

Modelování teplotních polí při vytvrzování aminoplastů

Tomáš Kolínek

Diplomová práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická

Vložit oficiální zadání diplomové práce

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucí mé diplomové práce doc. Ing. Dagmar Janáčové, CSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytovala v průběhu vypracování diplomové práce.

Dále bych chtěl poděkovat všem ostatním, kteří měli se mnou dostatek trpělivosti a ve chvílích nejhorších mi pomohli.

V neposlední řadě děkuji svým rodičům za to, že mi umožnili studium na vysoké škole a v době studií mi pomáhali a podporovali mě.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího diplomové práce a ředitele ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 14. 06. 2005

.....

podpis diplomanta

RESUMÉ

Tato diplomová práce se zabývá modelováním teplotních polí při vytvrzování aminoplastů. Součástí práce je teoretická část pojednávající o přípravě a vlastnostech aminoplastů. Dále práce obsahuje výpočtovou část, která popisuje základy teorie sdílení tepla vedením a postup namodelování úlohy sdílení tepla v programu FEMLAB (verze 2.3) vyvinutého společností COMSOL. V práci je provedeno analytické řešení teplotního pole vzorků s okrajovými podmínkami 1. nebo 3. druhu, které je porovnáno s řešením teplotního pole pomocí programu Femlab. Program Femlab řeší tento problém metodou konečných prvků.

SUMMARY

This Master Thesis describes simulation temperature fields at hardening of aminoplastics. The work includes theoretic part which treats preparation and characteristics of aminoplastics. Next part includes computational part, which describes principles of theory of heat conduction and process of simulation problem of heat conduction by computer program Femlab (version 2.3) developed by COMSOL company. In the work analytical solution of temperature field of samples with marginal conditions of first or third type is performed and it is compared with solution of temperature field by the help of Femlab program. This program solves this problem by the method of finite elements.

OBSAH

ÚVOD.....	7
1 TEORETICKÁ ČÁST.....	8
1.1 AMINOPLASTY	8
1.1.1 Suroviny pro výrobu.....	9
1.1.2 Typy reakcí vedoucí ke vzniku aminopryskyřic.....	12
1.1.3 Příprava aminopryskyřic.....	13
1.1.4 Technologie výroby aminopryskyřic.....	14
1.1.5 Technické pryskyřice	15
1.1.6 Lisovací hmoty	15
1.1.7 Lisování	16
1.1.8 Vlastnosti výlisků z aminoplastů	16
1.1.9 Lehčené hmoty.....	16
2 VÝPOČTOVÁ ČÁST	18
2.1 NESTACIONÁRNÍ (NEUSTÁLENÉ) SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM.....	18
2.1.1 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce.....	19
2.1.2 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce – okrajová podmínka prvního druhu	20
2.1.3 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce – okrajová podmínka třetího druhu	24
2.1.4 Nestacionární teplotní pole v kouli	27
2.1.5 Nestacionární teplotní pole v kouli – okrajová podmínka prvního druhu	27
2.1.6 Nestacionární teplotní pole v kouli – okrajová podmínka třetího druhu.....	29
2.1.7 Nestacionární teplotní pole ve válci	32
2.1.8 Nestacionární teplotní pole ve válci – okrajová podmínka prvního druhu.....	33
2.1.9 Nestacionární teplotní pole ve válci – okrajová podmínka třetího druhu.....	34
2.2 ANALYTICKÝ VÝPOČET MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍHO MODELU DESKY ..	37
2.3 VÝPOČET TEPLITNÍHO POLE PRO VZOREK AMINOPLASTU PA6 TVARU KOULE.....	37
2.4 POSTUP VÝPOČTU POMOCÍ PROGRAMU FEMLAB	40
2.4.1 Výběr modelu	40
2.4.2 Nákres objektu	41
2.4.3 Editace objektu.....	42
2.4.4 Přiblížení.....	43
2.4.5 Nastavení okrajových podmínek.....	45
2.4.6 Nastavení počátečních podmínek.....	48
2.4.7 Nastavení sítě.....	50
2.4.8 Řešení problému.....	51
2.5 POROVNÁNÍ VÝPOČTENÝCH HODNOT A HODNOT Z PROGRAMU FEMLAB ..	53

2.6 POROVNÁNÍ NUMERICKÝCH HODNOT V BODĚ ($X=0$, $FO=0,5$) NA POČTU ELEMENTŮ SÍTĚ	53
ZÁVĚR	54
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	55
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	56
SEZNAM OBRÁZKŮ	58
SEZNAM TABULEK	59

ÚVOD

Využití aminoplastů se v posledních letech rozšířilo do mnoha oborů a odvětví lidské činnosti. Spotřeba těchto materiálu se zvyšuje díky jejich vlastnostem, které je umožňují používat v různých aplikacích.

Aminoplasty se zpracovávají mnohými výrobními technologiemi, jako jsou např. lisování a vstřikování, kde se využívá tepelných procesů.

Pro usnadnění a zefektivnění výpočtu teplotních polí se již využívají počítačové programy. Pomocí takových programů můžeme rychle namodelovat teplotní pole i u vzorků složitých tvarů, u kterých by numerický výpočet teplotních polí byl časově velmi nákladný. Velkou předností programů je grafické zobrazení průběhu teplotních polí a snadná srozumitelnost jejich grafických výstupů. Na základě vypočtených výsledků můžeme ovlivňovat výrobní proces a snažit se o jeho optimalizaci. Například u výroby laminovaných desek je pro fixaci papíru naimpregnovaného aminoplastovými pryskyřicemi potřeba, aby nezbytná teplota pro fixaci dosahovala jen několik milimetrů pod povrch vlastní dřevotřískové desky. V případě prohřívání desky do větší hloubky, než je nutné, nastává zbytečná spotřeba energie a tím samozřejmě i výrobních nákladů. Při hlubším prohřevu desky se kvalita zafixování nezhorší ani nezlepší, ale vzrůstá spotřeba energie.

Cílem mé práce je provést analytické řešení u modelů tvaru desky, válce a koule, vypočtené výsledky porovnat s hodnotami řešení pomocí programu Femlab. Tímto srovnáním zjistíme spolehlivost výpočtů programu Femlab a relativní přesnost výsledků.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Aminoplasty

Aminoplasty je vžitý obecný název pro syntetické pryskyřice vyrobené na základě aminoaldehydových kondenzačních produktů, tj. pryskyřic připravených kondenzací vhodné aminosloučeniny (močoviny, thiomčoviny, dikyandiamidu, melaminu aj.) s aldehydem, nejčastěji formaldehydem [1].

Pryskyřice vzniklé reakcemi močoviny s formaldehydem nebo melaminu s formaldehydem patří vedle fenoplastů k jedním z nejdéle známých a používaných umělých hmot [2].

Aminoaldehydové pryskyřice jsou tvrditelné pryskyřice, schopné přejít vytvrzením teplem nebo působením kyselého katalyzátoru do nerozpustného a netavitelného stavu. Proto jich lze použít jednak přímo jako tvrditelných pryskyřic pro nejrůznější účely, jednak jako pojiv k přípravě různých plastických hmot.

Pod názvem aminoplasty tedy rozumíme tvrditelné aminoaldehydové pryskyřice, používané jako tzv. technické pryskyřice (lepidla, pojiva, nátěrové hmoty, prostředky pro úpravu papíru, textilu, dřeva, kůže atd.) nebo jako plastické hmoty na jejich základě připravené, tj. lisovací hmoty, vrstvené hmoty a hmoty lehčené.

Aminoplasty patří mezi nejstarší plastické hmoty. První pokusy o syntézu močovinoformaldehydových sloučenin byly provedeny již v r. 1884 (Hölzer), k průmyslovému využití došlo však teprve kolem r. 1920. Nejdříve se na bázi močoviny a thiomčoviny vyráběly lisovací hmoty, později lepidla (1928), vrstvené hmoty (1932) a lehčené hmoty (1938). Melaminové pryskyřice a lisovací hmoty se vyrábějí od r. 1938.

Poměrně rychlý a trvalý rozvoj výroby aminoplastů, z nichž 80-90 % představují pryskyřice a hmoty na bázi močoviny, je možno si vysvětlit jejich dobrými vlastnostmi (fyzikálními, mechanickými, elektrickými atd.), bezbarvostí a fyziologickou nezávadností i dobrými vlastnostmi zpracovatelskými a konečně trvalým rozvojem dřevařského průmyslu, v němž je těžiště aplikací aminoplastů. Konečně neméně důležitá je i jejich poměrně nízká cena a snadná dostupnost synteticky vyráběných surovin [1].

Vlastnosti vytvrzených aminoplastů jsou v zásadě podobné jako u fenoplastů, jejich předností je, že nejsou hnědě zbarveny, t.j. umožňují vybarvení pastelovými barvami.

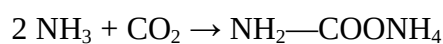
Pro použití jako lisovací prášky se k pryskyřici přidává celulóza, což umožňuje výrazné zlepšení mechanických vlastností, přesto jde o poměrně křehké materiály [2].

1.1.1 Suroviny pro výrobu

Močovina

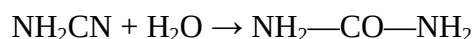
Močovina, karbamid $\text{NH}_2\text{—CO—NH}_2$, je vedle formaldehydu nejdůležitější surovinou pro výrobu aminoplastů. Poprvé ji připravil Wöhler r. 1828 přesmykem kyanatanu amonného: $\text{NH}_4\text{CNO} \rightarrow \text{NH}_2\text{—CO—NH}_2$. Močovina byla první organickou sloučeninou připravenou synteticky. Postupně bylo navrženo mnoho metod k její přípravě v malém i velkém měřítku.

Nejobvyklejším průmyslovým postupem je výroba močoviny z kysličníku uhličitého a amoniaku. Syntéza se uskutečňuje za zvýšené teploty a tlaku. V prvním stadiu vzniká karbamid amonný, který se dále rozkládá na močovinu a vodu:



Obě reakce jsou exotermní, vratné a probíhají podle reakčních podmínek do 35-60procentní konverze karbamidanu na močovinu. Výtěžek vzrůstá se zvyšováním tlaku. Nezkonvertovaný karbamidan se teplem rozloží na výchozí složky, které se vracejí do výrobního procesu, a močovina se izoluje po vakuovém zahuštění buď krystalizací, nebo rozprašovacím sušením.

Kromě tohoto způsobu se někdy používá k výrobě močoviny kyselé hydrolyzy kyanamidu:



Pro aminoplasty přichází v úvahu močovina buď krystalická, nebo granulovaná, popř. také jako surový zahuštěný roztok.

Melamin

Melamin, 2,4,6-triamino-1,3,5-triazin nebo též triamid kyseliny kyanurové, je druhou důležitou surovinou pro přípravu aminoplastů. Název pochází od Liebiga, který melamin poprvé připravil reakcí thiokyanatanu amonného a chloridu amonného r. 1834 [1].

Největší praktický význam mají dva výrobní způsoby. Starší vychází z dikyanamidu, druhý, novější, z močoviny.

Lépe než ve vodě se melamin rozpouští ve vícemocných alkoholech, glykolech, glycerínu a také v pyridinu. Velmi málo rozpustný je v nižších alkoholech a nerozpustný v ostatních organických rozpouštědlech.

Melamin je slabá jednosytná zásada, která s kyselinami dává soli. Soli se dají připravit působením kyseliny na vodný roztok melaminu; nerozpustné soli, např. síran, fosforečnan a šťavelan, lze také připravit působením alkalické soli příslušné kyseliny na dosti dobře rozpustný hydrochlorid melaminu. Se solemi těžkých kovů dává melamin dobře definované podvojně soli [1].

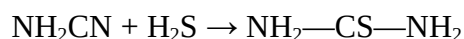
Thiomočovina

Thiomočovina, thiokarbamid $\text{NH}_2\text{—CS—NH}_2$, je sirnou obdobou močoviny. Jako surovina pro aminoplasty ztratila thiomočovina v poslední době značně na významu.

Poprvé ji připravil Reynolds v r. 1869 izomerací thiokyanatanu amonného. Tato reakce patří dodnes ke způsobům průmyslového získávání thiomočoviny:



Jiný způsob vychází z kyanamidu vápenatého, který se převede na kyanamid a adicí sirovodíku vzniká thiomočovina:



Thiomočovina se částečně rozpouští v alkoholech, méně v ostatních rozpouštědlech. Soli s kyselinami tvoří méně ochotně než močovina, je však známa řada podvojných solí a adičních sloučenin. Rovněž tvoří inkluzní sloučeniny, avšak na rozdíl od močoviny pouze s rozvětvenými alifatickými nebo cykloalifatickými sloučeninami.

Dikyandiamid

Dikyandiamid, též kyanguanidin, je významnější jako surovina pro přípravu melaminu, než jako surovina k přípravě aminopryskyřic. Drechsel jej získal z kyanamidu vápenatého již v roce 1875.

Dikyandiamid má amfoterní charakter, tvoří soli jak s kyselinami, tak se zásadami, soli se však ve vodném roztoku snadno hydrolyzují [1].

Guanidin

Guanidin, imidomočovina je silná organická zásada, sama o sobě nestálá; stálých solí guanidinu se používá nepříliš často k modifikaci aminopryskyřic. Soli guanidinu se dnes nejčastěji připravují reakcí kyanamidu nebo dikyandiamidu se solemi amonnými. Volná báze je krystalická, silně hygroskopická, která ze vzduchu přibírá kysličník uhličitý. Je dobře rozpustná ve vodě, stejně jako její soli s anorganickými kyselinami, z nichž nejznámější jsou uhličitán, dusičnan, síran a chlorid. Ve vodném roztoku se guanidin snadno hydrolyzuje na močovinu za odštěpení amoniaku; zahřívání guanidinu nebo jeho solí vede k biguanidinu nebo melaminu.

Benzoguanamin

Benzoguanamin (benzamin), 2,6-diamino-4-fenyl-1,3,5-triazin je derivátem melaminu. Jako surovina pro přípravu aminopryskyřic nabývá v poslední době značné důležitosti.

Připravuje se zahříváním dikyandiamidu s benzonitrilem v alkalickém prostředí, event. Za přítomnosti katalyzátorů.

Po chemické stránce je benzoguanamin obdobou melaminu. Kruhová struktura mu dodává vysokou tepelnou stabilitu.

Formaldehyd

Formaldehyd je prakticky jedinou, a proto nejdůležitější druhou komponentou pro přípravu aminoplastů. Objevil jej Butlerov r. 1859. Z metanolu jej poprvé připravil Hofmann a tento způsob se stal základem dnešní velkovýroby formaldehydu.

Formaldehyd obsahuje jisté, předem určené množství nezkonvertovaného metanolu, který působí jako stabilizátor.

Technický formaldehyd se zpravidla připravuje ve dvou koncentracích, a to 30procentní a 37procentní. Tyto koncentrace uvedené ve váhových procentech odpovídají 33 a 40 obj. %.

Čistý formaldehyd je plyn dusivého zápachu, je nestabilní a snadno polymeruje na trioxymetylen. Ve vodě se plynný formaldehyd snadno pohlcuje a rozpouští [1].

Paraformaldehyd

Paraformaldehyd je vyšší polymer formaldehydu. Používá se ho k přípravě aminoplastů tehdy, je-li třeba provádět kondenzaci v bezvodném prostředí.

Paraformaldehyd se připravuje z vodného roztoku formaldehydu destilací a koncentrací až do stadia, kdy polymer vyloučený z roztoku obsahuje nejméně 91 % formaldehydu.

Technický paraformaldehyd bývá ve formě prášku nebo nesterhoměrných granulí. V průměru obsahuje 95 % formaldehydu. Čerstvý produkt je rozpustný ve vodě, po delší době však ztrácí rozpustnost v důsledku další polymerace.

Depolymeraci paraformaldehydu urychlují alkálie a kyseliny.

Hexametyléntetramin

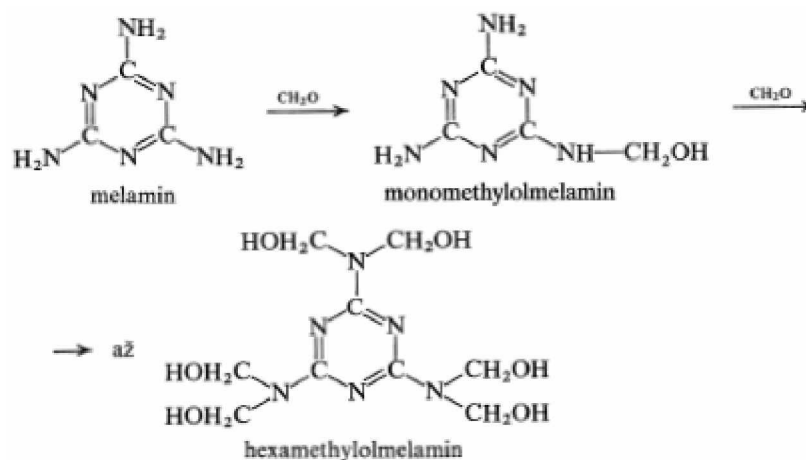
Hexametyléntetramin může být jako zdroj formaldehydu rovněž počítán k surovinám pro aminoplasty.

Je to krystalický produkt, dobře rozpustný ve vodě. Chová se jako terciární amin a často se ho používá při kondenzaci aminopryskyřic jako regulátoru pH.

Účinkem silných kyselin se rozkládá a uvolňuje formaldehyd [1].

1.1.2 Typy reakcí vedoucí ke vzniku aminopryskyřic

Melaminformaldehydové pryskyřice

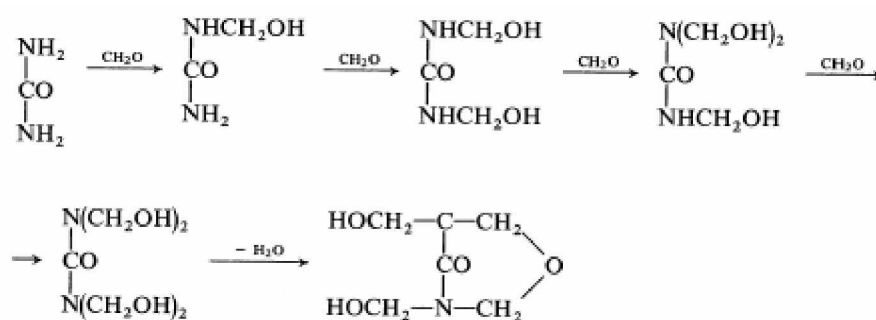


Obr. 1. Reakce melaminu s formaldehydem

Močovinoformaldehydové pryskyřice

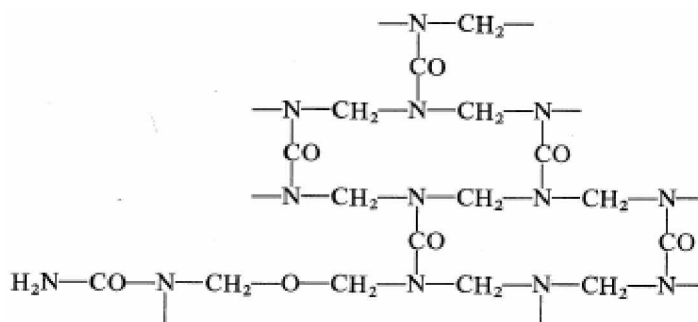
Močovina reaguje s formaldehydem za vzniku různých produktů podle toho, jaký je molární poměr výchozích složek, pH reakční směsi, teplota a druh katalyzátoru. Již malá změna reakčních podmínek vyvolá značné a málo přehledné změny v reakčním pochodu. Zkoumání těchto kondenzátů je ztíženo labilností vazeb v meziproduktech a nerozpustností některých produktů.

V alkalickém až kyselém prostředí dochází nejprve ke vzniku methylolmočoviny:



Obr. 2. Reakce močoviny s formaldehydem za vzniku methylolmočoviny

Vznik pryskyřic je ještě komplikován dalšími reakcemi. Konečnou formou vytvrzených močovinoformaldehydových pryskyřic jsou trojrozměrně zesíťované polykondenzáty [3], jejichž idealizovanou strukturu lze znázornit vzorcem:



Obr. 3. Konečná forma močovinoformaldehydových pryskyřic

1.1.3 Příprava aminopryskyřic

Jak bylo uvedeno již na začátku, rozumíme pod pojmem aminopryskyřice reakční produkty aminosloučenin s aldehydy, převážně s formaldehydem, které jsou schopny

účinkem tepla nebo katalyzátoru dále reagovat a přecházet v konečné vytvrzené makromolekulární hmoty.

Počítáme k nim obvykle i adiční sloučeniny aminosložky s formaldehydem, tzv. metylolderiváty aminosloučenin, které jsou základními stavebními jednotkami aminopryskyřic.

Vznik aminopryskyřic je značně složitý. V prvním stadiu vznikající metylolderiváty jsou za určitých podmínek schopny dále se kondenzovat za odštěpení vody a formaldehydu na výšemolekulární pryskyřice. Tyto reakční pochody závisí na řadě činitelů, zvláště na molárním poměru a koncentraci reagujících složek, na reakčních podmínkách, tj. pH, teplotě a době a na přítomnosti dalších látek (katalyzátorů apod.).

Všechny tyto faktory se výrazně uplatňují, takže často malá změna v množství jedné složky, pH nebo teplotě způsobí v průběhu reakce značnou změnu.

Vlastní příčinu složitosti vzniku aminopryskyřic je možno hledat v mnohofunkčnosti výchozích aminosloučenin a ve vzniku funkčních skupin a vazeb různého typu a různé stability.

V důsledku toho empirické řešení přípravy aminopryskyřic předcházelo a dosud předchází před řešením teoretickým. Proto je k přípravě aminopryskyřic znám veliký počet různých postupů, jimiž lze dosáhnout týčž nebo podobných vlastností pryskyřic, požadovaných pro různé aplikační účely.

K přípravě aminopryskyřic se nejčastěji používá vodného formaldehydu; výjimečně se vychází z alkoholického formaldehydu nebo paraformaldehydu. Pryskyřice jsou proto obvykle ve formě vodného roztoku, a jde-li o metylolové sloučeniny, ve formě pasty. V zájmu stability se často vodné roztoky pryskyřic zahušťují nebo suší. V těchto případech tvoří viskózní roztoky nebo práškové hmoty. Některé typy modifikovaných pryskyřic se převádějí během přípravy do roztoku v organickém rozpouštědle [1].

1.1.4 Technologie výroby aminopryskyřic

Aminopryskyřice lze vyrábět zásadně dvěma způsoby: diskontinuálním šaržovým způsobem v reakčním kotli nebo kontinuálním způsobem na speciální aparatuře. Šaržový způsob může být jednoaparátový nebo dvouaparátový a bateriový. Při jednoaparátovém způsobu probíhají všechny výrobní operace v jednom reaktoru, při dvouaparátovém se např. v jednom kotli kondenzuje a v druhém, obvykle speciálně upraveném, se kondenzát

zahušťuje. Bateriový způsob používá několika reaktorů jednoho nebo i druhého druhu vedle sebe. Každý z těchto způsobů má své výhody a nevýhody.

Výrobní zařízení může být do jisté míry mechanizováno nebo automatizováno. Úplná automatizace výroby aminopryskyřic, zvláště při stupňovité kondenzaci, je značně obtížný úkol. Šaržový způsob přípravy zcela převládá. Kontinuální výrobní způsob vyžaduje aparaturu se značně složitým regulačním systémem. Přitom není dosud uspokojivě vyřešeno kontinuální měření důležitých veličin, jako je pH, viskozita apod. Šaržový způsob výroby na poměrně jednoduchém zařízení, který i při práci na velkých kotlech (10 m^3) je ještě zvládnutelný, je vysoce produktivní [1].

1.1.5 Technické pryskyřice

Mezi technické aminopryskyřice zahrnujeme lepidla a pojiva, impregnační pryskyřice, lakařské pryskyřice a pryskyřice pro další účely použití. Jsou to pryskyřice v nevytvrzeném stavu, tj. meziprodukty z hlediska konečných výrobků. Vytvrzují se až po aplikaci na jiné materiály, které tvoří podstatu konečného výrobku, např. dřevo, textil, papír aj. Na rozdíl od lisovacích hmot, vrstvených a lehčených hmot, nevzniká aplikací těchto technických pryskyřic nová syntetická hmota, ale jen upravený původní materiál – překližka, nemačková tkanina, vodovzdorný papír apod.

U zalévacích aminopryskyřic je tomu tak, že sice tato pryskyřice tvoří podstatnou část výrobku, avšak není ani zde hlavním, ale jen pomocným materiálem [1].

1.1.6 Lisovací hmoty

Lisovací hmoty se vyrábějí impregnační celulosy pryskyřicí a smísením s dalšími přídatnými látkami. Používá se vysokoprocenní *alfa*-celulosa (nad 90 % α -celulosa), většinou ještě bělená.

Močovinoformaldehydové lisovací hmoty se lisují při nižších teplotách než fenoplasty, a sice od 135 do 150 °C, pod tlakem 20 až 40 MPa. Lisy a kovové formy jsou podobné jako u fenoplastů. Výlisky jsou bez chuti a zápachu, světlé barvy a chemicky dosti stálé. Jejich povrch je velmi tvrdý a odolný proti oděru, vodě, většině rozpouštědel, slabých kyselin a alkálií. Elektroizolační vlastnosti nejsou příliš dobré a při teplotách kolem 200 °C se výlisky již začínají rozkládat. Tyto lisovací hmoty se používají pro výrobu různých podnosů, misek, jídelních potřeb, nádobek a galanterních výrobků, zejména knoflíků [3].

1.1.7 Lisování

Pro zpracování aminoplastů lze používat rozmanitých typů lisů: nejlepších výsledků se však dosahuje u lisů, jejichž konstrukce a provedení umožňuje citlivé uzavírání lisu v okamžiku dosednutí razníku na hmotu a citlivý přechod z nízkého uzavíracího tlaku na vysoký tlak lisovací. Aminoplasty – lisovací hmoty se zpracovávají všemi způsoby lisování, tj. přímým lisováním, lisostříkem i vytlačováním [1].

1.1.8 Vlastnosti výlisků z aminoplastů

Vlastnosti výlisků závisí jednak na složení lisovací hmoty (na druhu pryskyřice, druhu plniva, druhu přísad a jejich vzájemném poměru), jednak na podmínkách lisování (způsobu lisování, teplotě, tlaku, době lisování).

Složení lisovací hmoty je u různých hmot značně rozdílné a je určováno účelem použití příslušné hmoty s přihlédnutím k očekávaným vlastnostem výlisku. Tak např. hmoty určené na galanterní předměty, u nichž je hlavním požadavkem vzhled a transparentnost výlisků, se vyrábějí z velmi čistých celulóz a mají větší poměr pryskyřice: pojivo než hmoty, u nichž se klade důraz na mechanickou pevnost výlisků. Hmoty pro elektrotechniku a hmoty s větší odolností proti vodě a chemikáliím se vyrábějí na bázi melaminových pryskyřic; pro hmoty s vysokou tepelnou odolností výlisků se používá anorganických plniv, kdežto pro hmoty s požadavkem dobrých mechanických pevností, avšak kryté, je vhodným plnivem dřevěná moučka a pro hmoty s vysokou pevností výlisků bavlněná vlákna [1].

1.1.9 Lehčené hmoty

Močovinoformaldehydové lehčené hmoty (pěny) se připravují smícháním vodného roztoku pryskyřice s vodným roztokem emulgátoru, kyseliny fosforečné či šťavelové a močoviny za současného míchání a probublávání tlakovým vzduchem z frity. Jako emulgátor slouží kyselina alkylnaftalensulfonová. Vzniklá pěna se plní do dřevěných beden, které se zvolna dlouhou dobu suší v komorových nebo tunelových sušárnách při 40 až 80 °C. V poslední fázi se do komor vhání amoniak, který váže volný formaldehyd. Někdy se ještě kapalná pěna vylévá na nekonečný pás, který prochází sušárnou.

Byla vyvinuta i přenosná zařízení, ve kterých se pórovitá pěna vyrábí přímo na místě použití. Pěny se vyrábějí rovněž mechanicky tlakovým vzduchem ve zpěňovacím zařízení.

Hotová lehčená hmota je bílá a má měrnou hmotnost 10 až 30 kg m⁻³. Mechanicky je poměrně málo pevná a na potřebné rozměry se dá řezat drátem. Používá se pro tepelné a

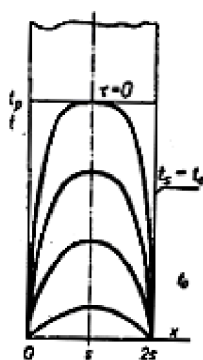
zvukové izolace, zejména ve stavebnictví. Je samozhášivá a použitelná pro teploty do 100 °C [3].

2 VÝPOČTOVÁ ČÁST

Zesíťování aminoplastových vzorků závisí silně na teplotě, popř. tlaku, proto je velmi důležité řešit rozložení teploty – teplotní pole.

2.1 Nestacionární (neustálené) sdílení tepla vedením

Při neustáleném sdílení tepla vedením je tepelný tok, procházející určitým místem tělesa, proměnný s časem. Příkladem může být chlazení válce, v němž se bude s časem měnit rozložení teplot (teplotní pole) podle obr. 4.



Obr. 4. Průběh změny teploty s časem v chladičném válci

S prodlužující se dobou chlazení se zmenšuje rozdíl teplot (a tím i tepelný tok) mezi nitrem tělesa a jeho povrchem a při vyrovnání teploty v ose válce s teplotou povrchu (čas $\tau_4 = \infty$ v obr. 1) tepelný tok ustane [4].

V technické praxi se nejčastěji vyskytují dva druhy nestacionárních teplotních polí, a to:

Nestacionární teplotní pole při ohřevu nebo ochlazování tělesa, charakterizované tím, že teplotní rozdíly mezi dvěma body tělesa se s časem zmenšují. Teoreticky v nekonečném čase dojde k vyrovnání teplot v celém rozsahu tělesa.

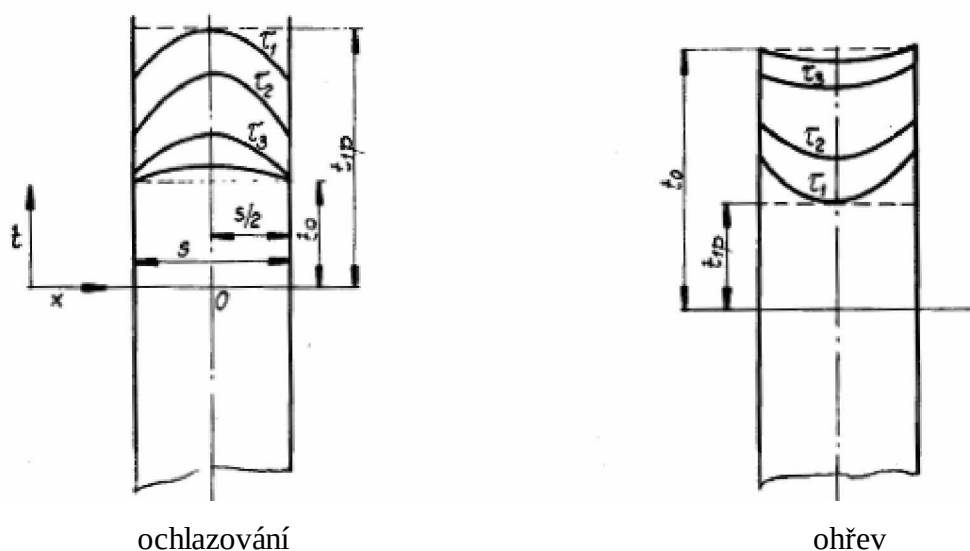
Nestacionární teplotní pole periodicky proměnné [6], charakterizované tím, že se teplota v určitém bodě tělesa periodicky mění z teplotního maxima do teplotního minima, tj. teplota v daném bodě tělesa kmitá kolem střední teploty tělesa Δt

$$\Delta t = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} \quad (1)$$

Řeší se teplotní pole ve třech tělesech, a to v desce, válci a kouli.

2.1.1 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce

Pro tento případ budeme uvažovat stěnu zhotovenou z materiálu s izotropními vlastnostmi vzhledem ke sdílení tepla vedením, ohraničenou dvěma rovnoběžnými rovinnými povrchy, jejichž lineární rozměry jsou řádově větší než tloušťka stěny s . V daném časovém okamžiku bude stěna náhle vystavena oboustrannému tepelnému působení okolního prostředí, které má časově neměnnou teplotu t_o . Před začátkem ochlazování nebo ohřevu byla teplota stěny ve všech místech desky stejná a její hodnotu si označíme jako t_{ip} (počáteční teplota). Časový průběh teploty napříč stěnou bude symetrický podle osy stěny, proto je výhodné osu stěny položit do některé osy souřadnicového systému, jak je tomu na obrázku 5.



Obr. 5. Průběh teplotních profilů ve stěně

Teplotní pole je popsáno řešením rovnice

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a \nabla^2 t_1, \quad (2)$$

kde jsme zavedli konstantu

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho}, \quad (3)$$

teplotní vodivost uvažovaného prostředí a , symbolem ∇^2 rozumíme Laplaceův diferenciální operátor.

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} . \quad (4)$$

Pro popsany případ jednorozměrného sdílení tepla kondukcí přejde rovnice (2)

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} , \quad (5)$$

kde t_1 je teplota v libovolném místě stěny v daném čase. Řešení rovnice (5) lze provést za daných okrajových a počátečních podmínek. Počáteční podmínky jsou dány následovně:

$$t_1(x, \tau = 0) = t_1 \quad (6)$$

$$t_1(x, \tau \rightarrow \infty) = t_o \quad (7)$$

Okrajové podmínky:

$$\left(-\frac{\partial t_1}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (8)$$

Rovnice (8) je podmínka osové symetrie teplotního profilu.

Další okrajová podmínka závisí na druhu transportu tepla z povrchu stěny materiálu do okolí [5, 7, 8, 9].

2.1.2 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce – okrajová podmínka prvního druhu

Tato podmínka charakterizuje dokonalý přestup tepla z povrchu stěny do okolí, kdy teplota povrchu se prakticky okamžitě ustálí na teplotě okolí [5, 10]. Tento stav je teoreticky charakterizován nekonečným součinitelem přestupu tepla α , takže okrajová podmínka potřebná pro řešení rovnice (5) má v tomto případě tvar

$$t_1 \left(x = \frac{s}{2}, \tau \right) = t_o . \quad (9)$$

Je výhodné zavést následující substituci:

$$t = t_1 - t_o , \quad (10)$$

což fyzikálně znamená, že neřešíme teplotu, ale její rozdíl, v uvažovaném čase, od teploty okolí. Substitucí se diferenciální členy rovnic (5), (8) nezmění a ostatní okrajové podmínky přejdou na tvary, které budou pro postup výpočtu výhodnější. Řešíme tedy rovnici sdílení tepla

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (11)$$

s následujícími počátečními a okrajovými podmínkami.

$$t(x, \tau = 0) = t_1 - t_o = t_p \quad (12)$$

$$t(x, \tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (14)$$

$$t\left(x = \frac{s}{2}, \tau\right) = 0 \quad (15)$$

Řešení rovnice (11) provedeme separací proměnných, to znamená, že integrál rovnice (11) předpokládáme ve tvaru součinu funkce $t(x)$ a $t(\tau)$. Zápisem $t(x)$ budeme rozumět, že tepelný rozdíl je funkcí pouze polohy (souřadnice x) a zápisem $t(\tau)$ rozdíl, který je funkcí pouze času (τ).

$$t(x, \tau) = t(x) \cdot t(\tau) \quad (16)$$

Rovnice (16) musí splnit diferenciální rovnici (11), tj. platí:

$$t'(x)t(\tau) = at''(x)t(\tau), \quad (17)$$

kde zápisem $t'(\tau)$ rozumíme první derivaci t podle τ a $t''(x)$ druhou derivaci t podle x .

Násobíme-li rovnici (17) výrazem $\frac{1}{at(\tau)t(x)}$, dostaneme

$$\frac{1}{a} \frac{t'(x)}{t(x)} = \frac{t''(x)}{t(x)} = -p^2 \quad (18)$$

Vidíme, že na jedné straně rovnice je výraz, který je pouze funkcí času, na druhé pouze funkcí polohy (x). Aby se tyto výrazy mohli sobě rovnat, je to možné jen tehdy, když se budou rovnat konstantně. Z fyzikálního smyslu a dalším postupem o této konstantě můžeme říci, že musí být záporná. Za tím účelem stačí vzít záporně vzatou druhou mocninu neznámé

konstanty p . Shora uvedenou úpravou jsme tedy provedli separaci proměnných a řešíme dvě následující diferenciální rovnice

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = -ap^2(\tau) \quad (19)$$

$$\frac{d^2t(x)}{dx^2} + p^2t(x) = 0 \quad (20)$$

Běžnou separací dostáváme

$$t(\tau) = Ce^{-p^2a\tau} \quad (21)$$

Nyní vidíme oprávněnost volby záporné hodnoty $-p^2$, neboť jen takto může být splněna podmínka (13).

Kořeny charakteristické rovnice

$$\beta^2 + p^2 = 0 \quad (22)$$

jsou $\beta = \pm ip$, takže obecný integrál (20) je, jak následuje:

$$t(x) = A_1 \sin(px) + B_1 \cos(px) \quad (23)$$

Takže celkové řešení podle vztahu (16) je rovno:

$$t(x\tau) = [A \sin(px) + B \cos(px)] \exp(-p^2a\tau), \quad (24)$$

kde $A = A_1C$; $B = B_1C$, přičemž A , B , p jsou konstanty, které určíme z počátečních a okrajových podmínek.

Podle okrajové podmínky (14) bude platit

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = \exp(ap^2\tau) [Ap \cos(px) - Bp \sin(px)]_{x=0} = 0 \quad (25)$$

Aby výraz (25) byl splněn pro $x=0$, je nutné, aby $A=0$, neboť u konstanty p předpokládáme, že je nenulová. Rovnice (25) pak přejde na následující tvar:

$$t(x\tau) = B \cos(px) \exp(-p^2a\tau) \quad (26)$$

Vidíme, že osově symetrické problémy (okrajová podmínka (14)) jsou splněny pouze pro sudé funkce, tj. v našem případě $\cos(px)$.

Aplikací okrajové podmínky (15) platí

$$B \cos(px) \exp(-p^2 a \tau) = 0 \quad \text{pro } x = \frac{s}{2} \quad (27)$$

za předpokladu, že $B \neq 0$, je možno upravit rovnici (27) na následující

$$\cos(q) = 0 \quad (28)$$

kde

$$q = p \frac{s}{2}. \quad (29)$$

Posloupnost kořenů q_n rovnice (28) (liché násobky čísla $\frac{\pi}{2}$) $q_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ tvoří lineárně nezávislý systém funkcí, které jsou dány rovnicí (26), proto jejich nekonečný součet je pak hledaný obecný integrál.

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(q_n \frac{x}{s/2}\right) \exp(-q_n^2 Fo), \quad (30)$$

kde pro Fo (Fourierovo kritérium) platí

$$Fo = \frac{a\tau}{(s/2)^2}. \quad (31)$$

Systém goniometrických funkcí, pro posloupnost lichých násobků $\frac{\tau}{2}$, je ortogonální na intervalu $(-s/2, +s/2)$, proto lze koeficienty nekonečné řady B_n psát:

$$B_n = \frac{tp \int_{-s/2}^{+s/2} \cos\left(q_n \frac{x}{s/2}\right) dx}{\int_{-s/2}^{+s/2} \cos^2\left(q_n \frac{x}{s/2}\right) dx} = 2tp \frac{\sin(q_n)}{q_n} \quad (32)$$

Výsledné řešení popisující nestacionární teplotní pole v nekonečné stěně za okrajové podmínky prvního druhu [5, 7, 9] je pak dáno následující rovnicí

$$\frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(q_n)}{q_n} \cos\left(\frac{x}{s/2} q_n\right) \exp\left[-\frac{a\tau}{(s/2)^2} q_n^2\right], \quad (33)$$

kde

$$q_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

2.1.3 Nestacionární teplotní pole v rovinné desce – okrajová podmínka třetího druhu

Jestliže přestup tepla z povrchu stěny do okolí není absolutní [5, 7, 8, 9, 10], tj. součinitel přestupu tepla má konečnou hodnotu, předpokládejme, že sdílení tepla na fázovém rozhraní se řídí rovnicí

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha \Delta t, \quad (35)$$

kde λ je tepelná vodivost a α součinitel přestupu tepla, takže místo okrajové podmínky (9) máme okrajovou podmínku danou rovnicí (35), která ve smyslu naší substituce (10) dává:

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\frac{s}{2}} = \alpha t_{x=\frac{s}{2}} \quad (36)$$

Analogickým postupem, jako tomu bylo v kapitole 1.2.2, dostáváme partikulární integrál rovnice (11)

$$t(x, \tau) = A \cos(kx) \exp(-k^2 a \tau) \quad (37)$$

pro $x = \frac{s}{2}$ platí okrajová podmínka třetího druhu, to znamená dosazením do (36) za $x = \frac{s}{2}$ dostáváme:

$$Ak\lambda \sin\left(k \frac{s}{2}\right) = \alpha \cos\left(k \frac{s}{2}\right) \exp(-k^2 a \tau) \quad (38)$$

Za předpokladu, že $A \neq 0$, dostáváme:

$$\lambda k \sin\left(k \frac{s}{2}\right) = \alpha \cos\left(k \frac{s}{2}\right); \quad (39)$$

volíme

$$k \frac{s}{2} = g. \quad (40)$$

Úpravou rovnice (39) s využitím vztahu (40) dostáváme:

$$\frac{\lambda}{s/2\alpha} g = \cot(g) \quad (41)$$

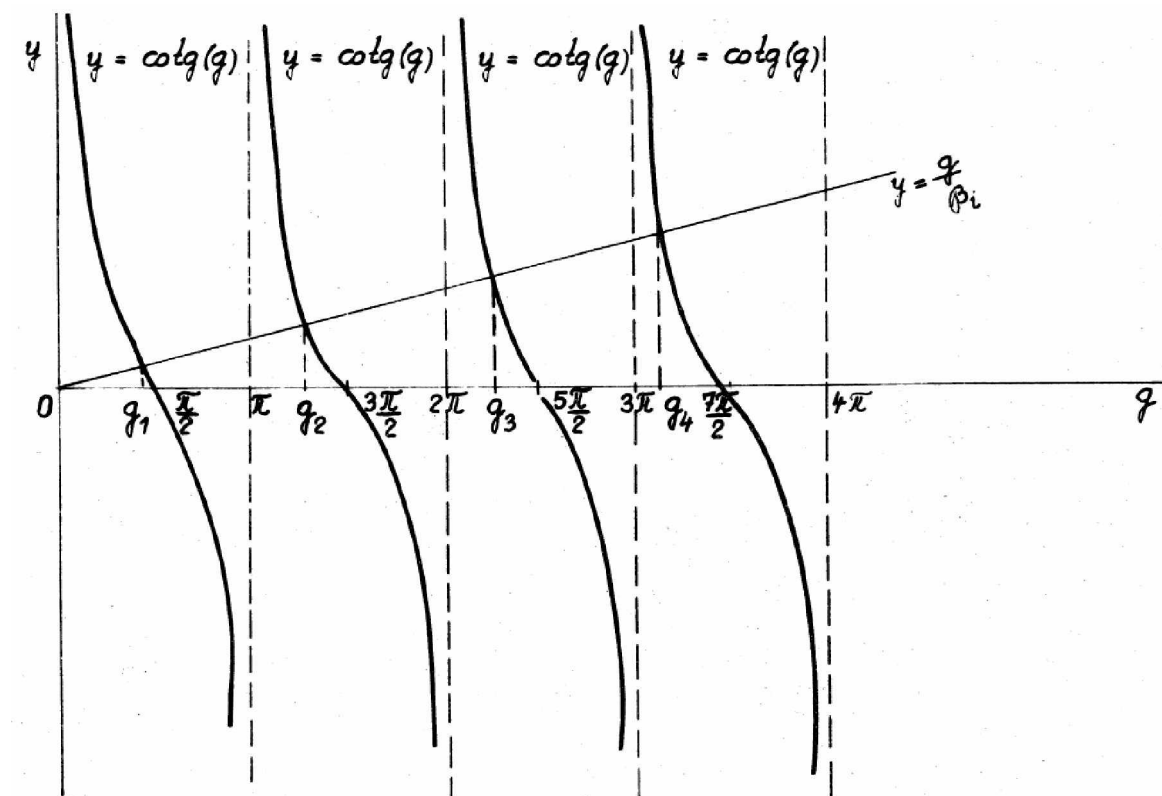
Vidíme, že $\frac{s/2\alpha}{\lambda}$ nám připomíná bezrozměrné Nusseltovo kritérium $\frac{l\alpha}{\lambda}$, kde však l a λ jsou přesně definovány, tj. l je vždy poloviční tloušťka stěny a λ je vždy součinitel tepelné vodivosti materiálu stěny. Takto definované bezrozměrné kritérium je pak Biotovo číslo Bi .

$$Bi = \frac{\alpha \cdot s/2}{\lambda} \quad (42)$$

Rovnici (41) si upravíme pomocí vztahu (42)

$$\frac{g}{Bi} = \cot(g) \quad (43)$$

Vidíme, že kořeny transcendentní rovnice (43) jsou průsečíky přímky, která má směrnici převrácenou hodnotu Biotova čísla s kotangentou, jak je ukázáno na obrázku 6.



Obr. 6. Grafické stanovení kořenů rovnice (43)

Opět snadno určíme, že posloupnost kořenů rovnice (43) tvoří ortogonální lineárně nezávislý systém goniometrických funkcí $\cos\left(g_n \frac{x}{s/2}\right)$, takže obecný integrál je ve tvaru nekonečného součtu funkcí:

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(g_n \frac{x}{s/2}\right) \exp(-g_n^2 Fo), \quad (44)$$

kde g_n jsou kořeny rovnice (43) a $Fo = \frac{a\tau}{(s/2)^2}$.

Na základě vlastnosti, že systém goniometrických funkcí je ortogonální a platnosti počáteční podmínky pro $\tau = 0$ stanovíme koeficienty nekonečné řady (44), neboť pro $\tau = 0$ je Fourierovo kritérium rovno nule. Koeficienty A_n určíme pak z následujícího vzorce

$$A_n = tp \frac{\int_{-s/2}^{+s/2} \cos\left(g_n \frac{x}{s/2}\right) dx}{\int_{-s/2}^{+s/2} \cos^2\left(g_n \frac{x}{s/2}\right) dx} = \frac{2tp \sin(g_n)}{g_n + \sin(g_n) \cos(g_n)}. \quad (45)$$

Konečné řešení je pak dáno

$$t^* = \frac{t(x, \tau) - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(g_n)}{g_n + \sin(g_n) \cos(g_n)} \cos\left(g_n \frac{x}{s/2}\right) e^{-g_n^2 \frac{a\tau}{s^2/4}} \quad (46)$$

Vidíme tedy, že bezrozměrná teplota je funkcí Fourierova kritéria, Biotova kritéria a bezrozměrné tloušťky v uvažovaném místě stěny $\frac{x}{s/2}$. Pro usnadnění výpočtů ve smyslu závislosti

$$t^* = f\left(Fo, Bi \frac{x}{s/2}\right) \quad (47)$$

jsou sestrojeny různé pomocné grafy umožňující výpočet teploty ve středu a na povrchu desky v zadaném čase. Obecnější a mnohdy i výhodnější než použití těchto grafů je použití standardních programů a pomocí nich sestavit hlavní program pro výpočet jednotlivých profilů.

Na obrázku 6 vidíme, že směrnice přímky a tím i hodnoty kořenů transcendentní rovnice (43) se mění s velikostí Biotova čísla. Pro jeho velké hodnoty je směrnice malá a

hodnoty kořenů rovnice (43) se blíží lichým násobkům čísla $\frac{\pi}{2}$, čímž rovnice (46) přechází na vztah (33), který platí pro okrajovou podmínku prvního druhu. Velké Biotovo kritérium nám tedy dovoluje usuzovat, že teplotní profil uvnitř zkoumaného tělesa nebude záviset na podmínkách přestupu tepla z povrchu stěny do okolního prostředí. Tento případ nastává při dokonalém (velmi rychlém) přestupu tepla u málo vodivých materiálů (izolanty) a konečně u stěny, jejíž tloušťka je dosti velká. V praxi to znamená, že v případech vysokého Biotova kritéria intenzifikace přestupu tepla, tj. jak chlazení tak ohřev povrchů těles má své meze. Mimo ně se další zvyšování součinitele přestupu tepla neprojeví [5, 7, 8, 9].

2.1.4 Nestacionární teplotní pole v kouli

Při řešení teplotních polí u těles kulovitého tvaru budeme prakticky předpokládat stejné podmínky jako u nekonečné desky. To znamená, že uvažujeme kouli ze stejnorodého materiálu o daném poloměru R , která má ve všech místech stejnou teplotu a bude náhle podrobena v celém rozsahu svého povrchu stejnému ohřívání nebo ochlazování okolním prostředím.

Vzhledem ke shora uvedeným předpokladům a zavedením sférických souřadnic bude mít diferenciální rovnice popisující nestacionární sdílení tepla vedením následující tvar

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_1}{\partial r} \right] \quad (48)$$

Rovnice (48) se řeší s následujícími počátečními a okrajovými podmínkami:

$$t_1(r, \tau = 0) = t_{1p} \quad (49)$$

$$t_1(r, \tau \rightarrow \infty) = t_o \quad (50)$$

$$\left(\frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (51)$$

$$t_1(r = R, \tau) = t_o \quad (52)$$

2.1.5 Nestacionární teplotní pole v kouli – okrajová podmínka prvního druhu

Okrajová podmínka prvního druhu je dána rovnicí (52). Jak tomu bylo v předchozím případě, zavedeme substituci

$$t = t_1 - t_o \quad (53)$$

čímž se rovnice (48) přepíše na teplotní rozdíl t .

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right] \quad (54)$$

$$t(r, \tau = 0) = t_{1p} - t_o = t_p \quad (55)$$

$$t(r, \tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (57)$$

$$t(r = R, \tau) = 0 \quad (58)$$

Řešením separací proměnných dostáváme:

$$\frac{1}{a} t'_{(\tau)} t_{(r)} = t''_{(r)} t_{(\tau)} + 2 t'_{(r)} t_{(\tau)} \quad (59)$$

$$\frac{1}{a} \frac{t'_{(\tau)}}{t_{(\tau)}} = \frac{t''_{(r)}}{t_{(r)}} + \frac{2}{r} \frac{t'_{(r)}}{t_{(r)}} \quad (60)$$

Řešíme tedy dvě rovnice:

$$\frac{1}{a} \frac{t'_{(\tau)}}{t_{(\tau)}} = -m^2 \quad (61)$$

$$t''_{(r)} + \frac{2}{r} t'_{(r)} + t_{(r)} m^2 = 0 \quad (62)$$

kde m je nenulová integrační konstanta.

Řešení rovnice (53) je stejné, jako tomu bylo u nekonečné desky, tj. platí

$$t(\tau) = C \exp(-m^2 a \tau) \quad (63)$$

Další řešení je obdobné jako u rovinné desky, které je popsáno v kapitole 1.2.2
Nestacionární teplotní pole v rovinné desce – okrajová podmínka prvního druhu.

Výsledné řešení, pro popis nestacionárního teplotního pole v tělese kulovitého tvaru, za platnosti okrajové podmínky prvního druhu, je dáno:

$$\frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{r}{R}\right)}{n\pi \frac{r}{R}} \exp\left[\frac{a}{R^2} \pi^2 n^2\right] \quad (64)$$

2.1.6 Nestacionární teplotní pole v kouli – okrajová podmínka třetího druhu

Ve smyslu zavedené substituce $t = t_1 - t_o$ je okrajová podmínka třetího druhu dána ve stejném tvaru jako rovnice (36)

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = \alpha t_{r=R} \quad (65)$$

Ostatní okrajové a počáteční podmínky jsou stejné jako v případě předcházejícím, tj. řešíme rovnice (54), (55), (56), (57) stejným postupem, takže dostáváme

$$t(r, \tau) = \frac{A \sin(kr)}{rk} \exp(-a\tau k^2) \quad (66)$$

Pro určení integrační konstanty k využijeme rovnici (65):

$$-\frac{A \exp(-k^2 a \tau)}{k} \frac{Rk \cos(kR) - \sin(kR)}{R^2} \lambda = \frac{\alpha A \exp(-k^2 a \tau) \sin(kR)}{kR} \quad (67)$$

Za předpokladu nenulové hodnoty konstanty A je možné vztah (67) upravit

$$-\lambda [Rk \cot(Rk) - 1] = R\alpha \quad (68)$$

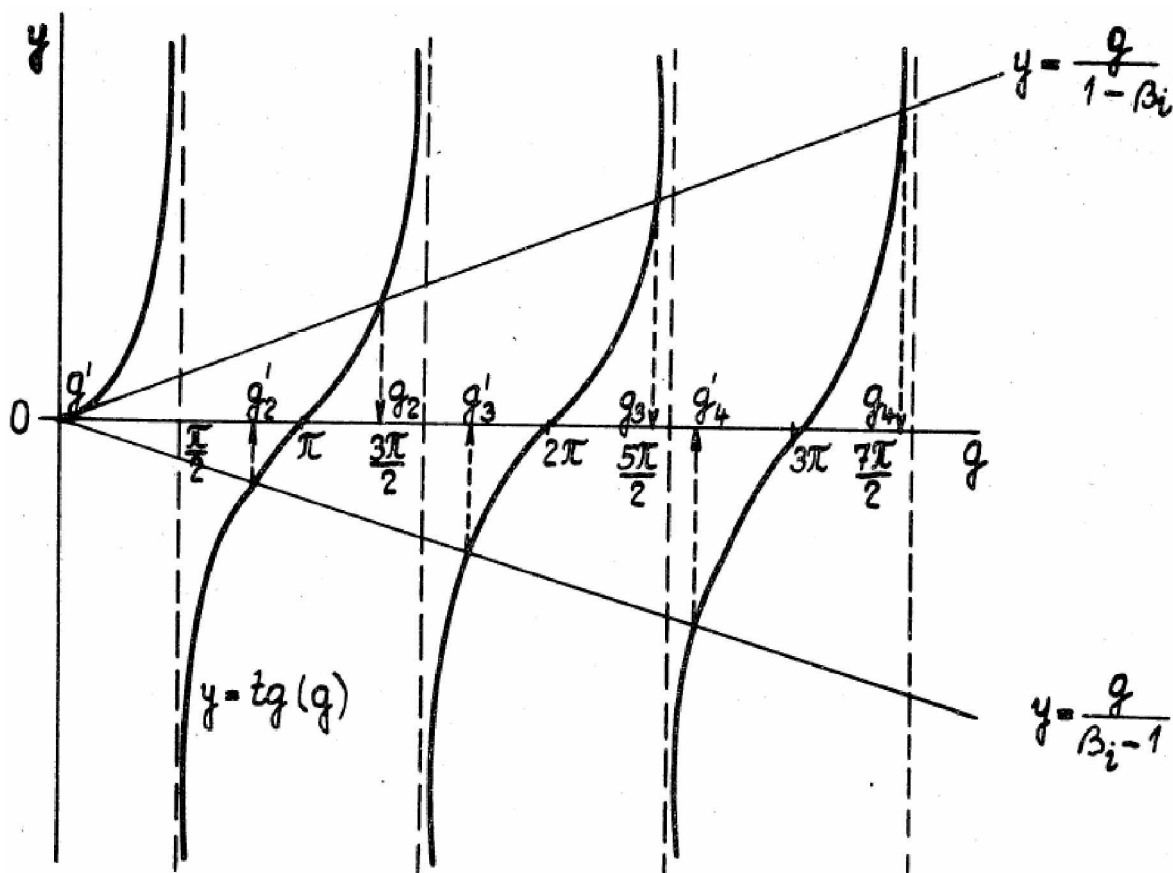
Zavedením Biotova kritéria $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$ a substituce $g = Rk$ dostáváme:

$$\tan(g) = \frac{g}{1 - Bi} \quad (69)$$

Na následujícím obrázku (7) je vidět, že transcendentní rovnice (69) má nekonečně mnoho kořenů, které tvoří lineárně nezávislý systém funkcí a proto jejich nekonečný součet je obecný integrál řešené rovnice.

$$t(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin\left(\frac{r}{R} q_n\right)}{\frac{r}{R} q_n} \exp\left(\frac{a\tau}{R^2} q_n^2\right) \quad (70)$$

kde q_n jsou kořeny rovnice (69).



Obr. 7. Grafické určení kořenů transcendentní rovnice (69)

Abychom mohli použít ke stanovení koeficientů A_n nekonečné řady (70) analogického postupu jako v případě okrajové podmínky prvního druhu, je třeba se přesvědčit, zda systém funkcí $\sin\left(\frac{r}{R} q_n\right)$ na intervalu $0, R$ je ortogonální pro posloupnost kořenů daných transcendentní rovnicí (69).

$$\begin{aligned}
\int_0^R \sin\left(g_n \frac{r}{R}\right) \sin\left(g_m \frac{r}{R}\right) dr &= \frac{\sin(g_n - g_m)}{2(g_n - g_m)} - \frac{\sin(g_n + g_m)}{2(g_n + g_m)} = \\
&= \frac{\sin(g_n) \cos(g_m) - \cos(g_n) \sin(g_m)}{2(g_n - g_m)} - \frac{\sin(g_n) \cos(g_m) + \cos(g_n) \sin(g_m)}{2(g_n + g_m)}
\end{aligned} \tag{71}$$

Podle rovnice (69) platí:

$$\frac{\sin(g_n)}{\cos(g_n)} = \frac{g_n}{1 - Bi} \tag{72}$$

$$\frac{\sin(g_m)}{\cos(g_m)} = \frac{g_m}{1 - Bi} \tag{73}$$

čehož využijeme následovně:

$$\sin(g_n) \cos(g_m) = \frac{g_n \cos(g_n) \cos(g_m)}{1 - Bi} \tag{74}$$

$$\cos(g_n) \sin(g_m) = \frac{g_m \cos(g_m) \cos(g_n)}{1 - Bi} \tag{75}$$

Dosazením těchto vztahů do výsledků určitého integrálu dostaneme:

$$\frac{(g_n - g_m) \cos(g_n) \cos(g_m)}{1 - Bi} - \frac{(g_n + g_m) \cos(g_n) \cos(g_m)}{1 - Bi} = 0 \tag{76}$$

pro $n \neq m$.

Konečné řešení nestacionárního teplotního pole pro tělesa kulovitěho tvaru je pak dáno:

$$\frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sin(g_n) - g_n \cos(g_n)]}{[g_n - \sin(g_n) \cos(g_n)]} \frac{\sin\left(\frac{r}{R} g_n\right)}{g_n \frac{r}{R}} \exp(-g_n^2 Fo) \tag{77}$$

kde g_n jsou kořeny rovnice $g \cot g = 1 - Bi$ a pro Fourierovo kritérium Fo platí:

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2}. \tag{78}$$

Jak je vidět na obrázku 7 pro velká Biotova čísla, se hodnoty kořenů rovnice (69) blíží celým násobkům čísla π a tím přechází řešení nestacionárního teplotního pole

s okrajovou podmínkou třetího druhu na řešení pro okrajovou podmínku prvního druhu, čímž se vztah (77) značně zjednoduší [5, 7].

2.1.7 Nestacionární teplotní pole ve válci

Předpokládáme válec o poloměru R , zhotovený ze stejnorodého materiálu, jehož teplota je ve všech místech stejná a je rovna t_{1p} . V daném čase je těleso podrobena náhlému ohřevu nebo ochlazení okolním prostředím, které má teplotu t_o , nezávislou na čase τ . Jedná se opět o symetrickou úlohu a vzhledem k neomezené délce válce se teplo bude šířit pouze radiálním směrem. Počáteční postup při řešení tohoto případu se nijak neliší od předcházejících dvou. Neřešíme teplotu, ale z analogických důvodů jako u desky a koule rozdíl teploty válce od teploty okolí.

V cylindrických souřadnicích tedy řešíme parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right] \quad (79)$$

s následujícími okrajovými a počátečními podmínkami:

$$t(r, \tau = 0) = t_{1p} - t_o = t_p \quad (80)$$

$$t(r, \tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (81)$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (82)$$

Okrajová podmínka prvního druhu:

$$t(r = R, \tau) = 0 \quad (83)$$

Okrajová podmínka třetího druhu:

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} = \alpha t_{(r=R)} \quad (84)$$

2.1.8 Nestacionární teplotní pole ve válci – okrajová podmínka prvního druhu

Běžnou metodou separací proměnných dostáváme dvě jednoduché diferenciální rovnice

$$t'(\tau) + ak^2 t(\tau) = 0 \quad (85)$$

$$r^2 t''(r) + rt'(r) + k^2 r^2 t(r) = 0 \quad (86)$$

Řešení rovnice (85) je známé z předchozích případů

$$t(\tau) = Ce^{-k^2 a \tau}. \quad (87)$$

Řešením rovnice (86) jsou Besselovy funkce nultého řádu.

$$t(r) = A_1 J_0(kr) + B_1 Y_0(kr) \quad (88)$$

Vzhledem k symetričnosti úlohy $B_1 = 0$, takže partikulární integrál diferenciální rovnice (79) je následujícího tvaru

$$t(r, \tau) = AJ_0(rk) \exp(-k^2 a \tau). \quad (89)$$

Použitím okrajové podmínky prvního druhu dostáváme:

$$AJ_0(Rk) \exp(-k^2 a) = 0 \quad (90)$$

a po úpravě za předpokladu, že $A \neq 0$ máme

$$J_0(q) = 0, \quad (91)$$

kde $q = Rk$.

Kořeny rovnice (91) pak tvoří lineárně nezávislý ortogonální systém Besselových funkcí a vahou r , jejichž nekonečný součet dává obecný integrál řešení diferenciální rovnice

$$t(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r}{R} q_n\right) \exp\left(-\frac{a\tau}{R^2} q_n^2\right), \quad (92)$$

kde q_n jsou kořeny rovnice $J_0(q) = 0$.

Na základě platnosti počáteční podmínky určíme koeficienty A_n . Pro $\tau = 0$ dostáváme:

$$t_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{r}{R} q_n\right) \quad (93)$$

a odtud na základě ortogonalit s vahou pro r A_n plyne

$$A_n = \frac{t_p \int_0^R r J_0 \left(q_n \frac{r}{R} \right) dr}{\int_0^R r J_0^2 \left(q_n \frac{r}{R} \right) dr} = \frac{2t_p}{q_n J_1(q_n)} \quad (94)$$

Stanovením koeficientů A_n jsme stanovili poslední konstantu a můžeme pro nestacionární teplotní pole nekonečného válce za platnosti okrajové podmínky prvního druhu psát konečné řešení [5, 6]

$$\frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{r}{R} q_n \right)}{q_n J_1(q_n)} \exp \left(-q_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right), \quad (95)$$

kde q_n jsou kořeny rovnice (91).

2.1.9 Nestacionární teplotní pole ve válci – okrajová podmínka třetího druhu

Analogickým postupem jako v předchozím případě dostáváme partikulární integrál diferenciální rovnice (79)

$$t(r, \tau) = B J_0(rk) \exp(-k^2 a \tau) \quad (96)$$

použitím okrajové podmínky třetího druhu pro $r=R$ plyne (rovnice (84))

$$B \lambda k J_1(kR) \exp(-k^2 a) = \alpha J_0(kR) \exp(k^2 a). \quad (97)$$

Úpravou (97) pro $A \neq 0$ dostáváme

$$\frac{J_0(g)}{J_1(g)} = \frac{g}{Bi}, \quad (98)$$

kde $g = kR$ a $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$.

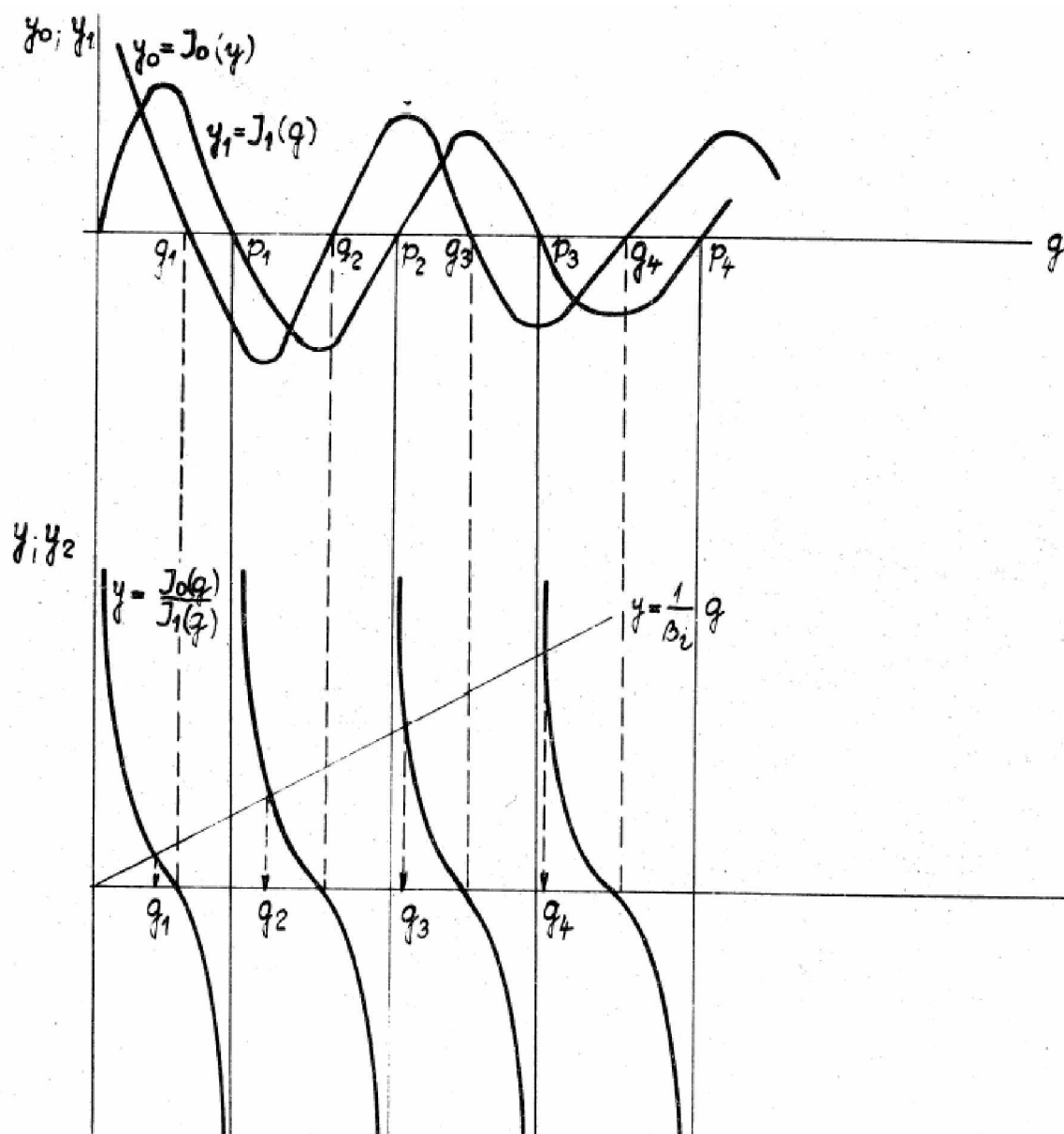
Pro určení kořenů rovnice (98) zvolíme postup:

$$y = \frac{J_0(g)}{J_1(g)} = \frac{y_0}{y_1} \quad (99)$$

$$y_0 = J_0(g) \quad (100)$$

$$y_1 = J_1(g) \quad (101)$$

$$y_2 = \frac{g}{Bi} \quad (102)$$



Obr. 8. Grafické určení kořenů transcendentní rovnice (98)

Funkce y je nulová pro $J_0(g)=0$ a má nekonečnou hodnotu pro $J_1(g)=0$. Označíme-li si kořeny rovnice $J_0(g)=0$ q_n a $J_1(g)=0$ p_n , můžeme podle známých průběhů funkcí $J_0(g)$ a $J_1(g)$ sestavit graf funkce y , jak je ukázané na obr. 8.

Tak, jak tomu bylo při řešení kořenů rovnice (32), do grafu $y_2=f(g)$ si nakreslíme rovnici přímky $y_2 = \frac{1}{Bi}g$ a její průsečíky s funkcí y nám určují hodnoty kořenů transcendentní rovnice (98). Posloupnost těchto kořenů pak určuje lineárně nezávislý systém Besselových funkcí, které jsou na intervalu $0 - R$ ortogonální s vahou r .

Řešení je dáno řadou:

$$t(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0 \left(\frac{r}{R} g_n \right) \exp \left(- \frac{a}{R^2} g_n^2 \right) \quad (103)$$

Pro koeficienty B_n na základě platnosti počáteční podmínky pro $\tau=0$ a zmíněné ortogonality s vahou r platí:

$$B_n = \frac{t_p \int_0^R r J_0 \left(g_n \frac{r}{R} \right) dr}{\int_0^R r J_0^2 \left(g_n \frac{r}{R} \right) dr} \quad (104)$$

K provedení naznačené integrace použijeme některých matematických tabulek určitých integrálů speciálních funkcí. Úpravou tabelových vztahů s využitím rovnice (98) pak dostáváme konečný tvar pro koeficienty nekonečné řady (103) B_n

$$B_n = \frac{2 J_1(g_n)}{[J_1^2(g_n) + J_0^2(g_n)] g_n} \quad (104)$$

a konečné řešení pro nestacionární teplotní pole v nekonečném válci, za platnosti okrajové podmínky třetího druhu, je dáno:

$$\frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(g_n)}{[J_1^2(g_n) + J_0^2(g_n)] g_n} J_0 \left(\frac{r}{R} g_n \right) \exp(-F_o g_n^2), \quad (105)$$

kde pro F_o platí $F_o = \frac{a\tau}{R^2}$ a g_n jsou kořeny transcendentní rovnice (98).

Pro velká Biotova čísla (velký součinitel přestupu tepla, válec s velkým poloměrem, zhotovený z materiálu, který má malou tepelnou vodivost) je směrnice přímky $y = \frac{g}{Bi}$ malá, v limitě nulová, a hodnoty kořenů rovnice se blíží hodnotám kořenů rovnice $J_0(g) = 0$, čímž vztah (105) přechází na (95), který jsme dostali aplikací okrajové podmínky prvního druhu. Vidíme tedy, že i v tomto případě teplotní profil nebude v podstatě ovlivněn podmínkami přestupu tepla z povrchu válce do okolního prostředí [5, 7].

2.2 Analytický výpočet matematicko-fyzikálního modelu desky

Máme-li namodelovat teplotní pole pro vytvrzování aminoplastů, můžeme tento problém vyřešit jako ohřev nekonečné rovinné desky.

Jak bylo uvedeno v kapitole 2.1.1 teplotní pole v tělese a v nehybném prostředí je určeno Fourierovou rovnicí, počáteční podmínkou a příslušnými okrajovými podmínkami. Řešení tohoto problému je popsáno v kapitole 2.1.5 a 2.1.6.

2.3 Výpočet teplotního pole pro vzorek aminoplastu PA6 tvaru koule

Zadané hodnoty:

teplota okolí: $t_o = 20\text{ °C}$

teplota počáteční: $t_{ip} = 100\text{ °C}$

průměr koule: $d = 0,4\text{ m}$

poloměr koule: $R = 0,2\text{ m}$

střední teplota: $\Delta t = 0,5 (t_{ip} + t_o) \Rightarrow 0,5 (100 + 20) = 60\text{ °C}$

tíhové zrychlení: $g = 9,81\text{ m/s}$

Vlastnosti vzduchu při 20 °C:

Prandtlovo kritérium: $Pr = 0,73$

hustota: $\rho_v = 1,164\text{ kg/m}^3$

tepelná vodivost: $\lambda_v = 2,52 \cdot 10^{-2}\text{ W/(m.K)}$

kinematická viskozita: $\nu_v = 1,57 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$

Vlastnosti PA6:

měrné teplo: $c_{p\text{ PA6}} = 1,7\text{ kJ/(kg.K)}$

hustota: $\rho_{\text{PA6}} = 1130\text{ kg/m}^3$

tepelná vodivost: $\lambda_{\text{PA6}} = 0,29\text{ W/(m.K)}$

Výpočty:

Grashofovo kritérium: $Gr = \frac{gd^3}{\nu^2} \Rightarrow \frac{9,81 \cdot 0,4^3}{(1,57 \cdot 10^{-5})^2} = 6,57 \cdot 10^8$

Nusseltovo kritérium: $Nu = c(Gr \cdot Pr)^n \Rightarrow 0,135(6,57 \cdot 10^8 \cdot 0,73)^{1/3} = 105,69$

koeficient přestupu tepla: $\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_v}{d} \Rightarrow \frac{105,69 \cdot 2,52 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 6,65 \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Biotovo kritérium: $Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_{PA6}} \Rightarrow \frac{6,65 \cdot 0,2}{0,29} = 4,59$

teplotní vodivost: $a = \frac{\lambda_{PA6}}{\rho_{PA6} \cdot c_p} \Rightarrow \frac{0,29}{1130 \cdot 1700} = 1,51 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}$

Výpočet kořenů:

$$tg(g) = \frac{g}{1 - Bi}$$

$$g_1 = 2,5282$$

$$g_4 = 11,3032$$

$$g_2 = 5,3072$$

$$g_5 = 14,3819$$

$$g_3 = 8,2639$$

$$g_6 = 17,4814$$

Výpočet teplot v kouli v místě blízkém středu, pro $r = 0,0005$ m:

τ [s]	Fo [-]	t_1 [°C]
300	0,001132	87,6767
600	0,002264	91,9016
1200	0,004529	96,5516
2400	0,009058	99,4099
7200	0,027173	99,9907

Tab. 1. Výpočet teploty v kouli

Příklad výpočtu 1. řádku tabulky:

$$\text{bezrozměrný čas: } Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2} \Rightarrow \frac{1,51 \cdot 10^{-7} \cdot 300}{0,2^2} = 1,1325 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sin(g_n) - g_n \cos(g_n)] \sin\left(\frac{r}{R} g_n\right)}{[g_n - \sin(g_n) \cos(g_n)] g_n \frac{r}{R}} \exp(-g_n^2 Fo) \\ \frac{t_1 - t_o}{t_{1p} - t_o} &= 2 \left[\left(\frac{\sin(2,5282) - 2,5282 \cos(2,5282)}{2,5282 - \sin(2,5282) \cos(2,5282)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 2,5282\right)}{2,5282 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(2,5282^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) \right] + \\ &+ \left(\frac{\sin(5,3072) - 5,3072 \cos(5,3072)}{5,3072 - \sin(5,3072) \cos(5,3072)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 5,3072\right)}{5,3072 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(5,3072^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ \left(\frac{\sin(8,2639) - 8,2639 \cos(8,2639)}{8,2639 - \sin(8,2639) \cos(8,2639)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 8,2639\right)}{8,2639 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(8,2639^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ \left(\frac{\sin(11,3032) - 11,3032 \cos(11,3032)}{11,3032 - \sin(11,3032) \cos(11,3032)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 11,3032\right)}{11,3032 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(11,3032^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ \left(\frac{\sin(14,3819) - 14,3819 \cos(14,3819)}{14,3819 - \sin(14,3819) \cos(14,3819)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 14,3819\right)}{14,3819 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(14,3819^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ \left(\frac{\sin(17,4814) - 17,4814 \cos(17,4814)}{17,4814 - \sin(17,4814) \cos(17,4814)} \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{0,0005}{0,2} 17,4814\right)}{17,4814 \frac{0,0005}{0,2}} \right) \exp(-(17,4814^2) 1,1325 \cdot 10^{-3}) \end{aligned}$$

$$t_1 = 87,6767 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Jak je z této rovnice vidět, teplotní pole je na výpočet značně složité. Proto se snažíme využívat počítačových programů, kterými lze teplotní pole namodelovat elegantněji a rychleji.

2.4 Postup výpočtu pomocí programu Femlab

2.4.1 Výběr modelu

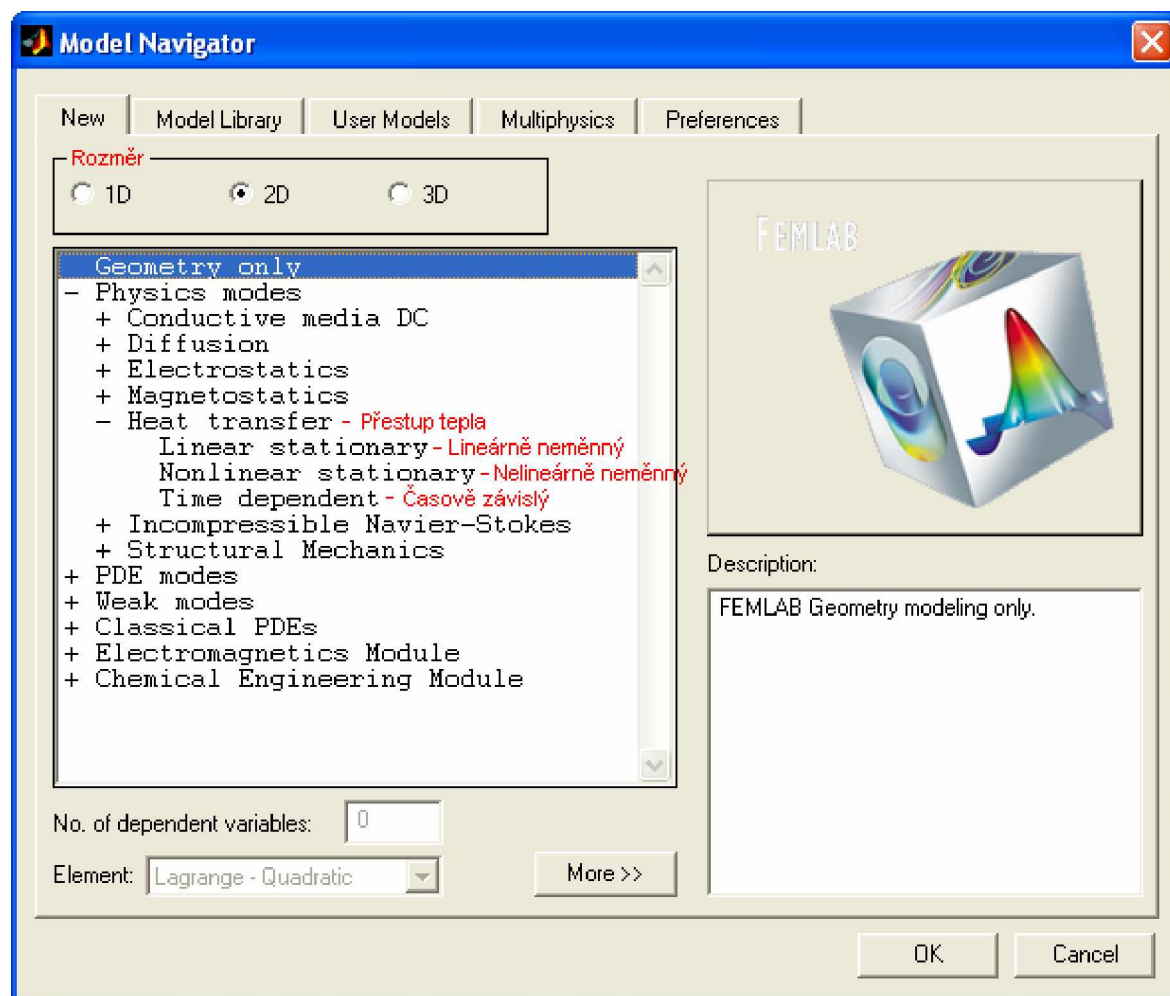
Po spuštění programu Femlab si na úvodní obrazovce vybereme typ řešeného problému. V našem případě to je *Time dependent* (časová závislost), která je umístěna v *Physics modes* (režimy fyziky) a v *Heat transfer* (přestup tepla). Dále si zvolíme rozměrový systém: *1D* – jedna osa, *2D* – dvě osy, *3D* – tři osy.

Pod záložkou *Model Library* (knihovna modelů) jsou umístěny příklady využití programu Femlab i s řešením a dokumentací.

Do záložky *User Models* (modely uživatele) si uživatel může nahrát objekty, které si vytvořil.

V záložce *Multiphysics* (multifyzikální) si můžeme nadefinovat děje se kterými musíme počítat u složitějších úloh. Například, když při modelování napětí v trubce výměníku tepla budeme uvažovat prostup tepla a rovinnou deformaci, v záložce *Multiphysics* navolíme *Heat transfer* a *Plane strain*.

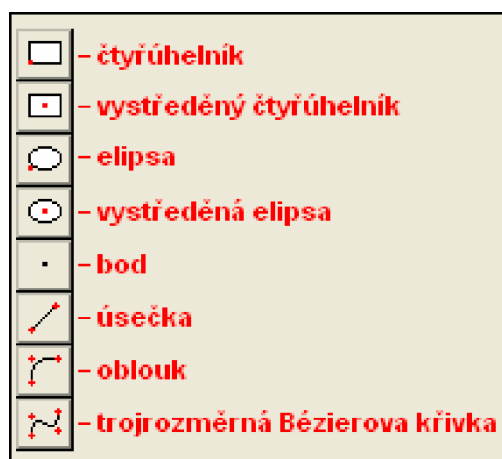
Záložka *Preferences* obsahuje nastavení, jak se má Femlab chovat při startu [11].



Obr. 9. Model Navigator

2.4.2 Nákres objektu

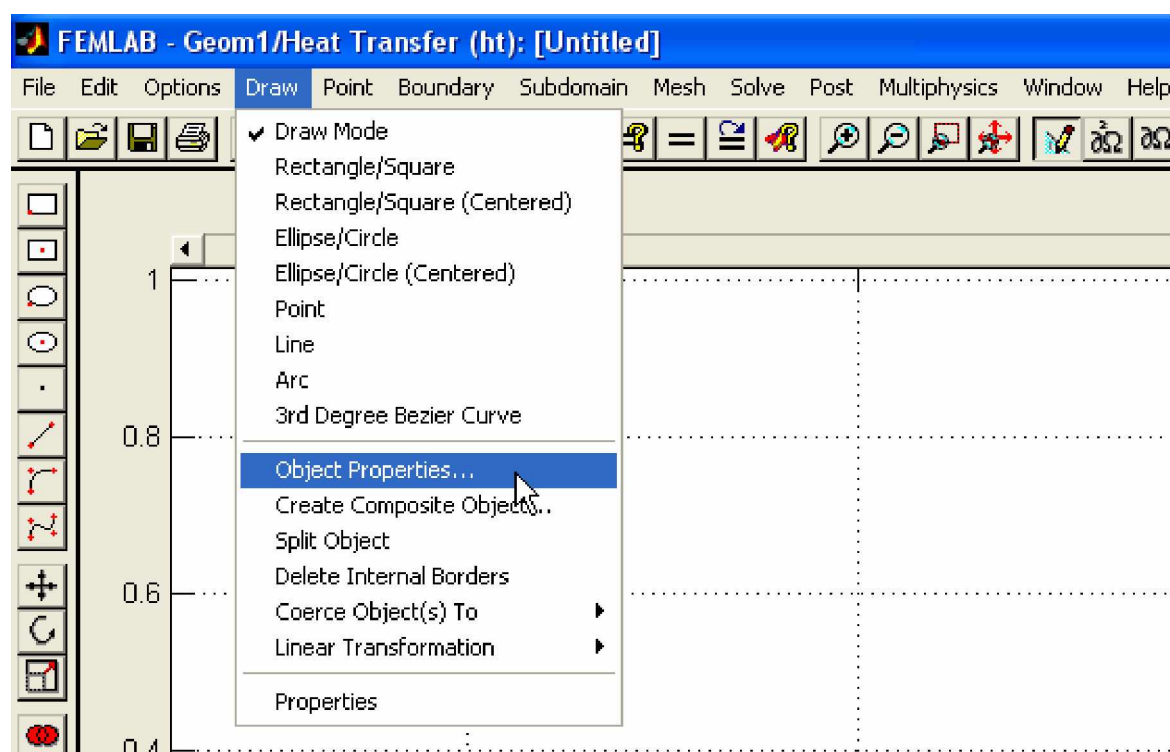
Pomocí těchto nástrojů (Obr. 10) nakreslíme požadovaný objekt.



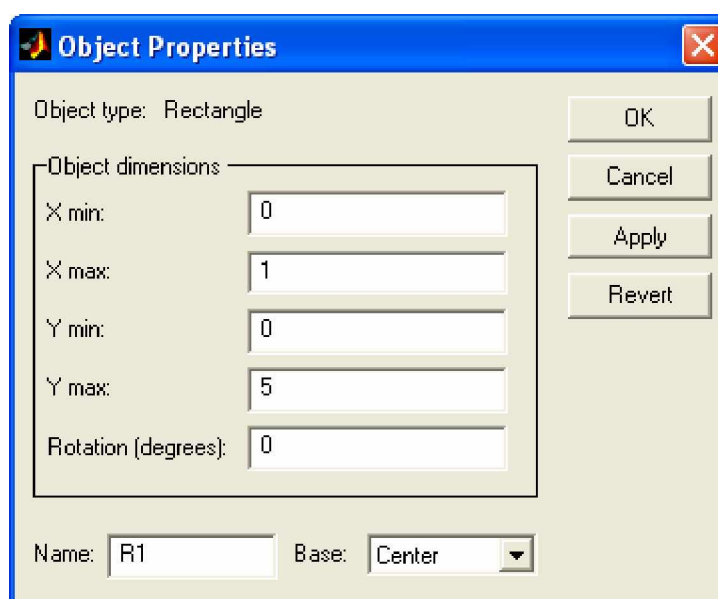
Obr. 10. Kreslicí nástroje

2.4.3 Editace objektu

Nástroj *Object properties*, který slouží k úpravě velikosti, umístění a otočení nakresleného objektu, najdeme pod záložkou *Draw*. Do pole pod názvem *Name* si pro lepší orientaci v objektech, především v 3D, můžeme vložit vlastní název objektu [11].



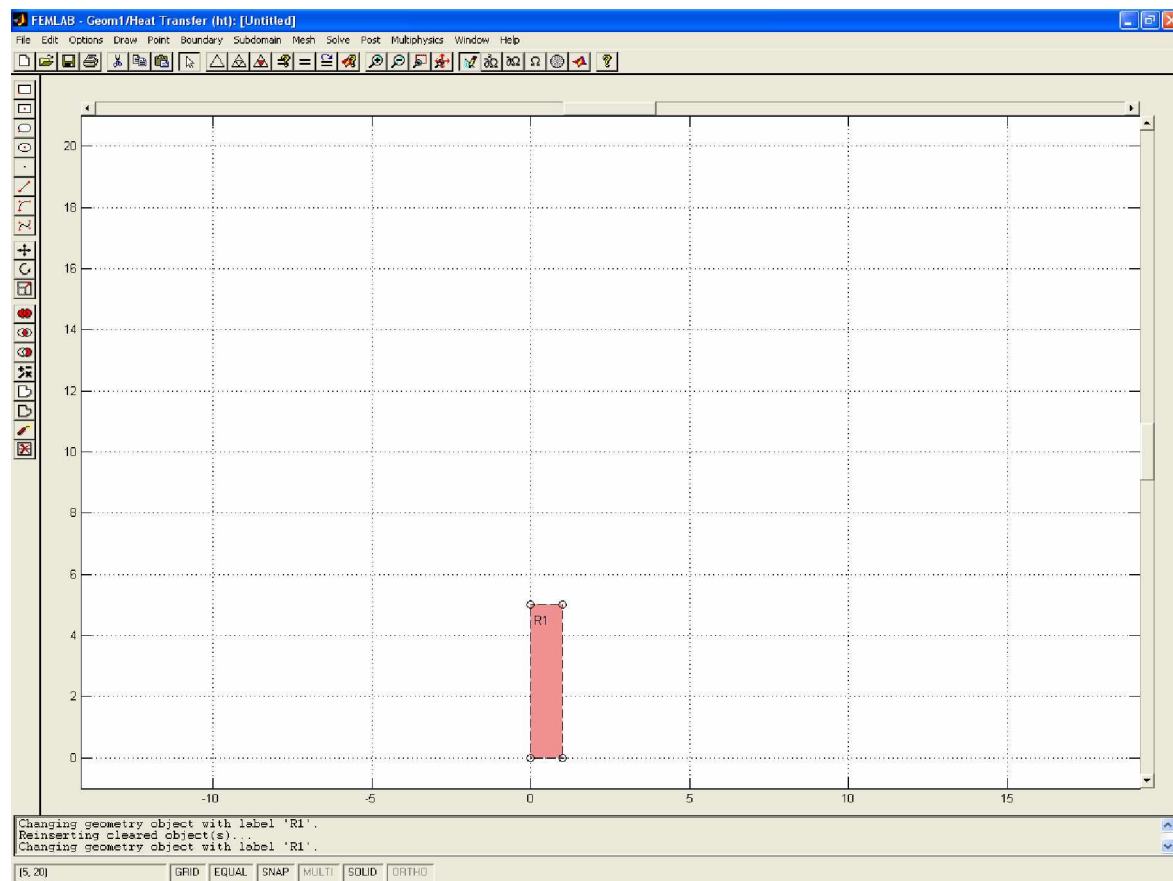
Obr. 11. Umístění záložky „Vlastnosti objektu“



Obr. 12. Vlastnosti objektu

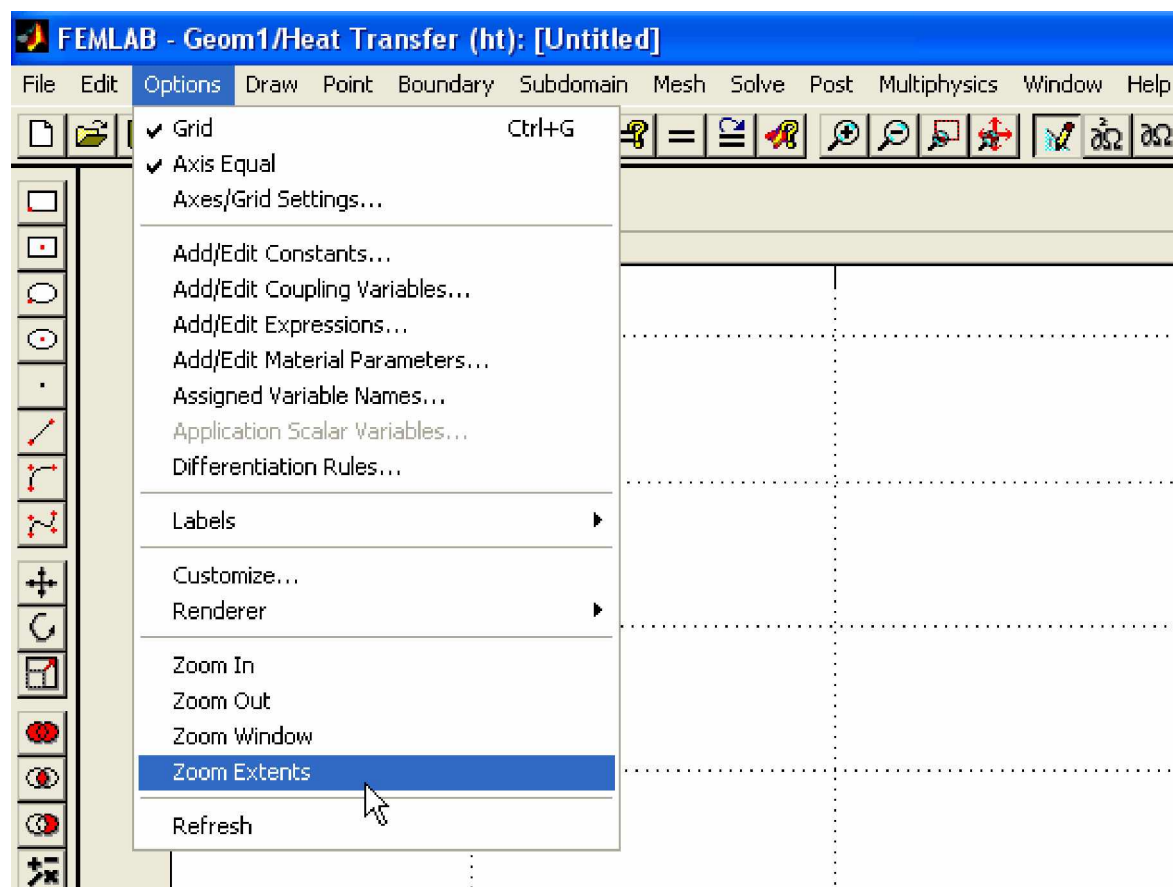
2.4.4 Přiblížení

Po editaci objektu nám Femlab automaticky nevystředí upravený objekt na celou obrazovku, ale ponechá ho v zobrazení, jako před editací (Obr. 14).



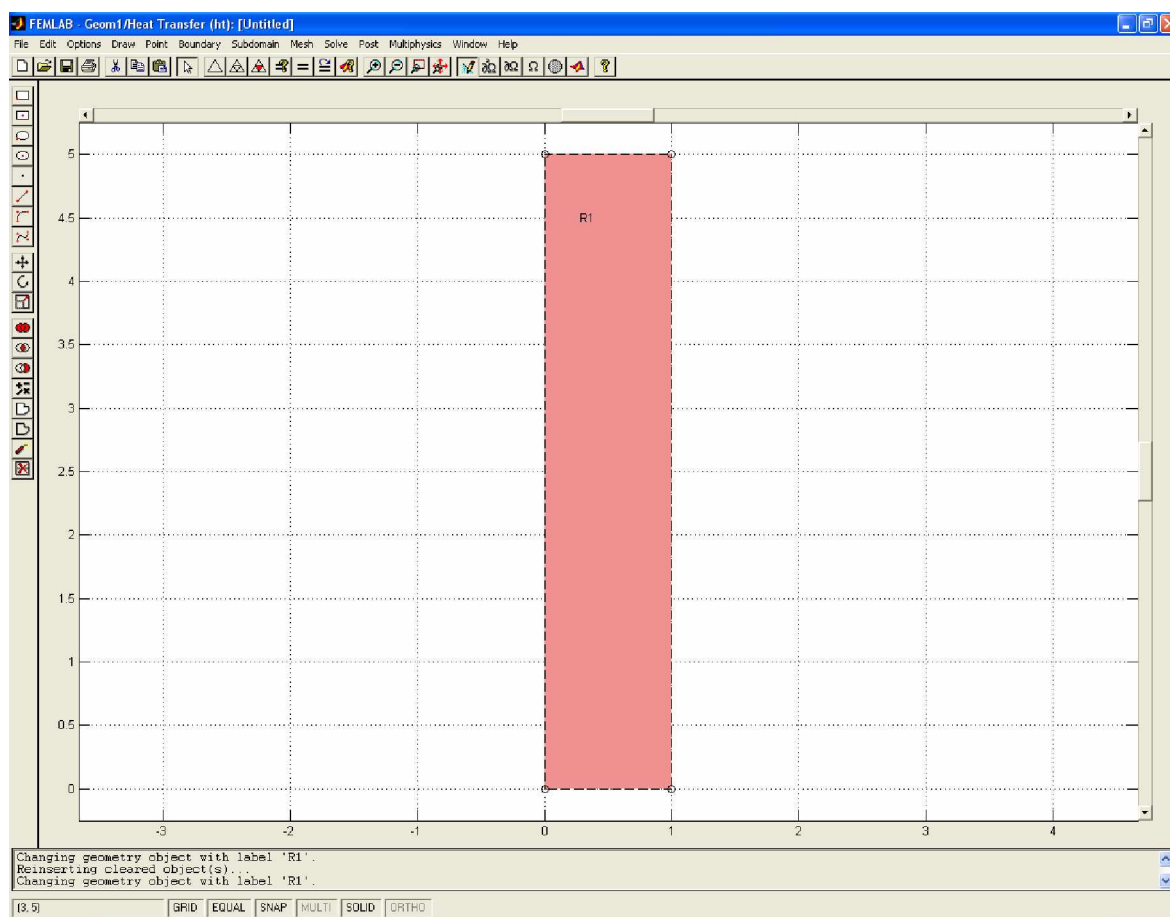
Obr. 13. Vlastnosti objektu

Pro zvětšení objektu na celou obrazovku použijeme nástroj *Zoom Extents*, který je umístěn v záložce *Options*. Tento nástroj editovaný objekt na obrazovce vystředí a zvětší, případně zmenší.



Obr. 14. Umístění záložky „Zvětšení na obrazovku“

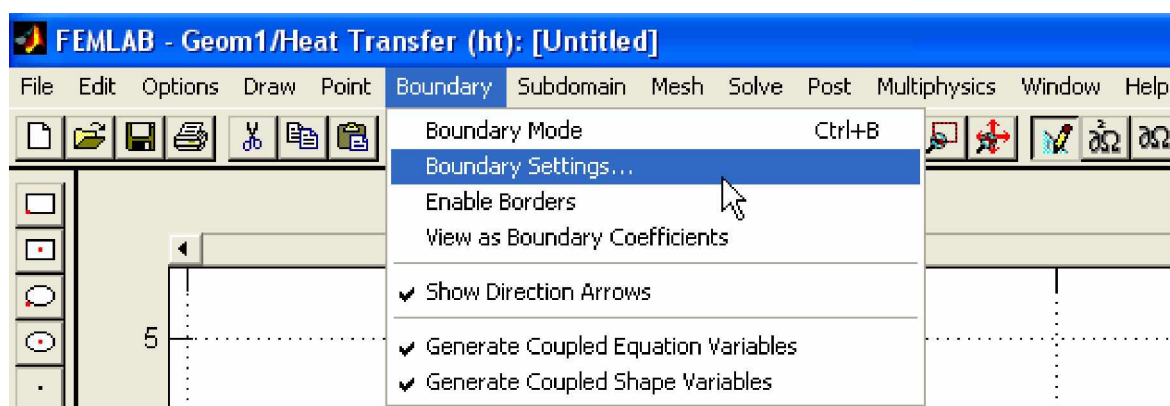
Po použití nástroje *Zoom Extents* bude na obrazovce objekt vypadat takto:



Obr. 15. Výsledné zobrazení objektu po použití nástroje *Zoom Extents*

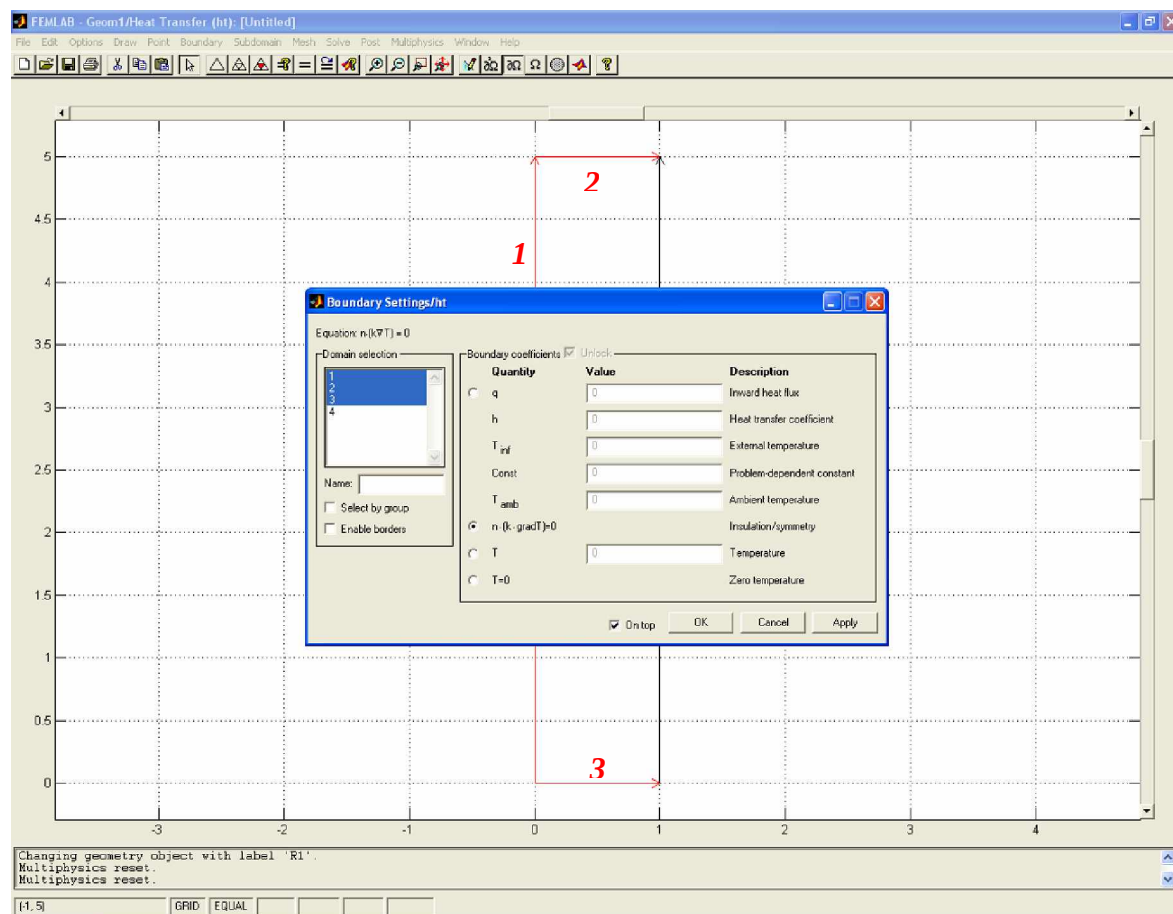
2.4.5 Nastavení okrajových podmínek

K nastavení okrajových podmínek na rozhraní objektu využijeme nástroje *Boundary settings*, umístěného v záložce *Boundary* [11].

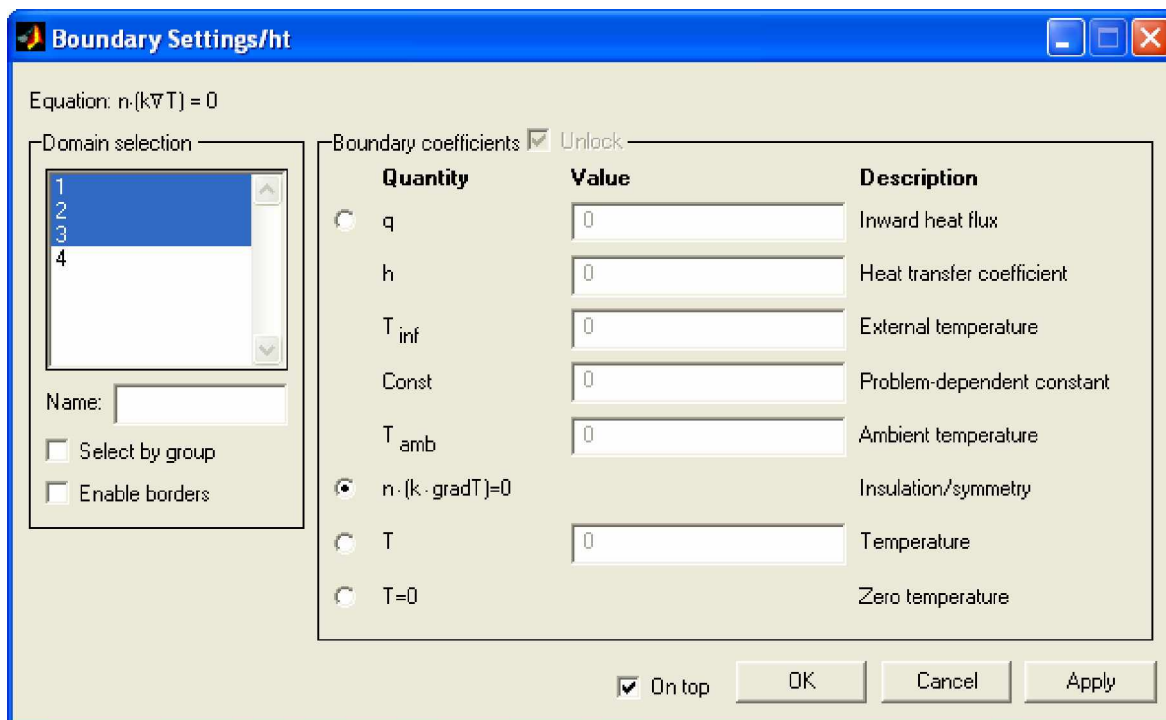


Obr. 16. Umístění nástroje *Boundary settings* pro nastavení okrajových podmínek

V rozhraní 1, 2, 3 jsou u nekonečné desky derivace rovny 0, proto musíme označit položku $n \cdot (k \cdot \text{grad}T) = 0$.

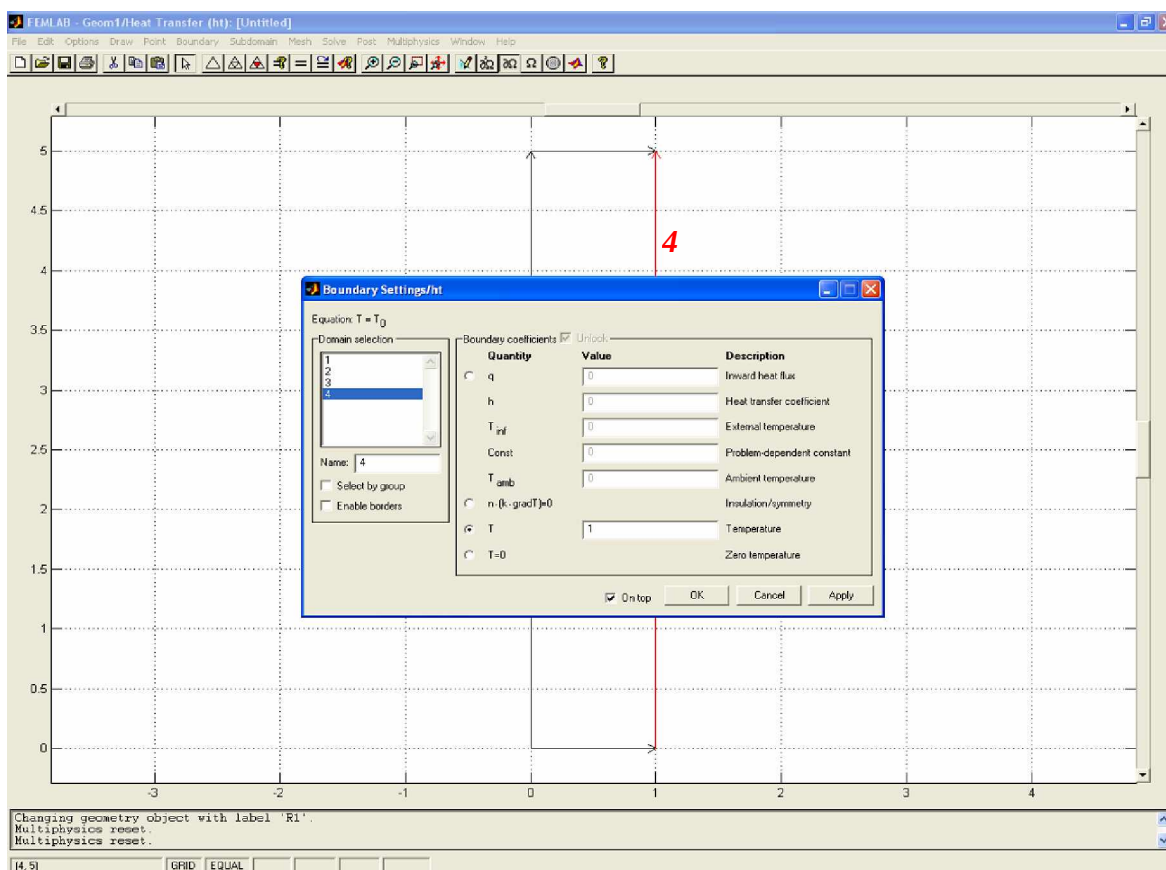


Obr. 17. Nadefinování okrajových podmínek v rozhraní 1, 2, 3

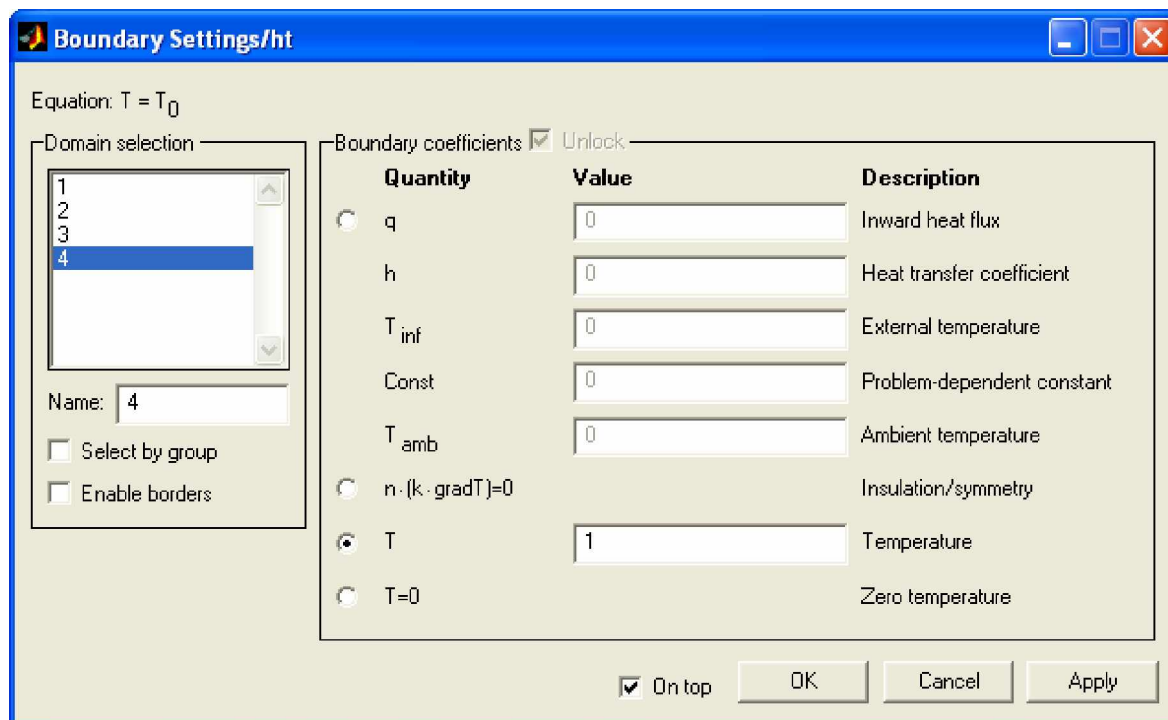


Obr. 18. Detail nastavení okrajových podmínek v rozhraní 1, 2, 3

U rozhraní 4 jsem si zvolil působení teploty 1K

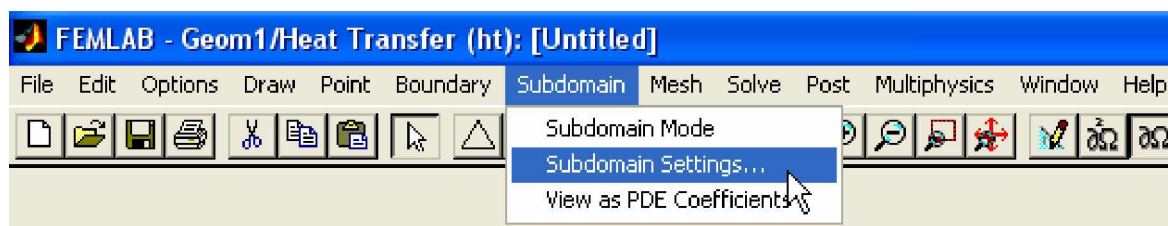


Obr. 19. Nastavení okrajové podmínky v rozhraní 4

Obr. 20. Detail nastavení okrajové podmínky v rozhraní 4, $T=1K$

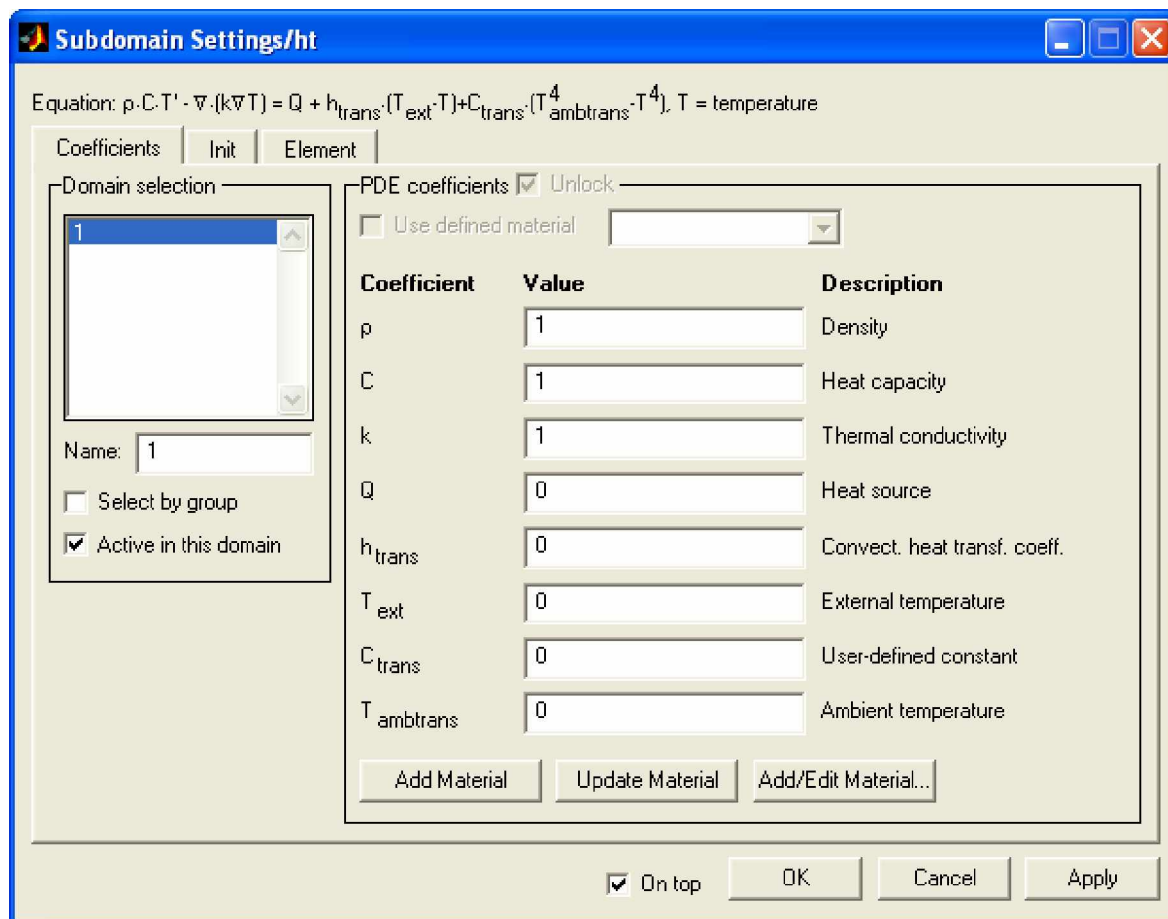
2.4.6 Nastavení počátečních podmínek

Záložka *Subdomain* obsahuje nástroj *Subdomain settings*, ve kterém se nastavují počáteční podmínky.

Obr. 21. Umístění nástroje *Subdomain settings* pro nastavení počátečních podmínek

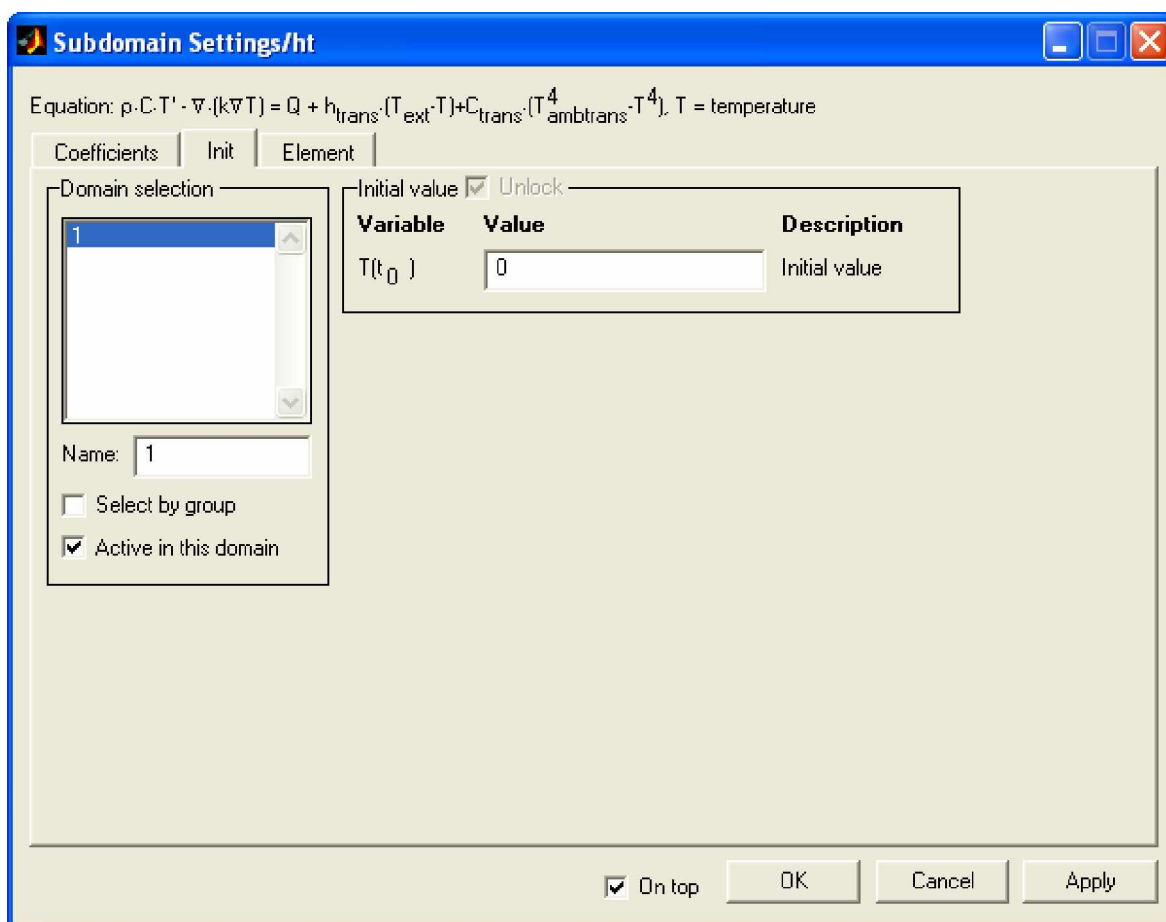
Po označení požadované oblasti v *Domain selection* v záložce *Coefficients* se zpřístupní nabídka pro zadání vlastností materiálu, jako je hustota (*Density*), tepelná kapacita (*Heat capacity*), tepelná vodivost (*Thermal conductivity*), zdroj tepla (*Heat source*), koeficient přestupu tepla (*Convect. heat transf. coeff.*), vnější teplota (*External temperature*), uživatelem definovaná konstanta (*User-defined constant*) a teplota okolí (*Ambient temperature*). Pod tlačítkem *Add/Edit Material* si uživatel může vybrat z předem

nadefinovaných materiálů. Pokud si uživatel nadefinuje nějaké vlastnosti materiálu, může si je stejným tlačítkem uložit, aby tyto vlastnosti příště nemusel zadávat znovu [11].



Obr. 22. Nadefinování vlastností materiálu pomocí nástroje *Subdomain settings*

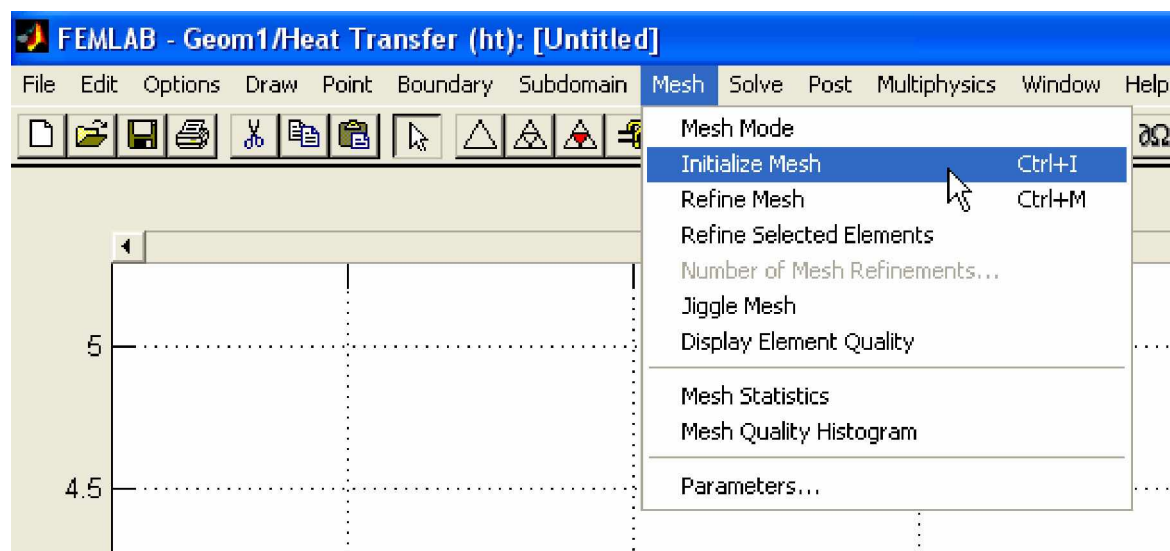
Na záložce *Init* se nastavuje počáteční teplota objektu.



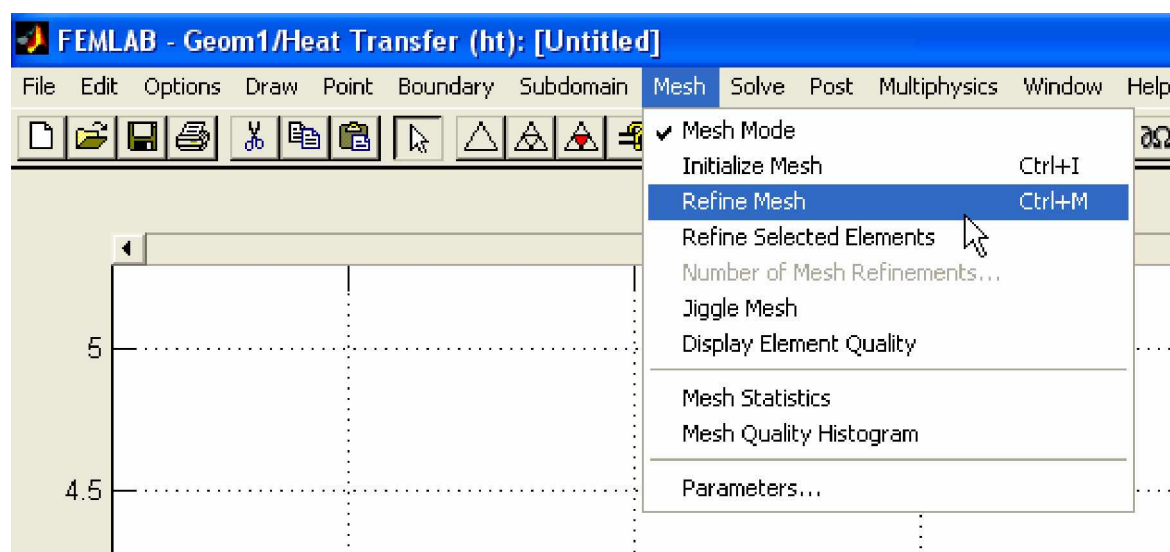
Obr. 23. Nastavení počáteční teploty objektu

2.4.7 Nastavení sítě

Program Femlab si automaticky volí nejmenší počet elementů sítě, který vyhovuje nakreslenému objektu. Pokud je to ale nutné, může si uživatel ručně nastavit parametry sítě.

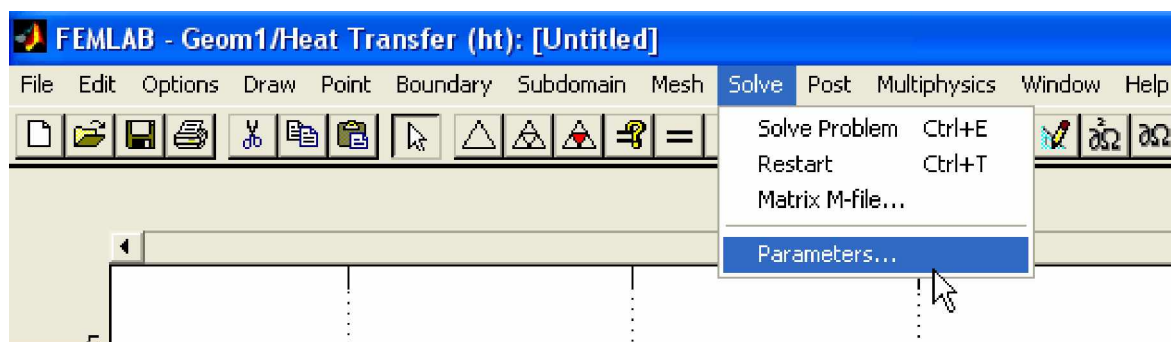
Obr. 24. Umístění záložky *Initialize mesh*

Nástrojem *Refine mesh* zvýšíme počet elementů sítě, tím se síť zjemní, a to vždy na čtyřnásobek předchozího počtu elementů.

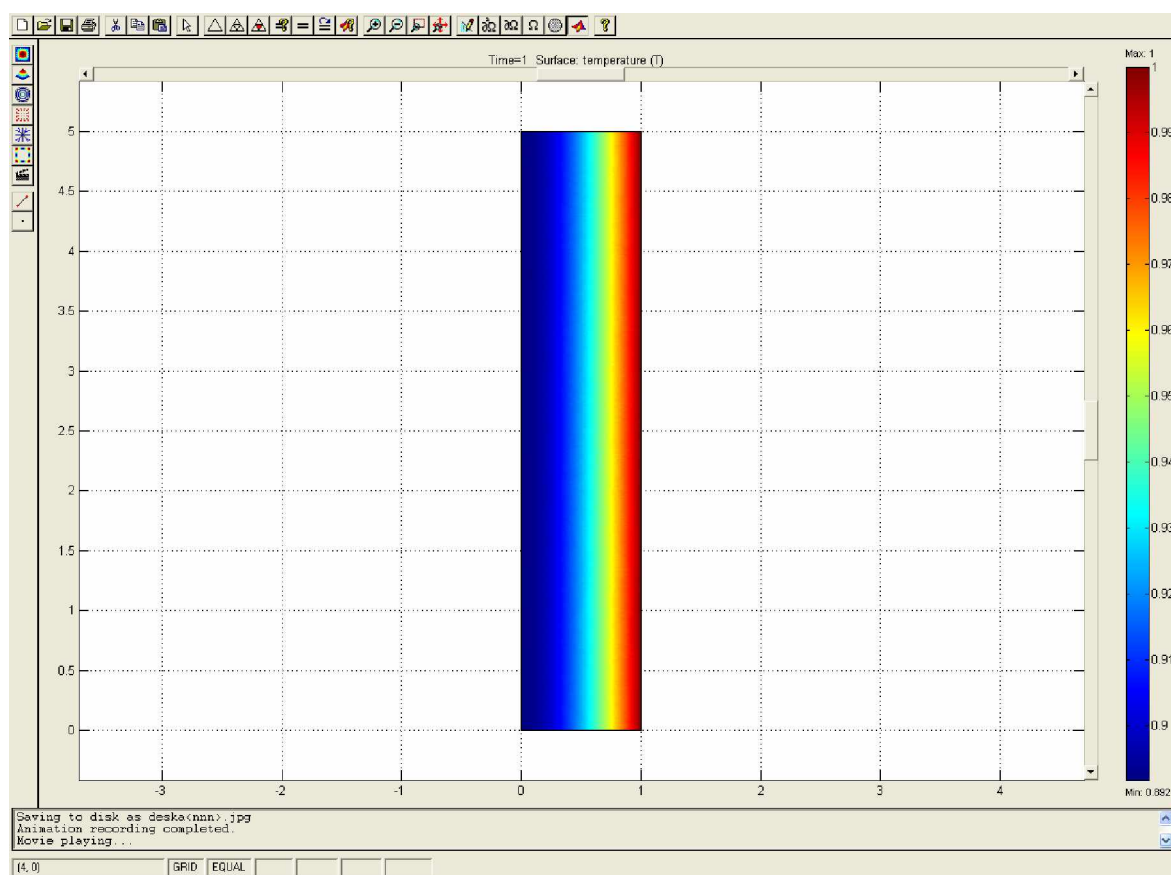
Obr. 25. Záložka *Refine mesh*

2.4.8 Řešení problému

Pro nastavení podmínek řešení využijeme položku *Parameters*, umístěnou v záložce *Solve*. Zde si v záložce *Timestepping* nadefinujeme *Output times*. Jedná se o zadání času na začátku děje, kroku a času na konci děje [11].

Obr. 26. Umístění záložky *Solve Parameters*

Pro výsledné řešení se zadanými parametry použijeme nástroj *Solve problem*.

Obr. 27. Výsledné řešení teplotního pole desky v čase $T=1$

2.5 Porovnání vypočtených hodnot a hodnot z programu Femlab

V následující tabulce je uvedeno srovnání analytických hodnot a hodnot z programu Femlab v závislosti na bezrozměrném Fourierově kritériu. Z odchylky těchto hodnot lze stanovit přesnost výpočtů programu Femlab na $1 \cdot 10^{-4}$.

Fo	Analytický	Femlab	Odchylka
0	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,05069	0,05068	-0,00001
0,2	0,22769	0,22794	0,00025
0,3	0,39320	0,39332	0,00012
0,4	0,52551	0,52541	-0,00010
0,5	0,62922	0,62907	-0,00015
0,6	0,71029	0,70998	-0,00031
0,7	0,77364	0,77321	-0,00043
0,8	0,82313	0,82272	-0,00041
0,9	0,86181	0,86146	-0,00035
1	0,89202	0,89176	-0,00026

Tab. 2. Porovnání analytických a numerických hodnot

2.6 Porovnání numerických hodnot v bodě ($x=0$, $Fo=0,5$) na počtu elementů sítě

Počet elementů sítě	Numerické hodnoty - Femlab	Analytické hodnoty	Odchylka	Relativní chyba
512	0,62908	0,62922	0,00014	0,00022
1024	0,63099	0,62922	-0,00177	-0,00281
2048	0,63109	0,62922	-0,00187	-0,00297
4096	0,63104	0,62922	-0,00182	-0,00289
8192	0,63111	0,62922	-0,00189	-0,00300
16384	0,63057	0,62922	-0,00135	-0,00215

Tab. 3. Závislost odchylek numerických hodnot programu Femlab a analytických hodnot na počtu elementů sítě

Program Femlab spolehlivě řeší problém i s malým počtem elementů sítě. U jiných programů založených na metodě konečných prvků většinou dochází se zvyšováním počtu elementů sítě ke konvergenci k přesnějším hodnotám.

ZÁVĚR

Diplomová práce obsahuje literární studii, ve které je popsán způsob realizace výroby, vlastností a využití aminoplastů. Při těchto způsobech výroby je rozhodující sdílení tepla, jenž má vliv na kvalitu finálního výrobku.

V další části je uvedeno konkrétní vypracování postupu výpočtu teplotních polí pro jednoduché úlohy s okrajovými podmínkami 1. nebo 3. druhu pro základní modely tvaru desky, válce a koule.

Dále je popsáno použití programu Femlab verze 2.3. Je zde vysvětleno nakreslení modelovaného objektu, zadávání počátečních a okrajových podmínek, nastavení počtu trojúhelníkových elementů sítě. Byla porovnána přesnost řešení v závislosti na počtu elementů sítě. Tato závislost se nepotvrdila. Při zvyšujícím se počtu elementů výsledky nekonvergovaly k přesnému analytickému řešení. I s malým počtem elementů vykazovaly výsledky vysokou relativní přesnost.

Program Femlab umožňuje import objektů nakreslených v aplikacích typu CAD a objekty se nemusí znovu překreslovat, čímž se výrazně zkrátí čas modelování. Tato verze programu Femlab je nadstavbou systému Matlab a je s tímto systémem plně kompatibilní.

V poslední části diplomové práce jsem provedl srovnání numerických hodnot teplotního pole vypočteného pomocí programu Femlab a přesných analytických hodnot. Tímto srovnáním bylo stanoveno, že relativní přesnost výpočtů programu Femlab je $1 \cdot 10^{-4}$.

Program Femlab má příjemné uživatelské prostředí, grafické výstupy jsou atraktivní. Předností je i animace sdílení tepla.

Nevýhodou programu Femlab je absence numerických hodnot řešení a u verze 2.3 závislost na systému Matlab, ale od verze 3 již může Femlab pracovat jako samostatný program, nebo může i nadále spolupracovat s Matlabem.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Šňupárek, J. a Černý, J. Aminoplasty. SNTL, Praha, 1963. ISBN 80-7300-020-2.
- [2] Veselý, K. Polymery. ČSPCH – pobočka Uniplast Brno, Brno, 1992. ISBN 80-02-00951-7
- [3] Mleziva, J. Polymery: výroba, struktura, vlastnosti a použití . Sobotáles, Praha, 1993. ISBN 80-901570-4-1.
- [4] Pilař, A. a kolektiv. Chemické inženýrství II. SNTL, Praha, 1964.
- [5] Kolomazník, K., Sedlář, J., Macháčková, A. Teorie technologických procesů III. VUT v Brně, Brno, 1978.
- [6] Sazima, M., Kmoníček, V., Schneller, J. a kolektiv. Teplo. SNTL, Praha, 1989. ISBN 80-03-00043-2
- [7] Kutateladze, S.S., Borišanskij, V.M. Příručka sdílení tepla. SNTL, Praha, 1962.
- [8] Kolat, P. Přenos tepla a hmoty. VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2001. ISBN 80-248-0003-9
- [9] Hejzlar, R. Sdílení tepla. ČVUT, Jaderná a fyzikálně inženýrská fakulta, Praha, 1999. ISBN 80-01-01982-9
- [10] Kolomazník, K. Modelování zpracovatelských procesů. VUT Brno, Brno, 1990. ISBN 80-214-0114-1
- [11] FEMLAB 2.3, manuál, školení FEMLAB 2.3, 2002.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

∂	parciální derivace	
α	součinitel přestupu tepla	$[\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}]$
a	teplotní vodivost uvažovaného prostředí	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
β	kořeny charakteristické rovnice	
Bi	Biotovo kritérium	
B_n	koeficienty nekonečné řady	
$c_{p\text{ PA6}}$	měrné teplo PA6	$[\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}]$
d	průměr vzorků	$[\text{m}]$
Δt	střední teplota	$[\text{K}]$
Fo	Fourierovo kritérium	
g	tíhové zrychlení	$[\text{ms}^{-1}]$
g_n	kořeny transcendentní rovnice	
Gr	Grashofovo kritérium	
J	Besselova funkce	
λ	součinitel tepelné vodivosti	$[\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$
l	poloviční tloušťka stěny	$[\text{m}]$
λ_{PA6}	součinitel tepelné vodivosti PA6	$[\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$
λ_v	součinitel tepelné vodivosti vzduchu	$[\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$
m	nenulová integrační konstanta	
∇	Laplaceův diferenciální operátor	
Nu	Nusseltovo kritérium	
ν_v	kinematická viskozita	$[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$
p, A, B, C	konstanta	
Pr	Prandtlovo kritérium	
q	kořeny transcendentní rovnice	
ρ	hustota materiálu	$[\text{kg m}^{-3}]$
R	poloměr	$[\text{m}]$
r	zvolené místo	$[\text{m}]$
ρ_{PA6}	hustota PA6	$[\text{kg m}^{-3}]$

ρ_v	hustota vzduchu	$[\text{kg m}^{-3}]$
s	tloušťka stěny	$[\text{m}]$
t	teplota	$[\text{K}]$
t_1	teplota v libovolném místě stěny v daném čase	$[\text{K}]$
t_{1p}	teplota počáteční	$[\text{K}]$
t_{max}	teplota maximální	$[\text{K}]$
t_{min}	teplota minimální	$[\text{K}]$
t_o	teplota okolního prostředí	$[\text{K}]$
x, y, z	globální souřadnice	$[\text{m}]$
τ	čas	$[\text{s}]$

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Reakce melaminu s formaldehydem.....	12
Obr. 2. Reakce močoviny s formaldehydem za vzniku methyloolmočoviny	13
Obr. 3. Konečná forma močovinoformaldehydových pryskyřic.....	13
Obr. 4. Průběh změny teploty s časem v chladičném válci.....	18
Obr. 5. Průběh teplotních profilů ve stěně	19
Obr. 6. Grafické stanovení kořenů rovnice (43).....	25
Obr. 7. Grafické určení kořenů transcendentní rovnice (69).....	30
Obr. 8. Grafické určení kořenů transcendentní rovnice (98).....	35
Obr. 9. Model Navigator.....	41
Obr. 10. Kreslící nástroje	41
Obr. 11. Umístění záložky „Vlastnosti objektu“	42
Obr. 12. Vlastnosti objektu	42
Obr. 13. Vlastnosti objektu	43
Obr. 14. Umístění záložky „Zvětšení na obrazovku“	44
Obr. 15. Výsledné zobrazení objektu po použití nástroje <i>Zoom Extents</i>	45
Obr. 16. Umístění nástroje <i>Boundary settings</i> pro nastavení okrajových podmínek	45
Obr. 17. Nadefinování okrajových podmínek v rozhraní 1, 2, 3	46
Obr. 18. Detail nastavení okrajových podmínek v rozhraní 1, 2, 3	47
Obr. 19. Nastavení okrajové podmínky v rozhraní 4	47
Obr. 20. Detail nastavení okrajové podmínky v rozhraní 4, $T=1K$	48
Obr. 21. Umístění nástroje <i>Subdomain settings</i> pro nastavení počátečních podmínek.....	48
Obr. 22. Nadefinování vlastností materiálu pomocí nástroje <i>Subdomain settings</i>	49
Obr. 23. Nastavení počáteční teploty objektu	50
Obr. 24. Umístění záložky <i>Initialize mesh</i>	51
Obr. 25. Záložka <i>Refine mesh</i>	51
Obr. 26. Umístění záložky <i>Solve Parameters</i>	52
Obr. 27. Výsledné řešení teplotního pole desky v čase $T=1$	52

SEZNAM TABULEK

Tab. 1. Výpočet teploty v kouli.....	38
Tab. 2. Porovnání analytických a numerických hodnot	53
Tab. 3. Závislost odchylek numerických hodnot programu Femlab a analytických hodnot na počtu elementů sítě	53