

Ověření klasických metod návrhů regulátorů

Analysis of classical controller
design methods

Bilenný Zdeněk

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická

Vložit oficiální zadání diplomové/bakalářské práce

Dovoluji si tímto poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu prof. Ing. Romanu Prokopovi, CSc, za odborné vedení, rady a za čas, který mi věnoval při zpracování této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 01. 06. 2005

.....

jméno diplomanta

Abstrakt

Zpětnovazební smyčka je hlavním a základním prostředkem pro řízení v teorii i v aplikacích. Převažující většina technologických procesů je osazena známými a slavnými PID regulátory a to již mnohá desetiletí. Tyto regulátory potřebují nastavit tři parametry a to proporcionální, integrační a derivační. Metody pro toto nastavení jsou předmětem zájmu a zkoumání dlouhou dobu. Tato práce se zabývá implementací a porovnáním některých z nich. V první řadě jsou to metody Ziegler – Nicholsova nastavení. V druhé řadě jsou to metody standardních tvarů a v třetí řadě jde o parametrické metody. Implementace metod byla provedena v prostředí Simulink, byla vykonána řada simulací a pro komparační analýzu bylo vykonáno řízení systému třetího řádu.

Abstract

Feedback control loops have been main and basic tools in control theory and application for many decades. Majority of technological processes is controlled by well known and celebrated PID controllers which need tuning of three parameters, proportional, integrating and derivative ones. The interesting and deeply studied question in this field is the problem how to adjust effectively but simply these parameters. There are many methods for PID controller design. This work is focused on analysis and comparison of some of them. The first class is based on Ziegler – Nichols methods. Then Whiteley and further standard form methods are studied. The third class deals with parametric methods. Simulation programs are performed in Simulink environment and a special example of the third order is analyzed for comparison.

OBSAH

ÚVOD	7
1 LSDS A ZPĚTNÁ VAZBA.....	8
1.1 LSDS.....	8
1.2 ZPĚTNÁ VAZBA	9
2 METODY ZIEGLER – NICHOLSOVY	11
2.1 NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ Z KRITICKÝCH HODNOT.....	11
2.1.1 Popis metodiky.....	11
2.1.2 Vzorové příklady	12
2.1.3 Zhodnocení	17
2.2 NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ NA ZÁKLADĚ ZNALOSTI PŘECHODOVÉ CHARAKTERISTIKY REGULOVANÉ SOUSTAVY	18
2.2.1 Popis metodiky.....	18
2.2.2 Vzorové příklady	18
2.2.3 Zhodnocení	23
2.3 NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ POMOCÍ METOD CHR1 A CHR2	23
2.3.1 Popis metodiky.....	23
2.3.2 Vzorové příklady	24
2.3.3 Zhodnocení	28
3 METODY STANDARDNÍCH TVARŮ	30
3.1 WHITELEYOVY STANDARDNÍ TVARY.....	30
3.1.1 Popis metodiky.....	30
3.1.2 Vzorové příklady	31
3.1.3 Zhodnocení	39
3.2 BUTTERWORTHOVY STANDARDNÍ TVARY.....	40
3.2.1 Popis metodiky.....	40
3.2.2 Vzorové příklady	41
3.3 GRAHAMOVY A LATHROPOVY STANDARDNÍ TVARY.....	45
3.3.1 Popis metodiky.....	45
3.3.2 Vzorové příklady	46
3.3.3 Zhodnocení	52
4 PARAMETRICKÉ METODY.....	53
4.1 NASLINOVA METODA.....	53

4.1.1	Popis metodiky	53
4.1.2	Vzorové příklady	53
4.1.3	Zhodnocení	69
4.2	SEŘÍZENÍ REGULÁTORU POMOCÍ METODY POLOVIČNÍHO TLUMENÍ...	70
4.2.1	Popis metodiky	70
4.2.2	Vzorové příklady	71
4.2.3	Zhodnocení	76
5	POROVNÁVACÍ ANALÝZA.....	77
5.1	NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORU POMOCÍ KRITICKÝCH HODNOT.....	77
5.2	NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ NA ZÁKLADĚ ZNALOSTI PCH	78
5.3	NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ POMOCÍ METOD CHR1 A CHR2	78
5.4	NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ POMOCÍ METOD STANDARDNÍCH TVARŮ	80
5.5	NASTAVENÍ PARAMETRŮ REGULÁTORŮ POMOCÍ NASLINOVY METODY	84
5.6	ZHODNOCENÍ.....	87
	ZÁVĚR	88
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	89
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	90
	SEZNAM OBRÁZKŮ.....	91
	SEZNAM TABULEK	93
	SEZNAM PŘÍLOH	94

ÚVOD

Zpětnovazební řízení a regulátory patří za poslední století k významným úspěchům lidského poznání a vyspělé techniky. Nejúčinnější způsob, jak změnit dynamiku daného systému je zpětná vazba. Bez účinného automatického řízení si v dnešní době nelze představit správnou funkci většiny technologických procesů, ale i řízení vozidel, lodí, letadel a dalších objektů. Od 30.let minulého století k nejfrekventovanějším zpětnovazebním regulátorům patří PID regulátory. Tyto mají složky proporcionální, derivační a integrační. Udává se, že téměř 90 % technologických regulačních smyček je osazeno právě PID regulátory. Tedy pro efektivní a účinnou funkci takového regulátoru je potřeba nastavit (naladit) tyto tři parametry. Postup, jakým se to udělá, se nazývá syntézou regulátoru.

V průběhu mnoha desetiletí se hledaly postupy a metody, jak nalézt správné a přijatelné hodnoty pro nastavení parametrů regulátorů. Existuje několik desítek těchto metod, mezi nimi zajisté významné metody nesou jména Ziegler a Nichols. Tyto metody vycházejí buď z kritických hodnot obvodu na hranici stability nebo ze znalosti přechodové charakteristiky. Jejich výjimečnost je dána dvěma vlastnostmi. V první řadě nepotřebují znalost přenosu řízeného objektu, v druhé řadě nepotřebují komplikované odvození. Ziegler-Nicholsovy metody se úspěšně využívají několik desetiletí.

Další skupinu metod tvoří metody standardních tvarů. Patří sem jména Whiteley, Butterworth, Graham a Lathrop a některá další. Každé jméno je spjato s jinou metodikou a filozofií, jak pracovat s charakteristickým polynomm uzavřeného regulačního obvodu. Metody jsou formulovány ve tvaru tabulek, vyžadují znalost přenosu řízeného objektu a jsou vhodné zejména pro ruční výpočet.

Třetí skupinu klasických metod nastavení PID regulátorů tvoří další parametrické metody. Mezi ně zajisté patří metody Naslina a polovičního tlumení.

Předložená práce je věnována implementaci a analýze uvedených metod, a to ze dvou pohledů. V první řadě ověřuje, zda pro vybrané systémy zajišťují tyto metody regulační chování, které se od nich dle literatury a referencí očekává. V druhé řadě jde o komparativní analýzu, tedy srovnání jak jednotlivé metody řídí jediný systém, jaké překmity, kmitavost nebo dobu regulace jednotlivá nastavení poskytují. Je uvedena řada příkladů a vzorových řešení pro studované metody. Simulační ověřovací experimenty jsou provedeny v prostředí Simulink.

1 LSDS A ZPĚTNÁ VAZBA

1.1 LSDS

LSDS – lineárně spojité dynamické systémy, jsou systémy s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou, které se chovají dle lineární diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t), \quad (1)$$

kde a_i, b_i jsou konstantní reálné koeficienty, $u(t)$ je vstupní veličina, $y(t)$ je výstupní veličina. Z podmínky fyzikální realizovatelnosti platí $m < n$.

Další možností vnějšího popisu LSDS jsou přenos systému, poloha nul a pólů, přechodová funkce nebo charakteristika, impulsní funkce, frekvenční charakteristiky.

Přenos systému je definován jako racionálně lomená funkce $G(s)$, která vznikne jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny v čitateli a vstupní veličiny ve jmenovateli při nulových počátečních podmínkách. Přenos lze vyjádřit pomocí koeficientů z (1) nebo ho lze popsat pomocí kořenů těchto polynomů, tedy pomocí pólů a nul ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{b_m(s-n_1)\dots(s-n_j)\dots(s-n_m)}{a_n(s-s_1)\dots(s-s_i)\dots(s-s_n)}, \quad (2)$$

kde póly (s_i) jsou kořeny jmenovatele a nuly (n_i) jsou kořeny čitatele přenosu.

Přechodová funkce označovaná $h(t)$, je odezva systému na jednotkový skok při nulových počátečních podmínkách. Přechodová charakteristika je grafické znázornění přechodové funkce. Časovou přechodovou funkci lze pomocí přenosu vyjádřit

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (3)$$

Impulsní funkce označovaná $i(t)$, je odezva systému na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách. Impulsní charakteristika je grafické znázornění impulsní funkce. Mezi přechodovou a impulsní funkcí platí jednoduchý vztah

$$i(t) = h'(t) \quad (4)$$

Frekvenční funkce označována $G(j\omega)$, je podíl Fourierova obrazu výstupní veličiny systému a Fourierova obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách. Frekvenční přenos získáme z přenosu v Laplaceově transformaci (1) formální změnou

$$\text{proměnných } s \rightarrow j\omega: G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0} \quad (5)$$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině je zobrazení frekvenční funkce v komplexní rovině pro $\omega \in < 0; \infty$. Pro sestavení frekvenční charakteristiky rozdělíme frekvenční přenos (5) na složkový tvar komplexního čísla dle

$$G(j\omega) = \text{Re} \cdot G(j\omega) + j \text{Im} \cdot G(j\omega) \quad (6)$$

a graf této komplexní funkce nazýváme amplitudově fázovou frekvenční charakteristikou – Nyquistova křivka. Logaritmická frekvenční charakteristiky (Bodeho křivky) spočívají v odděleném zobrazení amplitudy a fáze komplexní funkce (6), tedy jde o rozdělení frekvenčního přenosu (5) na amplitudovou a fázovou charakteristiku podle vztahu

$$G(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + j \text{Im}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (7)$$

kde pro amplitudu a fázi platí

$$A(\omega) = \sqrt{(\text{Re}(\omega))^2 + (\text{Im}(\omega))^2} \text{ a } \varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \quad (8)$$

Absolutní hodnota frekvenčního přenosu se obvykle udává v decibelech, jako podíl $20 \log_{10} \frac{y_0}{u_0}$, kde y_0 je amplituda výstupního harmonického signálu, u_0 je amplituda vstupního harmonického signálu.

LSDS lze také vyjádřit vnitřním neboli stavovým popisem, čímž rozumíme náhradu diferenciální rovnice n -tého řádu diferenciální rovnicí prvního řádu, tedy k přenosu

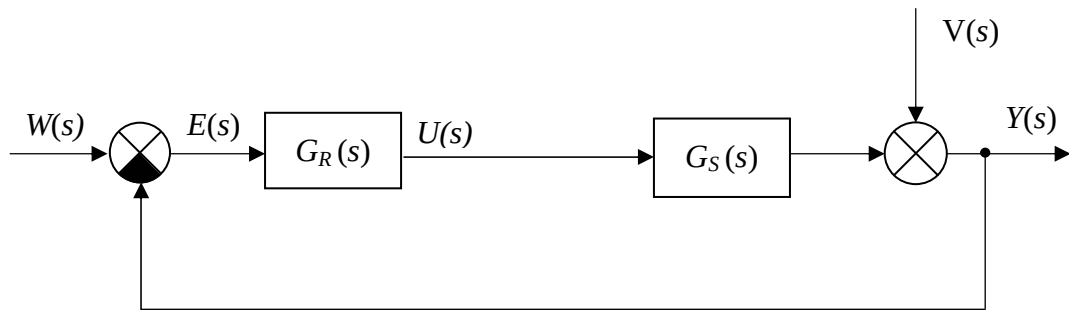
$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ je potřeba nalézt čtveřici reálných matic $\{F, G, H, L\}$ tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Lu(t) \end{aligned} \quad (9)$$

kde $x(t)$ je vektor stavových veličin

1.2 Zpětná vazba

Zpětná vazba je v současnosti nejpoužívanější prostředkem regulace. Základní zapojení zpětnovazebního regulačního obvodu vidíme na (Obr.1). Výstupní veličina $Y(s)$ je porovnávána se žádanou veličinou $W(s)$ pomocí porovnávacího členu. Výsledkem je regulační odchylka $E(s)$, na její základě regulátor, popsáný přenosem $G_R(s)$, ovlivňuje regulovanou soustavu, popsanou přenosem $G_S(s)$, pomocí akční veličiny $U(s)$. Na regulovanou soustavu působí poruchová veličina $V(s)$.



Obr.1: Schéma uzavřeného regulačního obvodu

Cílem řízení je, aby výstupní veličina byla rovna veličině žádané, tedy abychom v ustáleném stavu dosáhli nulové regulační odchylky: $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Ke známu regulované

soustavě $G_S(s)$ tedy hledáme regulátor $G_R(s)$ tak, aby celý zpětnovazební obvod (Obr. 1) byl stabilní. To je ekvivalentní podmínce, aby jmenovatel (charakteristický polynom)

přenosu $K_{w,y} = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)}$ byl stabilní. Tedy kořeny jmenovatele tohoto přenosu musí

ležet v levé části komplexní roviny.

Jako regulátor $G_R(s)$ může působit různý LSDS, nejčastěji však jde o regulátor typu PID.

Tento se skládá z proporcionální, derivační a integrační části nebo jejich kombinací.

Proporcionální zpětná vazba je charakterizována přenosem: $G_R(s) = k$.

Proporcionálně integrační regulátor je popsán přenosem $G_R(s) = \frac{1}{ks} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$, kde r_{-1}

je integrační konstanta.

Proporcionálně derivační regulátor je popsán přenosem $G_R(s) = \frac{1}{k} = r_0 + r_1 s$, kde r_1 je

derivační konstanta.

Proporcionálně integrační derivační (PID) regulátor je popsán přenosem

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s.$$

2 METODY ZIEGLER – NICHOLSOVY

2.1 Nastavení parametrů regulátorů z kritických hodnot

2.1.1 Popis metodiky

Původně se jednalo o čistě empirickou metodu pro nastavení stavitelných parametrů regulátorů. Metodě se také říká metoda kritického zesílení regulátoru. Základní myšlenkou je přivést regulační obvod na hranici stability, do tzv. kritického stavu. Toho dosáhneme připojením regulátoru, který pracuje pouze s proporcionální složkou (nastavení r_0), integrační a derivační složky jsou tedy vyřazeny nastavením $T_I = \infty$ a $T_D = 0$, resp. $r_{-1} = 0$ a $r_1 = 0$. Vlivem proporcionální složky se zvyšuje zesílení regulátoru k_R , resp. r_0 , až do doby, kdy obvod začne kmitat s konstantní amplitudou. Zesílení regulátoru, při kterém se tak stane, nazýváme kritickým zesílením $k_R = k_{Rk}$, resp. $r_0 = r_{0k}$ a periodu kritických kmitů $T = T_k$. To jsou tzv. kritické hodnoty, které dosazujeme do empirických vztahů pro jednotlivé typy regulátoru (viz. Tab.2.1) a vypočteme tak jejich stavitelné parametry.

Tab.2.1: Seřízení spojitého regulátorů z kritických hodnot regulátoru viz [1]

Typ regulátoru	$G_R(s) = k_R(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$			$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$		
	$k_R = k_{Rk}$	T_I	T_D	r_0	r_{-1}	r_1
P	$0.5k_{Rk}$	-	-	$0.5r_{0k}$	-	-
PI	$0.45k_{Rk}$	$\frac{T_k}{1.2}$	-	$0.45r_{0k}$	$\frac{0.54r_{0k}}{T_k}$	-
PD	$0.5k_{Rk}$	-	$0.05T_k$	$0.5r_{0k}$	-	$0.02r_{0k} \cdot T_k$
PID	$0.6k_{Rk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$	$0.6r_{0k}$	$\frac{1.2r_{0k}}{T_k}$	$0.075r_{0k} \cdot T_k$

2.1.2 Vzorové příklady

Příklad 2.1:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ (10)

Nejprve nastavíme pouze proporcionální složku regulátoru, proto přenos regulátoru bude:

$$G_R(s) = r_0 \quad (11)$$

Přenos řízení je pak: $G_{w,y}(s) = \frac{G(s) \cdot G_R(s)}{1 + G(s) \cdot G_R(s)} = \frac{6r_0}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 6r_0)}$ (12)

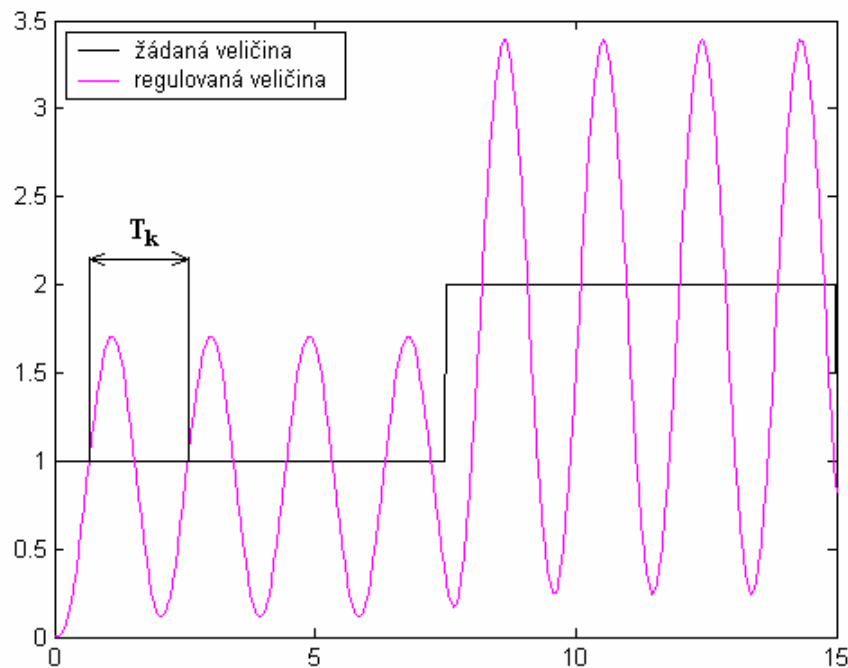
Charakteristický polynom získáme ze jmenovatele přenosu řízení:

$$F(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 6r_0) \quad (13)$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru r_{0k} použijí Hurwitzova kritéria:

$$H_s = \begin{vmatrix} 6 & (6 + 6r_0) & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & (6 + 6r_0) \end{vmatrix}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6 & (6 + 6r_0) \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 66 - 6 - 6r_0 \Rightarrow r_0 = 10$$



Obr.2.1: Po nastavení proporcionální složky regulátoru

Je vidět, že jsme regulačním obvod přivedli do tzv. kritického stavu, tj. na hranici stability. Nyní tedy můžeme odečíst periodu kritických kmitů.

Odečtená hodnota periody kritických kmitů: $T_k = 1.895$

Další možností jak získat T_k je pomocí výpočtu a to následujícím způsobem:

Uurčíme úhlový kmitočet dosazením $s = j\omega$ do charakteristického polynomu:

$$F(j\omega) = (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 66 \quad (14)$$

$$F(j\omega) = (66 - 6\omega^2) - j(\omega^3 - 11\omega)$$

$$66 - 6\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_k = \sqrt{11}$$

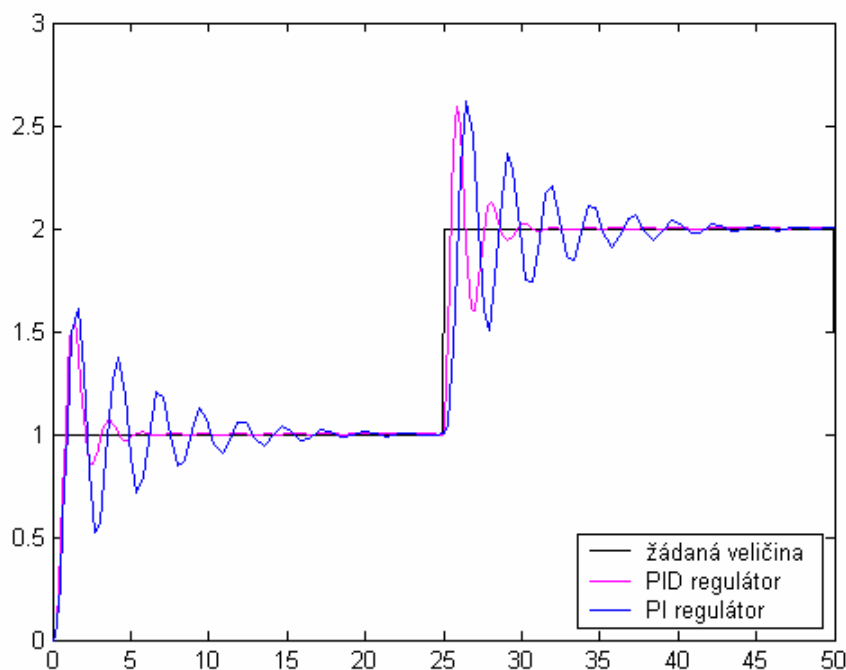
$$\text{Pro } r_{0k} \text{ obvod kmitá: } T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 1.8945$$

Oběma způsoby jsme dosáhli obdobné hodnoty periody kritických kmitů. Dále budeme počítat s hodnotou $T_k = 1.8945$.

Pro parametry PI regulátoru podle Tab.2.1 platí:	$r_0 = 0.45r_{0k}$ $r_{-1} = \frac{0.54r_{0k}}{T_k}$
$r_0 = 4.5$	$r_{-1} = 2.85$

Pro parametry PID regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$$\begin{array}{lll} r_0 = 0.6r_{0k} & r_{-1} = 1.2 \frac{r_{0k}}{T_k} & r_1 = 0.075r_{0k}T_k \\ r_0 = 6 & r_{-1} = 6.33 & r_1 = 1.42 \end{array}$$



Obr.2.11: Průběh regulace navržených regulátorů

Příklad 2.11:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{0.3s + 2.5}{s^3 + 0.2s^2 + 2s + 0.2}$ (15)

Opět stejně jako v příkladu 2.1 nastavíme pouze proporcionální složku regulátoru, proto přenos regulátoru bude: $G_R(s) = r_0$ (16)

Přenos řízení tedy bude: $G_{w,y}(s) = \frac{0.3r_0s + 2.5r_0}{s^3 + 0.2s^2 + (2 + 0.3r_0)s + (0.2 + 2.5r_0)}$ (17)

Získali jsme charakteristický polynom:

$$F(s) = s^3 + 0.2s^2 + (2 + 0.3r_0)s + (0.2 + 2.5r_0) \quad (18)$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru r_{0k} opět použijeme Hurwitzova kritéria a stejným postupem výpočtu jako v příkladu 2.1 získáme: $r_0 = 0.08197$

Uřídíme úhlový kmitočet dosazením $s = j\omega$ do charakteristického polynomu:

$$F(j\omega) = (j\omega)^3 + 0.2(j\omega)^2 + 2.0246j\omega + 0.4049 \quad (19)$$

$$F(j\omega) = (0.4049 - 0.2\omega^2) - j(\omega^3 - 2.0246\omega) \quad (20)$$

$$0.4049 - 0.2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_k = \sqrt{2.0246} \quad (21)$$

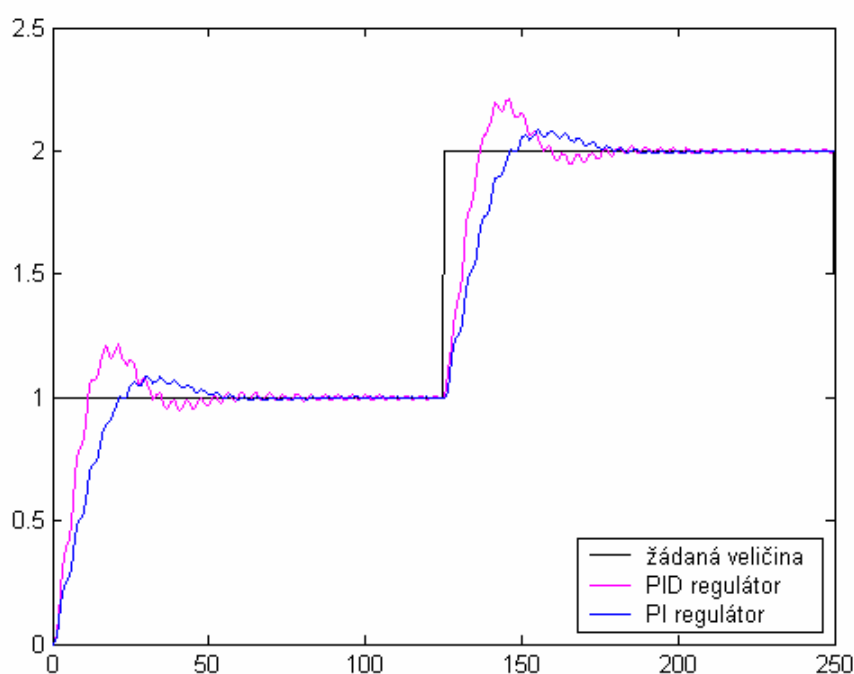
Pro r_{0k} obvod kmitá: $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 4.4158$

Pro parametry PI regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.45r_{0k}$	$r_{-1} = \frac{0.54r_{0k}}{T_k}$
$r_0 = 0.037$	$r_{-1} = 0.01$

Pro parametry PID regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.6r_{0k}$	$r_{-1} = 1.2 \frac{r_{0k}}{T_k}$	$r_1 = 0.075r_{0k}T_k$
$r_0 = 0.049$	$r_{-1} = 0.022$	$r_1 = 0.027$



Obr.2.12: Průběh regulace navržených regulátorů

Příklad 2.12:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$ (22)

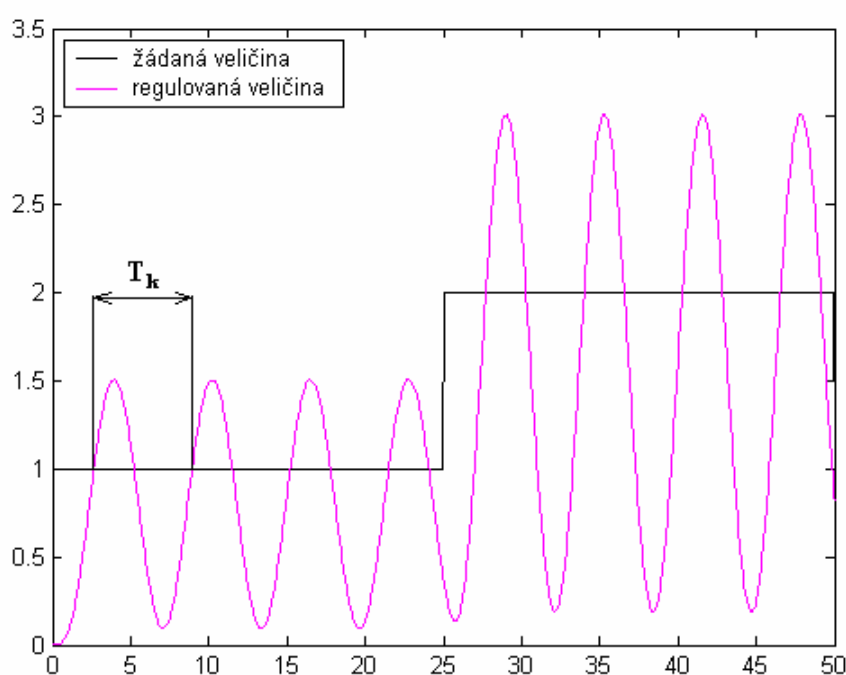
Přenos regulátoru : $G_R(s) = r_0$ (23)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{r_0}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + (1 + r_0)}$ (24)

Získali jsme charakteristický polynom:

$$F(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + (1 + r_0) \quad (25)$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru r_{0k} použijeme stejně jako v předchozích příkladech (2.1, 2.12) Hurwitzova kritéria a získáme: $r_0 = 4$



Obr.2.13: Po nastavení proporcionální složky regulátoru

Je vidět, že jsme regulačním obvod přivedli do tzv. kritického stavu, tj. na hranici stability.

Nyní tedy můžeme odečíst periodu kritických kmitů.

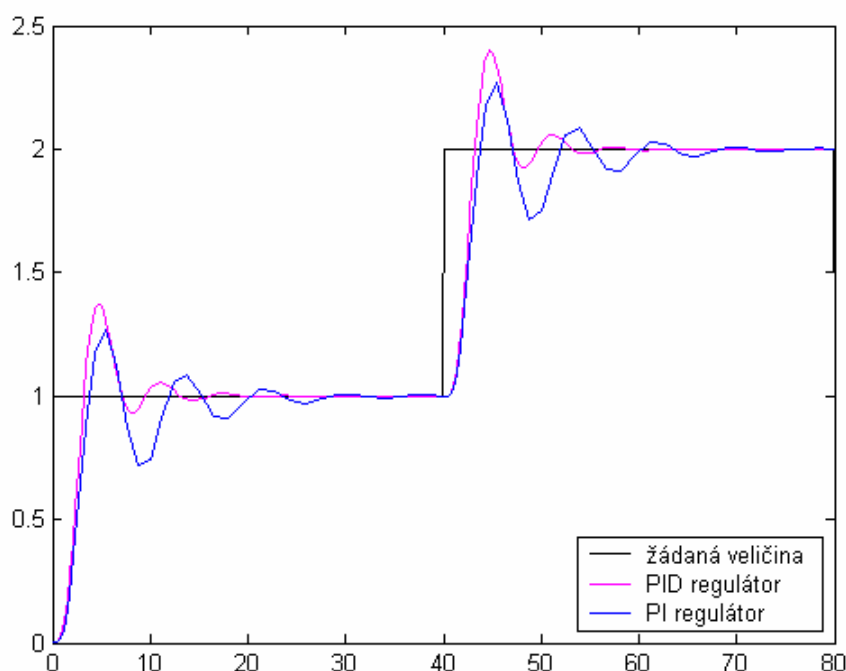
Odečtená hodnota periody kritických kmitů: $T_k = 6.3$

Pro parametry PI regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.45r_{0k}$	$r_{-1} = \frac{0.54r_{0k}}{T_k}$
$r_0 = 1.8$	$r_{-1} = 0.34$

Pro parametry PID regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.6r_{0k}$	$r_{-1} = 1.2 \frac{r_{0k}}{T_k}$	$r_1 = 0.075r_{0k}T_k$
$r_0 = 2.4$	$r_{-1} = 0.76$	$r_1 = 1.89$



Obr.2.14: Průběh regulace navržených regulátorů

2.1.3 Zhodnocení

Metoda natavení parametrů regulátorů z kritických hodnot vychází z nastavení obvodu na hranici stability, která je velmi riziková, což je jedna z nevýhod této metodiky. Metodiku nelze použít na systémy 1. a 2. řádu bez dopravního zpoždění, které nelze P regulátorem rozkmitat.

2.2 Nastavení parametrů regulátorů na základě znalosti přechodové charakteristiky regulované soustavy

2.2.1 Popis metodiky

Při této metodě odečteme z odměřené přechodové charakteristiky regulované soustavy dobu průtahu T_u , dobu náběhu T_n a zesílení K . Odečtené hodnoty poté dosazujeme do empirických vztahů pro jednotlivé typy regulátoru (viz. Tab.2.2) a vypočteme tak jejich stavitelné parametry.

Tab.2.2: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz[1]

Typ regulátoru	$k_R = r_0$	T_I	T_D
P	$\frac{T_n}{T_u} \frac{1}{K}$	-	-
PI	$0.9 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{K}$	$3.5T_u$	-
PD	$1.2 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{K}$	-	$0.25T_u$
PID	$1.25 \frac{T_n}{T_u} \frac{1}{K}$	$2T_u$	$0.5T_u$

2.2.2 Vzorové příklady

Příklad 2.2:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ (26)

Nejprve provedeme výpočet přechodové charakteristiky:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (27)$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right\} \quad (28)$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \right\} \quad (29)$$

Úprava parciálních zlomků a určení koeficientů A,B,C:

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \quad (30)$$

$$1 = A(s^2 + 3s + 2) + B(s^2 + 2s) + C(s^2 + s) \quad (31)$$

$$0 = A + B + C$$

$$0 = 3A + 2B + C \quad (32)$$

$$1 = 2A$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Přechodová charakteristika: } h(t) = 0.5 - e^{-t} - 0.5e^{-2t} \quad (33)$$

Nyní určíme inflexní bod, ve kterém budeme konstruovat tečnu:

$$h(t)'' = -e^{-t} + 2e^{-2t} \quad (34)$$

$$-e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$$

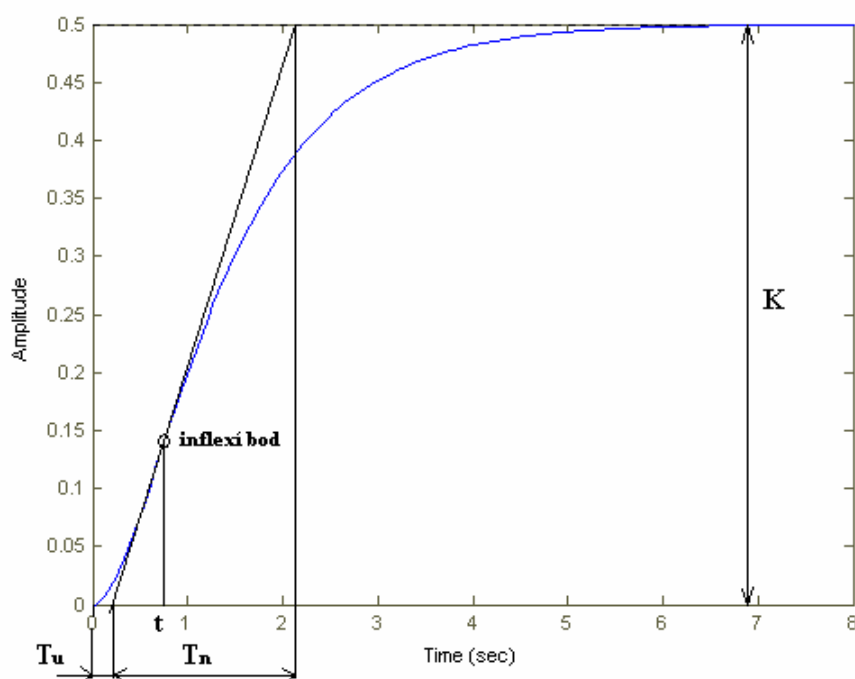
$$e^{-t} (2e^{-t} - 1) = 0$$

$$e^{-t} = \frac{1}{2}$$

$$e^t = 2$$

$$t = \ln 2$$

Tečnu konstruujeme v inflexním bodě $t = \ln 2$ přechodové charakteristiky.



Obr.2.2: Přebíhová charakteristika

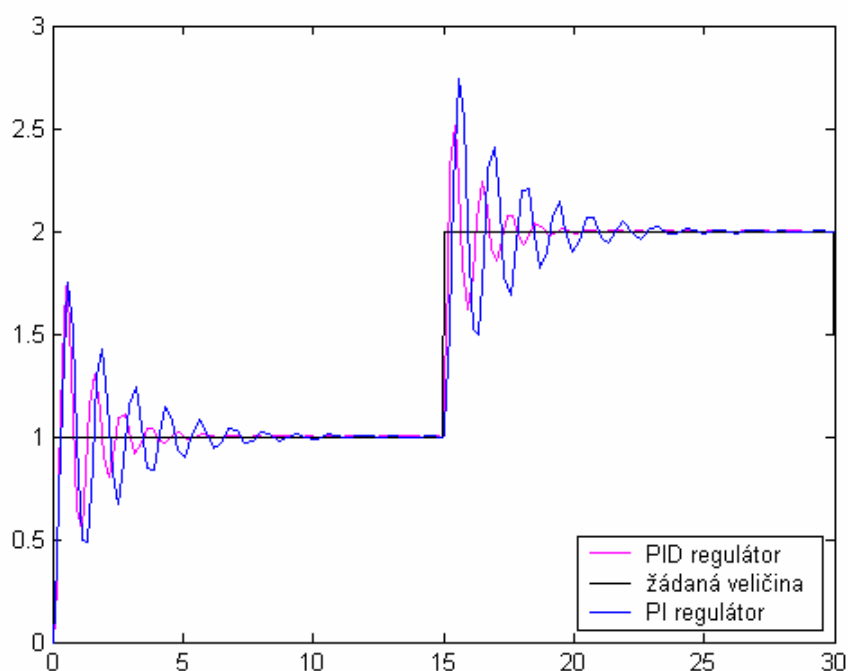
Z Obr.2.2 jsme odečetli tyto hodnoty:

dobu průtahu $T_u = 0.13$, dobu náběhu $T_n = 1.867$, zesílení $K = 0.5$

Dosažením těchto hodnot do Tab.2.2 dostáváme tyto parametry regulátorů:

Parametry PI regulátoru: $\underline{r_0 = 25.2}$ $\underline{r_{-1} = 53.96}$

Parametry PID regulátoru: $\underline{r_0 = 35}$ $\underline{r_{-1} = 131.09}$ $\underline{r_1 = 2.33}$

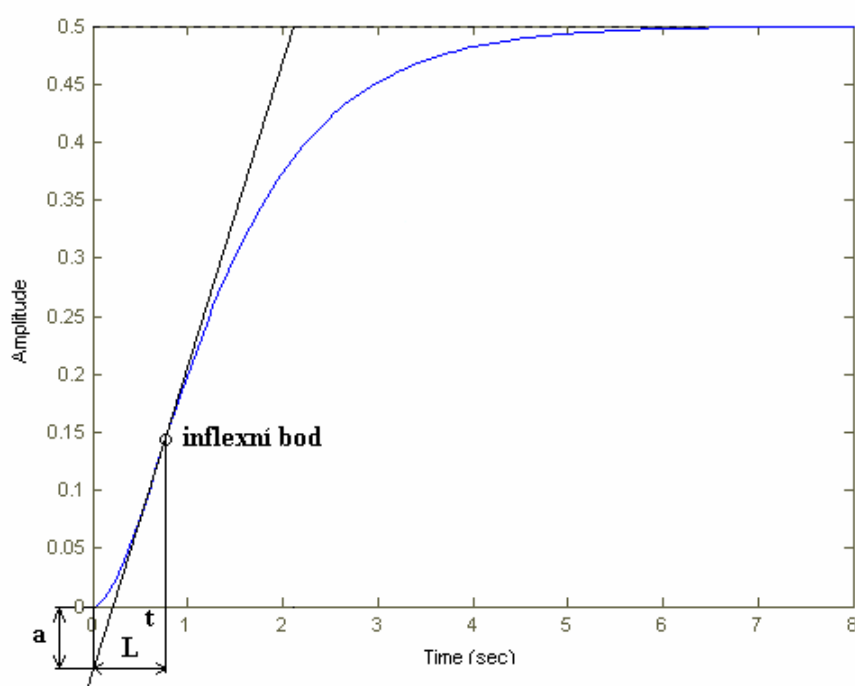


Obr.2.21: Průběh regulace navržených regulátorů

Další možností je pro stejný přenos jako v příkladu 2.2 odečíst z přechodové charakteristiky vzdálenost inflexního bodu a vzdálenost bodu, ve kterém tečna protne osu y . Odečtené hodnoty poté dosazujeme do empirických vztahů pro jednotlivé typy regulátoru (viz. Tab.2.21) a vypočteme tak jejich stavitelné parametry.

Tab.2.21: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru [7]

Typ regulátoru	$k_R = r_0$	T_I	T_D
P	$1/a$	-	-
PI	$0.9/a$	$3L$	-
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$



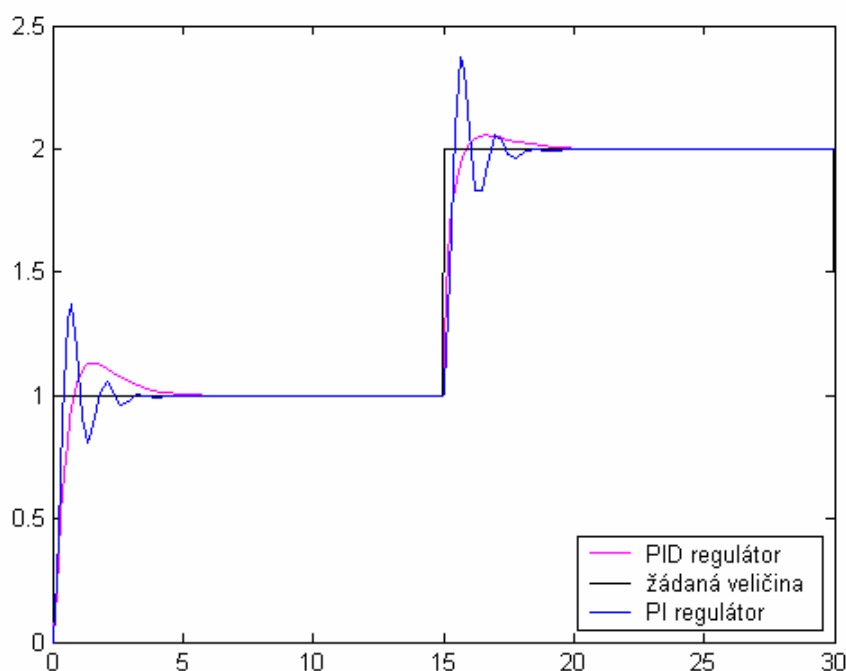
Obr.2.22: Přechodová charakteristika

Odečtené hodnoty z Obr.2.22: $L = \ln 2$, $a = 0.04$,

Dosazením těchto hodnot do Tab.2.21 dostáváme tyto parametry regulátorů:

Parametry PI regulátoru: $\underline{r_0} = 22.5$ $\underline{r_{-1}} = 10.9$

Parametry PID regulátoru: $\underline{r_0} = 30$ $\underline{r_{-1}} = 21.74$ $\underline{r_1} = 10.35$



Obr.2.23: Průběh regulace navržených regulátorů

2.2.3 Zhodnocení

Výhodou metodiky nastavení stavitelných parametrů regulátoru na základě znalosti přechodové charakteristiky regulované soustavy je to, že není potřeba znát přenos soustavy. Po sestrojení tečny v inflexním bodě u naměřené přechodové charakteristiky přímo odečítáme potřebné hodnoty (Obr.2.2, Obr.2.22), které dosazujeme do příslušných empirických vztahů (Tab.2.2, Tab.2.21).

2.3 Nastavení parametrů regulátorů pomocí metod CHR1 a CHR2

2.3.1 Popis metodiky

Zkratka CHR vznikla z počátečních písmen jmen Chiense, Hronese and Reswicka. Metody opět vychází z odečtení hodnot z přechodové charakteristiky, které poté dosazujeme do empirických vztahů pro jednotlivé typy regulátoru (viz. Tab.2.3 a Tab.2.31) a vypočteme tak jejich stavitelné parametry.

Tab.2.3: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru CHR10 viz[7]

Typ regulátoru	$k_R = r_0$	T_I	T_D	$k_R = r_0$	T_I	T_D
P	$0.3/a$	-	-	$0.7/a$	-	-
PI	$0.6/a$	$4L$	-	$0.7/a$	$2.3L$	-
PID	$0.95/a$	$2.4L$	$0.42L$	$1.2/a$	$2L$	$0.42L$

0%

20%

Tab.2.31: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru CHR2 viz[7]

Typ regulátoru	$k_R = r_0$	T_I	T_D	$k_R = r_0$	T_I	T_D
P	$0.3/a$	-	-	$0.7/a$	-	-
PI	$0.35/a$	$1.2T$	-	$0.6/a$	T	-
PID	$0.6/a$	T	$0.5L$	$0.95/a$	$1.4T$	$0.47L$

0%

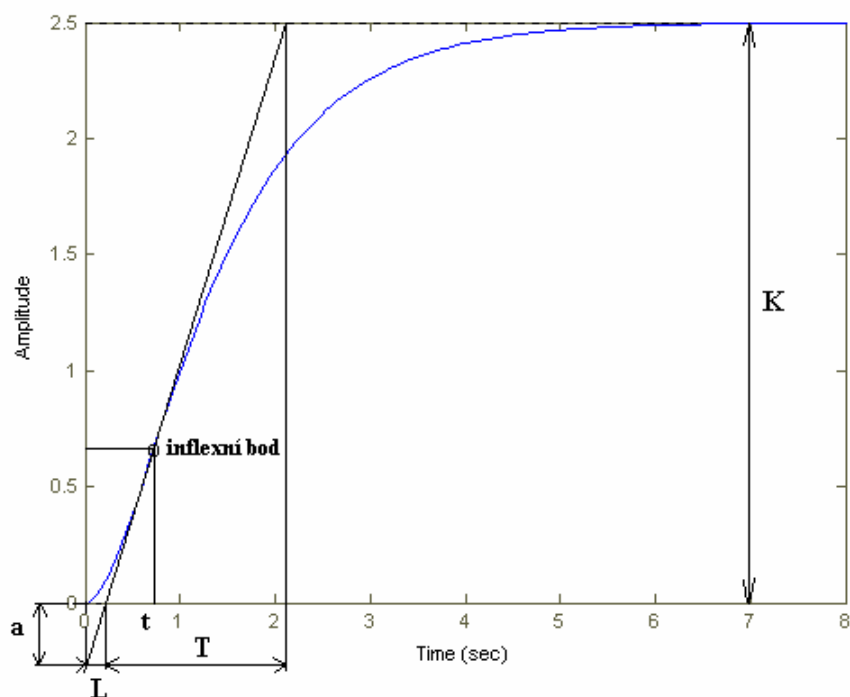
20%

2.3.2 Vzorové příklady

Příklad 2.3:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ (35)

Obdobným způsobem jako v příkladu 2.2 vypočteme inflexní bod, ve kterém budeme konstruovat tečnu.



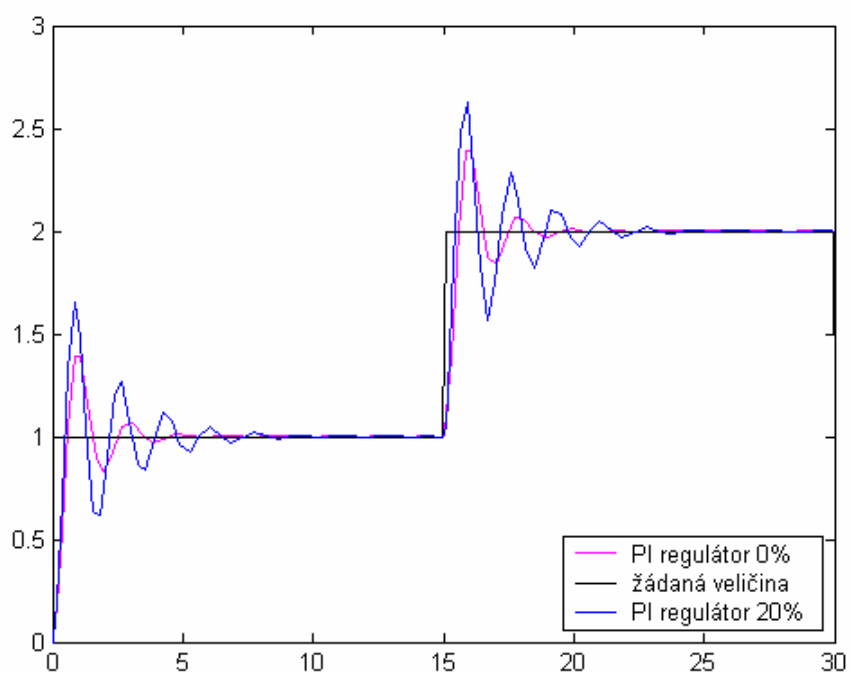
Obr.2.3: Přeběhová charakteristika

Odečtené hodnoty z Obr.2.3: $L = 0.214$, $a = 0.26$, $T = 1.928$

Dosažením těchto hodnot do Tab.2.3 dostáváme tyto parametry regulátorů:

CHR1: Parametry PI regulátoru 0%: $\underline{r_0 = 2.31}$ $\underline{r_{-1} = 2.7}$

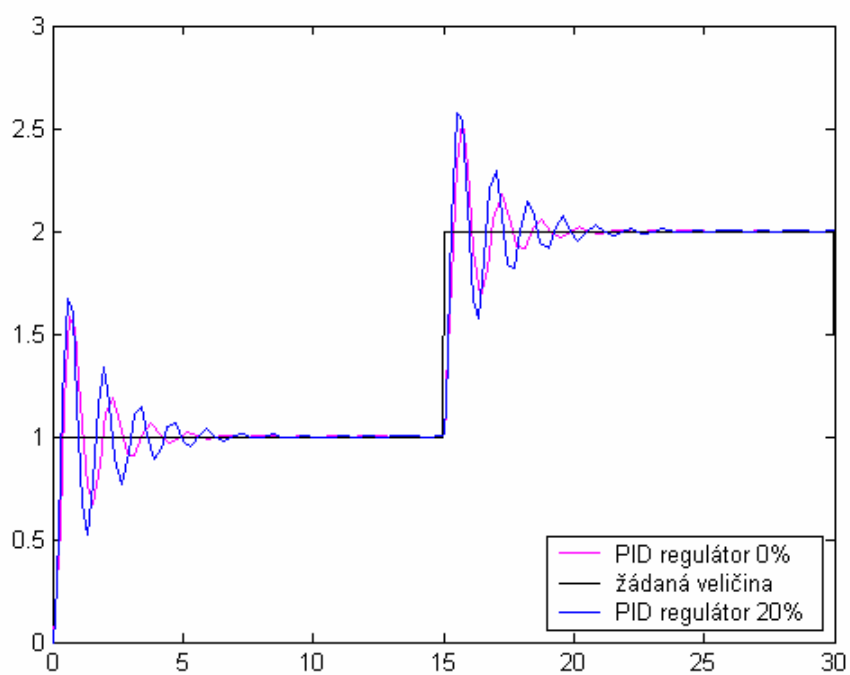
CHR1: Parametry PI regulátoru 20%: $\underline{r_0 = 2.69}$ $\underline{r_{-1} = 5.47}$



Obr.2.31: Průběh regulace navržených regulátorů

CHR1: Parametry PID regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 3.65$ $\underline{r_{-1}} = 7.11$ $\underline{r_1} = 0.09$

CHR1: Parametry PID regulátoru 20%: $\underline{r_0} = 4.62$ $\underline{r_{-1}} = 10.79$ $\underline{r_1} = 0.09$

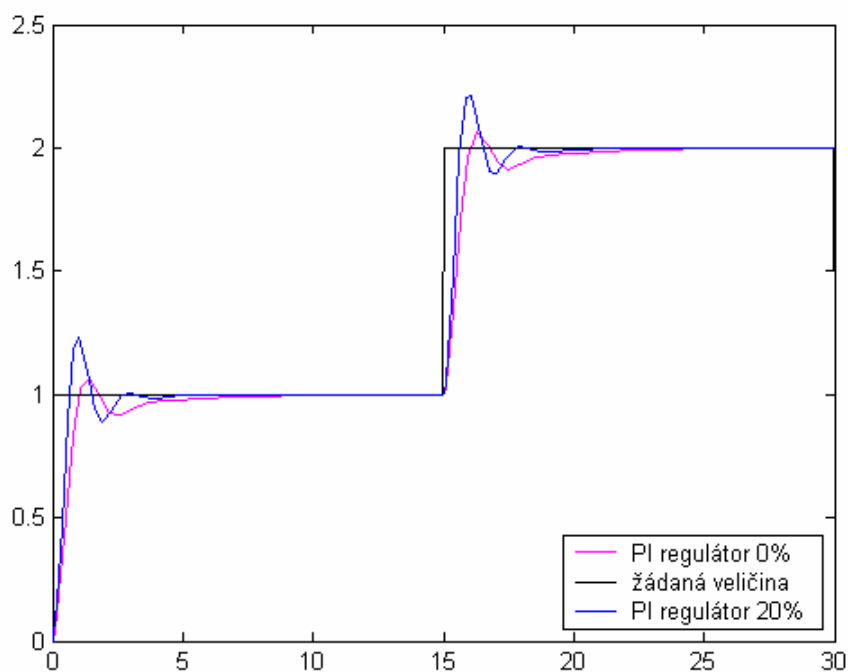


Obr.2.32: Průběh regulace navržených regulátorů

Dosažením těchto hodnot do Tab.2.31 dostáváme tyto parametry regulátorů:

CHR2: Parametry PI regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 1.35$ $\underline{r_{-1}} = 0.58$

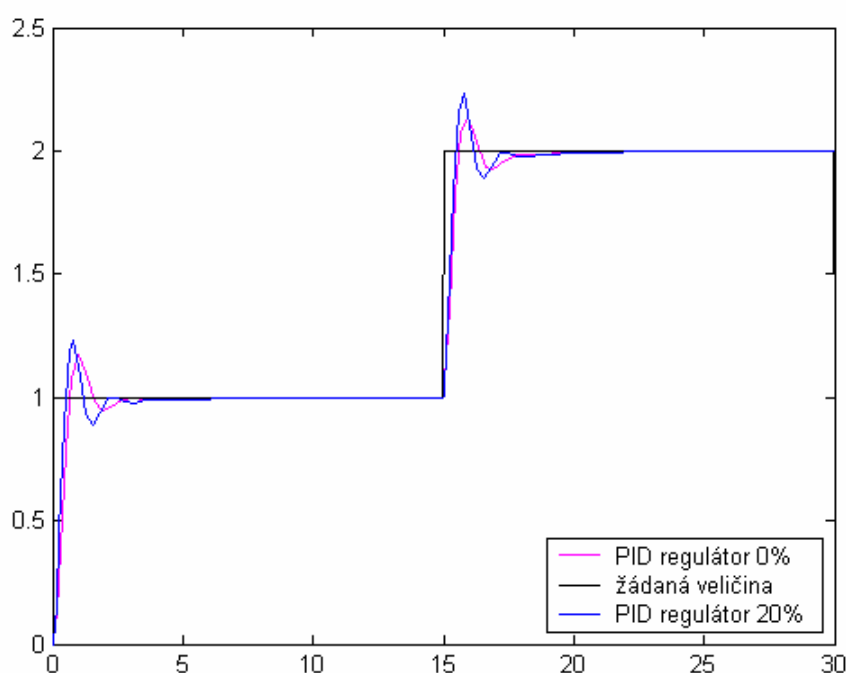
CHR2: Parametry PI regulátoru 20%: $\underline{r_0} = 2.31$ $\underline{r_{-1}} = 1.2$



Obr.2.33: Průběh regulace navržených regulátorů

CHR2: Parametry PID regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 2.31$ $\underline{r_{-1}} = 1.2$ $\underline{r_1} = 0.107$

CHR2: Parametry PID regulátoru 20%: $\underline{r_0} = 3.65$ $\underline{r_{-1}} = 1.35$ $\underline{r_1} = 0.1$



Obr.2.34: Průběh regulace navržených regulátorů

2.3.3 Zhodnocení

Metodikou CHR1 a CHR2 opět vypočteme stavitelné parametry regulátoru na základě znalosti přechodové charakteristiky, nemusíme tedy znát přenos regulované soustavy. Sestrojíme tečnu v inflexním bodě a odečteme potřebné hodnoty (Obr.2.3), které dosazujeme do příslušných empirických vztahů (Tab.2.3, Tab.2.31).

Pro příklad 2.3, kde regulovaná soustava je popsána přenosem (35), jsme provedli srovnání překmitů uváděných tabulkami a překmitů skutečných (Tab.2.32, Tab.2.33). Překmity se výrazněji liší u metodiky CHR1. U metodiky CHR2 je rozdíl tabulovaných a skutečných překmitů nižší.

Tab.2.32: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro PI regulátor

	Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
CHR1	$\Delta y_{\max} = 0\%$	$\Delta y_{\max} = 43\%$
	$\Delta y_{\max} = 20\%$	$\Delta y_{\max} = 65\%$
CHR2	$\Delta y_{\max} = 0\%$	$\Delta y_{\max} = 7\%$
	$\Delta y_{\max} = 20\%$	$\Delta y_{\max} = 24\%$

Tab.2.33: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro PID regulátor

	Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
CHR1	$\Delta y_{\max} = 0\%$	$\Delta y_{\max} = 62\%$
	$\Delta y_{\max} = 20\%$	$\Delta y_{\max} = 72\%$
CHR2	$\Delta y_{\max} = 0\%$	$\Delta y_{\max} = 18\%$
	$\Delta y_{\max} = 20\%$	$\Delta y_{\max} = 24\%$

3 METODY STANDARDNÍCH TVARŮ

3.1 Whiteleyovy standardní tvary

3.1.1 Popis metodiky

Metoda vychází z určitých vzorových typů přenosových funkcí uzavřeného regulačního obvodu, o kterých víme, že dávají vyhovující regulační pochod, a podle nich upravuje seřazením parametrů regulátorů hodnoty koeficientů přenosové funkce a funkce vzorové navzájem rovnaly. Takové vzorové přenosové funkce nazýváme standardními tvary přenosové funkce.

Byly vypracovány tabulky koeficientů standardního tvaru pro přenosové funkce typu:

$$G_{w,y}(s) = \frac{\overline{b_0}}{\overline{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}} \quad \text{viz. Tab.3.1} \quad (36)$$

$$G_{w,y}(s) = \frac{\overline{b_1 s + b_0}}{\overline{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}} \quad \text{viz. Tab.3.11} \quad (37)$$

$$G_{w,y}(s) = \frac{\overline{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}}{\overline{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}} \quad \text{viz. Tab.3.12} \quad (38)$$

$$G_{w,y}(s) = G(s) \cdot G_R(s) = \frac{b}{a} \cdot \frac{q}{p} = \frac{bq}{ap + bq} = \frac{\overline{b_0}}{\overline{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}} \quad (39)$$

viz [1]

Tab.3.1: Standardní tvary přenosové funkce viz [1]

Stupeň n	Koeficienty							Charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\overline{a_6}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_0}$	$\tau^{tab} [s]$	$t_r^{tab} [s]$	$\Delta y_{max} [\%]$
2					1	1,4	1	2,65	7	5
3				1	2	2	1	3,35	9,5	8,7
4			1	2,6	3,4	2,6	1	4,25	15	11,7
5		1	3,2	5,2	5,2	3,2	1	4,95	>18	13
6	1	3,7	7,5	9,1	7,5	3,7	1	5,55		13,3

Tab.3.11: Standardní tvary přenosové funkce viz [1]

Stupeň n	Koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\overline{a_6}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_0}$	$\tau^{tab} [s]$	$t_r^{tab} [s]$	$\Delta y_{max} [\%]$
2					1	2,5	1	2		10
3				1	5,1	6,3	1	4,1		10
4			1	7,2	16	12	1	5,5		10
5		1	9	29	38	18	1	6,8		10
6	1	11	43	83	73	25	1	8		10

Tab.3.12: Standardní tvary přenosové funkce viz [1]

Stupeň n	Koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\overline{a_6}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_0}$	$\tau^{tab} [s]$	$t_r^{tab} [s]$	$\Delta y_{max} [\%]$
3				1	6,7	6,7	1	3,5		10
4			1	7,9	15	7,9	1	5,4		15
5		1	18	69	69	18	1	6,5		20
6	1	36	251	485	251	36	1	8		20

3.1.2 Vzorové příklady

Příklad 3.1:

Regulovaná soustava je dána přenosem : $G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ (40)

Zvolíme si PI regulátor, přenos regulátoru je tedy: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (41)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{5r_0 s + 5r_{-1}}{s^3 + 3s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}}$ (42)

Naší snahou je získat charakteristickou rovnici přenosu řízení ve standardním tvaru, proto přenos řízení podělíme koeficientem $a_0 = 5r_{-1}$, tedy na pozici koeficientu a_0 získáme jedničku.

$$G_{w,y}(s) = \frac{\frac{5r_0}{5r_{-1}}s + 1}{\frac{1}{5r_{-1}}s^3 + \frac{3}{5r_{-1}}s^2 + \frac{(2+5r_0)}{5r_{-1}}s + 1} \quad (43)$$

Nyní zavedeme substituci $s = (5r_{-1})^{\frac{1}{3}}q$ a dosáhneme toho, že i na pozici koeficientu a_3 bude 1.

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{5r_0}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}}q + 1}{\frac{1}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{3}{3}}q^3 + \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}}q^2 + \frac{(2+5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}}q + 1} \quad (44)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 3 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.11:

$$1 = 1 \quad (45)$$

$$5.1 = \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} \quad (46)$$

$$6.3 = \frac{(2+5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (47)$$

$$1 = 1 \quad (48)$$

Z rovnice (46) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 5.1 \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} &= 3 \\ r_{-1} &= 0.0407 \end{aligned} \quad (49)$$

Dosazením do rovnice (47) dostaneme:

$$\begin{aligned} 6.3 &= \frac{(2+5r_0)}{5 \cdot 0.0407} \cdot (5 \cdot 0.0407)^{\frac{1}{3}} \\ r_0 &= 0.0359 \end{aligned} \quad (50)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.0359}$ $\underline{r_{-1} = 0.0407}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.0359s + 0.0407}{s}$ (51)

Příklad 3.11:

Použijeme stejný přenos (40), ale pro návrh PID regulátoru:

Přenos PID regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s}$ (52)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{5r_1 s^2 + 5r_0 s + 5r_{-1}}{s^3 + (1 + 5r_1)s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}}$ (53)

Budeme postupovat obdobným způsobem jako u příkladu 3.1. Přenos řízení vydělíme

koeficientem $a_0 = 5r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q$.

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{5r_1}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{5r_0}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1}{\frac{1}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{3}{3}} q^3 + \frac{(1 + 5r_1)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1} \quad (54)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 3 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.12:

$$1 = 1 \quad (55)$$

$$6.7 = \frac{(1 + 5r_1)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} \quad (56)$$

$$6.7 = \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (57)$$

$$1 = 1 \quad (58)$$

Dostáváme 2 rovnice o třech neznámých. My využijeme podmínky stability, tedy poslední tři koeficienty charakteristického polynomu, v našem případě se jedná o polynom:

$N(s) = s^3 + (1 + 5r_1)s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}$, musí být kladné - vycházíme z Routhovo-

Schurova kritéria stability:

1	$\underline{(1 + 5r_1)}$	$(2 + 5r_0)$	$\underline{5r_{-1}}$	
	$\underline{(1 + 5r_1)}$	$\underline{5r_{-1}}$		/
				$\cdot \frac{-1}{(1 + 5r_1)}$

$$(1 + 5r_1) \quad \frac{(2 + 5r_0) \cdot (1 + 5r_1) - 5r_{-1}}{(1 + 5r_1)} \quad 5r_{-1}$$

Musí platit: $(1 + 5r_1) > 0$ $\frac{(2 + 5r_0) \cdot (1 + 5r_1) - 5r_{-1}}{(1 + 5r_1)} > 0$ $5r_{-1} > 0$

My si zvolíme, že $r_{-1} \equiv 1$, z rovnice (56) vypočteme r_1 :

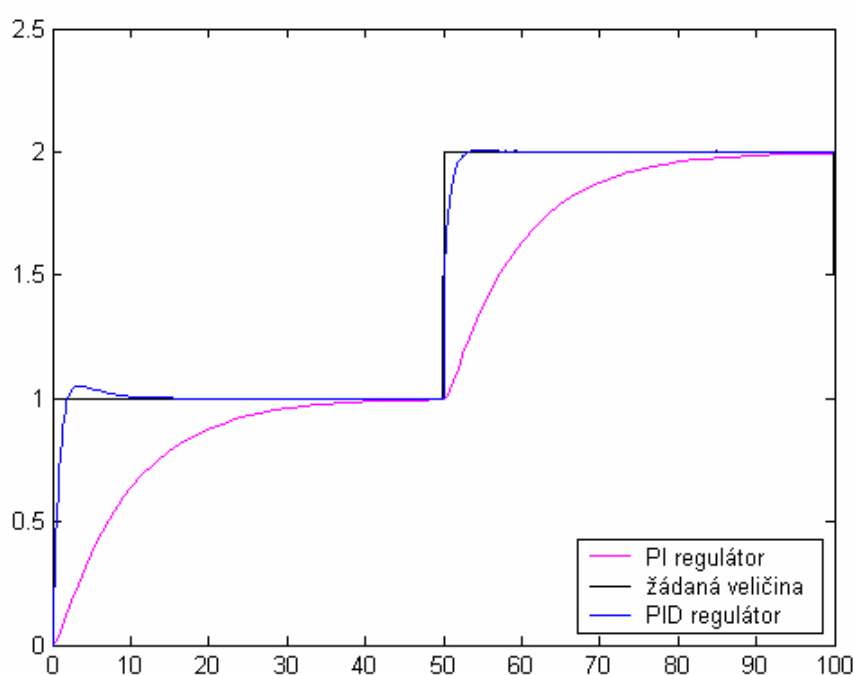
$$\begin{aligned} 11.457 &= 1 + 5r_1 \\ r_1 &= 2.09 \end{aligned} \quad (59)$$

A z rovnice (57) vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 19.591 &= 2 + 5r_0 \\ r_0 &= 3.52 \end{aligned} \quad (60)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $r_0 = 3.52$ $r_{-1} = 1$ $r_1 = 2.09$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{2.09s^2 + 3.52s + 1}{s}$ (61)



Obr.3.1: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.1 a 3.11

Příklad 3.12:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{2}{s(s+10)^2} = \frac{2}{s^3 + 20s^2 + 100s}$ (62)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (63)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{2r_0 s + 2r_{-1}}{s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0 s + 2r_{-1}}$ (64)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 2r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1} \quad (65)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.11 .

$$1 = 1 \quad (66)$$

$$7.2 = \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (67)$$

$$16 = \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (68)$$

$$12 = \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (69)$$

$$1 = 1 \quad (70)$$

Z rovnice (67) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 7.2 \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 20 \\ r_{-1} &= 29.769 \end{aligned} \quad (71)$$

Dosazením do (69) rovnice vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 257.204 &= 2r_0 \\ r_0 &= 128.6 \end{aligned} \quad (72)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 128.6}$ $\underline{r_{-1} = 29.769}$

Parametr regulátoru r_{-1} lze vypočítat také z rovnice (68):

$$\begin{aligned} 16 \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}} &= 100 \\ r_{-1} &= 19.531 \end{aligned} \quad (73)$$

Pro tento parametr dosazením do rovnice (69) vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 187.498 &= 2r_0 \\ r_0 &= 93.749 \end{aligned} \quad (74)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $r_0 = 93.749$ $r_{-1} = 19.531$

$$\text{Dostali jsme tedy dva přenosy regulátoru: } G_R(s) = \frac{128.6s + 29.769}{s} \quad (75)$$

$$\text{a } G_R(s) = \frac{93.749s + 19.531}{s} \quad (76)$$

Pro obě řešení provedeme kontrolu stability. U prvního případu, pro parametry $r_0 = 128.6$ $r_{-1} = 29.769$, použijeme Routhovo-Schurova kritéria stability:

Charakteristický polynom:

$$N(s) = s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0s + 2r_{-1} = s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 257.2s + 59.538 \quad (77)$$

1	<u>20</u>	100	<u>257.2</u>	59.538	
20		257.2			/ $\cdot \frac{-1}{20}$
0	20	<u>87.14</u>	257.2	<u>59.538</u>	
	87.14		59.538		/ $\cdot \frac{-20}{87.14}$
0	87.14	243.54	59.538	$\Rightarrow \text{stabilní}$	

U druhého řešení, pro parametry $r_0 = 93.749$ $r_{-1} = 19.531$, použijeme Hurwitzovo kritérium stability:

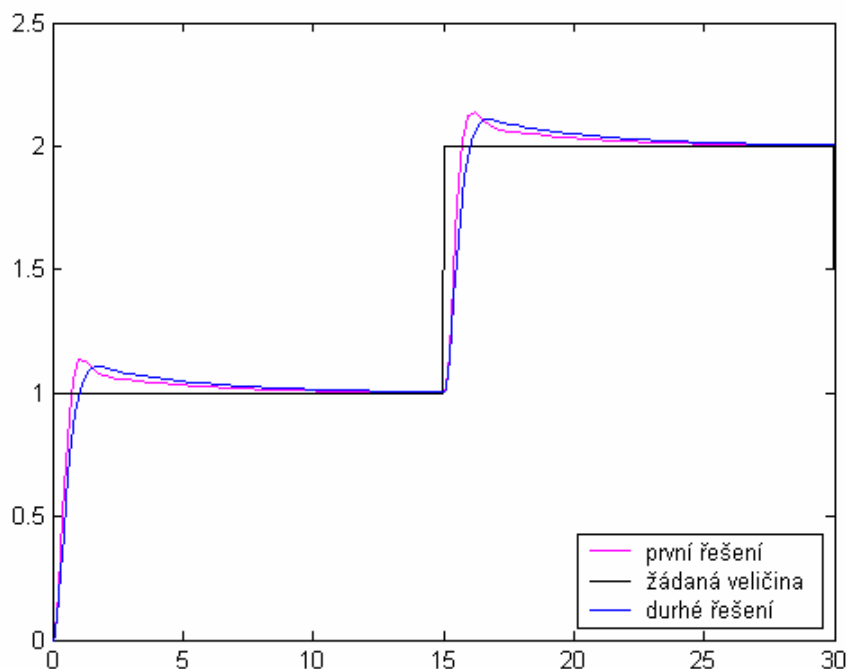
Charakteristický polynom:

$$N(s) = s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0s + 2r_{-1} = s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 187.498s + 36.062$$

$$H = \begin{vmatrix} 20 & 187.498 & 0 \\ 1 & 100 & 36.062 \\ 0 & 20 & 187.498 \end{vmatrix}$$

$$H_1 > 0 \quad H_2 > 0 \quad H_3 > 0 \quad \Rightarrow \text{stabilní}$$

Pro přenos dostáváme dvě řešení. První s přenosem regulátoru popsaném rovnicí (75), druhé s přenosem regulátoru popsaném rovnicí (76).



Obr.3.11: Průběh regulace pro obě řešení

Příklad 3.13:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{0.2s + 0.2}{s^3 + 2.5s^2 + 3s + 0.1}$ (78)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (79)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{0.2r_0 s^2 + (0.2r_{-1} + 0.2r_0)s + 0.2r_{-1}}{s^4 + 2.5s^3 + (3 + 0.2r_0)s^2 + (0.1 + 0.2r_0 + 0.2r_{-1})s + 0.2r_{-1}}$ (80)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 0.2r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (0.2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{0.2r_0}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.2r_{-1} + 0.2r_0)}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{2.5}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{(3 + 0.2r_0)}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.1 + 0.2r_0 + 0.2r_{-1})}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1} \quad (81)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.12 .

$$1 = 1 \quad (82)$$

$$7.9 = \frac{2.5}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (83)$$

$$15 = \frac{(3 + 0.2r_0)}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (84)$$

$$7.9 = \frac{(0.1 + 0.2r_0 + 0.2r_{-1})}{0.2r_{-1}} \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (85)$$

$$1 = 1 \quad (86)$$

Z rovnice (83) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 7.9 \cdot (0.2r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 2.5 \\ r_{-1} &= 0.05 \end{aligned} \quad (87)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_0 .

Lze jej vypočítat z rovnice(84) dosazením vypočteného r_{-1} :

$$\begin{aligned} 15 &= 3 + 0.2r_0 \\ r_0 &= -7.5 \end{aligned} \quad (88)$$

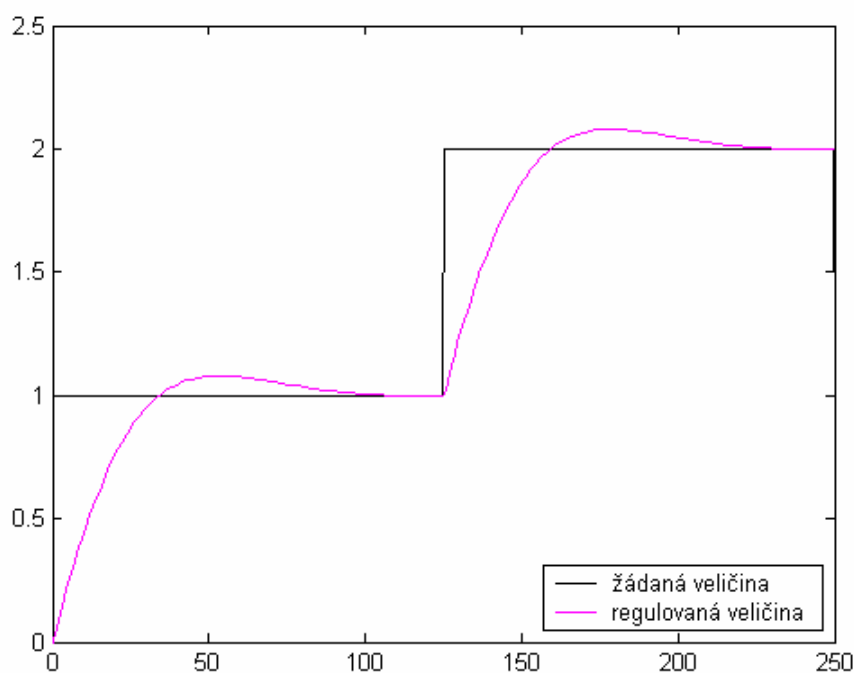
Nebo z rovnice(85):

$$\begin{aligned} 0.1398 &= 0.2r_0 \\ r_0 &= 0.699 \end{aligned} \quad (89)$$

U prvního případu, rovnice (87), jsme dosáhli jeho záporné hodnoty. Fyzikální význam nastavení záporné hodnoty nemá smysl.

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $\underline{r_0 = 0.699}$ $\underline{r_{-1} = 0.05}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0.699s + 0.05}{s} \quad (90)$$



Obr.3.12: Průběh regulace navrženého regulátoru

3.1.3 Zhodnocení

Při srovnání skutečných překmitů s překmity uvedenými v tabulkách pro jednotlivé příklady (Tab.3.13, Tab.3.14, Tab.3.15) vidíme, že skutečné překmity odpovídají překmitům v tabulkách. Rozdílné jsou jen u příkladu 3.12 (Tab.3.14), kde pro první řešení činní rozdíl 4% a pro druhé 1%.

Tab.3.13: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.1, 3.11

	Překmitý uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmitý
PI	$\Delta y_{\max} \leq 10\%$	$\Delta y_{\max} = 0\%$
PID	$\Delta y_{\max} \leq 10\%$	$\Delta y_{\max} = 5\%$

Tab.3.14: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.12

	Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
PI – řešení1	$\Delta y_{\max} \leq 10\%$	$\Delta y_{\max} = 14\%$
PI – řešení2	$\Delta y_{\max} \leq 10\%$	$\Delta y_{\max} = 11\%$

Tab.3.15: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.13

	Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
PI	$\Delta y_{\max} \leq 15\%$	$\Delta y_{\max} = 8\%$

3.2 Butterworthovy standardní tvary

3.2.1 Popis metodiky

Více autorů vypracovalo určité standardní tvary charakteristické rovnice. Myšlenkou při návrhu stavitelných parametrů regulátoru spočívá v tom, že pomocí volitelných parametrů se snažíme dosáhnout stavu, kdy charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu se co nejvíc podobá na standardní tvar.

Tab.3.2: Butterworthovy standardní tvary charakteristické rovnice viz [2]

Stupeň n	Koeficienty						
	$\overline{a_6}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_0}$
2					1	1,4	1
3				1	2	2	1
4			1	2,6	3,4	2,6	1
5		1	3,2	5,2	5,2	3,2	1
6	1	3,7	7,5	9,1	7,5	3,7	1

3.2.2 Vzorové příklady

Příklad 3.2:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ (91)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (92)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{5r_0 s + 5r_{-1}}{s^3 + 3s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}}$ (93)

Stejně jako u metody Whiteleyových standardních tvarů se budeme snažit získat charakteristickou rovnici ve standardním tvaru.

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 5r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{5r_0}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1}{\frac{1}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{3}{3}} q^3 + \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1} \quad (94)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 3 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.2:

$$1 = 1 \quad (95)$$

$$2 = \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} \quad (96)$$

$$2 = \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (97)$$

$$1 = 1 \quad (98)$$

Z rovnice (96) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2 \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} &= 3 \\ r_{-1} &= 0.675 \end{aligned} \quad (99)$$

Dosažením do rovnice (97) dostaneme:

$$2 = \frac{(2 + 5r_0)}{5 \cdot 0.675} \cdot (5 \cdot 0.675)^{\frac{1}{3}}$$

$$r_0 = 0.5$$
(100)

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.5}$ $\underline{r_{-1} = 0.675}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.5s + 0.675}{s}$

(101)

Příklad 3.21:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{2}{s(s+10)^2} = \frac{2}{s^3 + 20s^2 + 100s}$

(102)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{s}$

(103)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{2r_0s + 2r_{-1}}{s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0s + 2r_{-1}}$

(104)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 2r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q + 1}{\frac{1}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{4}{4}}q^4 + \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}}q^3 + \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}}q^2 + \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q + 1}$$
(105)

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.2 .

$$1 = 1$$
(106)

$$2.6 = \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}}$$
(107)

$$3.4 = \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}}$$
(108)

$$2.6 = \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}$$
(109)

$$1 = 1$$
(110)

Z rovnice (107) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2.6 \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 20 \\ r_{-1} &= 1750.6 \end{aligned} \quad (111)$$

Dosazením do rovnice (109) vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 1181,8 &= 2r_0 \\ r_0 &= 591 \end{aligned} \quad (112)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 591}$ $\underline{r_{-1} = 1750.6}$

Parametr regulátoru r_{-1} lze vypočítat také z rovnice (108):

$$\begin{aligned} 3.4 \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}} &= 100 \\ r_{-1} &= 432.5 \end{aligned} \quad (113)$$

Pro tento parametr dosazením do rovnice (109) vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 412.7 &= 2r_0 \\ r_0 &= 206.35 \end{aligned} \quad (114)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 206.35}$ $\underline{r_{-1} = 432.5}$

Dostali jsme tedy dva přenosy regulátoru: $G_R(s) = \frac{591s + 1750.6}{s}$ (115)

$$\text{a } G_R(s) = \frac{206.35s + 432.5}{s} \quad (116)$$

Obdobným způsobem jako v příkladu 3.12 provedeme kontrolu stability regulačního obvodu pro obě dvojice nastavitelných parametrů regulátorů. První seřízení je nestabilní a druhé stabilní.

Příklad 3.22:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{0.3s + 0.1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 0.1}$ (117)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{s}$ (118)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{0.3r_0s^2 + (0.3r_{-1} + 0.1r_0)s + 0.1r_{-1}}{s^4 + 3s^3 + (3 + 0.3r_0)s^2 + (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})s + 0.1r_{-1}}$ (119)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 0.1r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}}q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{0.3r_0}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.3r_{-1} + 0.1r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{3}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{(3 + 0.3r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1} \quad (120)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.2 .

$$1 = 1 \quad (121)$$

$$2.6 = \frac{3}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (122)$$

$$3.4 = \frac{(3 + 0.3r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (123)$$

$$2.6 = \frac{(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (124)$$

$$1 = 1 \quad (125)$$

Z rovnice (122) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2.6 \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 3 \\ r_{-1} &= 17.73 \end{aligned} \quad (126)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_0 .

Lze jej vypočítat z rovnice (123) dosazením vypočteného r_{-1} :

$$\begin{aligned} 4.5 &= 3 + 0.3r_0 \\ r_0 &= 5 \end{aligned} \quad (127)$$

Nebo z rovnice (124) :

$$\begin{aligned} -0.927 &= 0.1r_0 \\ r_0 &= -9.27 \end{aligned} \quad (128)$$

U druhého případu výpočtu r_0 jsme dosáhli jeho záporné hodnoty. Fyzikální význam nastavení záporné hodnoty nemá smysl.

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $r_0 = 5$ $r_{-1} = 17.73$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{5s + 17.73}{s} \quad (129)$$

3.3 Grahamovy a Lathropovy standardní tvary

3.3.1 Popis metodiky

Metoda opět vychází z určitého standardního tvaru charakteristické rovnice jako tomu je u metod Butterworthových standardních tvarů a Whiteleyových standardních tvarů.

Tab.3.3: Grahamovy a Lathropovy standardní tvary charakteristické rovnice viz [2]

Stupeň n	Koeficienty						
	$\overline{a_6}$	$\overline{a_5}$	$\overline{a_4}$	$\overline{a_3}$	$\overline{a_2}$	$\overline{a_1}$	$\overline{a_0}$
2					1	1,4	1
3				1	2,15	1,75	1
4			1	2,7	3,4	2,1	1
5		1	3,4	5,5	5,0	2,8	1
6	1	3,95	7,45	8,6	6,6	3,35	1

3.3.2 Vzorové příklady

Příklad 3.3:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ (130)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (131)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{5r_0 s + 5r_{-1}}{s^3 + 3s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}}$ (132)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 5r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{5r_0}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1}{\frac{1}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{3}{3}} q^3 + \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} q^2 + \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} q + 1} \quad (133)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 3 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.3:

$$1 = 1 \quad (134)$$

$$2.15 = \frac{3}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{2}{3}} \quad (135)$$

$$1.77 = \frac{(2 + 5r_0)}{5r_{-1}} \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (136)$$

$$1 = 1 \quad (137)$$

Z rovnice (135) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2.15 \cdot (5r_{-1})^{\frac{1}{3}} &= 3 \\ r_{-1} &= 0.543 \end{aligned} \quad (138)$$

Dosazením do rovnice (136) dostaneme:

$$1.77 = \frac{(2 + 5r_0)}{5 \cdot 0.543} \cdot (5 \cdot 0.543)^{\frac{1}{3}}$$

$$r_0 = 0.289$$
(139)

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.289}$ $\underline{r_{-1} = 0.543}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.289s + 0.543}{s}$ (140)

Příklad 3.31:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{2}{s(s+10)^2} = \frac{2}{s^3 + 20s^2 + 100s}$ (141)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{s}$ (142)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{2r_0s + 2r_{-1}}{s^4 + 20s^3 + 100s^2 + 2r_0s + 2r_{-1}}$ (143)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 2r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q + 1}{\frac{1}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{4}{4}}q^4 + \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}}q^3 + \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}}q^2 + \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}}q + 1}$$
(144)

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.3 .

$$1 = 1$$
(145)

$$2.7 = \frac{20}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{3}{4}}$$
(146)

$$3.4 = \frac{100}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{2}}$$
(147)

$$2.1 = \frac{2r_0}{2r_{-1}} \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (148)$$

$$1 = 1 \quad (149)$$

Z rovnice (146) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2.7 \cdot (2r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 20 \\ r_{-1} &= 1505 \end{aligned} \quad (150)$$

Dosazením do rovnice (148) vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} 1050 &= 2r_0 \\ r_0 &= 525 \end{aligned} \quad (151)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 525}$ $\underline{r_{-1} = 1505}$

Parametr regulátoru r_{-1} lze vypočítat také z rovnice (147), která je totožná s rovnicí (108) v příkladu 3.21:

Parametry regulátoru tedy jsou: $\underline{r_0 = 206.35}$ $\underline{r_{-1} = 432.5}$

$$\text{Dostali jsme tedy dva přenosy regulátoru: } G_R(s) = \frac{525s + 1505}{s} \quad (152)$$

$$\text{a } G_R(s) = \frac{206.35s + 432.5}{s} \quad (153)$$

Obdobným způsobem jako v příkladu 3.12 provedeme kontrolu stability regulačního obvodu pro obě dvojice nastavitelných parametrů regulátorů. První seřízení je nestabilní a druhé stabilní.

Příklad 3.32:

$$\text{Regulovaná soustava je dána přenosem: } G(s) = \frac{0.3s + 0.1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 0.1} \quad (154)$$

$$\text{Přenos PI regulátoru: } G_R(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{s} \quad (155)$$

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{0.3r_0 s^2 + (0.3r_{-1} + 0.1r_0)s + 0.1r_{-1}}{s^4 + 3s^3 + (3 + 0.3r_0)s^2 + (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})s + 0.1r_{-1}}$ (156)

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 0.1r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{0.3r_0}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.3r_{-1} + 0.1r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{3}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{(3 + 0.3r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1} \quad (157)$$

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.3 .

$$1 = 1 \quad (158)$$

$$2.7 = \frac{3}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (159)$$

$$3.4 = \frac{(3 + 0.3r_0)}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (160)$$

$$2.1 = \frac{(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})}{0.1r_{-1}} \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (161)$$

$$1 = 1 \quad (162)$$

Z rovnice (159) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2.7 \cdot (0.1r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 3 \\ r_{-1} &= 15.24 \end{aligned} \quad (163)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_0 .

Lze jej vypočítat z rovnice (160) dosazením vypočteného r_{-1} :

$$\begin{aligned} 4.2 &= 3 + 0.3r_0 \\ r_0 &= 4 \end{aligned} \quad (164)$$

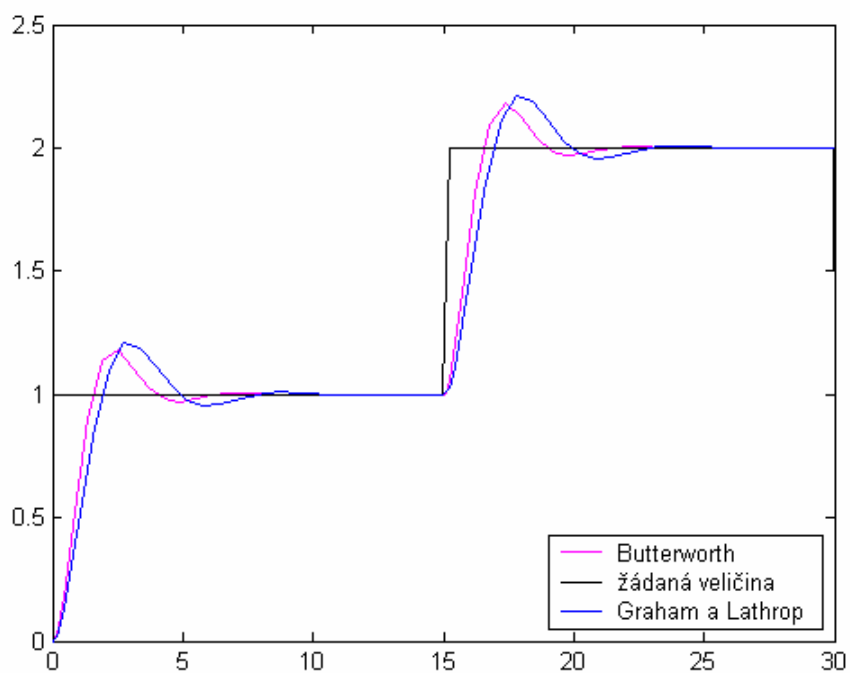
Nebo z rovnice (161) :

$$\begin{aligned} -1.3 &= 0.1r_0 \\ r_0 &= -13 \end{aligned} \quad (165)$$

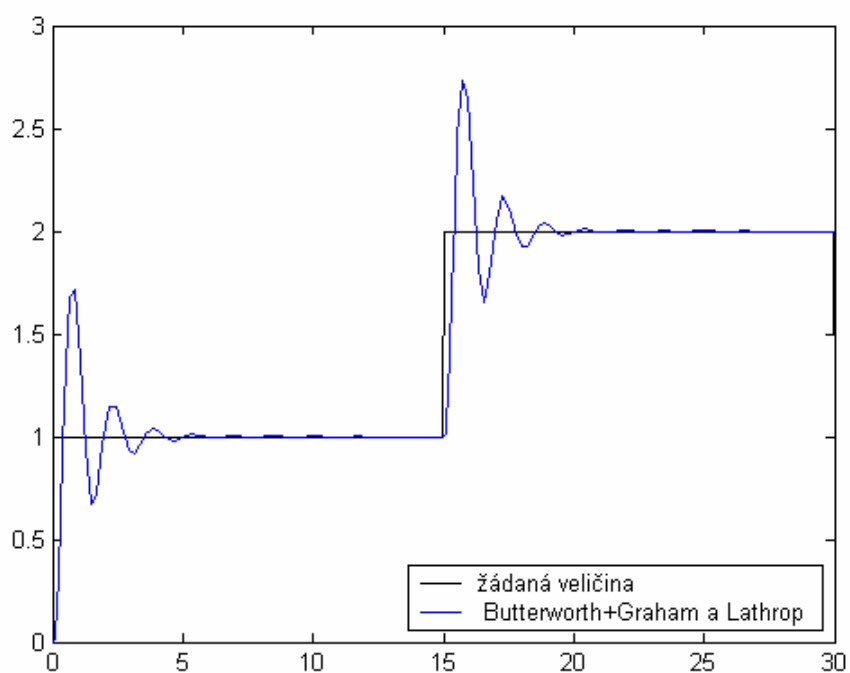
U druhého případu výpočtu r_0 jsme dosáhli jeho záporné hodnoty. Fyzikální význam nastavení záporné hodnoty nemá smysl.

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $r_0 = 4$ $r_{-1} = 15.24$

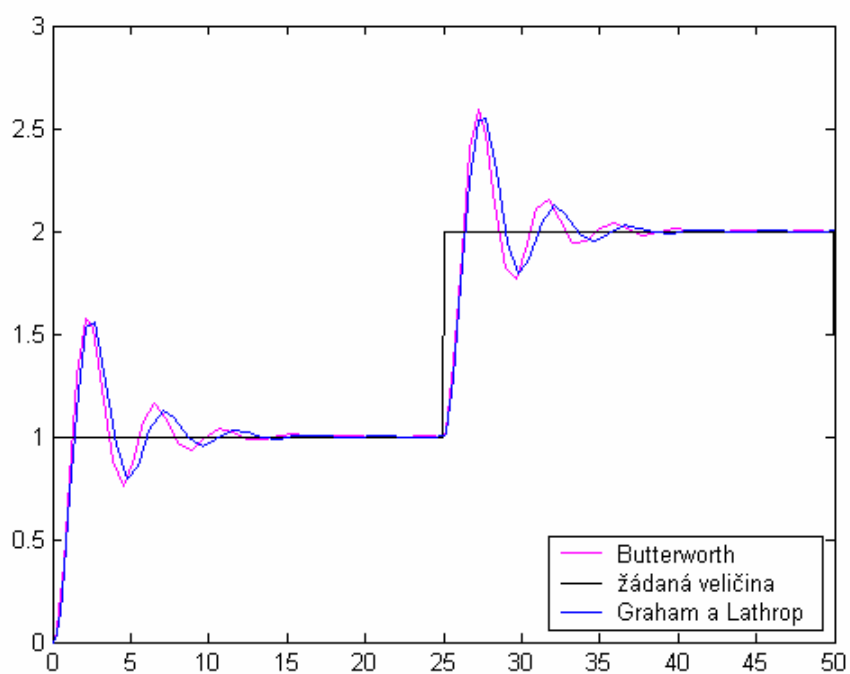
Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{4s + 15.24}{s}$ (166)



Obr.3.2: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.2 a 3.3



Obr.3.21: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.21 a 3.31



Obr.3.22: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.22 a 3.32

3.3.3 Zhodnocení

Více autorů vypracovalo určité standardní tvary charakteristické rovnice. U metodik Grahamovy a Lathropovy standardní tvary a Butterworthovy standardní tvary dosahujeme obdobných výsledků regulace navržených regulátorů, jak lze vidět na Obr.3.2 a Obr.3.22. Na Obr.3.21 vidíme, že průběh regulace navržených regulátorů je u obou metod totožný.

4 PARAMETRICKÉ METODY

4.1 Naslinova metoda

4.1.1 Popis metodiky

Mějme přenos $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots a_1 s + a_0}$ a přenos regulátoru $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$.

Výpočtem přenosu řízení $G_{w,y}(s) = \frac{G(s) \cdot G_R(s)}{1 + G(s) \cdot G_R(s)}$ dostaneme ve jmenovateli přenosu

řízení charakteristickou rovnicí uzavřeného regulačního obvodu. Naslin dokázal, že pokud pro její koeficienty platí nerovnosti $a_i \geq \alpha \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1}$ pro $i=1, 2, 3, \dots (n-1)$, potom pro maximální přeregulování (překmit) $\Delta y_{\max} [\%]$ závisí na hodnotě koeficientu α podle Tab.4.1. To platí samozřejmě i pro ostatní typy regulátoru.

Tab.4.1: Závislost $\Delta y_{\max} [\%]$ na α dle Napsána viz [1]

A	1,75	1,8	1,9	2	2,2	2,4
$\Delta y_{\max}$	16	12	8	5	3	1

4.1.2 Vzorové příklady

Příklad 4.1:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$ (167)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (168)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{5r_0 s + 5r_{-1}}{s^3 + 3s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1}}$ (169)

Charakteristickou rovnicí uzavřeného regulačního obvodu lze vyčíst ze jmenovatele přenosu řízení :

$$s^3 + 3s^2 + (2 + 5r_0)s + 5r_{-1} = 0 \quad (170)$$

Pro ni platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha=2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ (viz. Tab.4.1) :

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (2 + 5r_0)^2 &\geq 2 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 3^2 &\geq 2 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \end{aligned} \quad (172)$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 9 &= 2 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \\ 9 &= 4 + 10r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.5} \end{aligned} \quad (173)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (2 + 5r_0)^2 &= 2 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \\ 20.25 &= 30r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= \underline{0.675} \end{aligned} \quad (174)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.5}$ $\underline{r_{-1} = 0.675}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0.5s + 0.675}{s} \quad (175)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha=2.4$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 1\%$ (viz Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (2 + 5r_0)^2 &\geq 2.4 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 3^2 &\geq 2.4 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \end{aligned} \quad (177)$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 9 &= 2.4 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \\ 9 &= 4.8 + 12r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.35} \end{aligned} \quad (178)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (2 + 5r_0)^2 &= 2.4 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \\ 14.0625 &= 36r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= \underline{0.391} \end{aligned} \quad (179)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.35}$ $\underline{r_{-1} = 0.391}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0.35s + 0.391}{s} \quad (180)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha=1.8$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 12\%$ (viz Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (2 + 5r_0)^2 &\geq 1.8 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 3^2 &\geq 1.8 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \end{aligned} \quad (182)$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

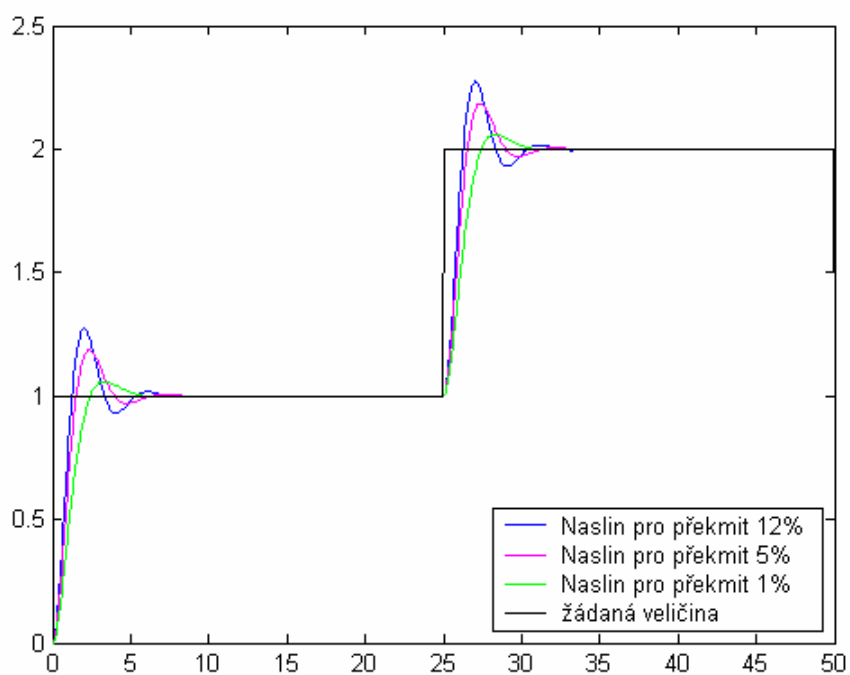
$$\begin{aligned} 9 &= 1.8 \cdot (2 + 5r_0) \cdot 1 \\ 9 &= 3.6 + 9r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.6} \end{aligned} \quad (183)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned}(2 + 5r_0)^2 &= 1.8 \cdot 5r_{-1} \cdot 3 \\ 25 &= 27r_{-1} \\ \underline{r_{-1} = 0.926}\end{aligned}\tag{184}$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.6}$ $\underline{r_{-1} = 0.926}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.6s + 0.926}{s}$ (185)



Obr.4.1: Průběh regulace navržených regulátorů

Ověřili jsme zda překmity uvedené v Tab.4.1 odpovídají skutečným:

Tab.4.11: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách

Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
$\Delta y_{\max} \leq 1\%$	$\Delta y_{\max} = 6\%$
$\Delta y_{\max} \leq 5\%$	$\Delta y_{\max} = 18\%$
$\Delta y_{\max} \leq 12\%$	$\Delta y_{\max} = 27\%$

Příklad 4.11:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$ (186)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (187)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1 + r_0)s + r_{-1}}$ (188)

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + (1 + r_0)s + r_{-1} = 0 \quad (189)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (1 + r_0)^2 &\geq 2 \cdot r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad & a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ & 3^2 \geq 2 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \end{aligned} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad & a_3^2 \geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ & 3^2 \geq 2 \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned} \quad (192)$$

Podmínka $i=3$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 9 &= 2 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \\ 9 &= 6 + 6r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.5} \end{aligned} \quad (193)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (1 + r_0)^2 &= 2 \cdot r_{-1} \cdot 3 \\ 2.25 &= 6r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= \underline{0.375} \end{aligned} \quad (194)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.5}$ $\underline{r_{-1} = 0.375}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.5s + 0.375}{s}$ (195)

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=2.4$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 1\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad & a_1^2 \geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ & (1 + r_0)^2 \geq 2.4 \cdot r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad & a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ & 3^2 \geq 2.4 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \end{aligned} \quad (197)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad & a_3^2 \geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ & 3^2 \geq 2.4 \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned} \quad (198)$$

Podmínka $i=3$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 9 &= 2.4 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \\ 9 &= 7.2 + 7.2r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.25} \end{aligned} \quad (199)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (1 + r_0)^2 &= 2.4 \cdot r_{-1} \cdot 3 \\ 1.5625 &= 7.2r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= \underline{0.217} \end{aligned} \quad (200)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.25}$ $\underline{r_{-1} = 0.217}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.25s + 0.217}{s}$ (201)

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=1.8$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 12\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (1 + r_0)^2 &\geq 1.8 \cdot r_{-1} \cdot 3 \end{aligned} \quad (202)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 3^2 &\geq 1.8 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \end{aligned} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad a_3^2 &\geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ 3^2 &\geq 1.8 \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned} \quad (204)$$

Podmínka $i=3$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

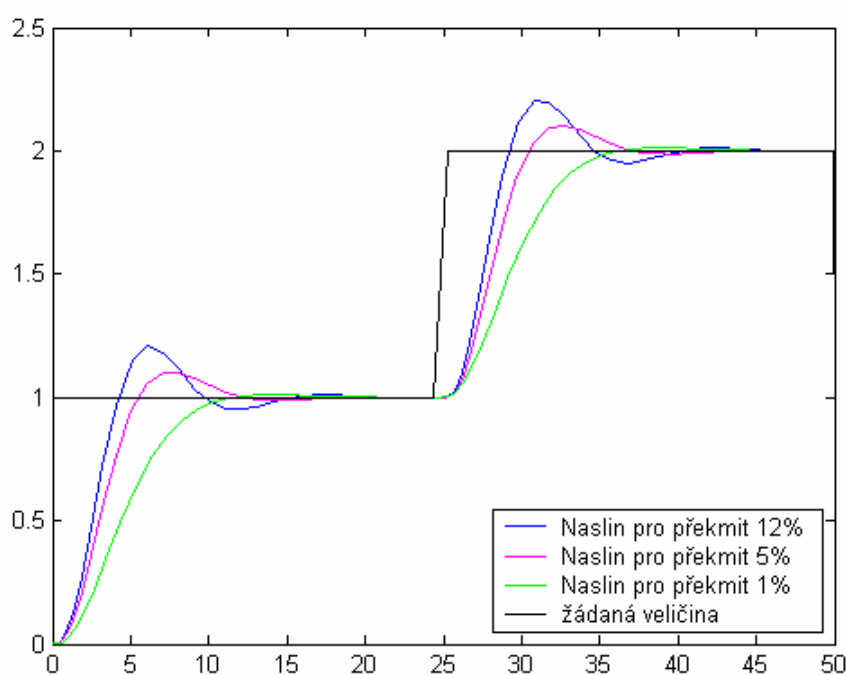
$$\begin{aligned} 9 &= 1.8 \cdot (1 + r_0) \cdot 3 \\ 9 &= 5.4 + 5.4r_0 \\ \underline{r_0} &= \underline{0.667} \end{aligned} \quad (205)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (1 + r_0)^2 &= 1.8 \cdot r_{-1} \cdot 3 \\ 2.778 &= 5.4r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= \underline{0.514} \end{aligned} \quad (206)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.667}$ $\underline{r_{-1} = 0.514}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.667s + 0.514}{s}$ (207)



Obr.4.11: Průběh regulace navržených regulátorů

Ověřili jsme zda překmitý uvedené v Tab.4.1 odpovídají skutečným:

Tab.4.12:Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách

Překmitý uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmitý
$\Delta y_{\max} \leq 1\%$	$\Delta y_{\max} = 1,18\%$
$\Delta y_{\max} \leq 5\%$	$\Delta y_{\max} = 10,5\%$
$\Delta y_{\max} \leq 12\%$	$\Delta y_{\max} = 21\%$

Příklad 4.12:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{0.3s + 0.1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 0.1}$ (208)

Přenos PI regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s}$ (209)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{0.3r_0 s + (0.1r_0 + 0.3r_{-1}) + 0.1r_{-1}}{s^4 + 3s^3 + (3 + 0.3r_0)s^2 + (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})s + 0.1r_{-1}}$ (210)

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu:

$$s^4 + 3s^3 + (3 + 0.3r_0)s^2 + (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})s + 0.1r_{-1} = 0 \quad (211)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ (viz. Tab.4.1):

$$a_1^2 \geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2$$

Pro $i=1$: $(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 \geq 2 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0)$ (212)

$$a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3$$

$$\text{Pro } i=2: (3 + 0.3r_0)^2 \geq 2 \cdot (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1}) \cdot 3 \quad (213)$$

$$\text{Pro } i=3: a_3^2 \geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4$$

$$3^2 \geq 2 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1 \quad (214)$$

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$9 = 2 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1$$

$$9 = 6 + 0.6r_0 \quad (215)$$

$$r_0 = 5$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$:

$$20.25 = 3.6 + 1.8r_{-1} \quad (216)$$

$$r_{-1} = 9.25$$

Dosadíme do podmínky $i=1$:

$$(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 \geq 2 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0) \quad (217)$$

$$11.39 > 8.325$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 5}$ $\underline{r_{-1} = 9.25}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{5s + 9.25}{s} \quad (218)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=2.2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 3\%$ (viz. Tab.4.1):

$$a_1^2 \geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2$$

$$\text{Pro } i=1: (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 \geq 2.2 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0) \quad (219)$$

$$a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3$$

$$\text{Pro } i=2: (3 + 0.3r_0)^2 \geq 2.2 \cdot (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1}) \cdot 3 \quad (220)$$

$$\text{Pro } i=3: a_3^2 \geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4$$

$$3^2 \geq 2.2 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1 \quad (221)$$

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$9 = 2.2 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1$$

$$9 = 6.6 + 0.66r_0 \quad (222)$$

$$r_0 = 3.64$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$:

$$16.74 = 1.0208 + 1.98r_{-1} \quad (223)$$

$$r_{-1} = 7.939$$

Dosadíme do podmínky $i=1$:

$$(0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 \geq 2.2 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0) \quad (224)$$

$$8.098 > 7.147$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 3.64} \quad \underline{r_{-1} = 7.939}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{3.64s + 7.939}{s} \quad (225)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=3$, pro koeficient $\alpha=1.8$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 12\%$ (viz. Tab.4.1):

$$a_1^2 \geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2$$

$$\text{Pro } i=1: (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 \geq 1.8 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0) \quad (226)$$

$$a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3$$

$$\text{Pro } i=2: (3 + 0.3r_0)^2 \geq 1.8 \cdot (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1}) \cdot 3 \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad a_3^2 &\geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ 3^2 &\geq 1.8 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1 \end{aligned} \quad (228)$$

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 9 &= 1.8 \cdot (3 + 0.3r_0) \cdot 1 \\ 9 &= 5.4 + 0.54r_0 \\ r_0 &= 6.667 \end{aligned} \quad (229)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$:

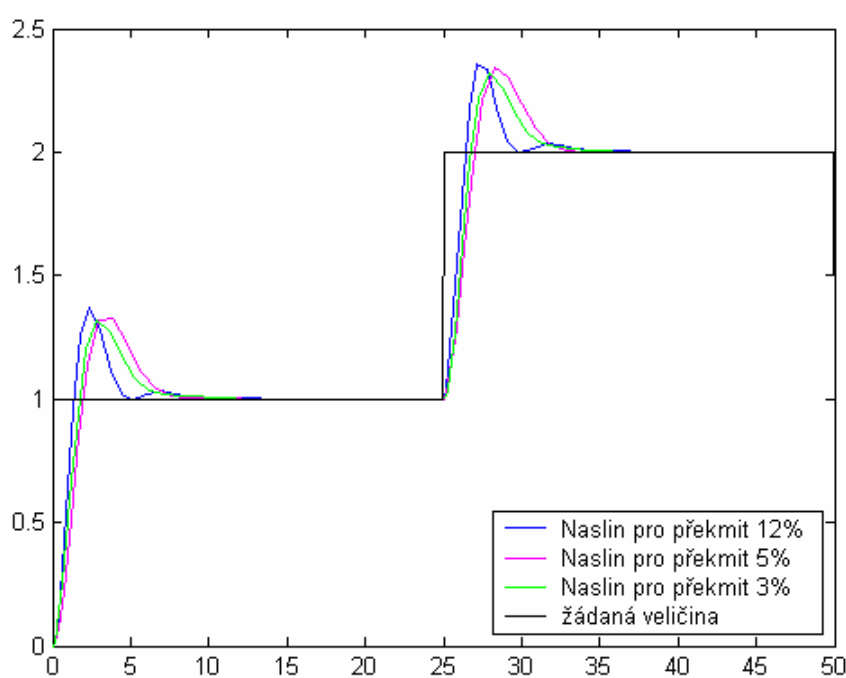
$$\begin{aligned} 25.001 &= 4.14018 + 1.62r_{-1} \\ r_{-1} &= 12.877 \end{aligned} \quad (230)$$

Dosadíme do podmínky $i=1$:

$$\begin{aligned} (0.1 + 0.1r_0 + 0.3r_{-1})^2 &\geq 2.2 \cdot 0.1r_{-1} \cdot (3 + 0.3r_0) \\ 21.44 &> 11.589 \end{aligned} \quad (231)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $r_0 = 6.667$ $r_{-1} = 12.877$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{6.667s + 12.877}{s} \quad (232)$$



Obr. 4.12: Průběh regulace navržených regulátorů

Ověřili jsme zda překmitý uvedené v Tab.4.1 odpovídají skutečným:

Tab.4.13: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách

Překmitý uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmitý
$\Delta y_{\max} \leq 3\%$	$\Delta y_{\max} = 29,8\%$
$\Delta y_{\max} \leq 5\%$	$\Delta y_{\max} = 31\%$
$\Delta y_{\max} \leq 12\%$	$\Delta y_{\max} = 37\%$

Příklad 4.13:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$ (233)

Přenos PID regulátoru: $G_R(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s}$ (234)

Přenos řízení: $G_{w,y}(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + (4+r_1)s^2 + (1+r_0)s + r_{-1}}$ (235)

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu:

$$s^5 + 4s^4 + 6s^3 + (4+r_1)s^2 + (1+r_0)s + r_{-1} = 0 \quad (236)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=4$, pro koeficient $\alpha=2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (1+r_0)^2 &\geq 2 \cdot r_{-1} \cdot (4+r_1) \end{aligned} \quad (237)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ (4+r_1)^2 &\geq 2 \cdot (1+r_0) \cdot 6 \end{aligned} \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad a_3^2 &\geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ 6^2 &\geq 2 \cdot (4 + r_1) \cdot 4 \end{aligned} \quad (239)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=4: \quad a_4^2 &\geq \alpha \cdot a_3 \cdot a_5 \\ 4^2 &\geq 2 \cdot 6 \cdot 1 \end{aligned} \quad (240)$$

Podmínka $i=4$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_1 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 36 &= 32 + 8r_1 \\ r_1 &= 0.5 \end{aligned} \quad (241)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$ a vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} (4 + r_1)^2 &= 2 \cdot (1 + r_0) \cdot 6 \\ 20.25 &= 12 + 12r_0 \\ r_0 &= 0.6875 \end{aligned} \quad (242)$$

Dosazením do podmínky pro $i=1$ vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} (1 + r_0)^2 &= 2 \cdot r_{-1} \cdot (4 + r_1) \\ 2.8477 &= 9r_{-1} \\ r_{-1} &= 0.3164 \end{aligned} \quad (243)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $r_0 = 0.6875$ $r_{-1} = 0.3164$ $r_1 = 0.5$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0.5s^2 + 0.6875s + 0.3164}{s} \quad (244)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=4$, pro koeficient $\alpha=2.2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 3\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\text{Pro } i=1: a_1^2 \geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \quad (245)$$

$$(1 + r_0)^2 \geq 2.2 \cdot r_{-1} \cdot (4 + r_1)$$

$$\text{Pro } i=2: a_2^2 \geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \quad (246)$$

$$(4 + r_1)^2 \geq 2.2 \cdot (1 + r_0) \cdot 6$$

$$\text{Pro } i=3: a_3^2 \geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \quad (247)$$

$$6^2 \geq 2.2 \cdot (4 + r_1) \cdot 4$$

$$\text{Pro } i=4: a_4^2 \geq \alpha \cdot a_3 \cdot a_5 \quad (248)$$

$$4^2 \geq 2.2 \cdot 6 \cdot 1$$

Podmínka $i=4$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_1 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 36 &= 35.2 + 8.8r_1 \\ \underline{r_1 = 0.0909} \end{aligned} \quad (249)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$ a vypočteme r_0 :

$$\begin{aligned} (4 + r_1)^2 &= 2.2 \cdot (1 + r_0) \cdot 6 \\ 16.7355 &= 13.2 + 13.2r_0 \\ \underline{r_0 = 0.2678} \end{aligned} \quad (250)$$

Dosazením do podmínky pro $i=1$ vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} (1 + r_0)^2 &= 2.2 \cdot r_{-1} \cdot (4 + r_1) \\ 1.6073 &= 8.999r_{-1} \\ \underline{r_{-1} = 0.1786} \end{aligned} \quad (251)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.2678}$ $\underline{r_{-1} = 0.1786}$ $\underline{r_1 = 0.0909}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0.0909s^2 + 0.2678s + 0.1786}{s} \quad (252)$$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=4$, pro koeficient $\alpha=1.8$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 12\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: \quad a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (1+r_0)^2 &\geq 1.8 \cdot r_{-1} \cdot (4+r_1) \end{aligned} \quad (253)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ (4+r_1)^2 &\geq 1.8 \cdot (1+r_0) \cdot 6 \end{aligned} \quad (254)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad a_3^2 &\geq \alpha \cdot a_2 \cdot a_4 \\ 6^2 &\geq 1.8 \cdot (4+r_1) \cdot 4 \end{aligned} \quad (255)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=4: \quad a_4^2 &\geq \alpha \cdot a_3 \cdot a_5 \\ 4^2 &\geq 1.8 \cdot 6 \cdot 1 \end{aligned} \quad (256)$$

Podmínka $i=4$ je splněna vždy.

Z podmínky pro $i=3$ vypočteme r_1 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 36 &= 28.8 + 7.2r_1 \\ \underline{r_1} &= 1 \end{aligned} \quad (257)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=2$ a vypočteme r_0 :

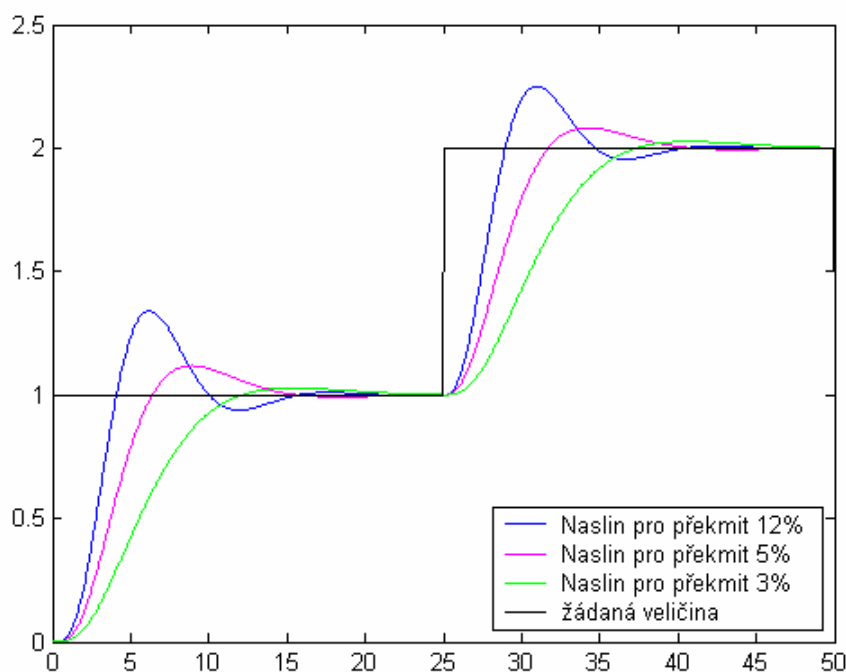
$$\begin{aligned} (4+r_1)^2 &= 1.8 \cdot (1+r_0) \cdot 6 \\ 25 &= 10.8 + 10.8r_0 \\ \underline{r_0} &= 1.3148 \end{aligned} \quad (258)$$

Dosazením do podmínky pro $i=1$ vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} (1+r_0)^2 &= 1.8 \cdot r_{-1} \cdot (4+r_1) \\ 5.3583 &= 9r_{-1} \\ \underline{r_{-1}} &= 0.5954 \end{aligned} \quad (259)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 1.3148}$ $\underline{r_{-1} = 0.5954}$ $\underline{r_1 = 1}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{s^2 + 1.3148s + 0.5954}{s}$ (260)



Obr.4.13: Průběh regulace navržených regulátorů

Ověřili jsme zda překmity uvedené v Tab.4.1 odpovídají skutečným:

Tab.4.14: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách

Překmity uvedené v tabulkách	Odpovídající skutečné překmity
$\Delta y_{\max} \leq 3\%$	$\Delta y_{\max} = 2,8\%$
$\Delta y_{\max} \leq 5\%$	$\Delta y_{\max} = 11,5\%$
$\Delta y_{\max} \leq 12\%$	$\Delta y_{\max} = 33,5\%$

4.1.3 Zhodnocení

U jednotlivých příkladů jsme provedli srovnání, zda skutečné překmity získané simulací navržených regulátorů odpovídají hodnotám překmitů uváděných literaturou (Tab.4.11, Tab.4.12, Tab.4.13, Tab.4.14), podle nichž určujeme koeficient α (Tab.4.1). Jak můžeme vidět hodnoty překmitů si neodpovídají. Výjimkou je regulátor popsany přenosem (252),

v příkladu 4.13, kde počítáme s regulovanou soustavou čtvrtého řádu popsanou přenosem (233), pro maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 3\%$ (Tab.4.14).

4.2 Seřízení regulátoru pomocí metody polovičního tlumení

4.2.1 Popis metodiky

Osvědčeným způsobem dosáhnoutí kvalitního regulačního procesu je zabezpečit dostatečné tlumení procesu. Doporučuje se nastavit toto tlumení na poloviční hodnotu, kdy poměr amplitudy dvou po sobě následujících kyvů je roven 0,5. Předpokládejme, že přenos regulované soustavy je možno aproximovat přenosem $F(s) = \frac{k}{1+sT} \cdot e^{-sD}$. Pro známé hodnoty K , D a T_0 vypočteme parametry regulátoru podle vztahů uvedených v Tab.4.2, Tab.4.21, Tab.4.22.

Tab.4.2: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2]

Typ regulátoru	Ziegler - Nichols		
	$k_R = k_{Rk}$	T_I	T_D
P	$k_{Rk} = \frac{1}{X}$	-	-
PI	$k_{Rk} = \frac{0,9}{X}$	$T_I = 3,33 \cdot X$	-
PID	$k_{Rk} = \frac{1,2}{X}$	$T_I = 2X$	$T_D = 0,5X$

Tab.4.21: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2]

Typ regulátoru	Cohen - Coon		
	$k_R = k_{Rk}$	T_I	T_D
P	$k_{Rk} = \frac{1}{X} + 0,333$	-	-
PI	$k_{Rk} = \frac{0,9}{X} + 0,082$	$T_I = \frac{3,33X(1+11X)}{1+0,2X}$	-
PID	$k_{Rk} = \frac{1,35}{X} + 0,27$	$T_I = \frac{2,5X(1+5X)}{1+0,6X}$	$T_D = \frac{0,37X}{1+0,2X}$

Tab.4.22: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2]

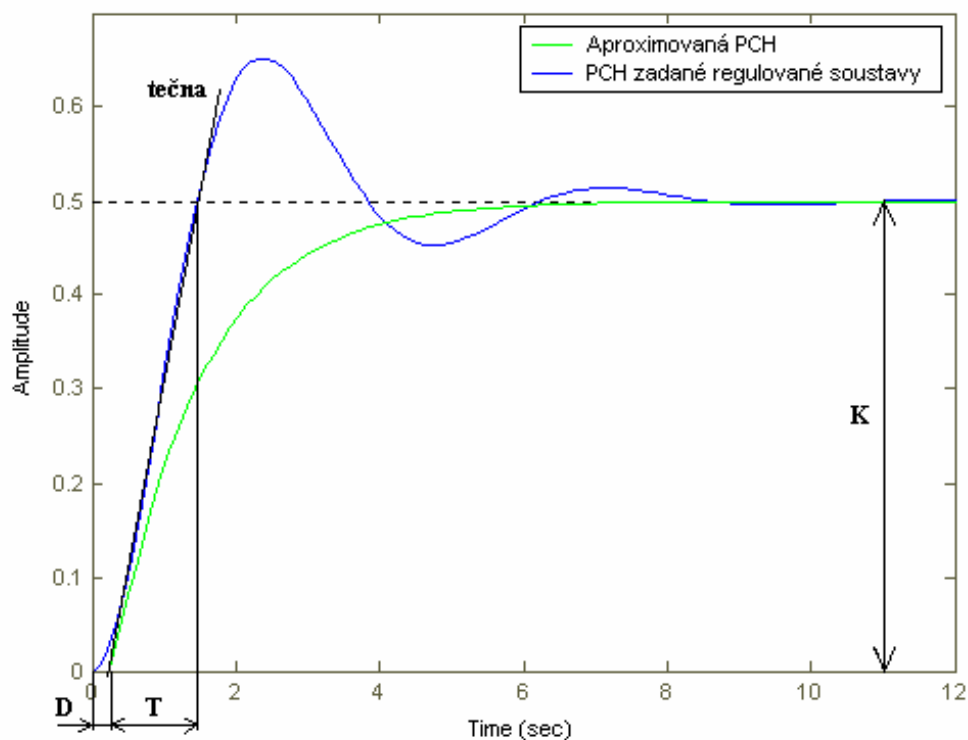
Typ regulátoru	3C		
	$k_R = k_{Rk}$	T_I	T_D
P	$k_{Rk} = \frac{1,208}{X^{-0,956}}$	-	-
PI	$k_{Rk} = \frac{0,928}{X^{-0,946}}$	$T_I = 0,928 \cdot X^{0,583}$	-
PID	$k_{Rk} = 1,37 \cdot X^{0,95}$	$T_I = 0,74 \cdot X^{0,738}$	$T_D = 0,365 \cdot X^{0,95}$

4.2.2 Vzorové příklady

Příklad 4.2:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$ (261)

Soustavu aproximujme do tvaru $F(s) = \frac{k}{1 + sT} \cdot e^{-sD}$ (262)



Obr. 4.2: Přebíhové charakteristiky

Odečtené hodnoty z Obr. 4.2: $T = 1.23$ $D = 0.3077$ $K = 0.5$

Dosazením do rovnice (262) tedy dostáváme $F(s) = \frac{0.5}{1 + s1.23} \cdot e^{-s0.3077}$ (263)

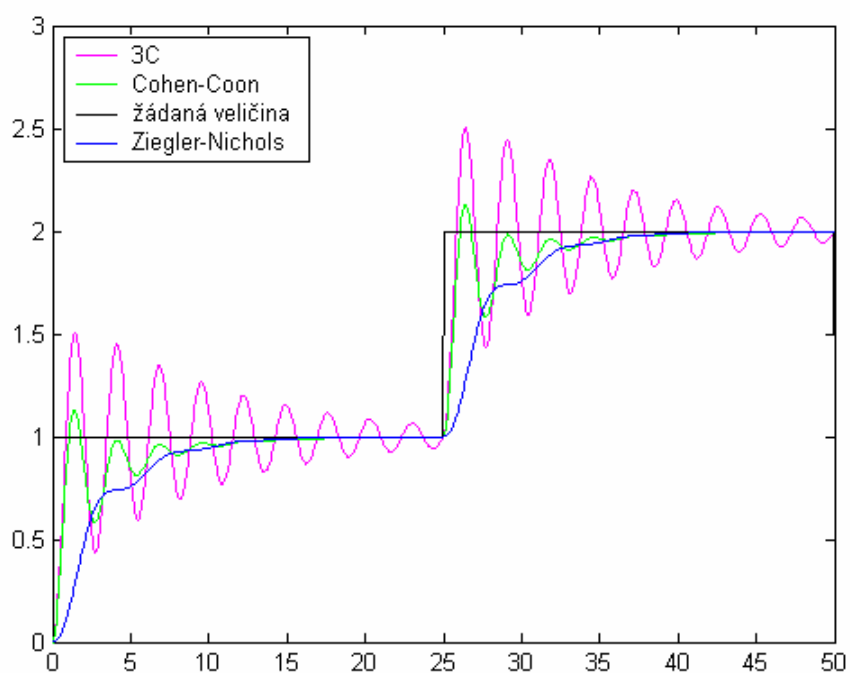
Dosazením do tabulek 4.2, 4.21 a 4.22 dostáváme hodnoty stavitelných parametrů regulátoru, kde $\chi = \frac{D}{T}$.

Vypočtené parametry pro PI regulátor:

Ziegler – Nichols: $\underline{r_0 = 3.6}$ $\underline{r_{-1} = 4.32}$

Cohen – Coon: $\underline{r_0 = 3.682}$ $\underline{r_{-1} = 1.238}$

3C: $\underline{r_0 = 0.25}$ $\underline{r_{-1} = 0.60}$



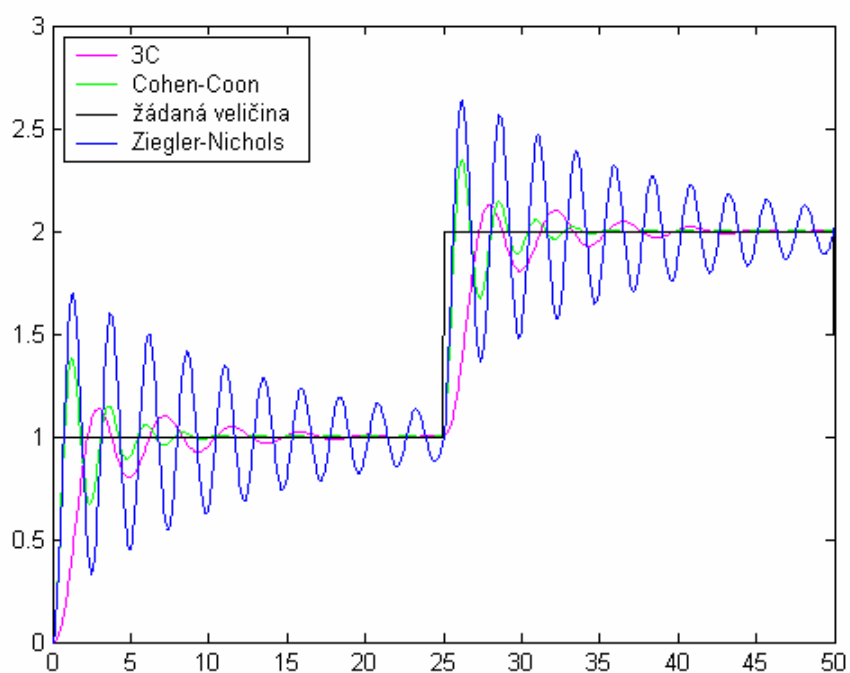
Obr.4.21: Průběh regulace navržených regulátorů

Vypočtené parametry pro PID regulátor:

Ziegler – Nichols: $\underline{r_0 = 4.8}$ $\underline{r_{-1} = 9.6}$ $\underline{r_1 = 0.6}$

Cohen - Coon: $\underline{r_0 = 5.67}$ $\underline{r_{-1} = 4.637}$ $\underline{r_1 = 0.499}$

3C: $\underline{r_0 = 0.367}$ $\underline{r_{-1} = 1.38}$ $\underline{r_1 = 0.036}$

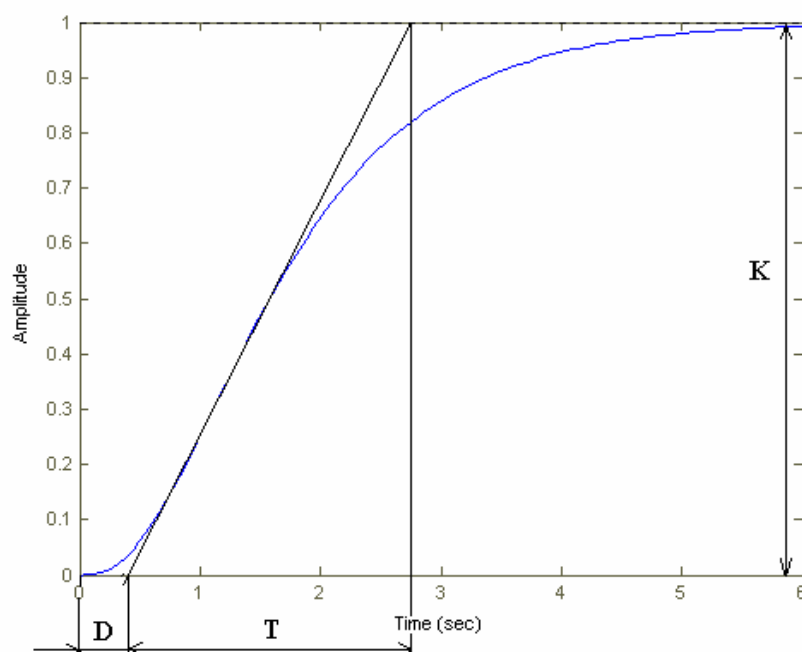


Obr. 4.22: Průběh regulace navržených regulátorů

Příklad 4.21:

Regulovaná soustava je dána přenosem: $G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ (264)

Soustavu aproximujme stejným postupem jako v příkladu 4.2 do tvaru $F(s) = \frac{k}{1 + sT} \cdot e^{-sD}$



Obr. 4.23: Přechodová charakteristika zadané regulované soustavy

Odečtené hodnoty z Obr. 4.23: $T = 2.2703$ $D = 0.4324$ $K = 1$

Dosazením do rovnice (262) tedy dostáváme $F(s) = \frac{1}{1 + s2.27} \cdot e^{-s0.4324}$ (265)

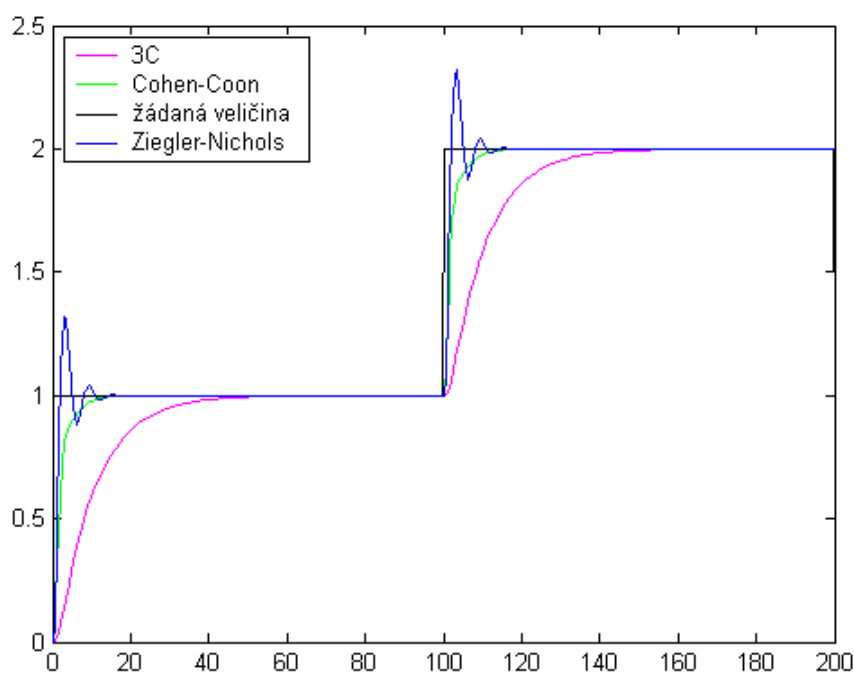
Dosazením do tabulek 4.2, 4.21 a 4.22 dostáváme hodnoty stavitelných parametrů regulátoru, kde $X = \frac{D}{T}$.

Vypočtené parametry pro PI regulátor:

Ziegler – Nichols: $\underline{r_0 = 4.72}$ $\underline{r_{-1} = 7.45}$

Cohen – Coon: $\underline{r_0 = 4.81}$ $\underline{r_{-1} = 2.54}$

3C: $\underline{r_0 = 0.19}$ $\underline{r_{-1} = 0.55}$



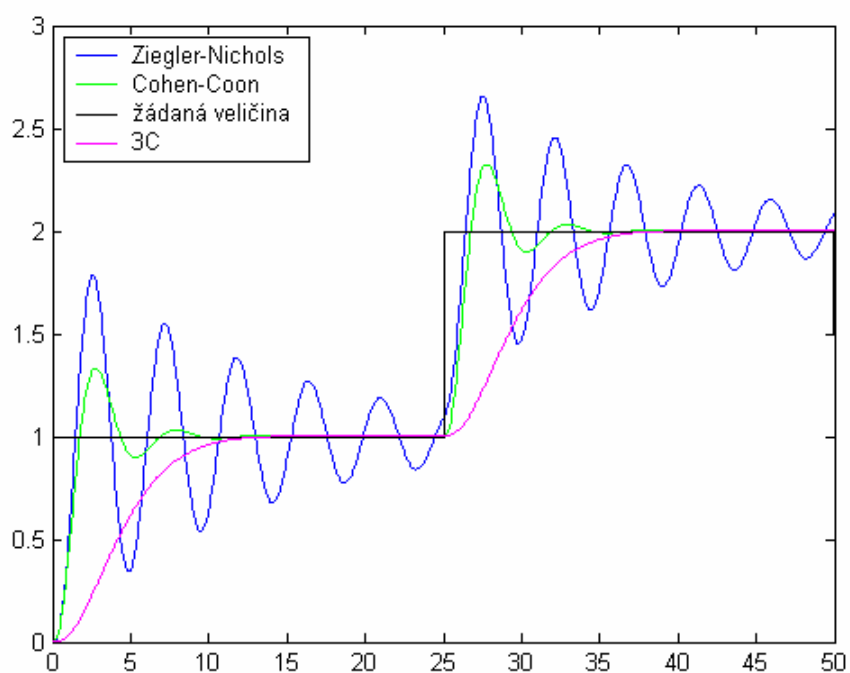
Obr.4.24: Průběh regulace navržených regulátorů

Vypočtené parametry pro PID regulátor:

Ziegler – Nichols: $\underline{r_0 = 6.299}$ $\underline{r_{-1} = 16.533}$ $\underline{r_1 = 0.599}$

Cohen - Coon: $\underline{r_0 = 7.357}$ $\underline{r_{-1} = 8.816}$ $\underline{r_1 = 0.499}$

3C: $\underline{r_0 = 0.284}$ $\underline{r_{-1} = 1.302}$ $\underline{r_1 = 0.021}$



Obr.4.25: Průběh regulace navržených regulátorů

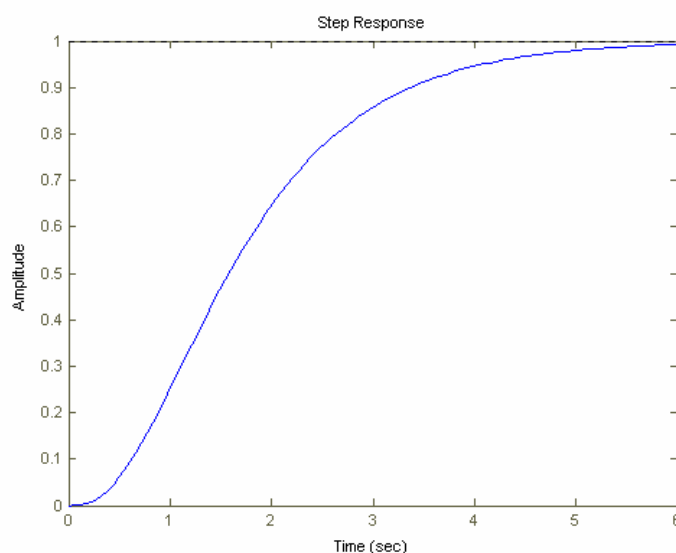
4.2.3 Zhodnocení

Metodika vychází z odečtení hodnot z přechodové charakteristiky a posléze jejich dosazení do příslušných tabulek (Tab.4.2, Tab.4.21, Tab.4.22), obsahující empirické vztahy pro výpočet stavitelných parametrů regulátoru.

5 POROVNÁVACÍ ANALÝZA

Pro porovnávací analýzu použijeme regulovanou soustavu třetího řádu danou přenosem:

$$G(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (266)$$



Obr.5: Přejchodová charakteristika zadaného regulovaného systému

5.1 Nastavení parametrů regulátoru pomocí kritických hodnot

Nejprve pro daný systém nastavíme pouze proporcionální složku regulátoru, proto přenos regulátoru bude: $G_R(s) = r_0$ (267)

$$\text{Přenos řízení je pak: } G_{w,y}(s) = \frac{G(s) \cdot G_R(s)}{1 + G(s) \cdot G_R(s)} = \frac{6r_0}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 6r_0)} \quad (268)$$

Charakteristický polynom získáme ze jmenovatele přenosu řízení:

$$F(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 6r_0) \quad (269)$$

Pro určení kritického zesílení regulátoru r_{0k} použijí Hurwitzova kritéria:

$$H_s = \begin{vmatrix} 6 & (6 + 6r_0) & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & (6 + 6r_0) \end{vmatrix}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6 & (6 + 6r_0) \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 66 - 6 - 6r_0 \Rightarrow r_0 = 10$$

Nyní tedy musíme spočítat periodu kritických kmitů T_k .

Uurčíme úhlový kmitočet dosazením $s = j\omega$ do charakteristického polynomu:

$$F(j\omega) = (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 66 \quad (270)$$

$$F(j\omega) = (66 - 6\omega^2) - j(\omega^3 - 11\omega)$$

$$66 - 6\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_k = \sqrt{11}$$

Pro r_{0k} obvod kmitá: $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 1.8945$

Pro parametry PI regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.45r_{0k}$	$r_{-1} = \frac{0.54r_{0k}}{T_k}$
$r_0 = 4.5$	$r_{-1} = 2.85$

Pro parametry PID regulátoru podle Tab.2.1 platí:

$r_0 = 0.6r_{0k}$	$r_{-1} = 1.2 \frac{r_{0k}}{T_k}$	$r_1 = 0.075r_{0k}T_k$
$r_0 = 6$	$r_{-1} = 6.33$	$r_1 = 1.42$

5.2 Nastavení parametrů regulátorů na základě znalosti PCH

Odečtením hodnot dle Obr.2.2 a jejich dosazením do Tab.2.2 dostáváme tyto parametry regulátoru:

Parametry PI regulátoru: $r_0 = 5,537$ $r_{-1} = 4,299$

Parametry PID regulátoru: $r_0 = 7,69$ $r_{-1} = 10,448$ $r_1 = 1,415$

Odečtením hodnot dle Obr.2.22 a jejich dosazením do Tab.2.21 dostáváme tyto parametry regulátoru:

Parametry PI regulátoru: $r_0 = 5,389$ $r_{-1} = 1,796$

Parametry PID regulátoru: $r_0 = 7,186$ $r_{-1} = 3,593$ $r_1 = 3,593$

5.3 Nastavení parametrů regulátorů pomocí metod CHR1 a CHR2

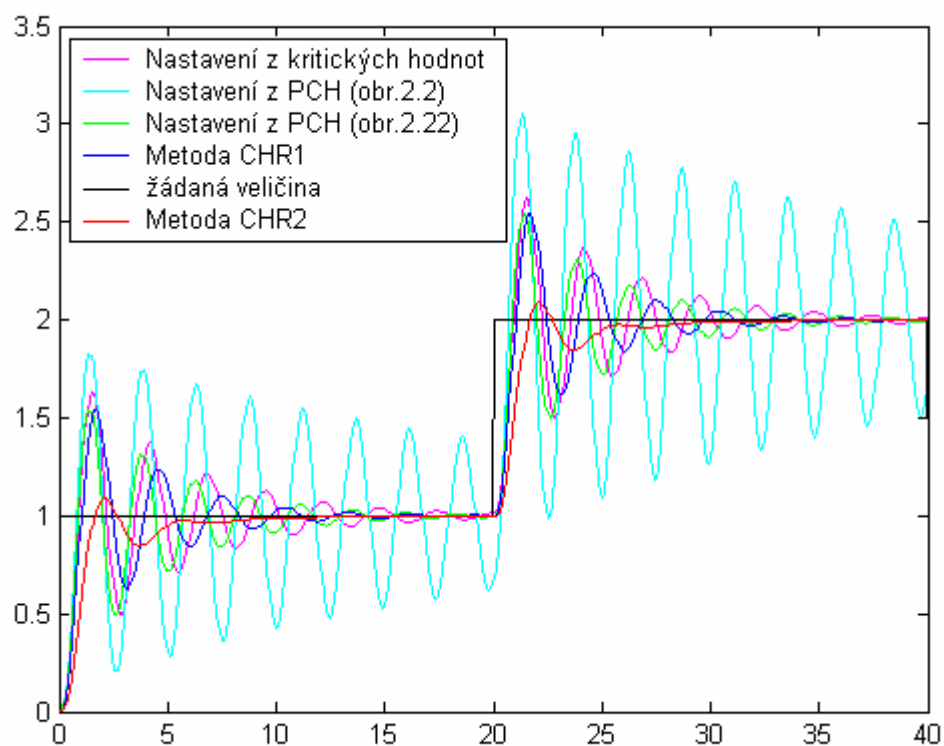
Odečtením hodnot dle Obr.2.3 a jejich dosazením do Tab.2.3 a 2.31 dostáváme tyto parametry regulátoru:

CHR1: Parametry PI regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 3,593$ $\underline{r_{-1}} = 2,44$

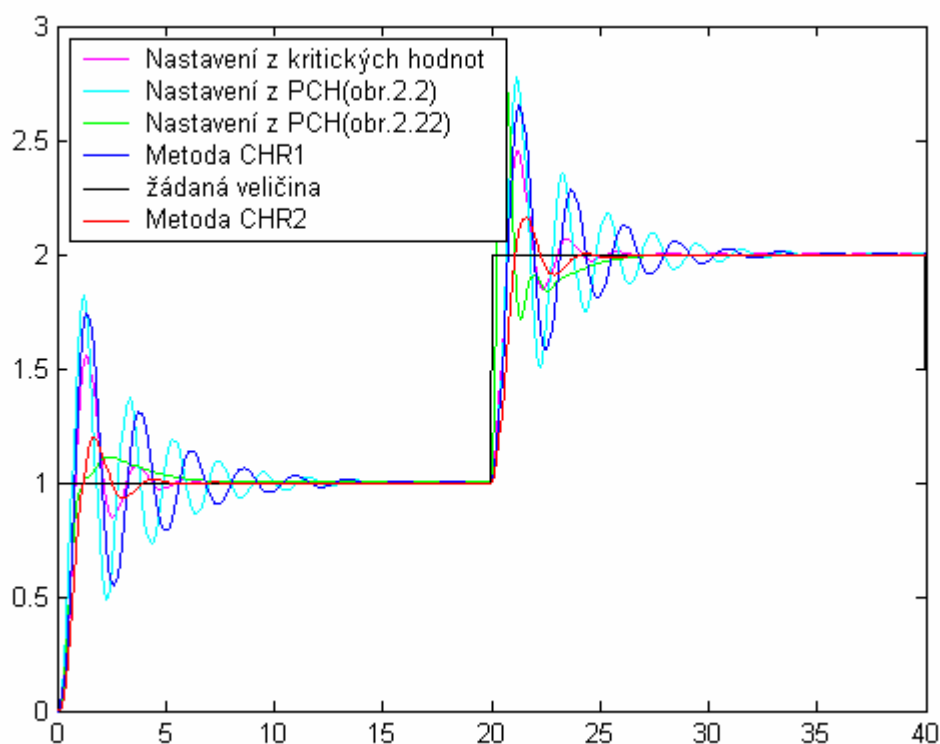
CHR1: Parametry PID regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 5,689$ $\underline{r_{-1}} = 6,747$ $\underline{r_1} = 0,879$

CHR2: Parametry PI regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 2,096$ $\underline{r_{-1}} = 0,771$

CHR2: Parametry PID regulátoru 0%: $\underline{r_0} = 3,593$ $\underline{r_{-1}} = 1,587$ $\underline{r_1} = 0,68$



Obr.5.1: Průběh regulace navržených PI regulátorů



Obr.5.11: Průběh regulace navržených PID regulátorů

5.4 Nastavení parametrů regulátorů pomocí metod standardních tvarů

Regulovaná soustava je dána přenosem popsaným rovnicí (266)

$$\text{Přenos PI regulátoru: } G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s} \quad (271)$$

$$\text{Přenos řízení: } G_{w,y}(s) = \frac{6r_0 s + 6r_{-1}}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6 + 6r_0)s + 6r_{-1}} \quad (272)$$

Přenos řízení vydělíme koeficientem $a_0 = 6r_{-1}$ a použijeme substituci $s = (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} q$:

$$G_{w,y}(q) = \frac{\frac{6r_0}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1}{\frac{1}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{4}{4}} q^4 + \frac{6}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{3}{4}} q^3 + \frac{11}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} q^2 + \frac{(6+6r_0)}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} q + 1} \quad (273)$$

Výpočet stavitelných parametrů regulátoru pomocí metody Whiteleyových standardních tvarů:

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.11 .

$$1 = 1 \quad (274)$$

$$7.2 = \frac{6}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (275)$$

$$16 = \frac{11}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (276)$$

$$12 = \frac{(6 + 6r_0)}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (277)$$

$$1 = 1 \quad (278)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_{-1} .

Z rovnice (275) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 7.2 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 6 \\ r_{-1} &= 0.08 \end{aligned} \quad (279)$$

Nebo z rovnice (276):

$$\begin{aligned} 16 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} &= 11 \\ r_{-1} &= 0,079 = 0,08 \end{aligned} \quad (280)$$

Dosazením vypočteného r_{-1} do rovnice (277) získáme r_0 :

$$\begin{aligned} 12(6r_{-1})^{\frac{3}{4}} &= 6 + 6r_0 \\ r_0 &= 0,153 \end{aligned} \quad (281)$$

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $\underline{r_0 = 0,153}$ $\underline{r_{-1} = 0,08}$

$$\text{Dostali jsme přenos regulátoru: } G_R(s) = \frac{0,153s + 0,085}{s} \quad (282)$$

Výpočet stavitelných parametrů regulátoru pomocí metody Butterwothových standardních tvarů:

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.2 .

$$1 = 1 \quad (283)$$

$$2,6 = \frac{6}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (284)$$

$$3,4 = \frac{11}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (285)$$

$$2,6 = \frac{(6 + 6r_0)}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (286)$$

$$1 = 1 \quad (287)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_{-1} .

Z rovnice (284) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2,6 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 6 \\ r_{-1} &= 4,727 \end{aligned} \quad (288)$$

Nebo z rovnice (285):

$$\begin{aligned} 3,4 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} &= 11 \\ r_{-1} &= 1,745 \end{aligned} \quad (289)$$

Dosazením vypočteného r_{-1} (288) do rovnice (286) získáme r_0 :

$$\begin{aligned} 2,6(6r_{-1})^{\frac{3}{4}} &= 6 + 6r_0 \\ r_0 &= 4,326 \end{aligned} \quad (290)$$

Dosazením vypočteného r_{-1} (289) do rovnice (286) získáme r_0 :

$$\begin{aligned} 2,6(6r_{-1})^{\frac{3}{4}} &= 6 + 6r_0 \\ r_0 &= 1,522 \end{aligned} \quad (291)$$

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $r_0 = 4,326$ $r_{-1} = 4,727$,
 $r_0 = 1,522$ $r_{-1} = 1,745$.

Obdobným způsobem jako v příkladu 3.12 provedeme kontrolu stability regulačního obvodu pro obě dvojice nastavitelných parametrů regulátorů. První seřízení je nestabilní a druhé stabilní.

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{1,522s + 1,745}{s}$ (292)

Výpočet stavitelných parametrů regulátoru pomocí metody Grahamových a Lathropových standardních tvarů:

Koeficienty charakteristické rovnice nyní srovnáme s koeficienty standardních tvarů pro 4 stupeň charakteristického polynomu podle Tab.3.3 .

$$1 = 1 \quad (293)$$

$$2,7 = \frac{6}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{3}{4}} \quad (294)$$

$$3,4 = \frac{11}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} \quad (295)$$

$$2,1 = \frac{(6 + 6r_0)}{6r_{-1}} \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} \quad (296)$$

$$1 = 1 \quad (297)$$

Nyní máme dvě možnosti výpočtu r_{-1} .

Z rovnice (294) vypočteme r_{-1} :

$$\begin{aligned} 2,7 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{4}} &= 6 \\ r_{-1} &= 4,064 \end{aligned} \quad (298)$$

Nebo z rovnice (295):

$$\begin{aligned} 3,4 \cdot (6r_{-1})^{\frac{1}{2}} &= 11 \\ r_{-1} &= 1,745 \end{aligned} \quad (299)$$

Dosazením vypočteného r_{-1} (298) do rovnice (296) získáme r_0 :

$$\begin{aligned} 2,6(6r_{-1})^{\frac{3}{4}} &= 6 + 6r_0 \\ r_0 &= 2,84 \end{aligned} \quad (300)$$

Dosazením vypočteného r_{-1} (299) do rovnice (296) získáme r_0 :

$$\begin{aligned} 2,6(6r_{-1})^{\frac{3}{4}} &= 6 + 6r_0 \\ r_0 &= 1,037 \end{aligned} \quad (301)$$

Vypočtené parametry regulátoru tedy jsou: $\underline{r_0 = 2,84}$ $\underline{r_{-1} = 4,064}$,
 $\underline{r_0 = 1,037}$ $\underline{r_{-1} = 1,745}$.

Obdobným způsobem jako v příkladu 3.12 provedeme kontrolu stability regulačního obvodu pro obě dvojice nastavitelných parametrů regulátorů. Obě seřízení jsou stabilní.

Dostáváme dva přenosy regulátoru: $G_R(s) = \frac{2,84s + 4,064}{s}$, $G_R(s) = \frac{1,037s + 1,745}{s}$

5.5 Nastavení parametrů regulátorů pomocí Naslinovy metody

Pro regulovanou soustavu popsanou pomocí přenosu (257) získáme charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu, kterou lze vyčíst ze jmenovatele přenosu řízení:

$$s^3 + 6s^2 + 11s^2 + (6 + 6r_0)s + 6r_{-1} = 0 \quad (302)$$

Pro ni platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha = 2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ (viz. Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (6 + 6r_0)^2 &\geq 2 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \end{aligned} \quad (303)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 11^2 &\geq 2 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \end{aligned} \quad (304)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: a_3^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 36 &\geq 2 \cdot 11 \cdot 1 \end{aligned}$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 121 &= 2 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \\ \underline{r_0} &= 0,68 \end{aligned} \quad (305)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (6 + 6r_0)^2 &= 2 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \\ \underline{r_{-1}} &= 0,77 \end{aligned} \quad (306)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.68}$ $\underline{r_{-1} = 0.77}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.68s + 0.77}{s}$ (307)

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha=2.4$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 1\%$ (viz Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (6 + 6r_0)^2 &\geq 2,4 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \end{aligned} \quad (308)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 11^2 &\geq 2,4 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \end{aligned} \quad (309)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 36 &\geq 2,4 \cdot 11 \cdot 1 \end{aligned}$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

$$\begin{aligned} 121 &= 2,4 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \\ \underline{r_0} &= 0,4 \end{aligned} \quad (310)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (6 + 6r_0)^2 &= 2,4 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \\ \underline{r_{-1}} &= 0,446 \end{aligned} \quad (311)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.4}$ $\underline{r_{-1} = 0.446}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.4s + 0.446}{s}$

Pro charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu platí následující nerovnice pro $i=2$, pro koeficient $\alpha=2.2$, čemuž odpovídá maximální překmit $\Delta y_{\max} \leq 3\%$ (viz Tab.4.1):

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=1: a_1^2 &\geq \alpha \cdot a_0 \cdot a_2 \\ (6 + 6r_0)^2 &\geq 2,2 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \end{aligned} \quad (312)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=2: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 11^2 &\geq 2,2 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \end{aligned} \quad (313)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } i=3: \quad a_2^2 &\geq \alpha \cdot a_1 \cdot a_3 \\ 36 &\geq 2,2 \cdot 11 \cdot 1 \end{aligned}$$

Z podmínky pro $i=2$ vypočteme r_0 , využijeme mezního případu – rovnosti:

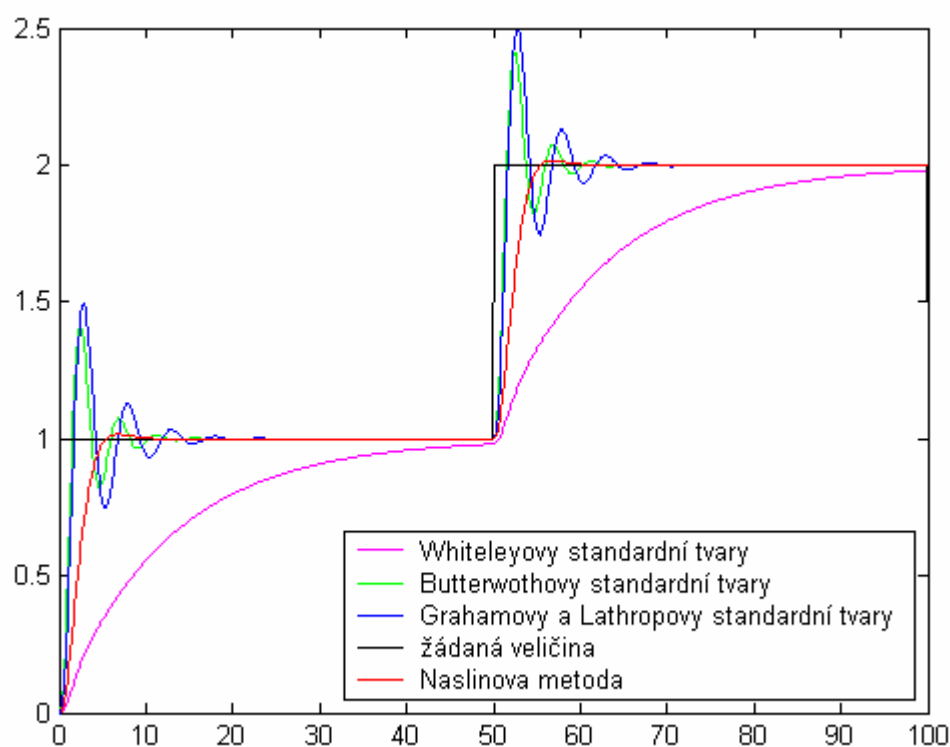
$$\begin{aligned} 121 &= 2,2 \cdot (6 + 6r_0) \cdot 6 \\ \underline{r_0 = 0,528} \end{aligned} \quad (314)$$

Dosadíme do podmínky pro $i=1$:

$$\begin{aligned} (6 + 6r_0)^2 &= 2,2 \cdot 6r_{-1} \cdot 11 \\ \underline{r_{-1} = 0,579} \end{aligned} \quad (315)$$

Vypočetli jsme parametry regulátoru: $\underline{r_0 = 0.528}$ $\underline{r_{-1} = 0.579}$

Dostali jsme přenos regulátoru: $G_R(s) = \frac{0.528s + 0.579}{s}$



Obr.5.12: Průběh regulace navržených regulátorů

5.6 Zhodnocení

Pro srovnávací analýzu jsme zvolili soustavu třetího řádu popsanou přenosem (266).

Při srovnání regulačních pochodů navržených regulátorů, pomocí metod neparametrických (Obr.5.1 a Obr.5.11), z hlediska rychlosti a kmitavosti, můžeme vidět, že dojde k ustálení regulované veličiny nejrychleji při regulaci pomocí regulátoru navrženého metodou CHR2. Tento regulační pochod vykazuje i nejmenší kmitavost. Naopak nejdéle se regulační veličina ustaluje pro regulátor navrženého pomocí nastavení na základě znalosti PCH, kde vycházíme z odečtených hodnot dle Obr.2.2. Tento pochod vykazuje také největší kmitavost.

Při srovnání regulačních pochodů z hlediska rychlosti regulace navržených regulátorů pomocí metod parametrických (Obr.5.12) můžeme vidět, že nejrychleji dochází k ustálení regulační veličiny při řízení pomocí regulátoru navrženého metodou Naslinovou. Naopak nejdéle dochází k ustálení regulační veličiny při řízení regulátoru navrženého pomocí metody Whiteleyovy standardních tvarů. Při srovnání regulačních pochodů z hlediska kmitavosti vidíme, že nejméně kmitavého pochodu dosáhneme pomocí regulátoru navrženého metodou Whiteleyovy standardních tvarů. Nejvíce kmitavý regulační pochod naopak vykazuje regulátor navržený pomocí metody Grahamových a Lathropových standardních tvarů.

ZÁVĚR

Existuje řada metod pro nastavení stavitelných parametrů PID regulátorů. Lze také prohlásit, že pokud pro daný (řízený) systém existuje jedno nastavení regulátoru, které ve zpětnovazebním zapojení stabilizuje, pak takových nastavení existuje nekonečně mnoho. Odlišují se přesností, kvalitou regulačního pochodu i chováním vůči potenciálním poruchám.

Cílem této práce bylo vytvoření vzorových příkladů a protokolů z oblasti tzv. klasických metod nastavení parametrů PID regulátorů způsobem, který by byl přehledný a pochopitelný pro budoucí studenty. Byly zpracovány metody Ziegler – Nicholssovy, metody standardních tvarů, a to Whiteleyovy, Butterworth, Graham a Lathrop, metody Naslinova a polovičního tlumení.

Při analýze uvedených metod bylo ověřeno, zda pro vybrané systémy zajišťují tyto metody regulační chování, které se od nich dle literatury a referencí očekává. Ověřováno bylo zejména, zda překmity regulačních pochodů navržených regulátorů uváděné literaturou odpovídají překmitům skutečným, zejména u metod CHR, Whiteleyových standardních tvarů a Naslinovy metody. U regulátorů navržených pomocí metod CHR je rozdíl skutečných překmitů od překmitů uváděných literaturou vyšší u metody CHR1, u metody CHR2 je tento rozdíl nižší. U regulačních pochodů regulátorů, navržených pomocí metody Whiteleyovy standardních tvarů, jsou skutečné překmity v toleranci, kterou uvádí literatura. Zajímavé je zjištění, že u regulačních pochodů regulátorů navržených pomocí Naslinovy metody, překmity uváděné literaturou, podle nichž určujeme koeficient α (potřebný pro výpočet), neodpovídají překmitům skutečným.

Pro srovnání jednotlivých metod byla vytvořena porovnávací analýza. Zde pro jediný systém, a to systém třetího řádu, byly navrženy regulátory pomocí metod neparametrických a metod parametrických. Jednotlivé regulační pochody byly porovnány z hlediska kmitavosti a doby regulace. Simulační ověřovací experimenty jsou provedeny v prostředí Simulink.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] Balátě, J.: Automatické řízení, BEN Praha, 2003.
- [2] Murgaš, J., Mudrončík, D.: Automatizácia výrobných procesov, Bratislava 1989.
- [3] Levine et al: The Control Handbook. IEEE Press, 1995.
- [4] Prokop, R.: Základy automatizace, FT VUT Zlín, 1998.
- [5] Švarc, I.: Automatizace, skripta VUT Brno, 2002.
- [6] Bakošová, M. a kol.: Základy automatizácie, FCHPT STU Bratislava, 2003.
- [7] Åström, K.J., Hägglund, T.: PID controllers: Theory, design and Tuning. Instr. Society of America, 1995.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$h(t)$ - přechodová funkce

$i(t)$ - impulsní funkce

$G(s)$ - přenos soustavy

$G_R(s)$ - přenos regulátoru

$G_{w,y}(s)$ - přenos řízení

P – proporcionální složka regulátoru

I – integrační složka regulátoru

D – derivační složka regulátoru

T_I - integrační časová konstanta regulátoru

T_D - derivační časová konstanta regulátoru

k_R - zesílení regulátoru

k_{Rk} - kritické zesílení regulátoru

T_k - Kritická perioda kmitů

r_0 - proporcionální konstanta regulátoru

r_{-1} - integrační konstanta regulátoru

r_1 - derivační konstanta regulátoru

$\Delta y_{\max}$ - přeregulování (překmit)

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr.1: Schéma uzavřeného regulačního obvodu.....	10
Obr.2.1: Po nastavení proporcionální složky regulátoru – soustava (10).....	13
Obr.2.11: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (10).....	14
Obr.2.12: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (15).....	15
Obr.2.13: Po nastavení proporcionální složky regulátoru – soustava (22).....	16
Obr.2.14: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (22).....	17
Obr.2.2: Přejchodová charakteristika – soustava (26).....	20
Obr.2.21: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (26).....	21
Obr.2.22: Přejchodová charakteristika - soustava (26).....	22
Obr.2.23: Průběh regulace navržených regulátorů - soustava (26).....	23
Obr.2.3: Přejchodová charakteristika - soustava (35).....	25
Obr.2.31: Průběh regulace navržených PI regulátorů – soustava (35).....	26
Obr.2.32: Průběh regulace navržených PID regulátorů – soustava (35).....	26
Obr.2.33: Průběh regulace navržených PI regulátorů – soustava (35).....	27
Obr.2.34: Průběh regulace navržených PID regulátorů – soustava (35).....	28
Obr.3.1: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.1 a 3.11–soustava (40)...	34
Obr.3.11: Průběh regulace pro obě řešení – soustava (62).....	37
Obr.3.12: Průběh regulace navrženého regulátoru – soustava (78).....	39
Obr.3.2: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.2 a 3.3.....	50
Obr.3.21: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.21 a 3.31.....	51
Obr.3.22: Průběh regulace navržených regulátorů pro příklady 3.22 a 3.32.....	51
Obr.4.1: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (167).....	56
Obr.4.11: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (186).....	60
Obr. 4.12: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (208).....	64
Obr.4.13: Průběh regulace navržených regulátorů – soustava (233).....	69
Obr. 4.2: Přejchodové charakteristiky – soustavy (261, 262).....	72
Obr.4.21: Průběh regulace navržených PI regulátorů – soustava (261).....	73
Obr. 4.22: Průběh regulace navržených PID regulátorů – soustava (261).....	74
Obr.4.23: Přejchodová charakteristika zadané regulované soustavy – soustava (264).....	74
Obr.4.24: Průběh regulace navržených PI regulátorů – soustava (264).....	75
Obr.4.25: Průběh regulace navržených PID regulátorů – soustava (264).....	76

Obr.5: Přejchodová charakteristika zadaného regulovalného systému – soustava (266).....	77
Obr.5.1: Průběh regulace navržených PI regulátorů – neparametrické metody	79
Obr.5.11: Průběh regulace navržených PID regulátorů – neparametrické metody.....	80
Obr.5.12: Průběh regulace navržených regulátorů – parametrické metody.....	86

SEZNAM TABULEK

Tab.2.1: Seřízení spojitého regulátorů z kritických hodnot regulátoru viz [1].....	11
Tab.2.2: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz[1].....	18
Tab.2.21: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru.....	21
Tab.2.3: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru CHR1.....	24
Tab.2.31: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru CHR2.....	24
Tab.2.32: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro PI regulátor.....	29
Tab.2.33: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro PID regulátor	29
Tab.3.1: Standardní tvary přenosové funkce viz [1].....	30
Tab.3.11: Standardní tvary přenosové funkce viz [1].....	31
Tab.3.12: Standardní tvary přenosové funkce viz [1].....	31
Tab.3.13: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.1, 3.11.	39
Tab.3.14: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.12.....	40
Tab.3.15: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách pro příklad 3.13.....	40
Tab.3.2: Butterworthovy standardní tvary charakteristické rovnice viz [2].....	40
Tab.3.3: Grahamovy a Lathropovy standardní tvary charakteristické rovnice viz [2].....	45
Tab.4.1: Závislost $\Delta y_{\max} [\%]$ na α dle Napsána viz [1].....	53
Tab.4.11: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách.....	57
Tab.4.12:Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách.....	61
Tab.4.13: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách.....	65
Tab.4.14: Srovnání skutečných překmitů s uvedenými v tabulkách.....	69
Tab.4.2: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2].....	70
Tab.4.21: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2].....	71
Tab.4.22: Optimální hodnoty stavitelných parametrů regulátoru viz [2].....	71

SEZNAM PŘÍLOH

- P1: CD – ROM obsahující simulační schéma, práci ve formátu PDF a DOC, použité vytvořené materiály.