměrná) a mohou být klasifikovány jako jednovrstvé kompozity. V případě kompozitů vyráběných z netkaných rohoží je náhodná orientace konstantní v každé vrstvě a výsledný kompozit by byl uvažován jako jednovrstvý, i když lze nalézt mezi každou vyztužovací vrstvou při mikroskopickém vyšetření vrstvičku bohatou na pryskyřici. [4]

Spojitá vlákna v jednovrstvovém kompozitu mohou být všechna uspořádána v jednom směru, a tak vytvořen jednosměrový kompozit. Takové kompozity se vyrábějí rovnoběžným ukládáním vláken a jejich prosycením pryskyřičným materiálem, např. polyesterovou nebo epoxidovou pryskyřicí, která udržuje vlákna v dané poloze a slouží jako matricový materiál. Takové formy předimpregnovaných vláken se nazývají prepregy. Odstranitelným podkladem se přitom zároveň zabraňuje shlukování vláken během uskladnění. Podkládání poskytuje další způsob pro zajišťování polohy vláken.

Jednosměrové kompozity jsou velmi pevné ve směru vláken, ale obvykle slabé ve směru kolmém k vláknům. Aby se vytvořil laminát použitelný v technických aplikacích, jsou jednosměrové prepregy skládány v různých směrech. Lepící pásy vyztužené sklem jako jednosměrové kompozity se používají na rybářské pruty a jiné tyčovité výrobky.

Spojité vyztužení v jedné vrstvě může být také provedeno v druhém směru, aby se získaly vyrovnanější vlastnosti. Dvousměrové vyztužení může být provedeno v jediné vrstvě ve vzájemně kolmých směrech jako ve skleněné tkanině. Dvousměrové vyztužení může být takové, že pevnosti v obou kolmých směrech jsou přibližně stejné. V některých aplikacích zabezpečuje minimální vyztužení kolmé k základnímu směru pouze ochranu proti poškození a separaci vláken při manipulaci a tak zvyšuje velmi nízkou pevnost v příčném směru. I v takových případech je pak příčná pevnost mnohem menší než pevnost ve směru základního vyztužení.

Orientaci krátkých neboli diskontinuitních vláken v kompozitním materiálu nelze snadno řídit. Ve většině případů se předpokládá, že vlákna jsou v kompozitu orientována nahodile. Při vstřikovacím tvarování kompozitu ztuženého vlákny se však může objevit výrazná orientace ve směru tečení. V jiných oblastech téhož výrobku může být orientace zcela rozdílná. Krátká vlákna, někdy označována jako sekaná vlákna, mohou být vstřikována do formy zároveň s kapalnou pryskyřicí, aby se vytvořila vyztužená plastová struktura. Obdobně mohou být sekaná vlákna spojena ve slabě vázaný předvýrobek nebo rohož a jeho impregnováním pryskyřicí získán jednovrstvový kompozit. Ve všech těchto procesech leží sekaná vlákna rovnoběžně s povrchem formy a jsou náhodně orientována v rovinách rovnoběžných s povrchem. Vlastnosti krátkovláknového kompozitu mohou být proto izotropní; to znamená, nejsou po tloušťce desky závislé na směru.

1.4.2 Vícevrstvé kompozity

Kompozity používané v konstrukčních aplikacích jsou většinou vícevrstvé (úhlové vrstvení): to znamená, že se skládají z několika vrstev vláknových kompozitů (lamin) je jednovrstvový kompozit a tato orientace se střídá podle konstrukčního návrhu. Každá vrstva kompozitu je obvykle velmi tenká, a proto nemůže být použita přímo. Tloušťka vrstvy se pohybuje kolem 0,1 mm. Pro použití v technických aplikacích se několik stejných nebo odlišných vrstev spojuje dohromady do vícevrstvého kompozitu. Jsou-li materiály složek v každé vrstvě stejné, nazývají se stručně lamináty. Hybridní lamináty znamenají vícevrstvé kompozity sestávající z vrstev zhotovených ze složek z různých materiálů. Například jedna vrstva hybridního laminátu může být epoxid vyztužený skleněnými vlákny, zatímco jiná může být epoxid vyztužený grafitovými

vlákny. Je možné, ale nikoliv běžné, že se najdou hybridní kompozity se směsí vláken v jedné vrstvě. Vrstva kompozitu tudíž představuje základní stavební blok pro jeho konstrukční aplikace.

Vyztužovací vlákna v jednovrstvovém kompozitu mohou být krátká nebo dlouhá vzhledem k jejich průřezovým rozměrům. Kompozity s dlouhými vlákny se nazývají dlouhovláknové (vyztužené spojitými vlákny) a kompozity s krátkými vlákny krátkovláknové (vyztužené diskontinuitními vlákny). Při jiném rozlišování se jako krátkovláknový kompozit uvažuje takový, ve kterém délka vlákna ovlivňuje jeho vlastnosti. V kompozitech vyztužených spojitými vlákny lze předpokládat, že břemeno působí přímo na vlákna a že ve směru namáhání jsou hlavní nosnou složkou. Tento předpoklad je především platný, jsou-li použita vysokomodulová vlákna ve velkých koncentracích. Pak není hlavním účelem matrice být nosnou složkou, ale v podstatě pojít vlákna k sobě a chránit je. Také způsob porušení takových kompozitů je obecně určován vlákny.

1.4.3 Analýza ortotropních vrstev kompozitů

Jediná vrstva laminátového kompozitu se nazývá obecně vrstva kompozitu či laminátu nebo jedním slovem lamina. Lamina smí mít minimální tloušťku 0,13 mm v případě preimpregnované vrstvy, nebo 6 mm v případě tkaných vložek. Obvykle obsahuje jedinou výztužnou vrstvu jednosměrovou či vícesměrovou. Jediná lamina je obvykle příliš tenká, aby se jí dalo použít přímo k jakékoliv technické aplikaci. Proto se spojuje dohromady více vrstev (lamin), vytvářejících novou strukturu, nazývanou laminát. Vlastnosti jednotlivých lamin a jejich orientace jsou voleny tak, abychom získali při konstrukci laminátu jeho požadované vlastnosti. Vlastnosti laminátu je pak určeno chováním jednotlivých lamin. Analýza a konstrukce laminátu tedy vyžaduje úplnou znalost vlastností a projevu lamin.

Jednosměrové kompozity patří do třídy materiálů, nazývaných ortotropní materiály. Rozdíl mezi ortotropními a anizotropními materiály lze nejlépe popsat, sledujeme-li jejich závislost na vnějším zatěžování. K vysvětlení rozdílu jednoosově zatížíme krychlový element materiálu ve směru jeho jedné hrany obr.2. Je-li krychle z anizotropního materiálu, zatížení způsobí změny jak v délkách, tak i v úhlech krychle. Jinak řečeno, jednoosé zatížení vytváří v anizotropním materiálu změny jak v délkách, tak i v úhlech, i když

hodnoty těchto změn mohou být nyní různé. Takovouto odezvu dostaneme pro libovolný úhel mezi hranami dvou krychlí. Zhotovíme-li nyní krychli z ortotropního materiálu, jeho odezva na vnější působení bude obecně podobná odezvě materiálu anizotropního. Bude-li hrana krychle ortotropního materiálu ležet podél libovolného směru, způsobí jednoosé zatížení změny jak v délkách tak i v úhlech. V ortotropních materiálech však existují tři známé kolmé osy, nazývané osy souměrnosti, podél nichž se odezva liší od směrů anizotropních materiálů. Zvolíme-li hrany krychle rovnoběžné s těmito osami souměrnosti, pak jednoosé namáhání rovnoběžné s těmito osami způsobí pouze změny v délce hran krychle, nezpůsobí však změnu úhlů mezi hranami obr.2. Osy souměrnosti ortotropního materiálu se nazývají také někdy přirozené osy materiálu. Pro jednosměrové kompozity jsou tyto osy materiálu několik synonymních názvů, a to podélné a příčné, osy souměrnosti nebo přirozené osy. Odezva jednosměrných nebo ortotropních lamin na vnější zatížení je kvalitativně znázorněna na obr.3. Zátěž rovnoběžná s jednou z přirozených os má za následek pouze normálové deformace (protažení) bez deformací smykových obr.3.

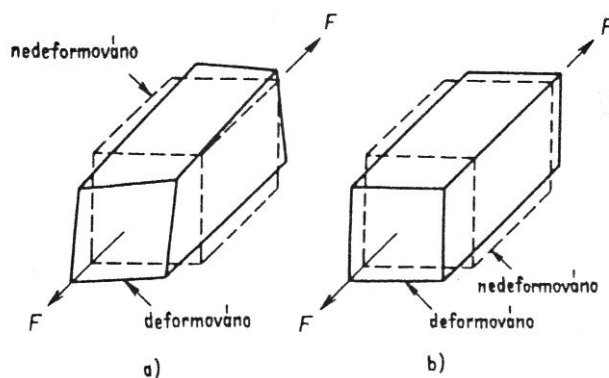
Analýza poměrného prodloužení je čistě geometrický problém. Vztahy mezi poměrnou deformací a posunutím části materiálu lze odvodit bez znalostí příčin, které způsobují deformaci nebo zákonů, podle kterých se těleso deformaci brání.

Vložíme-li na těleso pevné fáze vnější zatížení, vzniká v něm napětí. Vztahy pro napětí lze rovněž odvodit, aniž bychom museli uvažovat materiálové vlastnosti deformovaného tělesa, vyvolaného těmito napětími. Mnoho problémů však vyžaduje uvažovat současně jak napětí, tak i deformace, takže nutně musí vstoupit do problémů materiálové vlastnosti, popsané vztahy mezi napětím a poměrným prodloužením.

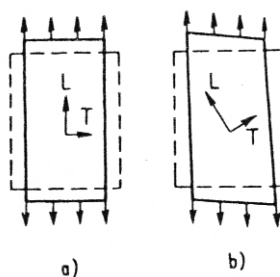
Experimentálně bylo zjištěno, že většina materiálu užívaných pro konstrukční účely, má lineární vztah mezi deformací a vyvolaným napětím, neboť mez úměrnosti těchto materiálů leží výše než je použité konstrukční napětí. Navíc pak, když použité napětí přerušíme, zmizí i deformace do svého původního stavu a neshledáme na něm žádných pozorovatelných známek o tom, že bylo zatěžováno. O takovém tělese pak říkáme, že bylo vytvořeno z lineárně elastického materiálu. Většina materiálů vykazuje lineárně elastické vlastnosti pouze pro malé deformace. Naštěstí rozsah použití velké většiny materiálů, užívaných v inženýrské praxi, leží v oblasti malých deformací.

Kompozitní materiály jsou podle definice z mikroskopického hlediska heterogenní (nestejnoměrné, nestejnorodé) materiály. Proti homogenním (stejným, stejnorodým) materiálům se jejich struktura s polohou mění. Veličiny popisující jejich vlastnosti jsou ve

skutečnosti funkcemi souřadnic. Předpoklad homogenity nikterak neovlivňuje předpoklad o anizotropnosti či izotropnosti materiálu. Izotropii nebo anizotropii materiálu posuzujeme podle toho, zda se materiál nemění nebo mění se směrem. V homogenních anizotropních materiálech jsou jejich vlastnosti v určitém místě funkcemi směru, nemění se však v souvislosti se změnou souřadnic uvažovaného místa. Vláknové kompozity vykazují anizotropii jen v omezeném stupni. Poněvadž z hlediska materiálových vlastností mají roviny souměrnosti, patří do kategorie ortotropních materiálů. Zákony, podle kterých se řídí makroskopické vlastnosti vláknových kompozitů, lze proto odvodit ze zákonitosti pro homogenní anizotropní materiály. [1,4]



Obr.2 Deformace krychle: a) anizotropního materiálu, b) izotropního materiálu



Obr.3 Deformace ortotropní laminy namáhané: a) rovnoběžně s materiálovými osami, b) v libovolném směru

2 ZÁKLADNÍ ROVNICE PRO ANALÝZU NAPJATOSTI KOMPOZITŮ

Jednou z největších výhod vláknových kompozitů je to, že jejich anizotropie nebo vlastnosti obecně mohou být velmi účinně řízeny, to znamená, že požadované hodnoty charakteristik v různých směrech lze snadno získat změnou materiálových a výrobních proměnných. Například u jednosměrového kompozitu může být poměr podélné a příčné pevnosti (nebo tuhosti) měněn změnou objemového podílu vláken. U jednosměrového kompozitu jsou vlastnosti v podélném směru řízeny vlastnostmi vláken, zatímco v příčném směru jsou rozhodující vlastnosti matice. Ve většině konkrétních technických aplikací jsou vlastnosti v příčném směru posuzovány jako neuspokojivé. Z toho vyplývající značné omezení při využívání čistě jednosměrových kompozitů se obchází vytvářením laminátů z více jednosměrových vrstev. Takový laminát je pak tvořen dvěma nebo více navzájem spojenými vrstvami (lamin) tak, aby vytvářely jeden integrální konstrukční prvek. Hlavní směry vrstev jsou orientovány tak, aby vznikla konstrukční část s požadovanými vlastnostmi ve všech směrech. [4]

2.1 Napětí a deformace vláknového kompozitu

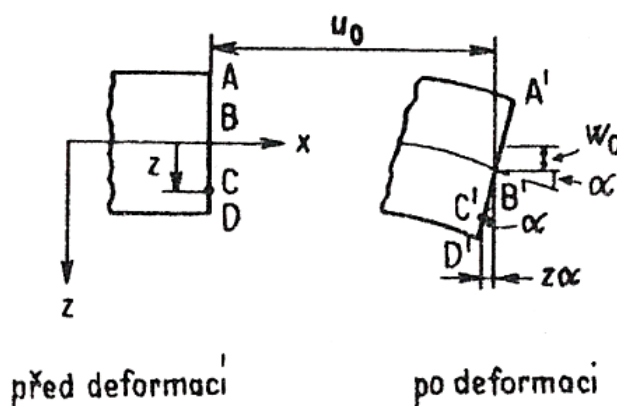
Lamináty jsou vyráběny takovým způsobem, aby se chovaly jako materiály nevrstvé. Předpokládá se, že spoj mezi dvěma laminami je dokonalý, nekonečně tenký a smykově nedeformovatelný. Z toho vyplývá, že vrstvy se nemohou po sobě navzájem posouvat a že tedy posuvy jsou i v příčném směru spojitě.

Uvažujme deformaci části laminátu v rovině x - z , jak ukazuje obr.4. Předpokládejme, že úsek ABCD, původně přímý a kolmý ke střední ploše laminátu, zůstane i po deformaci k střední ploše kolmý a přímý. Tento předpoklad je ekvivalentní předpokladu, že lze zanedbat smykové deformace γ_{xz} a γ_{yz} a také předpokladu, že vrstvy, které tvoří příčný průřez, po sobě nekloužou. Dále předpokládejme, že v bodě B na geometrické střední rovině vznikají deformací posuvy u_0 , v_0 , w_0 , příslušné směrům os x , y , z . Složka posuvu u ve směru osy x , náležející bodu C na úseku ABCD ve vzdálenosti z od střední roviny je

$$u = u_0 - z \cdot \alpha \quad (1)$$

kde α je sklon střední roviny laminátu k ose x , tedy

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2)$$



Obr.4 Ohyb části laminátu v rovině x-z

Užitím vztahů (1) a (2) lze získat složku posuvu u ve směru osy x pro libovolný bod ve vzdálenosti z od střední plochy:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3)$$

Analogicky na základě podobné úvahy lze psát pro složku posuvu v ve směru osy y libovolného bodu vzdáleného o z od geometrické střední plochy:

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4)$$

Složka posuvu w ve směru osy z kteréhokoliv bodu na úseku $ABCD$ je rovno posuvu w_0 ve střední ploše, zvětšenému o prodloužení úsečky $ABCD$. Předpokládá se, že toto prodloužení (nebo zkrácení) je ve srovnání s posuvem w_0 zanedbatelné, tudíž složka posuvu libovolného bodu laminátu ve směru normály k střední ploše se bere rovna posuvu ve střední ploše w_0 . Z toho také vyplývá, že deformace ϵ_z jsou zanedbávány. To snižuje počet složek deformace laminátu pouze na ϵ_x , ϵ_y a γ_{xy} . Lze je získat derivací u , v podle vztahů:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

Uvedené vztahy mezi deformacemi a složkami posuvu je možné přepsat pomocí deformací ve střední ploše a křivostí plochy:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

kde deformace střední plochy jsou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

a křivosti desky jsou

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Vztah (8) ukazuje, že poměrné deformace probíhají v jeho tloušťce lineárně. Napětí v libovolné vrstvě lze získat dosazením vztahů (8) do deformačně napěťových vztahů pro laminu.

Výpočtem průběhu napětí v každé vrstvě lze tudíž získat průběh napětí po celé tloušťce laminátu. Vidíme, že obecně není průběh napětí po tloušťce laminátu lineární. Napětí vykazují na společné hranici dvou vrstev nespojitosti, také gradient napětí v sousedních vrstvách může být různý.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

V laminátu se napětí mění v každé vrstvě. Je proto vhodné pracovat se zjednodušeným, ale ekvivalentním systémem sil a momentů, působících v příčném průřezu laminátu. Zavádíme tudíž výsledné síly a momenty působící na příčný průřez laminátu podle dalších vztahů. Výslednou sílu lze získat integrací odpovídajících složek napětí přes tloušťku laminátu h :

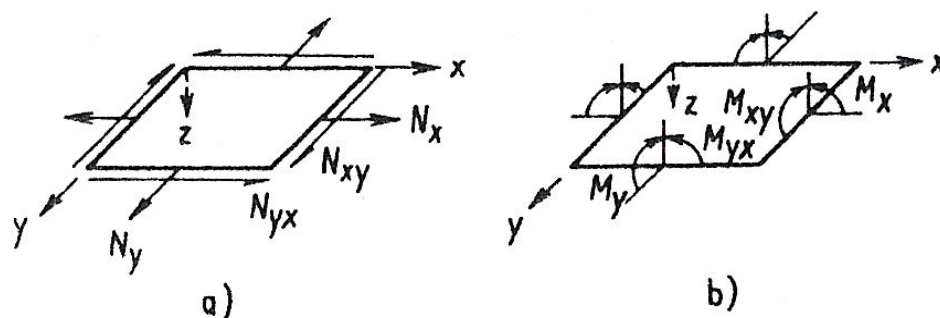
$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (12)$$

Podobně pak i výsledný moment lze získat integrací součinu odpovídající složky napětí a ramene síly vzhledem k středové rovině:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (13)$$

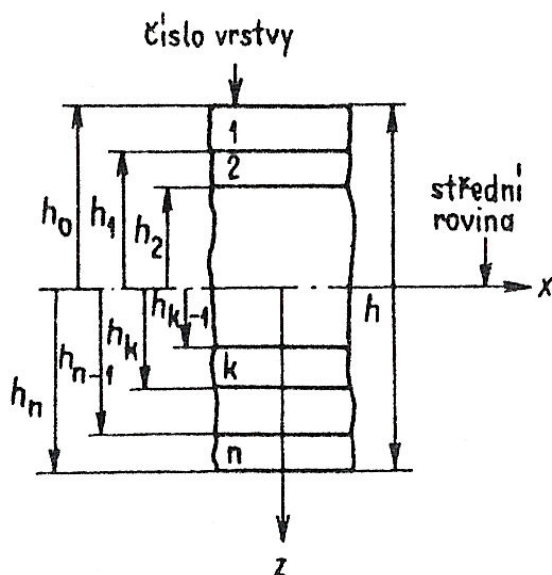
V předchozích vztazích mají veličiny N_x , N_y , N_{xy} rozměr síly připadající na délkovou jednotku a M_x , M_y , M_{xy} pak rozměr momentu vztaženého k téže délce. Kladný smysl výsledných sil a momentů je dán znaménkovou konvencí pro napětí podle obr.5. Zavedených šest složek výsledných sil momentů tvoří systém, který je staticky ekvivalentní se systémem složek napětí v laminátu, působí však v geometrické střední

ploše. Uvedenou definici těchto sil a momentů jsme zatěžovací systém převedli na systém, který neobsahuje explicitně tloušťku laminátu či souřadnici z .



Obr.5 Kladný smysl výsledných sil a momentů

Uvažujme laminát složený z n ortotropních vrstev podle obr.6. Systém sil a momentů působících ve střední ploše laminátu získáme náhradou jednoduchých integrálů v rovnicích (12) a (13) součtem integrálů představujících příspěvky od každé vrstvy:



Obr.6 Geometrie vícevrstvého laminátu

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (14)$$

a

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \quad (15)$$

Složky napětí vystupující ve vztazích (14) a (15) můžeme vyjádřit pomocí deformací střední roviny a křivosti plochy daných rovnicí (11), takže výsledné síly a momenty jsou funkcemi těchto deformací a křivostí. Dosazením rovnice (11) do vztahů (14) a (15) dostáváme:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \right. \\ \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \right. \\ \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\} \quad (17)$$

Výpočet rovnic (16) a (17) lze zjednodušit, uvědomíme si, že deformace střední roviny a křivosti plochy jsou konstantní nejen pro jednu, ale pro všechny vrstvy a mohou tedy být vyčleněny mimo znaménko součtu. Navíc matice tuhosti $\bar{Q}$ je pro danou vrstvu

konstantní, takže může být před integračním znaménkem. Pak rovnice (16) a (17) získávají tvar. [2,5,6]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_k &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_k &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Definujeme-li tři nové matice, lze vztahy (18) a (19) přepsat do relativně jednodušší podoby:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

kde

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (22)$$

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

Výslednou konstituční rovnici rovinné úlohy získáme kombinací vztahů (20) a (21):

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Matice A, B a D vystupující ve vztazích (20) až (23) se nazývají matice tahové tuhosti, matice vazebné tuhosti a matice ohybové tuhosti. Matice tahové tuhosti váže složky sil s deformacemi střední roviny, matice ohybové tuhosti spojuje složky momentů a křivosti plochy. [2,5,6].

2.2 Aplikace metody konečných prvků (MKP) pro řešení úlohy napjatosti čtvercové ortotropní desky

2.2.1 Teoretický úvod

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda, jejímž matematickým základem je diskretizace úlohy. Ta spočívá v rozdělení zkoumané spojité oblasti na konečný počet podoblastí, stručně nazývané konečnými prvky. Jednotlivé konečné prvky jsou spolu spojeny v uzlových bodech. V současné době je to nejrozšířenější a nejpoužívanější metoda pro řešení úloh mechaniky kontinua. [7,8]

Její nejrozšířenější variantou je deformační metoda používající tzv. Lagrangeovských konečných prvků. Tato varianta vychází z Lagrangeova variačního principu minima celkové potenciální energie soustavy (těleso + jeho zatížení), resp. jeho vnějších a vnitřních sil. Matematicky je princip formulovaný rovnicí

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_z = \min \quad (24)$$

kde

Π = celková potenciální energie

Π_i = deformační energie vnitřních sil tělesa

Π_z = práce vnějších sil

Tento princip znamená, že ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává takový stav, pro který nabývá potenciální energie systému minimální hodnotu. [4].

Celkovou potenciální energii elementu pro spojité třídímenzionální těleso rozdělené do m elementů lze vyjádřit vztahem

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \Pi^e - \{d\}^T \{f\} \quad (25)$$

kde

$$\Pi^e = \Lambda^e - W_0^e - W_p^e \quad (26)$$

Pro rovnováhu systému nabývá potenciální energie minima, tzn. že první variace energetického potenciálu

$$\partial \Pi(u, v, w) = \sum_{e=1}^m \partial \Pi^e(u, v, w) = 0 \quad (27)$$

Matematickými úpravami předcházejících rovnic se dostane tvar tzv. matice tuhosti elementu ve tvaru

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (28)$$

kde $[B]$ je transformační matice a matice $[D]$ je maticí fyzikálních konstant. Po dalších provedených úpravách se dostane standardní tvar rovnice statické analýzy pro element v následujícím tvaru

$$[k]^e \{d\}^e = \{f\}^e \quad (29)$$

kde vektor zobecněných posuvů

$$^T [d]^e = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \dots \dots u_r \ v_r \ w_r] \quad (30)$$

a vektor zatížení v uzlech je

$$^T \{f\}^e = [\{f\}^1 \ \{f\}^2 \ \dots \dots \dots \{f\}^r] \quad (31)$$

kde r je počet uzlů na elementu.

Rovnice celého systému pro diskretizované těleso s m uzly musí zahrnovat rovnice všech uzlů a má tvar

$$[K] \{d\} = \{f\} \quad (32)$$

kde

$[K]$ = matice tuhosti pro celý systém

$\{d\}$ = vektor uzlových posunutí pro celý systém

$\{f\}$ = vektor výsledných sil v uzlech

Výsledná rovnice pro výpočet tenzoru napětí v závislosti na posuvech a počátečních přetvořeních bez uvažování počátečních teplotních napětí se může zapsat jako

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{d\} \quad (33)$$

V případě, že existují počáteční napětí je nutné je superponovat.

2.2.2 Numerické řešení s praktickou aplikací

MKP byla aplikována pro analýzu napjatosti na čtvercové ortotropní desce. Konstrukce desky je tvořena voštinovým jádrem o tloušťce $t = 18$ mm, vyztuženou z obou stran 8 laminy se skelnými vlákny. Každá z lamin má tloušťku 0,125 mm. Lamin jsou na sebe vrstvené a zapsány kódem $[0/90/90_2/0]_s$. Materiálové charakteristiky pro lamina a voštinové jádro s použitou deskovou teorií jsou uvedeny v následujících subroutine:

.HYP MINDLIN * – desková teorie

!

! Material properties

!

! 1)Skin

!

.MAT I 1 YT 47000. 3000. 3000. *- moduly pružnosti v tahu
G 1600. 1600. 1600. *- moduly pružnosti ve smyku
NT .35 .35 .35 *- poissonovy konstanty

!

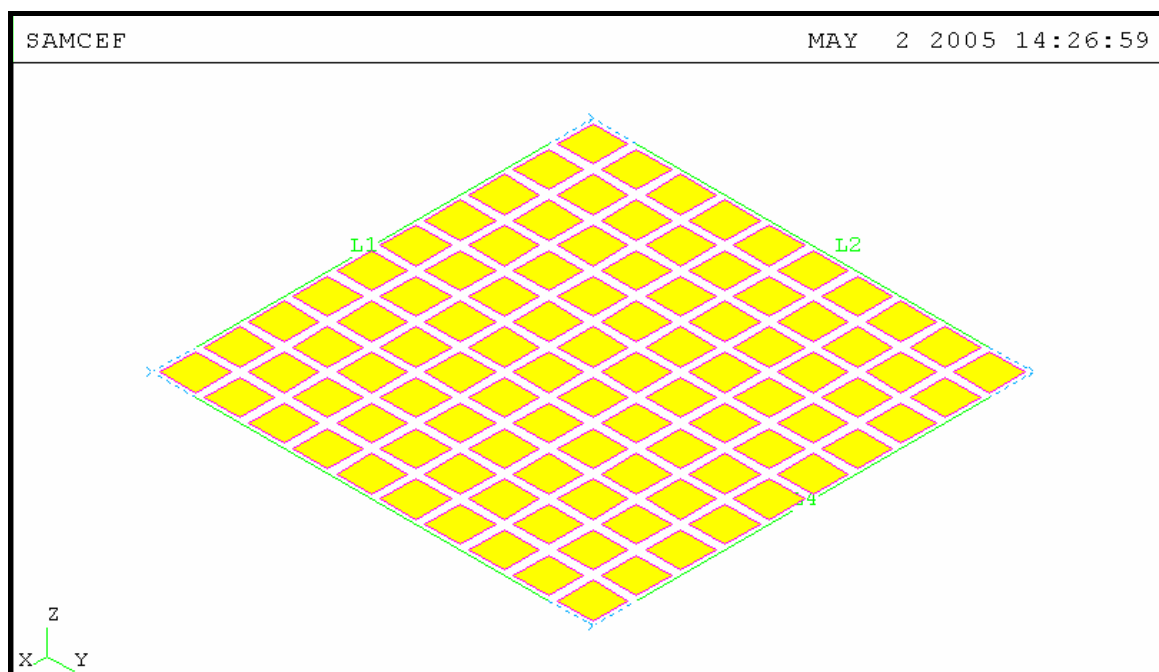
! 2) Core

!

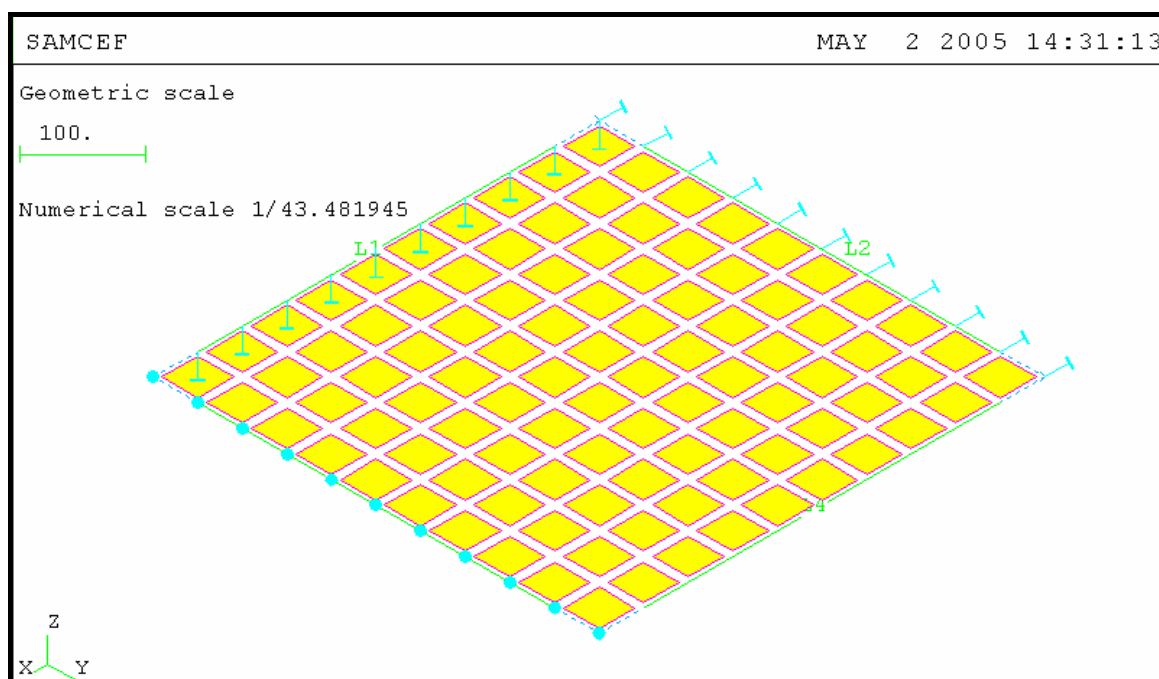
I 2 YT 5. 5. 67.
G 30. 35. 24.
NT .25 .02 .02

Geometrické rozměry desky jsou: $a \times a = 500 \times 500$ mm, celková tloušťka desky $t = 20$ mm. Zatížení desky je silou $F = 250$ N, která je liniově rozložena po jedné hraně desky. Deska je na krajní straně vetknuta, na další straně je zabráněno posunu v ose z a na další straně v ose x . Čtvrtá strana desky představuje volný konec. Velikost liniové síly je 500 Nm^{-1} .

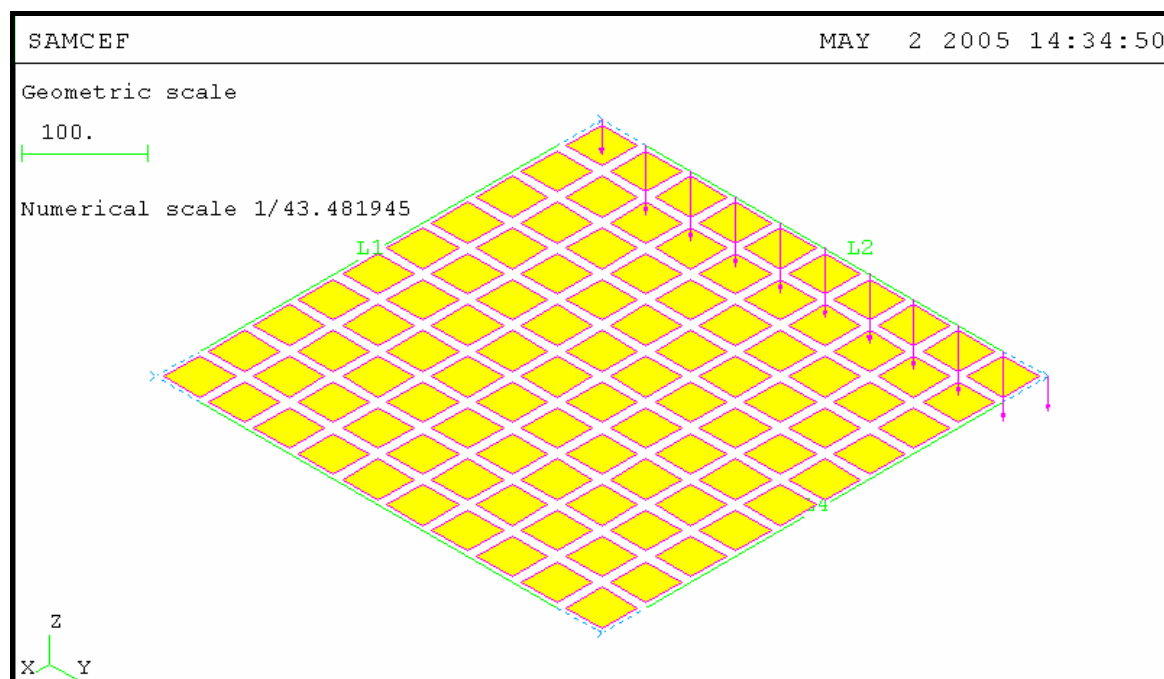
Výpočet je provedený pomocí MKP v programu Samcef pro lineární statiku. Grafické a numerické vstupy a výstupy geometrie, deformací, natočení a napětových veličin jsou uvedeny na dalších obrázcích na listech č. 30 – 34.



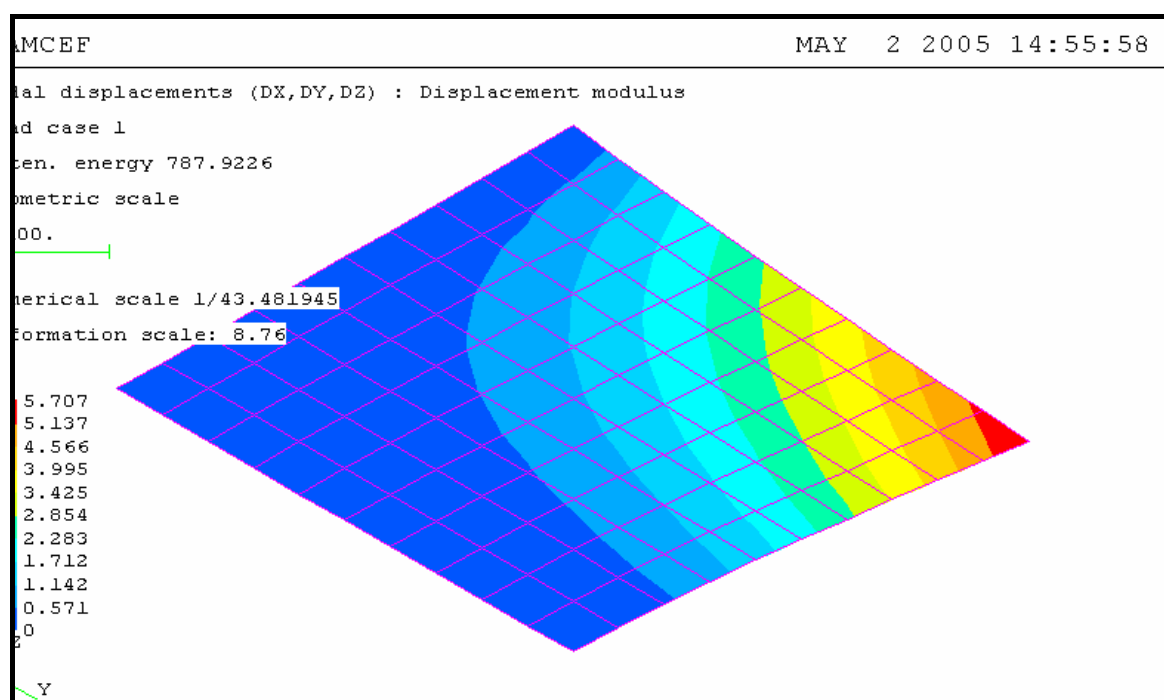
Obr.7 Základní síť konečných prvků čtvercové desky



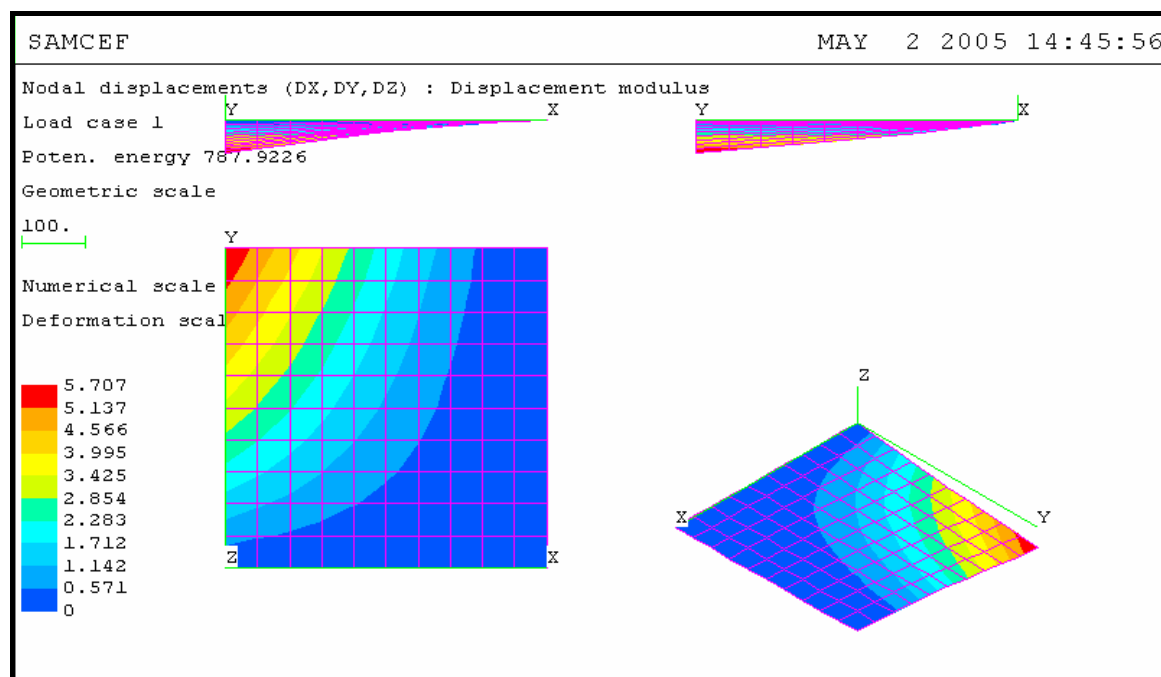
Obr.8 Okrajové podmínky kompozitu



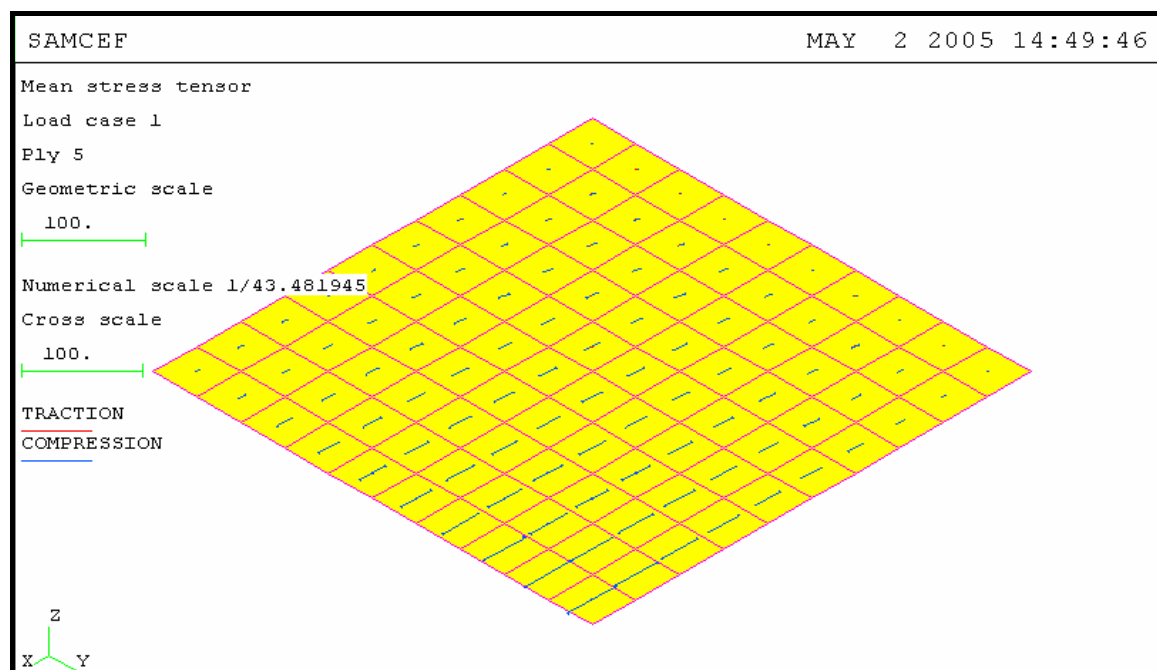
Obr.9 Zatížení kompozitní čtvercové desky (spojité zatížení 250 N)



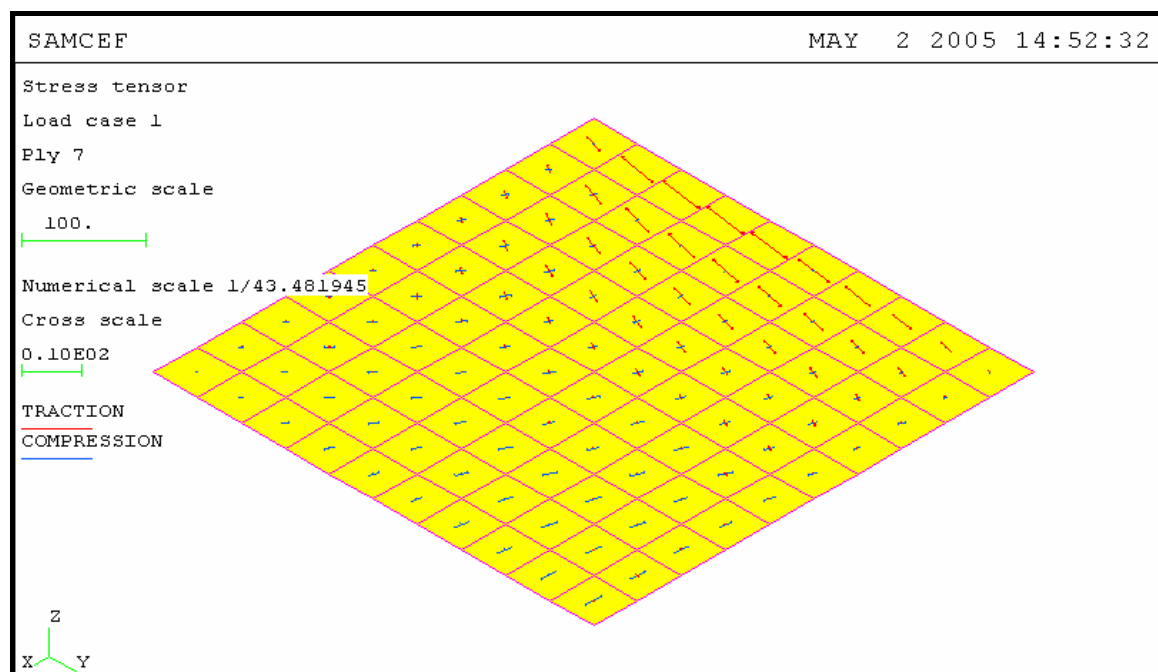
Obr.10 Deformace kompozitní čtvercové desky po zatížení



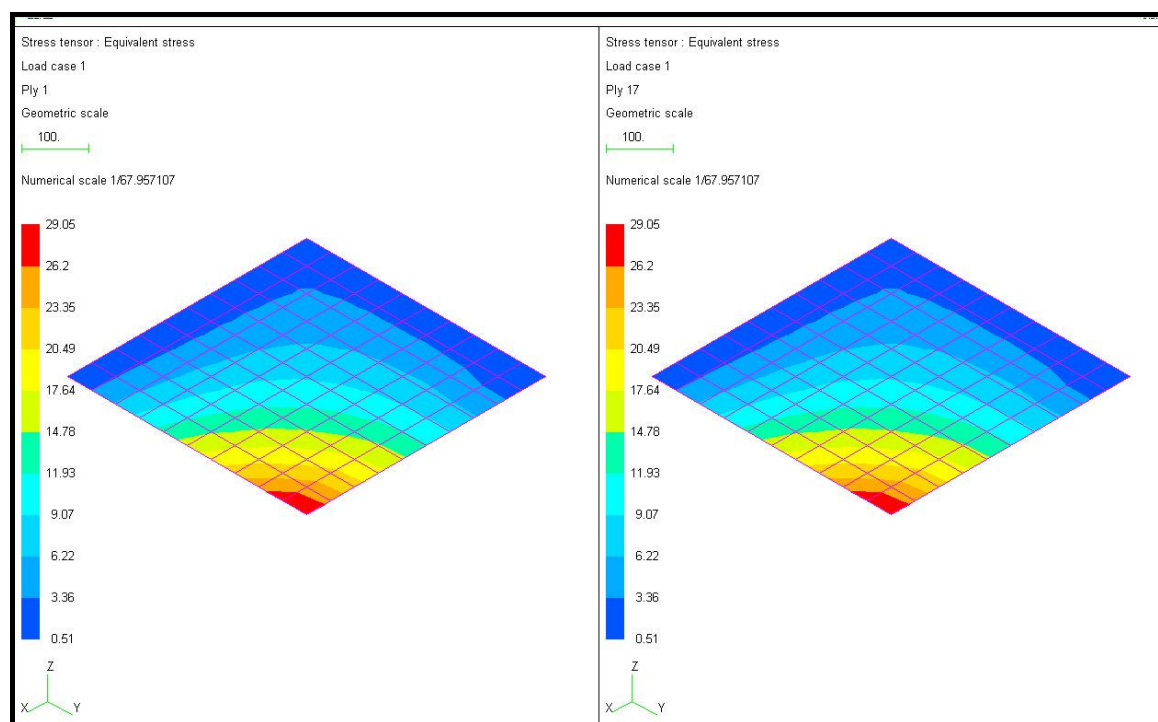
Obr.11 Deformace desky v axonometrickém pohledu v jednotlivých rovinách



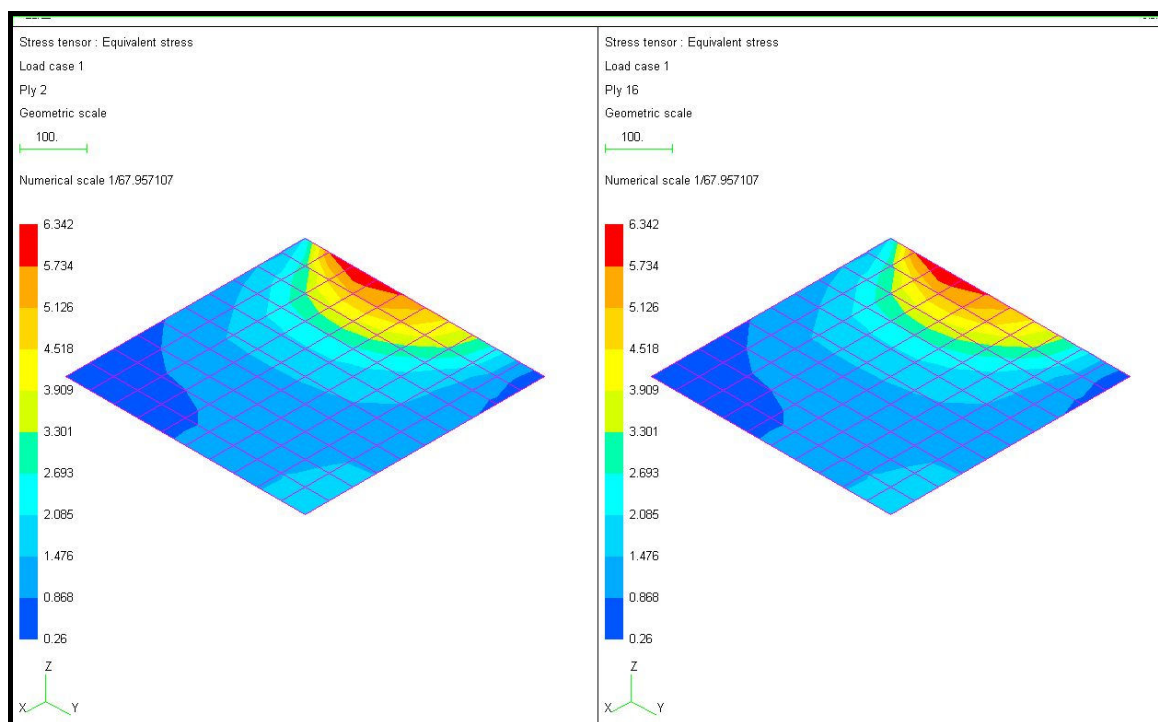
Obr.12 Směry tenzoru napětí v 5. vrstvě



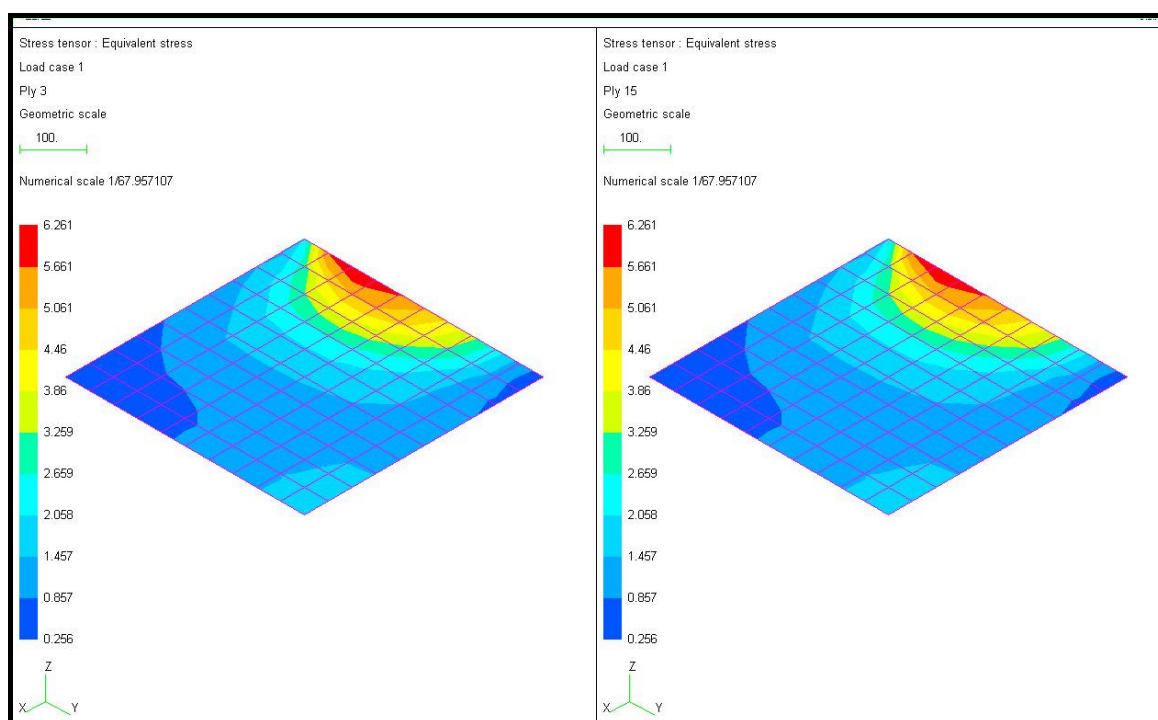
Obr.13 Směry tenzorů napětí v 7. vrstvě



Obr.14 Velikosti napětí v 1. a 17. lamině



Obr.15 Velikosti napětí v 2. a 16. lamině



Obr.16 Velikosti napětí v 3. a 15. lamině

2.3 Diskuse výsledků

Byla provedena aplikace předchozích odvozených vztahů společně s MKP pro analýzu napjatosti kompozitní čtvercové ortotropní desky.

Pro porovnání výsledku jsou na obr.14, 15, 16, které představují stejnou orientaci vyztužených vláken. Z výsledku je patrné, že hodnoty vypočtených napětí jsou korektní, protože každá dvojice lamin má stejnou orientaci vláken a stejnou vzdálenost od střednice desky. Maximální napětí je dosaženo v 1. a 17. lamině, která představuje krajní laminát desky s největší vzdáleností od střednice. Z výsledků je zřejmé, že k největší deformaci dochází v té části kompozitu, která představuje volný konec (viz obr.10).

Rozdíl napětí mezi laminem 2, 3 a 15, 16, které mají stejnou orientaci vláken a opačně orientované vzdálenosti od střednice desky je minimální, protože vzdálenost lamin představuje 0,125 mm (viz obr.15, 16).

Celková deformace desky je v dovozených mezích. Vypočtené velikosti napětí jsou v dovozených hodnotách.

ZÁVĚR

V 1. části práce jsou definovány a charakterizovány kompozitní materiály, uvedeno jejich základní rozdělení, složení, vlastnosti a rozdíly oproti konvenčním materiálům.

Dále jsou charakterizovány vláknové kompozity a nepoužívanější vyztužovací vlákna pro zpevnění kompozitu.

Z vláknových kompozitů, používaných v konstrukčních aplikacích, jsou diskutovány kompozity jednovrstvé a vícevrstvé a jejich vlastnosti.

Ve 2. části práce jsou uvedeny základní rovnice pro analýzu napjatosti kompozitu. V teoretickém úvodu jsou uvedeny základní rovnice a princip MKP.

Cílem práce bylo aplikovat numerickou metodu MKP pro řešení napjatosti čtvercové ortotropní desky. Modelování, výpočet a analýza byla provedena v programu Samcef.

Provedená analýza čtvercové ortotropní desky dává hodnoty deformace a napětí použitelné pro aplikaci v praktických podmínkách. Výsledky analýzy napjatosti byly převedeny do grafické formy v postprocesoru programu. Tyto výsledky znázorňují průběh deformačních a napěťových veličin pro celou strukturu i v jednotlivých laminách.

Analýza je v praxi běžně používána při vývoji nových kompozitních dílů pro průmysl chemický, letecký, automobilový aj.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) BAREŠ, R.A. Kompozitní materiály. SNTL, Praha 1988.
- (2) Internetové stránky firmy Polytex Composite [online]. Polytex Composite (ČR). [cit. 19.srpna 2004]. Dostupné na: <http://www.polytex.cz/cz/laminat/charakteristika.html>
- (3) Internetové stránky firmy Polytex Composite [online]. Polytex Composite (ČR). [cit. 19.srpna 2004]. Dostupné na: <http://www.polytex.cz/cz/laminat/suroviny.html>
- (4) Agarwal, B.D., Broutman, L.J. Vláknové kompozity. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.
- (5) Bittnar, Z., Šejnoha, J. Numerické metody mechaniky 2 , ČVUT, Praha, 1992.
- (6) Matthews, F.L., Davies, G.A.O., Hitchings, D., Soutis, C. Finite element modeling of composite materials and structures, CRC Press, England, 2000, ISBN 0-8493-0846-1
- (7) Petrátl, M. Mechanika kompozitních těles, ČVUT, Praha, 1991.
- (8) Samcef Composites – User Manual 9.1, SAMTECH 2001, Belgie.
- (9) Bareš, R.A. Kompozitní materiály. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988.
- (10) Kolář, V., Němec, I., Kanický, V. Principy a praxe metody konečných prvků, Praha, 1997.
- (11) Bathe, K.J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prantice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1996.
- (12) Bittnar, Z., Šejnoha, J. Numerické metody mechaniky 1 , ČVUT, Praha, 1992.
- (13) Fojtů, D. Vyhodnocování měření tepelné vodivosti. Diplomová práce. UTB Zlín, Fakulta technologická, Zlín, 2002.
- (14) Segerlind, L.J., Applied Finite Element Analysis, John Willey, New York, 1984.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

E	[Pa]	modul pružnosti v tahu
σ_p	[Pa]	mez pevnosti v tahu
ρ	[kg/m ³]	hustota
u_0, v_0, w_0	[m]	složky posuvu ve směrech os x, y, z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	[-]	smykové deformace (zkosy)
α	[°]	sklon střední roviny laminátu k ose x
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	[-]	poměrné prodloužení ve směru os x, y, z
N_x, N_y, N_{xy}	[N.m ⁻¹]	síly vztažené na délkovou jednotku
M_x, M_y, M_{xy}	[N.m.m ⁻¹]	momenty vztažené na délkovou jednotku
$[\bar{Q}]$		matice tuhosti pro danou vrstvu
$[A]$		matice tahové tuhosti
$[B]$		transformační matice
$[D]$		matice ohybové tuhosti
$[K]$		matice tuhosti pro celé těleso
$\{d\}$		vektor uzlových posunutí pro celý systém
$\{f\}$	[N]	vektor výsledných sil v uzlech
Π	[J]	celková potenciální energie
Π_i	[J]	deformační energie vnitřních sil tělesa
Π_z	[J]	práce vnějších sil
Λ^e	[J]	energie přetvoření pro element
W_0^e	[J]	práce objemových sil
W_p^e	[J]	práce vykonaná rozloženým zatížením
$[k]^e$		matice tuhosti elementu

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 Obecné schéma pro rozdělení kompozitních materiálů.....	12
Obr. 2 Deformace krychle.....	18
Obr. 3 Deformace ortotropní laminy.....	18
Obr. 4 Ohyb části laminátu v rovině x-z.....	20
Obr. 5 Kladný smysl výsledných sil a momentů.....	23
Obr. 6 Geometrie vícevrstvého laminátu.....	23
Obr. 7 Základní síť konečných prvků čtvercové desky.....	30
Obr. 8 Okrajové podmínky kompozitu.....	30
Obr. 9 Zatížení kompozitní čtvercové desky.....	31
Obr. 10 Deformace kompozitní čtvercové desky po zatížení.....	31
Obr. 11 Deformace desky v axonometrickém pohledu v jednotlivých rovinách.....	32
Obr. 12 Směry tenzoru napětí v 5. vrstvě.....	32
Obr. 13 Směry tenzorů napětí v 7. vrstvě.....	33
Obr. 14 Velikosti napětí v 1. a 17. lamině	33
Obr. 15 Velikosti napětí v 2. a 16. lamině	34
Obr. 16 Velikosti napětí v 3. a 15. lamině.....	34

SEZNAM TABULEK

Tabulka I. Vlastnosti vláken a konvenčních materiálů v kompaktu.....	13
--	----