

Využití geometrické pravděpodobnosti při experimentálním ověření Ludolfova čísla

Ladislav Daníček

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická

Rád by jsem touto cestou poděkoval vedoucímu bakalářské práce Ing. Bronislavu Chramcovovi za odborné vedení, rady a pomoc při řešení problémů souvisejících s danou prací.

Abstrakt

Práce pojednává o experimentálním výpočtu Ludolfova čísla pomocí dvou metod. První metoda je použití výpočtu pomocí Jednotkové kružnice. Druhá metoda je experimentální výpočet pomocí Buffonovy úlohy. Součástí práce je vytvořený program v prostředí Matlab, který simuluje výše uvedené metody. Závěr práce obsahuje výsledky testování těchto metod a jejich přesnost.

Abstract

This thesis is about experimental calculation of "Ludolphian number" by help of two methods. First one is using of calculation by help of unit circle. Second one is experimental calculation by help of "Buffon task" Component of the thesis is created in Matlab, which stimulates methods mentioned above. End of thesis contains results of testing these methods and their accuracy.

OBSAH

ÚVOD.....	5
I. TEORETICKÁ ČÁST	6
1 VYTVÁŘENÍ POSLOUPNOSTÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL.....	7
1.1 GENEROVÁNÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL	7
1.1.1 Urna	7
1.1.2 Kostky	7
1.1.3 Tabulky náhodných čísel	8
1.1.4 Fyzikální generátory	8
1.2 GENEROVÁNÍ PSEUDONÁHODNÝCH ČÍSEL	8
1.3 TESTOVÁNÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL	9
1.4 CIFRY LUDOLFOVA ČÍSLA.....	9
2 GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST	10
2.1 VÝPOČET LUDOLFOVA ČÍSLA	10
3 POPIS BUFFONOVY ÚLOHY	12
4 ZJIŠTĚNÍ LUDOLFOVA ČÍSLA POMOCÍ JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE.....	14
II. PRAKTICKÁ ČÁST.....	16
5 POPIS SIMULAČNÍHO MODELU JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE	17
5.1 UŽIVATELSKÉ ROZHRAŇÍ JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE	17
5.2 PŘÍKLAD ODHADU LUDOLFOVA ČÍSLA NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI	20
6 POPIS SIMULAČNÍHO MODELU BUFFONOVY ÚLOHY.....	21
6.1 UŽIVATELSKÉ ROZHRAŇÍ BUFFONOVY ÚLOHY	21
6.2 PŘÍKLAD ODHADU LUDOLFOVA ČÍSLA NA BUFFONOVĚ ÚLOZE	26
7 STATISTICKÉ VYHODNOCENÍ METOD.....	27
7.1 TESTOVÁNÍ METODY JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE.....	27
7.2 TESTOVÁNÍ BUFFONOVY ÚLOHY.....	29
ZÁVĚR.....	32
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	33
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	34
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	35
SEZNAM TABULEK	36
SEZNAM PŘÍLOH.....	37

ÚVOD

Úvodem bych chtěl říci, že práce byla zadána z důvodu vytvoření výukové pomůcky pro předmět Základy informatiky. Na simulačních modelech je vidět jak funguje geometrická pravděpodobnost. Pomocí této pravděpodobnosti lze vypočítat Ludolfovo číslo s jistou přesností, která závisí na počtu generovaných čísel z intervalu.

Simulační modely jsou realizovány v programovém prostředí Matlab. Jsou doplněny o uživatelské prostředí, které mohou využívat studenti pro zadávání parametrů simulace. Simulace jsou doplněny o grafy, které zobrazují průběhy simulace. Každý model je podrobně popsán v příložené nápovědě. Jednotlivé metody jsou vysvětleny v dokumentaci, která je součástí každé simulace.

Další částí je vyhodnocení pokusů ze simulačních modelů. Vyhodnocení spočívá v tom, že porovnáváme hodnoty Ludolfova čísla, které jsem pomocí simulací získal. Určujeme jak jsou obě metody přesné. Hodnoty vynášíme do grafu v němž vidíme odchylky od přesné hodnoty Ludolfova čísla.

Dále jsem se snažil v Buffonově úloze nalézt poměr mezi velikostí vrhané jehly a vzdáleností dvou rovnoběžek, mezi které jehly dopadají. Hledanou funkci jsem však pomocí opakování experimentálního pokusu nenašel. Domnívám se však, že zde nějaká závislost existuje. Z provedených pokusů jsem zjistil, že větší přesnost při stejném počtu pokusů vykazuje metoda Jednotkové kružnice. Domnívám se ale, že při zjištění závislosti mezi velikostí jehly a vzdáleností rovnoběžek a správným nastavením parametrů by byla Buffonova úloha přesnější. Tuto domněnku potvrzují i pokusy prováděné již dříve.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 VYTVÁŘENÍ POSLOUPNOSTÍ NÁHODNÝCH ČÍSEL

Pro řešení Buffonovy úlohy bude potřeba generovat náhodná čísla z předem definovaného intervalu.

1.1 Generování náhodných čísel

Náhodným číslem se rozumí konečná posloupnost číslic, kterou lze považovat za posloupnost realizací náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu (0;1). Jedná se vlastně o skupiny k náhodných číslic α_i , které považujeme za prvních k desetinných míst desetinného rozvoje náhodného čísla 0, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$. Realizace náhodné číslice 0,1,2,...,9 má pravděpodobnost 10^{-1} .

Zde je uvedeno několik způsobů generování náhodných čísel.

1.1.1 Urna

Užívá se pro získání k -místného čísla. Do urny vložíme 10 stejných koulí označených čísly 0,1,2,...,9. Z urny vyjmeme jednu kouli ($i=1,2,\dots,k$), zapíšeme její číslo α_i , kouli do urny vrátíme a všechny koule promícháme. Postup opakujeme k -krát.

1.1.2 Kostky

Užijeme od sebe dvě odlišné kostky, kterými současně házíme. Jestliže na 1.kostce padne číslo r_1 a na 2.kostce číslo r_2 , při čemž r_1, r_2 je z intervalu (1,6) a bude-li $r_1 < 6$, pak vezmeme za příslušnou číslici α vybraného náhodného čísla zbytek po dělení $(6(r_1-1) + r_2)/10$. Číslo α je tak celé, nezáporné, menší než 10 a splňuje vztah $6(r_1-1) + r_2 = \alpha \pmod{10}$. Když $r_1 = 6$, pak házíme kostkami znovu. Z výše uvedeného stavu vyplývá, že α se stejnou pravděpodobností může nabývat každé z hodnot 0,1,2,...,9. Z uvedených postupů můžeme dospět k sestavení tabulek náhodných čísel rovnoměrně rozdělených na intervalu $<0;1>$, které lze napsat ve tvaru:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k} \quad (1)$$

1.1.3 Tabulky náhodných čísel

Používají se pro jednoduché manuální výpočty. K jejich vytvoření se užívaly informace o počtu obyvatel ve městech (uspořádaných podle abecedy s počtem obyvatel větším než 10000), čísla v telefonních seznamech, tedy rozsáhlé soubory dat určené k jiným účelům.

Přestože jsou tabulky náhodných čísel s rozsahem milionů náhodných čísel k dispozici, lze je při současném rozšíření výpočetní techniky pokládat za zastaralé prostředky.

1.1.4 Fyzikální generátory

Jejich podstatou je získávání jistých hodnot z procesu, který má náhodný charakter. Jde např. o radioaktivní rozpad, šum elektronky, respektive o záření na principu Zářič + Detektor. Vyskytují se zde ale různé jisté nesrovnalosti: systematické chyby vzniklé technickými problémy (nastavení příslušných hodnot jejich udržení), nemožnost opakovatelnosti, což znemožňuje reprodukovatelnost (opakování se stejnými hodnotami) získaných výsledků.

1.2 Generování pseudonáhodných čísel

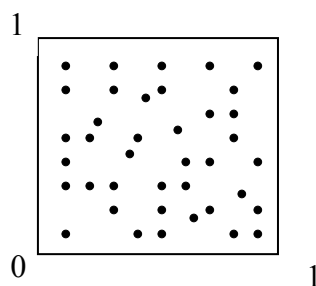
Praktické sestrojování náhodných čísel je velmi složité, zdlouhavé a není příliš oprostěno od dílčích nedostatků. Proto dáváme přednost skrojování tzv. **Pseudonáhodných čísel**. Tato čísla jsou vytvářena na počítači, získávají se užitím vhodných algoritmů a vykazují s dostatečnou přesností požadované znaky náhodnosti a nezávislosti. Tyto vlastnosti lze ověřit matematicko-statistickými metodami.

Většina algoritmů, které jsou užívány pro získávání pseudonáhodných čísel, lze zachytit v rekurentním tvaru:

$$x_i = F(x_{i-1}) \quad (2)$$

kde x_0 je vhodná počáteční hodnota- *násada*, pomocí něhož se vytváří posloupnost pseudonáhodných čísel $\{x_i\}$, F je příslušná funkce.

Lze se domnívat že získaná posloupnost pseudonáhodných čísel bude vyhovující, respektive že byla aplikována vhodná funkce F , jestliže z čísel x_i vytvořené uspořádané dvojice $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots$, resp. Jejich obrazy, hustě vyplní jednotkový čtverec, (viz obr. 1.1).



Obr. 1. Jednotkový čtverec

1.3 Testování náhodných čísel

Může říci, že univerzální test náhodnosti neexistuje- prověřit teoreticky statistické vlastnosti i jednoduchých generátorů je poněkud obtížné. Provádí se proto jen dva testy: 1. *Test dobré shody*; 2. *Test náhodnosti*. Testem dobré shody se ověřuje, zda posloupnost pseudonáhodných čísel má rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,1). Testem náhodnosti se ověřuje, zda za sebou náhodně získaná čísla lze považovat za nezávislá, tj. zda každé z možných uspořádání získaných čísel mělo stejnou pravděpodobnost.

1.4 Cifry Ludolfova čísla

Jako zdroj náhodných čísel lze využít i cifer Ludolfova čísla π . Tento fakt vyplývá ze zjištění, že π je tzv. *normální číslo*. Normálním číslem při tom rozumíme takové číslo, v němž frekvence výskytu každé skupiny k číslic ($k \in \mathbb{N}$), v nekonečné posloupnosti číslic za desetinou čárkou se asymptoticky rovná 10^{-k} . Matematik Y. Kanada zjistil statistickou analýzou prvních 10 000 000 číslic za desetinou čárkou čísla π , že rozdělení číslic odpovídá vymezení podmínky o normálnosti.

2 GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

2.1 Výpočet Ludolfova čísla

První zmínka tomto důležitém matematickém pojmu – označovaném řeckým písmenem π – pochází z První knihy královské, která popisuje události, jež se stal několik let před Kristem.

V knize je uvedeno, že délka kružnice je asi trojnásobkem jeho průměru, tedy že $\pi=3$. Snahou je stanovit geometrickou konstrukci, s níž by bylo možné sestavit ze znalostí velikosti poloměru daného kruhu čtverec, jehož obsah by byl shodný s obsahem uvedeného kruhu, a bylo by ke konstrukci použito pravítka a kružítko.

Kvadratura kruhu je charakterizována v tzv. Papyrusu Rhind (uloženého v Britském muzeu) z období asi 2000 let před Kristem; je uvedeno pravidlo pro výpočet obsahu kruhu: obsah kruhu je stejně velký jako obsah čtverce, který má stranu o velikosti $8/9$ průměru kruhu d .

V tomto případě je obsah kruhu jen o něco větší než ve skutečnosti:

$$P_o = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (3)$$

$$P_\Delta = \left(\frac{8}{9} d \right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{P_o}{P_\Delta} = 0,994 \quad (5)$$

Archimédes postupem vytváření vepsaných a opsaných pravidelných mnohoúhelníků dané kružnice- až z 96 stranami- dospěl ke zjištění, že $3(10/71) < \pi < 3(1/7)$; respektive vypočetl, že konstanta $\pi=3.14$.

Archimédes kromě toho dokázal další dvě **důležité věty**:

Obsah kruhu se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna se rovná poloměru kruhu a druhá odvěsna jeho obvodu.

Poměr obsahu kruhu a čtverce o straně rovné průměru kruhu se rovná přibližně 11:14.

Stejný postup jako Archimédes, ale s pravidelnými 1 073 741 248- úhelníky, zvolil **Ludolf von Ceulen** a dospěl k určení hodnoty čísla π na 35 desetinných míst. Za tuto jeho práci je číslo π nazýváno po něm.

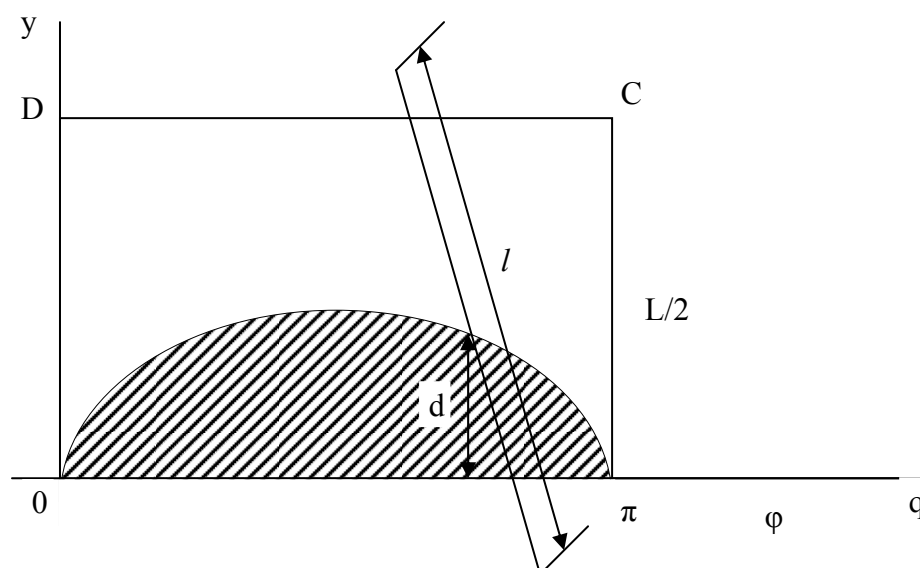
V dalších letech pak byly odhalovány různé formule a vztahy k výpočtu π . S rozvojem výpočetní techniky pak nastal zásadní zlom: údaj z roku 1987 říká, že Y. Kanada určil u čísla π 201 326 000 číslic za desetinnou čárkou- za 6 hodin na počítači Hitachi.

V praxi však pro výpočet postačuje jen několik desetinných míst čísla π .

3 POPIS BUFFONOVY ÚLOHY

Není běžné známo, že hodnotu čísla π lze stanovit „jen jistým vrháním jehly na rovnoběžky. Formulujeme nyní tento problém třesně: v rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzdálenost je L . Určíme pravděpodobnost toho, že náhodně vržená jehla délky l ($l < L$) protne některou přímkou (**Buffonova úloha**).

Řešení této úlohy spadá do oblasti geometrické pravděpodobnosti. Ze zadání úlohy vyplývá, že jehla může protnout pouze a jen jednu přímkou. Poloha jehly v systému rovnoběžek je jednoznačně určena souřadnicemi středu jehly a úhlem, který jehla svírá s přímkou viz. Obr. 2.



Obr. 2. Vzájemná poloha jehly a přímky

Předpokládejme, že rovnoběžky jsou rovnoběžné s osou x ; označme d vzdálenost středu jehly od příslušné rovnoběžky q , označme úhel φ , který svírá jehla s touto rovnoběžkou.

Poloha jehly je tedy určena bodem o souřadnicích $[d; \varphi]$, přičemž $0 \leq d \leq \frac{L}{2}$; $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Příznivá situace- jehla protne rovnoběžku- nastane, jestliže $d \leq \frac{l}{2} \sin \varphi$

Celý obdélník $0\pi CD$ má plochu o velikosti $S = \frac{L}{2} \pi$; vyšrafovaná- příznivá- plocha má velikost:

$$S' = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi \quad (6)$$

Pravděpodobnost toho, že jehla protne rovnoběžku, je tedy:

$$p = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi}{\frac{L}{2} \pi} = \frac{\frac{l}{2} [-\cos \varphi]_0^{\pi}}{\frac{L}{2} \pi} = \frac{\frac{l}{2} [1 + 1]}{\frac{L}{2} \pi} = \frac{2l}{L\pi} \quad (7)$$

Uvedenou pravděpodobnost p lze odhadnout prostřednictvím relativní četnosti p' na základě zhodnocení provedených pokusů: n je celkový počet hodů; m je počet hodů, kdy jehla protнула některou z přímek- nastal příznivý jev a tedy: $p' = m/n$.

Pak dostáváme:

$$\frac{2l}{L\pi} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{2ln}{Lm} \quad (8)$$

Za slabého zákona velkých čísel (Bernoulliova věta) plyne, že výraz $\frac{2ln}{Lm}$ představuje veličinu, která pro $n \rightarrow \infty$ konverguje v pravděpodobnosti k hodnotě π .

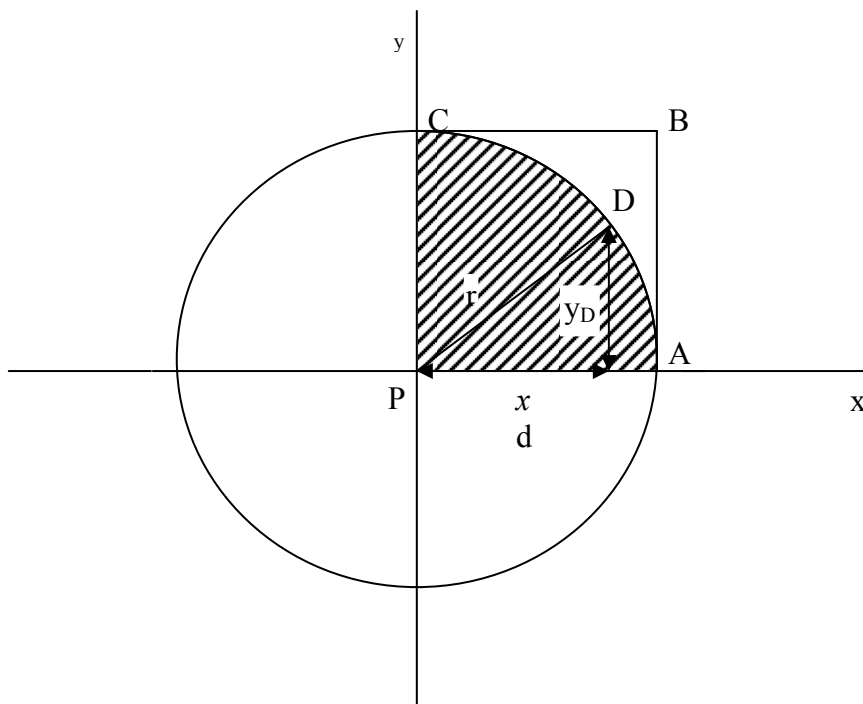
V literatuře je uvedeno, že jsou zachyceny následující údaje o realizaci Buffonovy úlohy:

Tabulka I. Údaje o realizaci Buffonovy úlohy

Experimentátor	Rok	Počet hodů jehlou	Experimentální hodnota π
Volf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Laccarini	1901	3408	3,1415929

4 ZJIŠTĚNÍ LUDOLFOVA ČÍSLA POMOCÍ JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE

Hodnotu Ludolfova čísla zjistíme následující způsobem: mějme jednotkovou kružnici (viz Obr.3) se středem v počátku souřadného systému; označený čtverec PABC je jednotkový.



Obr. 3. Část kružnice k určení Ludolfova čísla

Nyní vytvoříme na základě znalosti náhodných čísel rovnoměrně rozdělených na $(0;1)$ v Jankových tabulkách po řadě 200 těchto čísel 100 uspořádaných dvojic $[x_1^1; x_2^1], [x_3^2; x_4^2], \dots, [x_{199}^{100}; x_{200}^{100}]$ jakožto souřadnice bodů $D^i = [x_D^i; y_D^i], i = 1, \dots, 100$.

Porovnejme nyní, zda: $d = \sqrt{(x_D^i)^2 + (y_D^i)^2} \leq 1$. Bude-li $d \leq 1$, pak byl proveden zdařilý pokus.

Hodnotou Ludolfova čísla nyní můžeme- analogicky jako v Buffonově úloze- stanovit užitím geometrické pravděpodobnosti: čtverec PABC má obsah $S=1$; vyšrafovaný čtvrtkruh má obsah $S' = \frac{1}{4} \pi r^2$. Pravděpodobnost že bod D padne do šrafované oblasti, je p :

$$p = \frac{\frac{1}{4}\pi^2}{1} \quad (9)$$

Uvedenou pravděpodobnost p lze odhadnout prostřednictvím relativní četnosti p' na základě zhodnocení provedených pokusů: $n=100$ je celkový počet pokusů; m je počet pokusů, kdy bod D' patřil do vyšrafované oblasti- nastal příznivý jev a tedy: $p' = \frac{m}{n}$.

Pak dostaneme:

$$\frac{1}{4}\pi^2 \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{4m}{100} \quad (10)$$

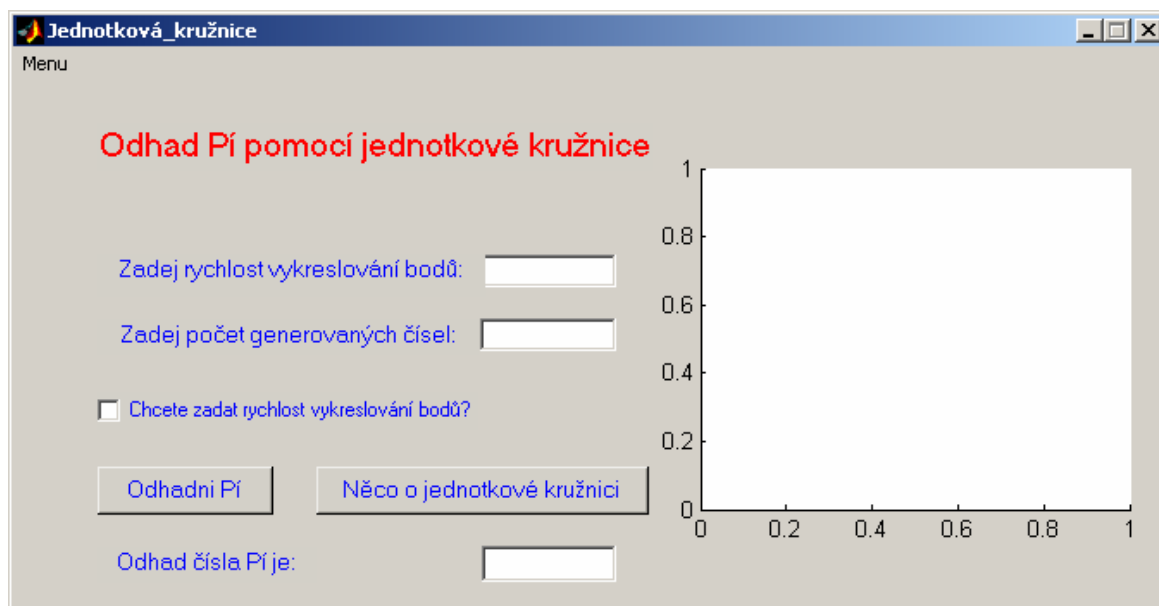
Toto je výsledný vzorec pro výpočet Ludolfova čísla pomocí Jednotkové kružnice.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 POPIS SIMULAČNÍHO MODELU JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE

5.1 Uživatelské rozhraní Jednotkové kružnice

Uživatelským rozhraním je myšleno prostředí programu Matlab, které uvidí uživatel při puštění simulačního modelu. Zde vidíme jak toto rozhraní vypadá těsně po spuštění.



Obr. 4. Uživatelské prostředí Jednotkové kružnice těsně po spuštění

Na obrázku vidíme, že uživatel může zadávat dva parametry pro simulaci. Jedním z těchto parametrů je **zadání rychlosti vykreslování bodů**. Je to rychlost s jakou se budou vykreslovat body, které generujeme a zároveň zobrazujeme v grafu umístěném v pravé části programu. Pokud nevyplníme pole Zadej rychlost vykreslování bodu nebudou se body zobrazovat s časovým zpožděním, ale objeví se všechny najednou. S polem rychlosti vykreslování bodů je ještě spjata zaškrťovací položka **Chcete zadat rychlost vykreslování bodů**. Pokud se rozhodneme, že chceme zadat jistou rychlost zobrazování bodů musí tato položka být zaškrtnuta. Pokud není položka zaškrtnuta je hodnota rychlosti vykreslování rovna 0 a body se zobrazí současně.

Další položkou je **Zadání počtu generovaných čísel**. Tato položka nám říká kolik pokusů chceme provést. Je to nejdůležitější parametr, který ovlivňuje jak přesně bude hodnota Ludolfova čísla vypočtena. Čím větší hodnota bude zadána, tím více bude provedeno pokusů a výsledná hodnota Ludolfova čísla bude přesnější. Maximální hodnota, kterou můžeme do tohoto pole zadat je přibližně 500 000 testovaných bodů. Pro tuto hodnotu je

ještě doba čekání na výsledek únosná. Je to sice relativní tvrzení, ale především záleží na početním výkonu počítače. Další testování bude popsáno v samostatné kapitole. Pokud se stane, že by někdo zadal například desetinné číslo, program toto číslo automaticky zaokrouhlí podle čísla za desetinnou čárkou.

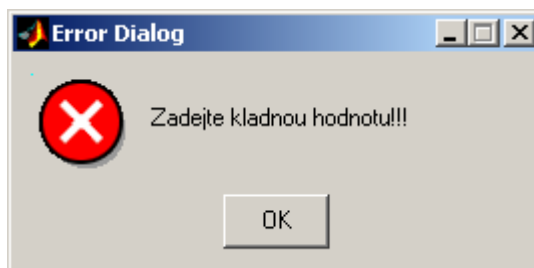
Tlačítko **Odhadni π** se celý proces testování generovaných bodů spouští. Okno, které je umístěno vedle tlačítka nám říká, jak těsně jsme odhadnuli Ludolfovo číslo. Pokud je zadána rychlost vykreslování jiná než nulová, vidíme jak se dynamicky mění hodnota výsledku. Pokud je rychlost vykreslování nulová zobrazí se výsledek rovnou.

Dalším tlačítkem je **Něco o jednotkové kružnici**. Po kliknutí na toto tlačítko se automaticky otevře program Adobe Acrobat, ve kterém bude dokument popisující princip výpočtu pomocí Jednotkové kružnice.

Dále je v levém horním rohu **Menu**. Po kliknutí se nám toto menu rozbalí a najdeme v něm čtyři položky. První je **Otevři statistiku pokusů**. Po kliknutí na tento odkaz se automaticky otevře textový dokument z již provedenými pokusy. Dokument obsahuje počet generovaných čísel a hodnotu, kterou jsem pro tento počet čísel odhadnul. Druhým odkazem je **Něco o jednotkové kružnici**. Tento odkaz nebudu popisovat z toho důvodu, protože jsem o něm již mluvil. Dalším odkazem je **Nápověda**. Po kliknutí na odkaz se otevře program Adobe Acrobat a v něm bude dokument, který popisuje jednotlivé funkce programu. Posledním čtvrtým odkazem je **Konec**. Po kliknutí na tento odkaz se okno programu Jednotková kružnice zavře.

Posledním elementem který zbývá k popisu je **Graf**. Při spuštění simulace v oblasti grafu vznikne čtvrtina kružnice. V oblasti grafu se začnou objevovat body. Body, které padnou pod křivku se zbarví červeně a jsou to body, které uvažujeme jako body, jež vyhovují jisté podmínce. Body, které nevyhovují jsou zobrazeny modře a jsou nad křivkou. Poměr těchto bodů které padnou/nepadnou pod křivku je důležitý pro výpočet Ludolfova čísla.

Program je ošetřen z hlediska zadávání špatných hodnot. Kdyby někdo například zadal zápornou hodnotu rychlosti vykreslování, program by jej na to upozornil varovným hlášením, které je na Obr. 5.



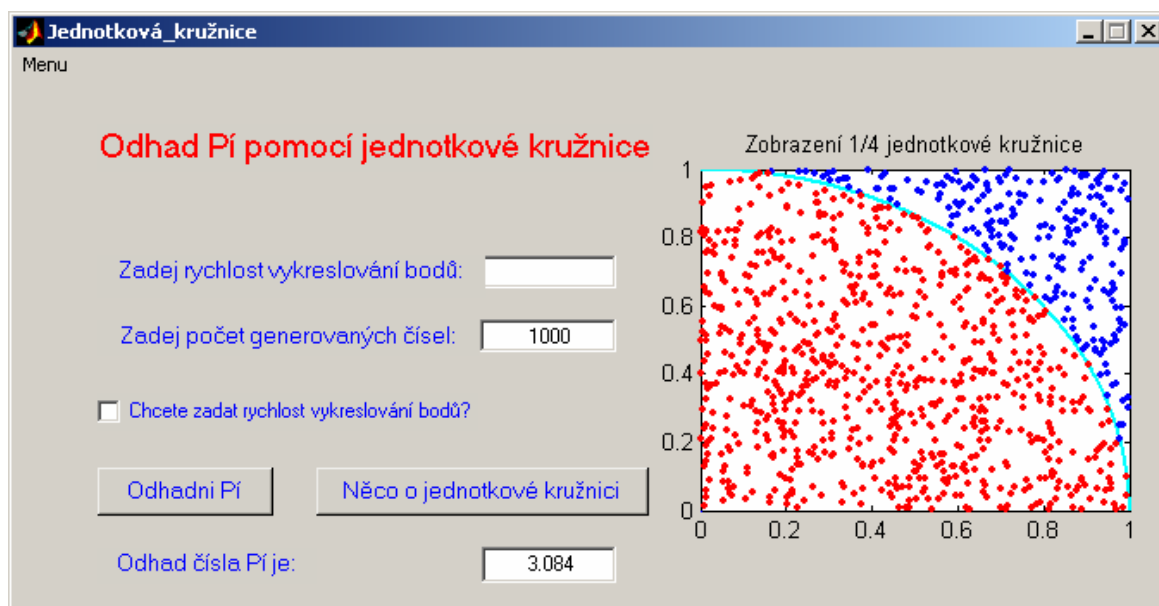
Obr. 5. Varovné hlášení při špatně zadané hodnotě rychlosti vykreslování

Při špatně zadané hodnotě počtu generovaných čísel by hlášení vypadalo stejně.

Ukázka zdrojového kódu je v příloze pod názvem Část zdrojového kódu Jednotkové kružnice.

5.2 Příklad odhadu Ludolfova čísla na Jednotkové kružnici

Pro ukázkou jsem zvolil generování 1000 bodů, které se testují podmínkou zda padnou nad křivku či pod ní. Výsledek je vidět na Obr. 5. Vidíme, že hodnota Ludolfova čísla v tomto případě je 3.084.

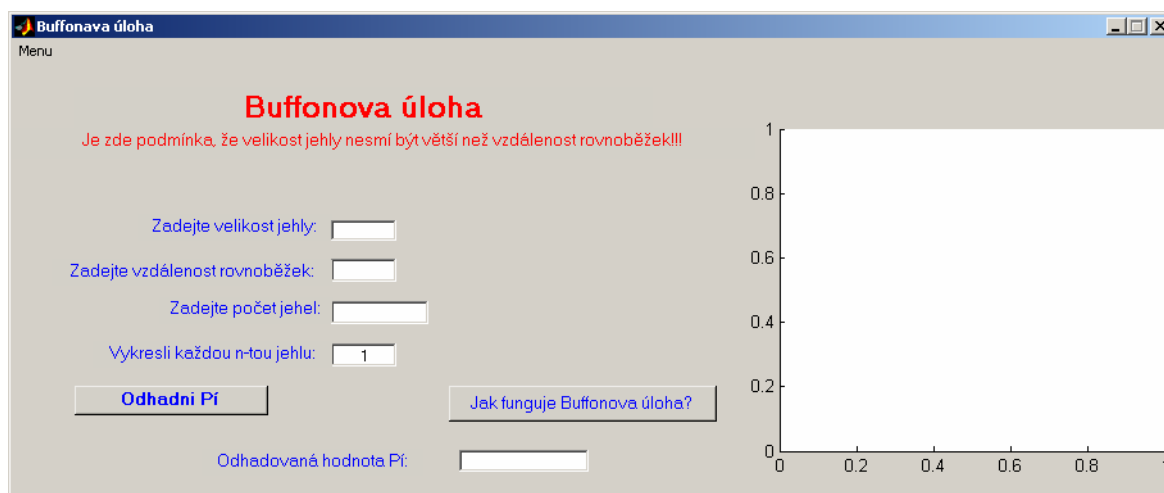


Obr. 6. Příklad pokusu na Jednotkové kružnici

6 POPIS SIMULAČNÍHO MODELU BUFFONOVY ÚLOHY

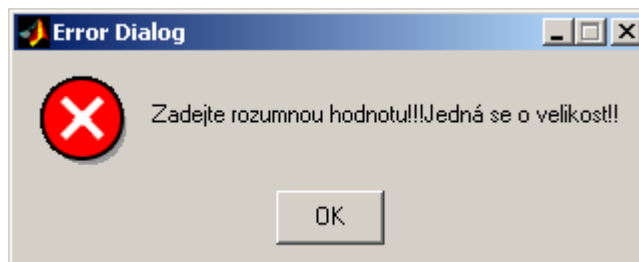
6.1 Uživatelské rozhraní Buffonovy úlohy

Po spuštění simulačního modelu uvidí uživatel na své obrazovce následující okno, do kterého bude zadávat parametry.



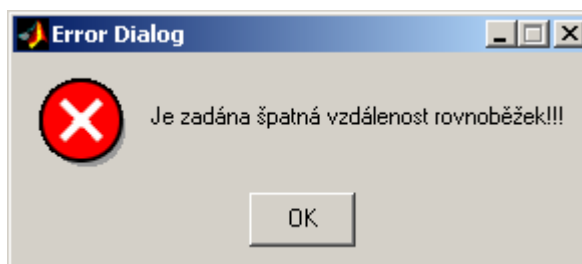
Obr. 7. Uživatelské prostředí Buffonovy úlohy těsně po spuštění

Uživatel, který spustil tuto simulaci bude mít možnost nastavovat čtyři parametry této simulace. První parametr je označen jako **Zadej velikost jehly**. Tímto parametrem zadáváme jak velká bude jehla, kterou budeme z konstantní výšky pouštět mezi dvě rovnoběžky. Na velikosti této jehly záleží výsledná hodnota Ludolfova čísla. Pokud bychom zadali například zápornou hodnotu, program nás automaticky upozorní pomocí chybového hlášení na Obr.8



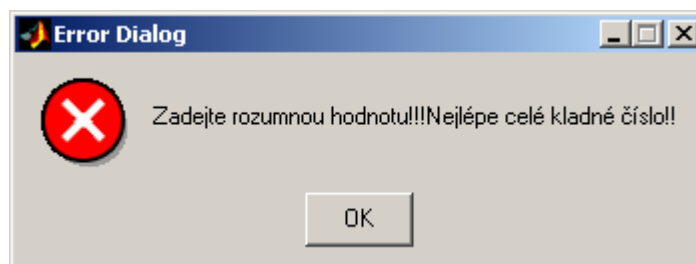
Obr. 8. Chybové hlášení pro špatně zadanou vzdálenost jehly

Dalším polem, které se jmenuje **Zadej vzdálenost rovnoběžek** se nastaví hodnota, která bude udávat, jak moc jsou od sebe vzdáleny rovnoběžky, mezi které vrháme jehlu dané velikosti. Na této hodnotě také záleží jaký bude výsledek Ludolfova čísla. Musíme však dávat pozor, aby byla dodržena hlavní podmínka mezi velikostí jehly a vzdáleností rovnoběžek. Tato podmínka nám říká, že **velikost jehly nesmí být větší než vzájemná vzdálenost rovnoběžných přímk**. Pokud by tato podmínka nebyla dodržena Buffonova úloha by nefungovala. Pokud se stane, že uživatel zadá větší velikost jehly než je vzdálenost rovnoběžek, program ho na tuto závažnou chybu automaticky upozorní chybovým hlášením, které je na Obr. 8



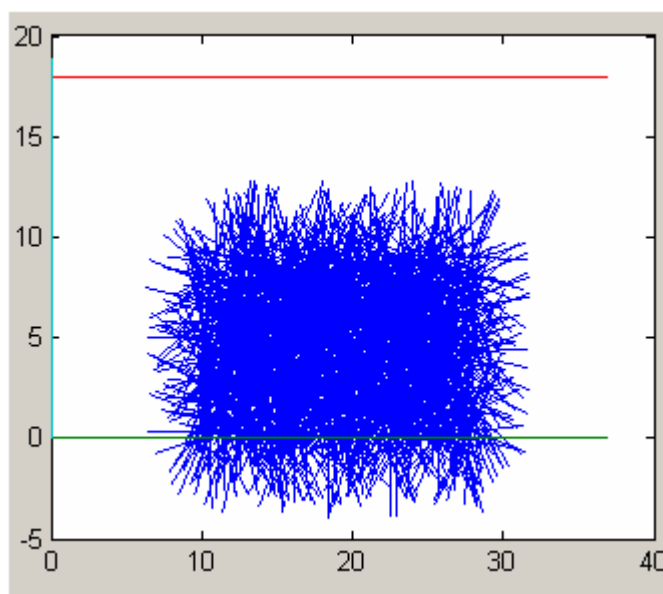
Obr. 9. Chybové hlášení pro špatně zadanou vzdálenost rovnoběžek

Další položkou je **Zadej počet jehel**. Položka nám říká, že máme zadat počet jehel, které budeme vrhat mezi rovnoběžky. Je to vlastně hodnota, která udává kolikrát se bude pokus opakovat. Při nesprávném zadání hodnoty nám program zobrazí chybové hlášení, které je na Obr. 10.



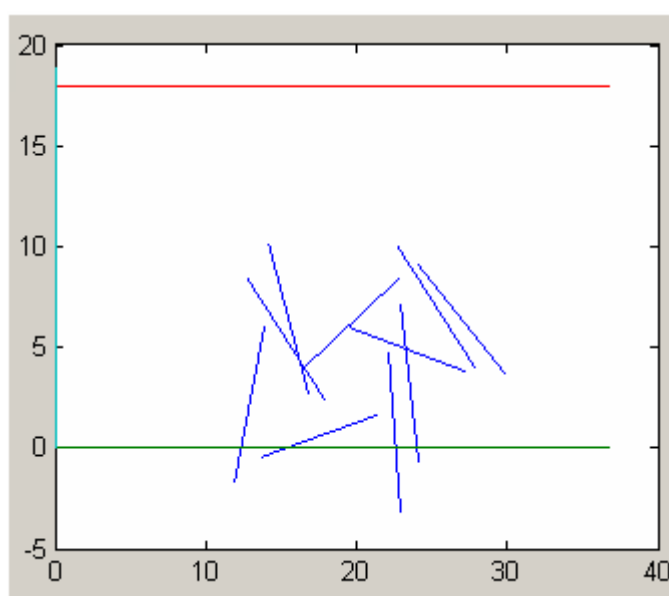
Obr. 10. Chybové hlášení pro špatně zadaný počet jehel

Čtvrtou položkou je **Vykresli každou n-tou jehlu**. Tato položka říká, kolik jehel bude vykresleno. Důvodem proč zde tato položka existuje je skutečnost, že při vykreslení většího počtu jehel se stává graf nepřehledným. Nelépe to reprezentuje Obr.11



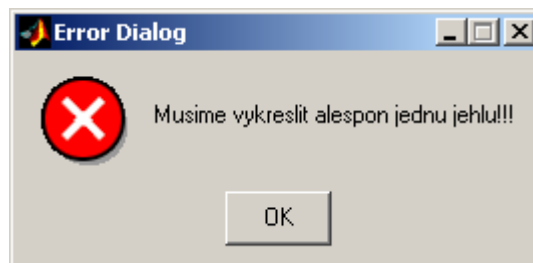
Obr. 11. Vykreslení 1000 jehel do grafu

V grafu je zanesena poloha 1000 jehel. Je to velmi nepřehledné. Proto je zde tato položka, která nám umožní nastavit vykreslení každé n-té jehly. Číslo, které zadáváme do pole nám reprezentuje písmenko **n**. Takto vypadá graf, který má stejné parametry jako předchozí, s tou změnou, že hodnota $n=100$. Z toho plyne, že bude vykresleno 10 jehel viz. Obr.12.



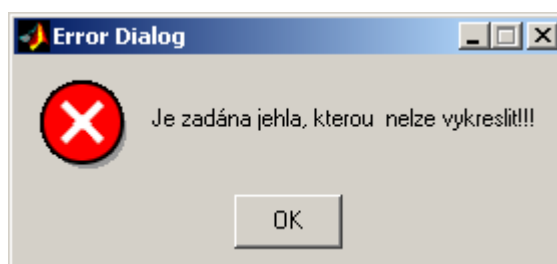
Obr. 12. Vykreslení každé n-té jehly do grafu

Když ponecháme standardní nastavení při spuštění programu, tak $n=1$. Z toho plyne, že se vykreslí všechny jehly. Pokud zadáme, že nechceme vykreslit žádnou jehlu, tedy $n=0$, program zobrazí chybové hlášení viz.Obr.13.



Obr. 13. Chybové hlášení pro hodnotu $n=0$

Je zde ještě jedna podmínka, kterou u tohoto pole musíme dodržet a to, že hodnota nesmí být větší než je počet jehel. V případě nedodržení této podmínky se zobrazí chybové hlášení, které je vidět na Obr. 14



Obr. 14. Chybové hlášení, když hodnota n je větší než počet jehel

Tlačítko, které uživatel vidí je **Odhadni π** . Tato položka spouští samotný proces výpočtu. Nejdříve dojde k testování vstupních proměnných, které jsme zadali. Pokud jsou splněny všechny podmínky dochází k samotnému výpočtu. Proces se opakuje tolikrát, kolik je zvolených jehel.

Pole **Odhadovaná hodnota π** nám zobrazuje výsledek, kterého jsme u pokusu dosáhli. Můžeme se přesvědčit, že pro stejné nastavení parametrů existuje mnoho různých výsledků. To je dáno stále novým náhodným výběrem hodnot z určitého intervalu. Hodnoty se generují pomocí pseudonáhodných generátorů.

Dalším tlačítkem, které může uživatel použít je **Jak funguje Buffonova úloha**. Po kliknutí na toto tlačítko se automaticky spustí program Adobe Acrobat. V tomto programu bude

otevřen dokument, který obsahuje podrobný popis jak funguje Buffonova úloha. Jsou zde uvedeny všechny vztahy pro výpočty π .

V horním levém rohu je položka **Menu**. Po otevření položky vidíme další čtyři odkazy.

Prvním je **Otevři statistiku pokusů**. Tento odkaz otevírá textový dokument, který obsahuje historii testování. Jsou zde uvedeny parametry a výsledky všech pokusů, které byly již dříve provedeny. Jsou zde zaznamenány v tomto pořadí:

- Velikost jehly,
- Vzdálenost rovnoběžek,
- Počet jehel,
- Výsledná hodnota π .

Druhý odkaz je **Funkce Buffonovy úlohy**. Tento odkaz má stejnou funkci jako tlačítko Jak funguje Buffonova úloha.

Třetím odkazem je **Nápověda**. Po kliknutí na tento odkaz se automaticky otevře program Adobe Acrobat a v něm bude dokument obsahující podrobný popis jednotlivých částí uživatelského rozhraní Buffonovy úlohy.

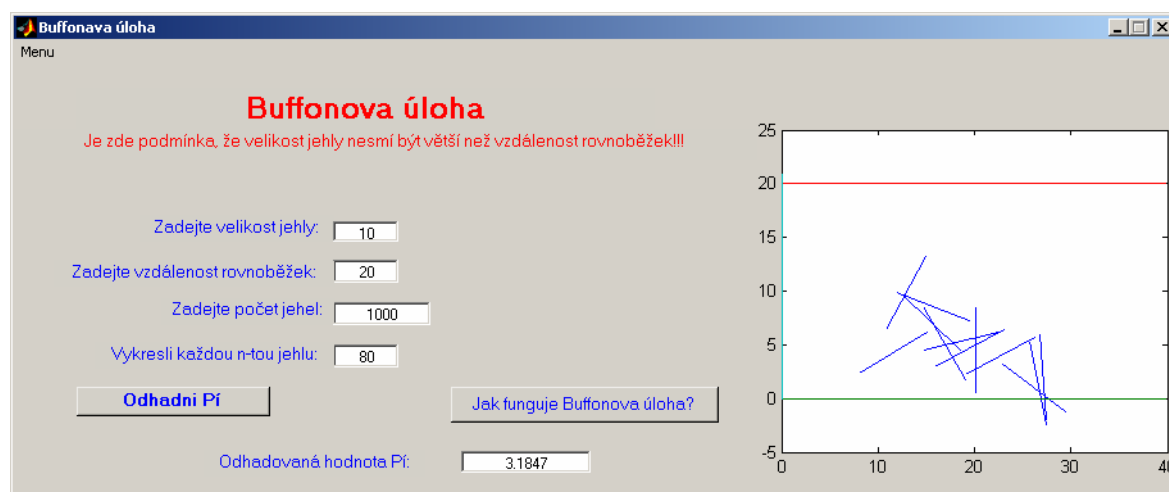
Posledním odkazem je **Konec**. Tento odkaz zavře uživatelské prostředí Buffonovy úlohy.

Posledním elementem je **graf**. V grafu se zobrazují rovnoběžky. Jsou rovnoběžné s x-ovou osou. Mají zelenou a červenou barvu. Mezi tyto rovnoběžky dopadají generované jehly. Jsou zde rovnoběžky, které protínají jak dolní přímku tak rovnoběžky, které ji neprotínají. Poměr těchto jehel, které protnou/neprotnou úsečku je důležitý pro výpočet Ludolfova čísla. Posun na x-ové ose nás nezajímá. Největším problémem byl při vykreslování míst dopadu jednotlivých jehel. Museli jsme zjistit krajní mezní body přímek. Tyto body jsme zjistili tak, že jsme tyto přímky ořezaly kružnicí a v místech, kde se kružnice protнула s přímkou byl hledaný bod. Kružnice protнула každou přímku na dvou místech. Takto jsme získali hledanou jehlu.

Ukázka zdrojového kódu je v příloze pod názvem část zdrojového kódu Buffonovy úlohy.

6.2 Příklad odhadu Ludolfova čísla na Buffonově úloze

Zvolíme hodnoty pro experiment. Velikost jehly bude 10. Vzdálenost rovnoběžek je 20. Počet jehel, které budeme vrhat mezi rovnoběžky je 1000. Vykreslovat budeme třeba každou 80. jehlu. Výsledek pokusu vidíme na Obr.15.



Obr. 15. Experiment v Buffonově úloze

Výsledná hodnota tohoto pokusu se zadanými parametry je 3.1847

7 STATISTICKÉ VYHODNOCENÍ METOD

7.1 Testování metody Jednotkové kružnice

Testování jsem prováděl tak, že jsem pro zadané parametry tyto pokusy desetkrát opakoval. Jednotlivé parametry jsem navyšoval o konstantní hodnotu. Po získání deseti výsledných hodnot jsem z těchto hodnot udělal jednu průměrnou. Některé výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách.

Tabulka II. Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 100 generovaných čísel

Číslo pokusu:1	Počet generovaných čísel	Výsledná hodnota pokusu
1	100	3,1600
2	100	3,3200
3	100	3,0000
4	100	2,9600
5	100	2,9600
6	100	2,9600
7	100	3,1600
8	100	2,9200
9	100	2,9600
10	100	3,0000
Směrodatná odchylka		0,1293
Průměr		3,0400

Tabulka III. Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 10000 generovaných čísel

Číslo pokusu:78	Počet generovaných čísel	Výsledná hodnota pokusu
1	10000	3,1420
2	10000	3,1536
3	10000	3,1520
4	10000	3,1372
5	10000	3,1372
6	10000	3,1552
7	10000	3,1720
8	10000	3,1480
9	10000	3,1484
10	10000	3,1356
Směrodatná odchylka		0,0110
Průměr		3,1481

Tabulka IV. Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 100000 generovaných čísel

Číslo pokusu:96	Počet generovaných čísel	Výsledná hodnota pokusu
1	100000	3,1543
2	100000	3,1518
3	100000	3,1352
4	100000	3,1468
5	100000	3,1394
6	100000	3,1477
7	100000	3,1413
8	100000	3,1410
9	100000	3,1451
10	100000	3,1357
Směrodatná odchylka		0,0065
Průměr		3,1438

Tabulka V. Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 500000 generovaných čísel

Číslo pokusu:100	Počet generovaných čísel	Výsledná hodnota pokusu
1	500000	3,1458
2	500000	3,1386
3	500000	3,1423
4	500000	3,1417
5	500000	3,1410
6	500000	3,1405
7	500000	3,1394
8	500000	3,1408
9	500000	3,1413
10	500000	3,1430
Směrodatná odchylka		0,0020
Průměr		3,1414

Další tabulky s ostatními hodnotami jsou uloženy na příloženém CD. Z tabulek je patrné, že se stoupajícím počtem generovaných čísel rostla i přesnost odhadovaného Ludolfova čísla. Ještě více patrné to je z grafu, který je umístěn v příloze pod názvem “Graf závislosti přesnosti Ludolfova čísla na počtu generovaných čísel“.

7.2 Testování Buffonovy úlohy

Testování této metody bylo odlišné než v případě jednotkové kružnice. U Jednotkové kružnice jsme zjistili, že s rostoucím počtem čísel, které testujeme, se odhadovaná hodnota Ludolfova čísla blížíla přesné hodnotě. U Buffonovy úlohy jsem se změřil na zjištění vztahu mezi vzdáleností rovnoběžek a velikostí jehly, kterou mezi rovnoběžky vrháme. Z následujících tabulek jsou vidět výsledky testování. Zadal jsem konstantní vzdálenost rovnoběžek (volil jsem hodnotu 10) a postupně jsem měnil hodnotu velikosti jehly. Počet jehel, které jsem vrhal mezi rovnoběžky byl konzultací s vedoucím práce stanoven na 5000.

Tabulka VI. Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 1

Číslo pokusu:10	Velikost jehly	Počet generovaných čísel	Vzdálenost rovnoběžek	Výsledná hodnota
1	1	5000	10	2,7173913
2	1	5000	10	2,79329609
3	1	5000	10	3,04878049
4	1	5000	10	3,33333333
5	1	5000	10	2,77777778
6	1	5000	10	3,24675325
7	1	5000	10	2,84090909
8	1	5000	10	2,97619048
9	1	5000	10	3,24675325
10	1	5000	10	3,3557047
Směrodatná odchylka				0,24682316
Průměr				3,03368898

Tabulka VII. Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 5

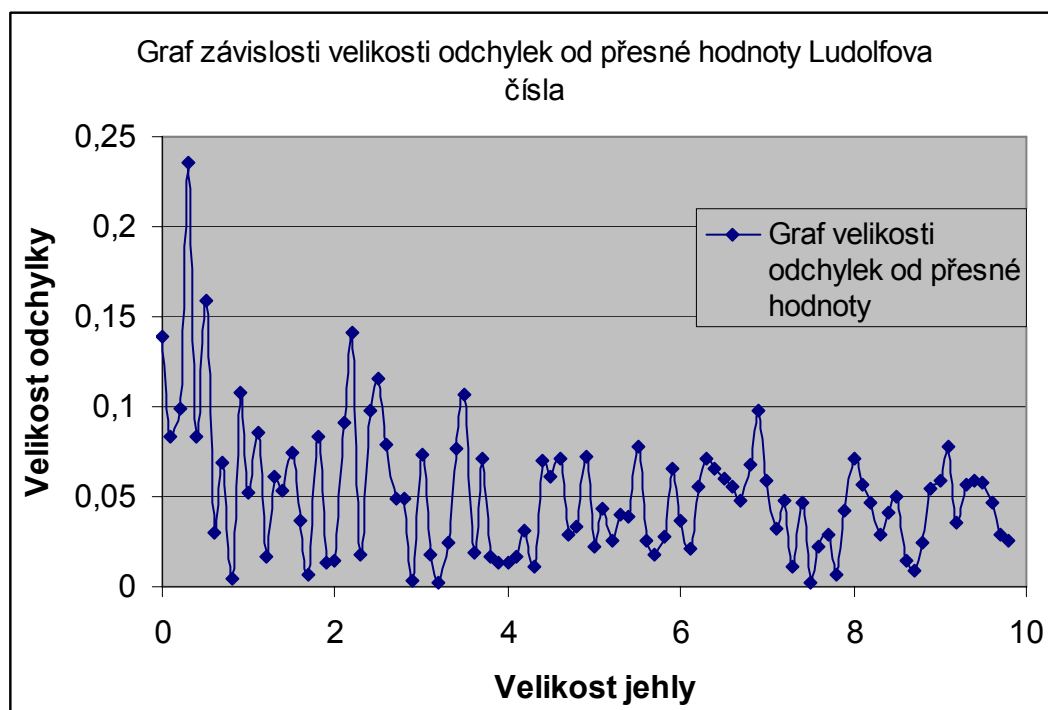
Číslo pokusu:50	Velikost jehly	Počet generovaných čísel	Vzdálenost rovnoběžek	Výsledná hodnota
1	5	5000	10	3,04878
2	5	5000	10	3,075031
3	5	5000	10	2,941176
4	5	5000	10	3,045067
5	5	5000	10	3,28084
6	5	5000	10	3,015682
7	5	5000	10	2,930832
8	5	5000	10	3,156566
9	5	5000	10	3,08642
10	5	5000	10	3,113325
Směrodatná odchylka				0,102253
Průměr				3,069372

Tabulka VIII. Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 9

Číslo pokusu:90	Velikost jehly	Počet generovaných čísel	Vzdálenost rovnoběžek	Výsledná hodnota
1	9	5000	10	3,114187
2	9	5000	10	3,080082
3	9	5000	10	2,970297
4	9	5000	10	3,08642
5	9	5000	10	3,232759
6	9	5000	10	3,114187
7	9	5000	10	3,090659
8	9	5000	10	3,012048
9	9	5000	10	3,131524
10	9	5000	10	3,036437
Směrodatná odchylka				0,071927
Průměr				3,08686

Jak vidíme v tabulkách nejsou uváděny žádné jednotky. Důvodem je to, že veličiny musejí mít vždy stejný rozměr. Mluvíme o velikosti a vzdálenosti. Ostatní tabulky jsou na přiloženém CD. V grafu, který je uveden v příloze pod názvem “Graf závislosti vypočtené hodnoty Ludolfova čísla na velikosti jehly“ vidíme výsledky všech pokusů.

Z grafu vidíme, že žádný poměr velikosti jehly na vzdálenosti rovnoběžek nám nedává úplně přesnou hodnotu. Avšak z grafu je viditelné, že s přibližující se velikostí jehly ke vzdálenosti rovnoběžek se hodnota Ludolfova čísla zpřesňovala. Svědčí o tom i následující graf, který udává závislost velikosti odchylky od přesné hodnoty Ludolfova čísla na velikosti jehly.



Obr. 16. Graf závislosti velikosti odchylek od přesné hodnoty čísla π na velikosti jehly

Z grafu vidíme, že hodnoty se liší přibližně o 0,1. Protože se mi pomocí pokusů nepodařilo prokázat, že existuje mezi velikostí jehly a vzdáleností rovnoběžek nějaká závislost, budu uvažovat, že nejpřesnější hodnota, kterou lze dosáhnout bude, když hodnota velikosti jehly bude rovna vzdálenosti rovnoběžek.

ZÁVĚR

Závěrem bych chtěl shrnout, co se mi podařilo vytvořit. Jako první bod bych se zmínil o sestavení podkladů k řešení daných úloh. Z daných materiálů je snadné pochopit, jak vytvořené simulace fungují a na jakém matematickém principu jsou založeny. Z těchto materiálů jsem poté vytvořil simulační modely v programovém prostředí Matlab. Uživatelské prostředí bylo tvořeno v modulu GUIDE. V rozhraní je možné nastavovat jednotlivé parametry simulací, ale uživatel si musí být vědom jistých omezení a podmínek, které jsou v těchto simulacích nastaveny. Je to například podmínka u Buffonovy úlohy, která nám říká, že velikost jehly nesmí být větší než vzdálenost rovnoběžek. Obě metody jsou ošetřeny z hlediska nesmyslného zadávání dat, jako je například zadávání záporných čísel nebo čísel desetinných do údajů o počtu generování atd. Simulace jsou vždy doprovázeny grafickým zobrazením. Každá simulace má svůj vlastní graf, v kterém uživatel vidí výsledky daného pokusu.

Největším problémem bylo vykreslování jednotlivých jehel v Buffonově úloze. Znali jsme totiž pozici středu jehly a její velikost, museli jsme zjistit její koncové body. Tento problém jsme vyřešili tak, že jsme rovnici přímky dosadily do rovnice kružnice, kterou jsme úsečku ořízli a místa, kde kružnice přímkou protněla jsme spojili a získali hledanou jehlu.

Dále bych se zmínil o testování jednotlivých metod. Jednotkovou kružnici jsem testoval na přesnost výpočtu Ludolfova čísla v závislosti na počtu generovaných čísel. Testování dopadlo podle předpokladu, že s rostoucím počtem generovaných čísel se přesnost výpočtu zvyšovala. U Buffonovy úlohy jsem testoval závislost velikosti jehly na vzdálenosti rovnoběžek. U tohoto testu nebyly výsledky tak přesvědčivé, ale dospěl jsem k závěru, že s rostoucí velikostí jehly se přesnost výpočtu nepatrně zvyšovala. Bylo by dobré podrobit tyto výsledky zkoumání za pomoci evolučních algoritmů, které by byly jistě efektivnější a účinnější.

Doufám, že tyto dvě simulace budou přínosem pro výuku Základů informatiky a zpestří a obohatí výuku už tak zajímavého předmětu jakým Základy informatiky bezpochyby jsou.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] Fabián, F., Kluiber, Z.: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění. Prospektum s.r.o., Praha, 1998.
- [2] Hušek, R., Lauber, J.: Simulační modely. SNTL- Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.
- [3] Cyhelský, L., Kalounová, J., Hindls, R.: Elementární statická analýza, Management Press, Praha, 1999.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

MATLAB - je integrované prostředí pro vědeckotechnické výpočty, modelování, návrhy algoritmů, simulace, analýzu a prezentaci dat, měření a zpracování signálu, návrhy řídicích a komunikačních systémů.

GUIDE – modul programového prostředí Matlab

ADOBE ACROBAT – program pro čtení dokumentů ve formátu PDF.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Jednotkový čtverec	9
Obr. 2. Vzájemná poloha jehly a přímky	12
Obr. 3. Část kružnice k určení Ludolfova čísla	14
Obr. 4. Uživatelské prostředí Jednotkové kružnice těsně po spuštění.....	17
Obr. 5. Varovné hlášení při špatně zadané hodnotě rychlosti vykreslování.....	19
Obr. 6. Příklad pokusu na Jednotkové kružnici	20
Obr. 7. Uživatelské prostředí Buffonovy úlohy těsně po spuštění	21
Obr. 8. Chybové hlášení pro špatně zadanou vzdálenost jehly	21
Obr. 9. Chybové hlášení pro špatně zadanou vzdálenost rovnoběžek.....	22
Obr. 10. Chybové hlášení pro špatně zadaný počet jehel	22
Obr. 11. Vykreslení 1000 jehel do grafu	23
Obr. 12. Vykreslení každé n-té jehly do grafu.....	23
Obr. 13. Chybové hlášení pro hodnotu $n=0$	24
Obr. 14. Chybové hlášení, když hodnota n je větší než počet jehel.....	24
Obr. 15. Experiment v Buffonově úloze.....	26
Obr. 16. Graf závislosti velikosti odchylek od přesné hodnoty čísla π	31

SEZNAM TABULEK

Tabulka I.	Údaje o realizaci Buffonovy úlohy	13
Tabulka II.	Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 100 generovaných čísel.....	27
Tabulka III.	Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 10000 generovaných čísel.....	27
Tabulka IV.	Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 100000 generovaných čísel.....	28
Tabulka V.	Údaje o testování metody Jednotkové kružnice pro 500000 generovaných čísel.....	28
Tabulka VI.	Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 1.....	29
Tabulka VII.	Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 5	30
Tabulka VIII.	Údaje o testování metody Buffonovy úlohy pro velikost jehly 9.....	30

SEZNAM PŘÍLOH

- P 1 : Zdrojový kód Buffonovy úlohy
- P 2 : Zdrojový kód Jednotkové kružnice
- P 3 : Graf závislosti počtu generovaných čísel na průměrné a přesné hodnotě čísla
- P 4 : Graf závislosti velikosti jehly na vzdálenosti rovnoběžek

PŘÍLOHA P1: Část Zdrojového kódu Buffonovy úlohy

```
1  m=0;
2  l=0;
3  pi=0;
4  C=0;
5  L=0;
6  d=0;
7  fi=0;
8  k=0;
9  q=0;
10 pocet=0;
11 p=0;
12 a=0;
13 maximd=0;
14 maxima=0;
15 pripopcti=0;
16 jehly=0;
17 pomocna=0;
18 bod1=0;
19 bod2=0;
20 bod3=0;
21 bod4=0;
22 hold off;
23 plot(0,0);
24 l=str2num(get(handles.edit4,'String')); % délka jehly
25 L=str2num(get(handles.edit5,'String')); % vzdálenost rovnoběžek
26 C=str2num(get(handles.edit6,'String')); % počet generovaných čísel
27 pocet=str2num(get(handles.edit8,'String'));% počet zobrazených jehel
28 if l<=0
29 errordlg('Zadejte rozumnou hodnotu!!!Jedná se o velikost!!');
30 break;
31 end;
32 if L<l
33 errordlg('Je zadána špatná vzdálenost rovnoběžek!!!');
```

```

34 break;
35 end;
36 if L<=0
37 errordlg('Zadejte rozumnou hodnotu!!!Jedná se o velikost!!');
38 break;
39 end;
40 if C<=0
41 errordlg('Zadejte rozumnou hodnotu!!!Nejlépe celé kladné číslo!!');
42 break;
43 end;
44 if pocet>C
45 errordlg('Je zadána jehla, kterou nelze vykreslit!!!');
46 break;
47 end;
48 if pocet==0
49 errordlg('Musime vykreslit alespon jednu jehlu!!!');
50 break;
51 end;
52 d=rand(C,1)*(L/2);
53 fi=rand(C,1)*(180);
54 a=rand(C,1)*(L)+1;
55 maxima=max(a);
56 maximd=max(d);
57 pripocti=maxima+maximd;
58 pomocna=((C+1)-(C/pocet));
59 jehly=round(pomocna);
60 bod1=[0,pripocti];
61 bod2=[L,L];
62 bod3=[0,0];
63 bod4=[0,pripocti];
64 bod5=[0,0];
65 bod6=[0,(L+1)];
66 hold on;
67 for i=1:C
68 if (((L/2)*sin(fi(i)))>=d(i))

```

```

69 m=m+1;
70 end;
71 end;
72 pi=((C*l)/(m*L));
73 for i=jehly:C
74 q=d(i)-tan(fi(i))*a(i);
75 c=[(1+tan(fi(i)).^2)      -(2*(a(i)-tan(fi(i))*q+tan(fi(i))*d(i)))      ((a(i)).^2+q.^2-
    2*d(i)*q+((d(i)).^2)-16)];
76 r=roots(c);
77 y=tan(fi(i))*r +q
78 delka=sqrt((r(1)-r(2)).^2+(y(1)-y(2)).^2);
79 plot(r,y,bod4,bod3,bod1,bod2,bod5,bod6)
80 end;
81 fid = fopen('Statistika.txt','a+');
82 fprintf(fid,'%6.2f %6.2f %6.2f %18.8f\n',l,L,C,pi);
83 fclose(fid);
84 handles.p=strcat(num2str(pi)),
85 set(handles.edit7,'String',handles.p);

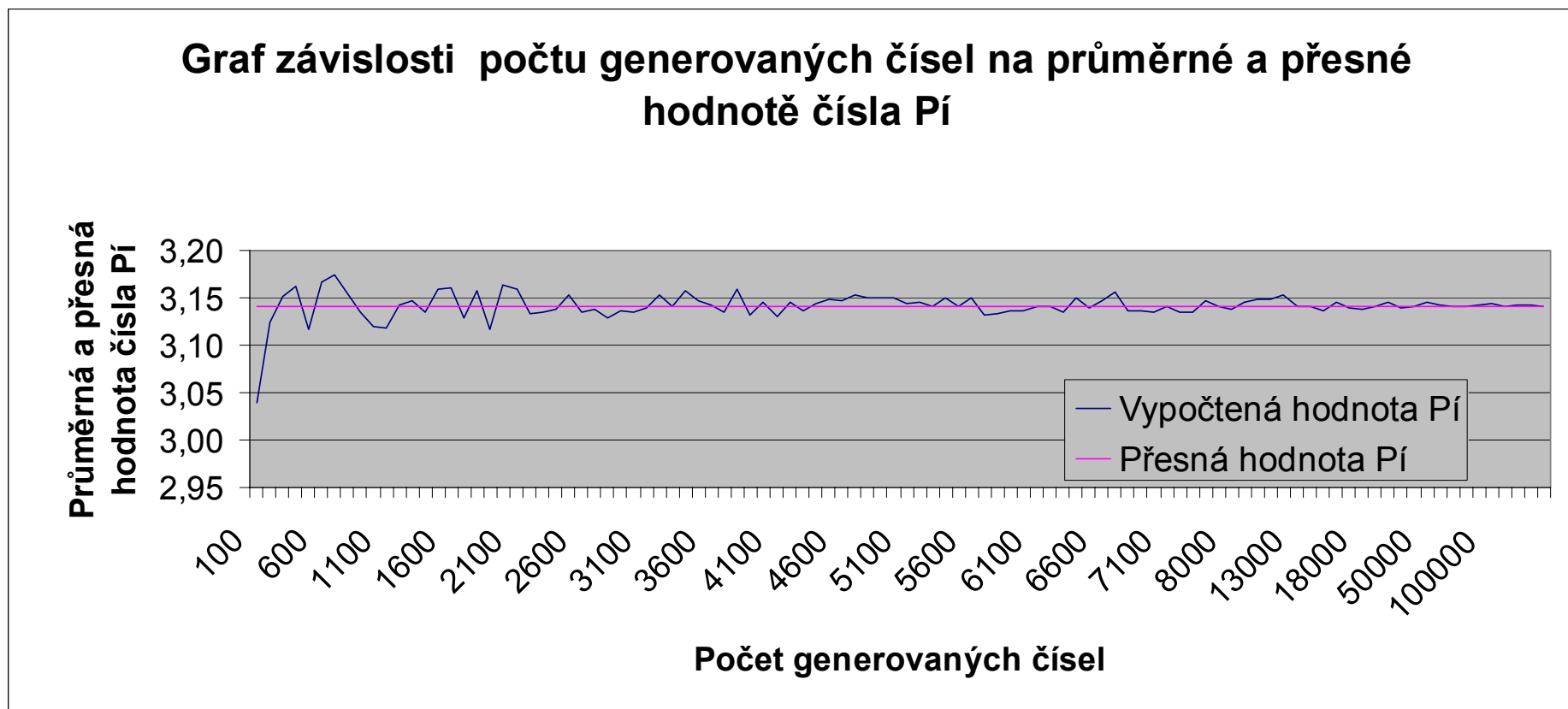
```

PŘÍLOHA P2: Zdrojový kód Jednotkové kružnice

```
1 function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
2 m=0;
3 n=0;
4 x=0;
5 y=0;
6 p=0;
7 pi=0;
8 g=0;
9 c=0;
10 gr=0;
11 a=0;
12 b=0;
13 plot(x,y);
14 rychlost=(get(handles.checkbox1,'Value'));
15 c=str2num(get(handles.edit3,'String'));%rychlost vykreslování
16 n=str2num(get(handles.edit1,'String')); %počet generovaných čísel
17 if n<0
18 errordlg('Zadejte kladnou hodnotu!!!')
19 end;
20 if c<0
21 errordlg('Zadejte kladnou hodnotu!!!')
22 end;
23 n=round(n);
24 a=rand(n,1)*(1);
25 b=rand(n,1)*(1);
26 hold on;
27 pomocna1=0:0.001:1;
28 pomocna2=sqrt(1-pomocna1.^2);
29 title('Zobrazení 1/4 jednotkové kružnice');
30 kruznice=plot(pomocna1,pomocna2,'Color','c','LineWidth',2);
31 for i=1:n
32 p=sqrt((a(i)^2)+(b(i)^2));
33 if (p<=1)
```

```
34 m=m+1;
35 gr= plot(a(i),b(i),'','Color','red');
36 end;
37 if (p>=1)
38 gr= plot(a(i),b(i),'','Color','blue');
39 end;
40 pi=(4*m)/i;
41 handles.k=strcat(num2str(pi)),
42 set(handles.edit2,'String',handles.k);
43 if rychlost>0
44 pause(c);
45 end;
46 end;
47 fid = fopen('Statistika2.txt','a+');
48 fprintf(fid,'%6.2f %18.8f\n',n,pi);
49 fclose(fid);
50 hold off;
```

PŘÍLOHA P3: Graf závislosti přesnosti Ludolfova čísla na počtu generovaných čísel



PŘÍLOHA P4: Graf závislosti vypočtené hodnoty Ludolfova čísla na velikosti jehly

