

Využití statistické metody Monte Carlo pro výpočet určitých integrálů

Using the Monte Carlo method to
evaluate definite integrals

Michal Bönisch

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická
Institut řízení procesů a aplikované informatiky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Michal BÖNISCH**
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační technologie**

Téma práce: **Využití statistické metody Monte Carlo pro výpočet určitých integrálů**

Zásady pro vypracování:

- 1. Zpracujte literární rešerši na dané téma.**
- 2. Navrhněte experimenty pro výpočet jednorozměrných a vícerozměrných integrálů pomocí metody Monte Carlo.**
- 3. Sestavte program v prostředí MATLAB, který realizuje navržené experimenty. Program bude zahrnovat také výpočet integrálů pomocí numerických metod a bude konc koncipován do uživatelsky vhodného prostředí tak aby se ho dalo využít při výuce v předmětu Simulace systémů.**
- 4. Provedte srovnání přesnosti výpočtů podle metody Monte Carlo a výpočtu pomocí numerických metod.**

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Fabián, F., Kluiber, Z.: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění. Prospektum s.r.o., Praha, 1998.

Hušek, R., Lauber, J.: Simulační modely. SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.

Cyhelský, L., Kahounová, J., Hindls, R.: Elementární statistická analýza, Management Press, Praha, 1999.

Vašek, V., Vašek, L.: Simulace systémů. Skriptum VUT Brno, Fakulta technologická, Brno, 1991.

Častová, N., Boháč, Z.: Základní numerické metody. Skriptum VŠB TU Ostrava, Ostrava, 1999.

Vicher, M.: Numerická matematika. Elektronická příručka.

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Bronislav Chramcov

Institut řízení procesů a aplikované informatiky

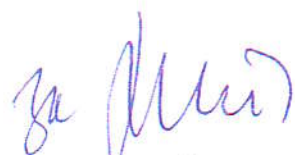
Datum zadání bakalářské práce:

21. února 2005

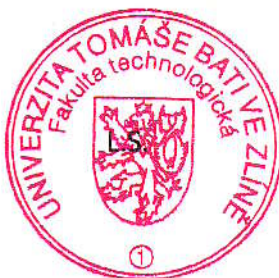
Termín odevzdání bakalářské práce:

10. června 2005

Ve Zlíně dne 15. února 2005



prof. Ing. Josef Šimoník, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel institutu

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Bronislavu Chramcovovi za jeho cenné rady a předmětné připomínky při tvorbě programu a psaní textu.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce, ředitele ústavu a institutu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 08. 06. 2005

.....

podpis

Abstrakt

Úvodní část prezentované bakalářské práce představuje metodu Monte Carlo a seznamuje s jejím obecným principem. Ve druhé části jsou uvedeny základní postupy při výpočtech jednorozměrných a vícerozměrných integrálů pomocí metody Monte Carlo a numerických metod. Třetí část je zaměřena na tvorbu a popis programu, prostřednictvím kterého jsou realizovány navržené postupy výpočtů integrálů. Program je sestaven tak, aby se dal využít při výuce v předmětu Simulace systémů. V poslední části je prostřednictvím experimentů provedeno srovnání přesností výpočtů metody Monte Carlo a numerických metod s přesným analytický řešením.

The introductory part of the presented bachelor's work introduces the Monte Carlo method and gives information about its general features. The second part presents basic principles of solving one-dimensional and double integrals by Monte Carlo method and numerical methods. The third part is dealing with practical implementation of above mentioned methods. There is designed the program, which will be used in the subject Simulation of systems. The last part includes the experiments, which were conducted to compare accuracies of above mentioned methods with the exact analytic results.

OBSAH

ÚVOD.....	6
1 METODA MONTE CARLO	7
1.1 Historie	7
1.1.1 První použití myšlenek metody Monte Carlo.....	7
1.1.2 Otcové metody Monte Carlo	8
1.2 Princip metody Monte Carlo.....	9
1.3 Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky	11
1.3.1 Pravděpodobnost	11
1.3.2 Náhodné veličiny.....	12
1.3.3 Některá rozdělení náhodných veličin.....	13
1.3.4 Získání potřebného počtu náhodných pokusů	14
1.4 Generátory náhodných čísel	17
2 VÝPOČET URČITÝCH INTEGRÁLŮ POMOCÍ METODY MONTE CARLO A NUMERICKÝCH METOD	19
2.1 Výpočet jednorozměrných integrálů metodou Monte Carlo	19
2.1.1 Geometrická metoda.....	19
2.1.2 Metoda odhadu střední hodnoty funkce	21
2.1.3 Srovnání efektivity obou metod	22
2.1.4 Metody se zvýšenou účinností	22
2.2 Výpočet vícerozměrných integrálů metodou Monte Carlo	24
2.3 Výpočet integrálů pomocí numerických metod.....	25
2.3.1 Obdélníkové pravidlo	25
2.3.2 Lichoběžníkové pravidlo	26
2.3.3 Simpsonovo pravidlo.....	26
2.3.4 Složené vzorce.....	27
3 SESTAVENÍ PROGRAMU A POPIS OVLÁDÁNÍ PROGRAMU.....	28
3.1 Program pro jednorozměrné integrály	28
3.1.1 Spuštění programu, zadávání vstupních parametrů.....	28
3.1.2 Spuštění výpočetních metod.....	30
3.1.3 Zobrazení výsledků	31
3.2 Program pro dvourozměrné integrály	31
3.2.1 Spuštění programu, zadávání vstupních hodnot.....	31
3.2.2 Spuštění metody, výpis výsledků	32
3.3 Informace a doporučení pro užívání programů	33
4 VÝSLEDKY NAVRŽENÝCH EXPERIMENTŮ	34
4.1 Ověření platnosti limitních vět.....	34
4.2 Jednorozměrné integrály	35
4.2.1 Analytický výpočet zvoleného jednorozměrného integrálu	36
4.2.2 Srovnání výsledků metody Monte Carlo s analytickým výsledkem.....	36
4.2.3 Srovnání výsledků numerických metod s analytickým výsledkem	39
4.3 Dvourozměrné integrály	44
4.3.1 Analytický výpočet zvoleného dvourozměrného integrálu	45
4.3.2 Srovnání výsledků metody Monte Carlo s analytickým výsledkem.....	45
ZÁVĚR.....	48
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	50
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	51
SEZNAM OBRÁZKŮ	52

SEZNAM TABULEK	53
-----------------------------	-----------

ÚVOD

Stále větší nutnost aplikací nejrůznějších matematických metod v přírodovědných oborech, medicíně, technice, ekonomice a jinde nutí matematiku přicházet s prostředky, které umožní vždy a efektivně najít řešení vyskytujících se problémů a úloh a zajistit tak její největší upotřebitelnost.

S rostoucí složitostí řešené problematiky se matematika stále častěji střetává s numerickým řešením úloh, kdy zkonstruování určitého algoritmu je prakticky vůbec neproveditelné, resp. sestrojený algoritmus je velmi složitý a pro využití neefektivní. V takových případech se ukazuje jednoznačně výhodné zamyslet se nad možností obrátit pozornost k modelování matematické podstaty úlohy a využít k tomu pravděpodobnostních a matematicko-statistických postupů.

Pokud se tedy zaměří na tuto myšlenku a provede se vhodně uspořádaný experiment plně vystihující řešený problém, pak se jeho vyhodnocením dostane hledaný výsledek. Jelikož je ale většinou potřeba velký rozsah práce, nabylo praktikování těchto postupů a myšlenek hlavního významu až s prudkým rozvojem výpočetní techniky.

A právě účelné spojení teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky vedlo společně s rozvojem výpočetní techniky ke zrodu matematického výpočetního prostředku nesoucí název metoda Monte Carlo.

Metoda Monte Carlo se tedy může charakterizovat jako způsob řešení úloh, při kterém se hledané hodnoty stochastických či deterministických veličin určují na základě statistického zpracování hodnot, které se získají jako výsledek určitých, často opakovaných náhodných pokusů.

Nutno podotknout, že metoda Monte Carlo může být někdy jen jediným způsobem, kterým se lze dopracovat k řešení daného problému. Mnohdy také umožňuje oproti tradičním postupům dospět k výsledku mnohem rychleji a efektivněji.

Její uplatnění lze nalézt nejen v technických a ekonomických oborech, ale také v oblasti řízení, ve mnoha oborech věd přírodních a v řadě dalších oblastí. Často se jedná o řešení problémů a úloh, které nemají s náhodou vůbec nic společného.

1 METODA MONTE CARLO

1.1 Historie

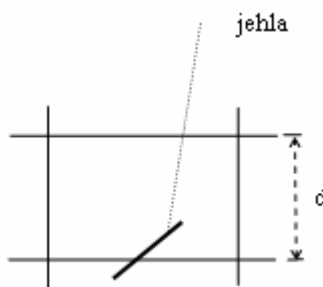
1.1.1 První použití myšlenek metody Monte Carlo

Metoda Monte Carlo má již dnes více jak padesátiletou historii [1], [2], [9]. Její požívání úzce souvisí s rozvojem výpočetní techniky, neboť objem nutných výpočtů je obvykle takový, že se bez počítače nedá zvládnout. Princip metody je však mnohem starší, neboť k realizaci náhodných pokusů se počítač vůbec nepotřebuje. Pravděpodobně nejstarší aplikací myšlenky metody Monte Carlo je tzv. Buffonova úloha o jehle [1], [2], [9]. Jedná se o empirickou metodu na určení hodnoty čísla π .

Princip metody (Obr. 1) [1], [2]: Na desku, na které jsou nakresleny stejně od sebe vzdálené rovnoběžné horizontální přímky, je náhodně vrhána jehla. Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek se označí d a délku jehly l , přičemž $l < d$. Výsledek tohoto náhodného pokusu bude úspěšný tehdy, když jehla protne jednu z horizontálních čar, jinak bude neúspěšný. Pokus se n -krát zopakuje a určuje se relativní četnost m / n , kde m je počet úspěšných pokusů. Jednoduchými výpočty se dojde ke vztahu pro odhadnuté π .

$$\pi \approx \frac{2d}{l} \frac{n}{m} \quad (1)$$

Popsaný experiment byl mnohokrát proveden. Je ovšem zatížen značnou chybou a proto není pro určování přesné hodnoty číselné konstanty π ten nejefektivnější.



Obr. 1. Buffonova jehla

1.1.2 Otcové metody Monte Carlo

Poprvé byla metoda Monte Carlo formulována a současně i prakticky využita během druhé světové války předními vědeckými pracovníky Johnem von Neumannem a Stanislavem Ulamem ve Spojených státech amerických v souvislosti s výzkumnými pracemi zaměřenými na vývoj atomové zbraně [1], [2].

Při výzkumu chování neutronů a možnosti jejich pronikání různými látkami se objevil zásadní problém, jak určit procento neutronů v určité spršce, která pronikne například nádrží vody určitých rozměrů. Tento problém nebylo možno řešit ani teoreticky ani prakticky, přestože se disponovalo takovými nezbytnými údaji jako: průměrná vzdálenost mezi dvěma srážkami neutronu s atomy vodíku nebo kyslíku, pravděpodobnost srážky neutronu s atomem vodíku nebo kyslíku, množství energie, kterou ztrácí neutron během srážky, atd. Přes znalost těchto informací nebylo možné najít praktickou metodu pro předpověď plného dalšího chování jednotlivého neutronu, jinak řečeno pro předpověď celé další „historie jeho života“ [1], [2].

Neumann a Ulam vyřešili problém geniálním nápadem využít k modelování předpovědi „historie života neutronu“ odedávna známou technikou kola rulety. Odtud také pochází název, který autoři metodě dali: METODA MONTE CARLO [1], [2].

Pomocí této metody bylo možné předpovědět trajektorii každého neutronu daného svazku. Pro vytyčení trasy pohybu neutronu se roztočí kolo rulety rozdělené na sto dílků, z nichž pouze jeden je odlišně vyznačený a označuje „pohlčení neutronu atomem vodíku“. Jestliže se kolo rulety zastaví právě na tomto dílku, označuje to „konec života“ neutronu. V opačném případě se zajistí pomocí jiného kola rulety směr a rychlost neutronu po srážce. Simulace „historie života“ neutronu se provádí tak dlouho, dokud buď není pohlčen, nebo neztratí tolik energie, že jeho vylétnutí se stane bezvýznamným nebo dokud se mu nepodaří šťastně projít bez újmy celou cestu a vyjít z nádrže. Když se provede velký počet těchto simulací, získá se dříve, či později více méně přesná informace o procentu neutronů, kterým se podařilo uniknout z nádrže.

Uvedená metoda byla z počátku aplikována k řešení složitých, do té doby prakticky neřešitelných problémů fyzikální povahy. Později se ukázalo, především díky rozvoji teorie modelování, že podobným způsobem lze řešit mnohé složité technické a ekonomické problémy, dále problémy z řízení dopravy, hromadné obsluhy, kontroly stavu zásob a dalších.

Jedna se zdařilých aplikací metody Monte Carlo, která byla provedena v jiné, než technické oblasti, se uskutečnila v USA. Úlohou bylo provést seriózní předpověď o růstu počtu obyvatelstva [1], [2]. Myšlenka řešení byla podobná jako u modelování předpovědi „historie života neutronu“. Neutrony ovšem nahradili lidé, nádrž vody, ve které se neutrony pohybovaly se stala životem oněch lidí. Atomy vodíku a kyslíku, se kterými se neutron sráží, reprezentovali události: narození, uzavření manželství, rozvod, úmrtí a mnoho dalších životních událostí. Pro zjednodušení se vyšlo z předpokladu, že základní jednotkou času žití člověka je jeden měsíc. Jednotlivé znaky pozorované na jednotkách výběru jako: věk, pohlaví, zaměstnání, počet dětí v rodině, atd. byly vybrány shodně s jejich rozdělením v celé populaci, k čemuž bylo nutné provést odpovídající statistická šetření. Zjištěné informace byly přeneseny na kola rulet a simulace se mohla realizovat.

1.2 Princip metody Monte Carlo

Základní princip metody Monte Carlo [1], [2], [3] a [9] spočívá ve vztahu mezi pravděpodobnostními charakteristikami různých náhodných procesů a veličinami, které jsou řešeními úloh z různých oblastí. Odhady hledané veličiny se tedy získávají statistickou cestou a mají tedy pravděpodobnostní charakter.

Hledaná veličina se označuje Θ , její odhady pak $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$. Odhady se získají statistickým zpracováním experimentálního materiálu, který se obdrží jako výsledek nějakých mnohokrát opakovaných náhodných pokusů. Pro získání hodnot náhodných veličin se používají metody generování náhodných čísel. Ke zjištění správného odhadu hledané veličiny Θ musí veličina Θ_n , kde n značí počet pokusů, při $n \rightarrow \infty$ konvergovat k hledané hodnotě Θ . Pro libovolně malou chybu $\varepsilon > 0$ lze pak tuto konvergenci vyjádřit vztahem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\Theta_n - \Theta| < \varepsilon) = 1 \quad (2)$$

Výběr odhadu Θ_n je podmíněn typem a zvláštnostmi specifikujícími řešenou úlohu. Hledaná hodnota Θ v rámci uvedeného modelu může být interpretována jako pravděpodobnost nějakého náhodného jevu, jako střední hodnota nějaké náhodné veličiny atd. Je tedy nějakým statistickým parametrem.

Obecně lze tedy základní schéma řešení problému pomocí metody Monte Carlo rozdělit do těchto etap [5]:

I. Analýza problému a vytvoření modelu

Jelikož se jedná o stochastickou metodu modelování, cílem analýzy zkoumaného jevu bude jej popsat pomocí náhodné veličiny.

Vytvoření modelu pak znamená zjednodušeně popsat zkoumaný jev pomocí konkrétní náhodné veličiny s daným oborem hodnot a rozdělením pravděpodobností a současně určit, která charakteristika zastupuje námi hledanou odpověď

II. Generování a transformace náhodné veličiny

Při počítačové simulaci metody Monte Carlo se musí náhodná veličina vytvořit na počítači. K tomuto účelu slouží generátory náhodných čísel. Vlastní tvorba náhodné veličiny se pak obvykle skládá ze dvou kroků. Nejprve se vygeneruje náhodná veličina s určitým náhodným rozdělením pravděpodobnosti a potom se podle požadavků použitého modelu tato veličina přetransformuje v hledanou náhodnou veličinu.

III. Opakování kroku II. a statistické vyhodnocení výsledků

Předchozím krokem se dostane pouze jedna realizace hledané náhodné veličiny. Proces je proto nutné opakovat a protože metoda Monte Carlo konverguje pomalu, počet opakování musí být dostatečně veliký. Tímto postupem se dostane potřebný počet realizací hledané náhodné veličiny $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$. Tyto obdržené hodnoty se podrobí statistické analýze a podle formulace požitého modelu se z nich získá hledaná odpověď.

Při realizaci metody Monte Carlo je výsledek zatížen chybou [1], [2], [5]. Při dříve provedených pokusech (např. s Buffonovou jehlou) bylo zjištěno, že chyba metody klesá s počtem provedených pokusů n podle vztahu [1], [2], [3], [5] a [9]

$$\vartheta \approx 1/\sqrt{n} \quad (3)$$

1.3 Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky

Metoda Monte Carlo velice často pracuje s pojmy a zákonitostmi z oblasti pravděpodobnosti a matematické statistiky, proto je důležité se s některými seznámit.

Základním východiskem analýzy jevů a procesů je pozorování sledovaných objektů nebo uspořádávání experimentů. Sledovaný jev či proces nastává, resp. probíhá vždy v souvislosti se souborem podmínek γ , za nichž se realizuje.

Existují dvě základní skupiny jevů [1], [7]. Jednu tvoří jevy, které za určitého souboru podmínek vždycky nastanou. Takové jevy se nazývají nutnými nebo jistými. Jestliže ovšem určitý jev při jakékoliv realizaci téhož souboru podmínek γ nikdy nastat nemůže, nazývá se jevem nemožným.

Do druhé skupiny patří jevy, které při realizaci určitého souboru podmínek někdy nastanou, někdy nenastanou. Tyto jevy se nazývají náhodnými a jsou jedním ze základních kamenů metody Monte Carlo.

1.3.1 Pravděpodobnost

Nestačí však pouhé konstatování náhodnosti jevu, ale je také zapotřebí kvantitativní ohodnocení jeho pravděpodobnosti [1], [7]. Tato pravděpodobnost je charakteristikou toho, jak často může sledovaný jev při opakování souboru podmínek γ nastat. Teorie pravděpodobnosti tedy nestuduje individuální náhodné jevy, ale soubory homogenních náhodných jevů.

Existuje několik definicí pravděpodobnosti. Nejzákladnější definicí je *klasická definice pravděpodobnosti* [1], [7], která je formulovaná takto: může-li určitý jev vykazat n různých, disjunktních výsledků, které jsou stejně možné, a jestliže m z těchto má za následek nevyhnutelnou realizaci určitého sledovaného jevu A , a zbylých $n - m$ ji vylučuje, potom se pravděpodobnost položí rovnu číslu $\frac{m}{n}$ a píše se $P(A) = \frac{m}{n}$.

Nejčastěji se používá *statistická definice pravděpodobnosti* [1], [7]. Její přístup vychází ze sledování chování relativních četností při rostoucím počtu pokusů. Jelikož bylo zjištěno, že se relativní četnost sledovaného jevu A v rámci n provedených pokusů „blíží“

odpovídajícím pravděpodobnostem při rostoucím n , lze pravděpodobnost sledovaného jevu A definovat jako limitu relativních četností při rostoucím počtu pokusů, tj. položit

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \quad (4)$$

V oblasti využití metody Monte Carlo se však nejčastěji zmiňuje *geometrická definice pravděpodobnosti* [1], [7]. Tato definice vychází z možnosti nahradit pojem „počet“ v klasické definici vhodně volenou jinou mírou. Náhradní mírou pak může být např. objem, délka, obsah atd. Pak je pravděpodobnost náhodné volby bodu z množiny ω (jev A), která je podmnožinou množiny Ω , dána poměrem

$$P(A) = \frac{|\omega|}{|\Omega|} \quad (5)$$

1.3.2 Náhodné veličiny

Pojem náhodná veličina

Pojem náhodná veličina [1], [5], [7] je jeden z nejzávažnějších pojmů teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Náhodné veličiny jsou takové veličiny, u kterých jsou známy všechny hodnoty, kterých mohou nabývat, a pravděpodobnosti jejich nabytí, ale u nichž se nedá předpovědět jejich hodnota v konkrétním případě. Náhodná veličina je tedy definována svým rozdělením pravděpodobnosti a nejčastěji se značí řeckými písmeny ξ , η , ζ , atd. (resp. velkými latinskými písmeny X , Y , Z atd.). Jejich konkrétní realizace se pak označují malými latinskými písmeny x , y , z , atd.

Podle hodnot, kterých mohou náhodné veličiny při realizacích nabývat, dělíme náhodné veličiny na diskrétní a spojitě. Diskrétní náhodná veličina může nabývat spočetně mnoha hodnot a možnými hodnotami spojitých náhodných veličin jsou všechna čísla z konečného nebo nekonečného intervalu.

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Rozdělení pravděpodobností libovolné náhodné veličiny X charakterizuje její distribuční funkce $F(x)$. Rozdělení diskrétního typu lze charakterizovat pravděpodobnostní funkcí $P(X = x_j)$, pro $j = 1, 2, \dots$ a rozdělení spojitěho typu hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

Tyto uvedené funkce dávají o náhodné veličině X úplnou informaci. V řadě případů je však tato informace buď nedosažitelná, nebo stačí shrnout informaci do několika čísel, které

vystihují vlastnosti sledované náhodné veličiny X z potřebného hlediska. Tato čísla jsou tedy charakteristikami náhodné veličiny X . Pro metodu Monte Carlo jsou nejdůležitější dvě číselné charakteristiky, a to střední hodnota a rozptyl.

Střední hodnota je jednou z nejdůležitějších charakteristik polohy náhodné veličiny X . Někdy se též uvádí jako očekávaná hodnota nebo matematická naděje náhodné veličiny X . Většinou se označuje $E(X)$. Definiční vztahy pro diskrétní a spojitou náhodnou veličinu jsou:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) \quad (6)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (7)$$

Rozptyl je další významnou charakteristikou náhodné veličiny X . Většinou by měl doprovázet střední hodnotu $E(X)$ a udává kvantitativní míru variability hodnot náhodné veličiny X právě kolem střední hodnoty $E(X)$. Definuje se jako střední hodnota čtverců odchylek hodnot náhodné veličiny X od střední hodnoty a obvykle se značí $D(X)$. Vypočítá se podle vztahu

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (8)$$

Druhá odmocninu rozptylu $\sqrt{D(X)} = \sigma > 0$ se nazývá směrodatná odchylka.

Bylo citováno z [1], [7].

1.3.3 Některá rozdělení náhodných veličin

Binomické rozdělení

Binomické rozdělení [1], [2], [5], [7] je definováno pro diskrétní náhodné veličiny. Používá se tehdy, jestliže pravděpodobnost nastoupení jevu A v každém z n pokusů nezávisí

na výsledcích předchozích pokusů. Dále je pravděpodobnost jevu A pro všechny pokusy stejná a je rovna p , tzn. že nezávislé náhodné veličiny mají alternativní rozdělení se stejným parametrem p . Binomické rozdělení se značí $Bi(n; p)$ a je specifikováno pravděpodobnostní funkcí

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (9)$$

pro $x = 0, 1, \dots, n$, kde n je přirozené číslo a $0 \leq p \leq 1$.

Základní charakteristiky binomického rozdělení jsou:

$$E(X) = np \quad (10)$$

$$D(X) = n\pi(1 - p) \quad (11)$$

Normální rozdělení

Normální rozdělení [1], [2], [7] je definováno pro spojité náhodné veličiny. Je použitelné všude tam, kde kolísání náhodné veličiny je způsobeno součtem velkého počtu nepatrných a vzájemně nezávislých jevů. Označuje se symbolem $N(\mu; \sigma^2)$.

Náhodná veličina X má normální rozdělení, jestliže její hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}, -\infty < x < \infty. \quad (12)$$

Základní charakteristiky normálního rozdělení jsou:

$$E(X) = \mu \quad (13)$$

$$D(X) = \sigma^2 \quad (14)$$

Rovnoměrné rozdělení

Pro řešení problémů metodou Monte Carlo je ovšem nejpoužívanější rovnoměrné rozdělení [1], [2], [5], [7]. Spojitá náhodná veličina X zavedená v intervalu (α, β) má rovnoměrné rozdělení tehdy, má-li v tomto intervalu konstantní hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{(\beta - \alpha)}, \alpha < x < \beta. \quad (15)$$

Toto rozdělení se značí symbolem $R(\alpha; \beta)$.

Základní charakteristiky rovnoměrného rozdělení jsou:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (16)$$

$$D(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \quad (17)$$

1.3.4 Získání potřebného počtu náhodných pokusů

Jak již bylo řečeno, netradiční přístup metody Monte Carlo spočívá ve spojitosti výsledků řešení úloh s výsledky vhodně uspořádaných experimentů a jejich matematicko-statistickým zpracováním. V rámci teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky existuje několik základních kapitol, kterými lze tuto spojitost a tedy i oprávněnost

používání metody Monte Carlo dokázat. Mezi nejdůležitější patří např. *Čebyševova nerovnost* [1], [7] nebo *Moivre--Laplaceova limitní věta* [1], [7]. Oba přístupy tuto spojitost nejen dokazují, ale také umožňují najít potřebný počet náhodných pokusů pro úspěšnou realizaci uspořádaného experimentu při zvolené chybě ε .

Čebyševova nerovnost

Získané výsledky $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z vhodně provedeného experimentu se nahradí vhodnou funkcí $\Theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Theta_n$. Při volbě maximální povolené chyby ε se pak vždy požaduje, aby byla splněna podmínka

$$|\Theta_n - \Theta| < \varepsilon \quad (18)$$

Jelikož se výsledky $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liší pouze náhodně, tak lze i jejich funkci Θ_n považovat za realizaci náhodné veličiny, a tedy jev $|\Theta_n - \Theta| < \varepsilon$ za jev náhodný. Pravděpodobnost tohoto jevu je pak základním obecným stochastickým vztahem mezi hledanou hodnotou Θ a hodnotou vhodně volené funkce Θ_n a dá se vyjádřit vztahem

$$P(|\Theta_n - \Theta| < \varepsilon) = \alpha(n, \varepsilon). \quad (19)$$

Písmenem n je označen počet pokusů, ε zastupuje maximálně přípustnou chybu a $\alpha(n, \varepsilon) = \alpha$ je pravděpodobnost, která se mnohdy také nazývá spolehlivostí. Interval $(\Theta_n - \varepsilon, \Theta_n + \varepsilon)$ se pak nazývá intervalovým odhadem na hladině spolehlivosti α .

Pro získání vhodné funkce Θ_n se užívá např. **Čebyševovy nerovnosti**:

Nechť X je náhodná veličina s libovolným, obecně neznámým rozdělením. Předpokládejme, že existuje konečná střední hodnota $E(X)$ a konečný rozptyl $D(X)$. Potom

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (20)$$

pro každé libovolně malé $\varepsilon > 0$.

Důsledky Čebyševovy nerovnosti hrají v rámci uplatnění metody Monte Carlo významnou roli. Jedním z nich je vztah mezi relativní četností a pravděpodobností sledovaného jevu, který v teorii pravděpodobnosti vystupuje jako Bernoulliho limitní věta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (21)$$

Jako praktické využití Bernoulliho limitní věty se využívá Bernoulliho nerovnost

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \quad (22)$$

Jestliže se označí

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq \alpha(n, \varepsilon) = \alpha, \quad (23)$$

získá se matematický vztah mezi počtem pokusů n , maximálně přípustnou relativní chybou ε a spolehlivostí $0 < \alpha < 1$. Pro lepší odhad pravděpodobnosti $P(A)$ vyjádřené relativní četností je proto nutné provést větší počet pokusů, což je vyjádřeno důležitým vztahem

$$n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\alpha)}. \quad (24)$$

Moivre-Laplaceova limitní věta

Tento přístup je mnohem efektivnější způsobem jak vyjádřit vztah mezi pravděpodobnostmi a relativní četnostmi. Podle věty Moivreovy-Laplaceovy platí pro normovanou náhodnou veličinu limitní vztah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \Phi(u), \quad (25)$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce rozdělení $N(0;1)$.

Z tohoto vztahu se vhodnými úpravami získá vztah pro maximální přípustnou chybu ε

$$\varepsilon = t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (26)$$

a z něj pak důležitý vzorec pro výpočet potřebného počtu pokusů n

$$n \approx \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2. \quad (27)$$

Bylo citováno z [1], [7].

1.4 Generátory náhodných čísel

Výpočetní schéma metody Monte Carlo předpokládá modelování náhodného procesu pomocí operací s náhodnými čísly. Tato čísla lze získat několika způsoby. Během krátké historie metody Monte Carlo byly navrženy a použity tyto způsoby a generátory náhodných čísel [1], [2], [3], [5]:

- Fyzikální generátory

Na počátku byla známa jen tato jediná technika. Používal se nějaký fyzický generátor (např. ruleta) a poté se takto vytvořená čísla přenesla do počítače. Později se začaly používat systémy přímo elektricky spojené s počítačem, které využívaly fyzikální procesy náhodné již svou podstatou. Nevýhodou byla jejich relativní pomalost. Dnes se již proto neužívají.

- Tabulky náhodných čísel

Tato metoda vycházela z fyzikálních generátorů. Náhodná čísla vyprodukovaná těmito generátory se ukládala na nějaké vnější médium a při modelování se pak využívala. Médii byly buď tabulky vytištěné na papír a nebo děrná či magnetická páska. Rozvoj výpočetní techniky však tuto metodu potlačil.

- Vypočítaná náhodná čísla

Metoda dnes nejvíce používána. Jelikož se jedná o čísla vypočítaná, což na první pohled odporuje pojmu náhodnost, nazývají se proto *čísla pseudonáhodná*. Posloupnost vygenerovaných pseudonáhodných čísel je vždy konečná, po uplynutí periody se začne celá posloupnost opakovat. V rámci jedné periody se čísla vyskytují relativně náhodně.

Cílem teorie generátorů pseudonáhodných čísel je vybrat algoritmus jejich generování tak, aby se rysy pseudonáhodných čísel co nejméně rušily. Generátor se vybírá na základě teoretických předpokladů a dlouhodobě se velice důkladně testuje. U generátorů implementovaných do programovacích jazyků se proto těmito statistickými testy nemusí již zabývat. Převážná většina generátorů pseudonáhodných čísel vytváří jednotlivé hodnoty náhodné veličiny $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ rovnoměrně rozdělené v intervalu $(0,1)$, resp. $\langle 0,1 \rangle$.

Většinu algoritmů, které jsou užívány pro získávání pseudonáhodných čísel, lze zachytit v rekurentním vztahu

$$x_i = F(x_{i-1}) \quad (28)$$

kde x_0 je vhodná počáteční hodnota – násada, pomocí něhož se vytváří posloupnost pseudonáhodných čísel $\{x_i\}$, F je příslušná funkce.

Jsou založeny na jednom z těchto tří principů [1], [2], [3]:

- von Neumannovy generátory

Tyto generátory se používaly jen v samých počátcích a jsou charakterizovány příliš krátkými periodami a nedostatečnou náhodností

- lineární kongruenční generátory

Jedná se dnes o nejrozšířenější typ generátorů. Je založený na jednoduchém vztahu pro nalezení nového pseudonáhodného čísla x_{n+1} na základě již známých čísel x_n až x_{n-k} . Jedním z velmi užívaným algoritmem, navrženým D. H. Lehmerem, je tzv. kongruenční, resp. reziduální metoda:

$$x_{n+1} = cx_n \pmod{M}, \quad (29)$$

kde c je velké přirozené číslo. x_{n+1} je tedy rovno zbytku (reziduu), získanému při dělení čísla cx_n číslem M .

- generátory s posuvnými registry

Tento druh generátorů se v uživatelských programech používá jen výjimečně, neboť je svou podstatou předurčený pro přímou hardwarovou realizaci a pracuje s pouze s bity.

2 VÝPOČET URČITÝCH INTEGRÁLŮ POMOCÍ METODY MONTE CARLO A NUMERICKÝCH METOD

Metoda Monte Carlo se velmi dobře uplatňuje i v matematice, kde často nabízí velmi zajímavou alternativu ke klasickým numerickým algoritmům. Zvláště efektivní je její uplatnění v těch případech, kdy se na přesnost výsledků nekladou přehnaně velké požadavky.

2.1 Výpočet jednorozměrných integrálů metodou Monte Carlo

Pro řešení jednorozměrných integrálů existují dvě základní metody. První metoda vychází z geometrického významu integrálu jako plochy pod křivkou [1], [2], [3], [5], [8], [9]. Lze ji tedy nazvat metodou geometrickou. Druhá metoda je naopak založena na odhadu střední hodnoty integrované funkce. V obou případech se využívá generátorů náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením.

2.1.1 Geometrická metoda

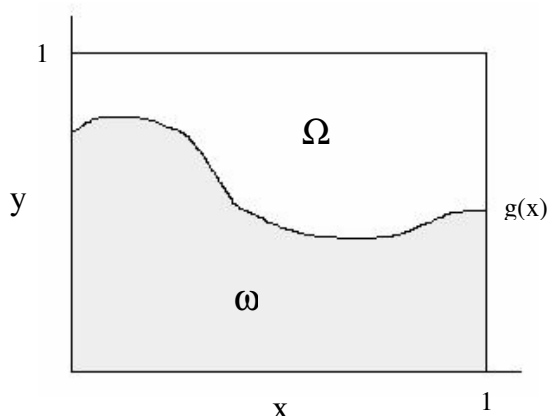
Jak už bylo uvedeno, tato metoda vychází z geometrické interpretace integrálu jako plochy pod křivkou na zadaném intervalu [1], [2], [3], [5], [8], [9].

Princip metody lze ukázat na integrálu

$$I = \int_0^1 g(x) dx, \quad (30)$$

kde integrand musí splňovat podmínku $0 \leq g(x) \leq 1$ a $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Podle (Obr. 2) se jedná o výpočet plochy, která je omezena křivkou $y = g(x)$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 1$. Oblast Ω je definována nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ a tudíž je její obsah roven 1.



Obr. 2. Znázornění geometrického řešení

Plocha ω se může metodou Monte Carlo vypočítat tak, že se výpočet plochy změní na úlohu určení pravděpodobnosti náhodného jevu. Z plochy Ω se náhodně vybírají body se souřadnicemi (x_i, y_i) . Pravděpodobnost p , že bod padne do oblasti ω se vzhledem na geometrickou interpretaci pravděpodobnosti rovná poměru $\frac{\omega}{\Omega}$, čili ω , protože $\Omega = 1$.

Jestliže se při realizaci pokusu objeví bod, patřící do oblasti ω , pak byl proveden zdařilý pokus. Po provedení n pokusů se zjistí počet zdařilých pokusů m a vypočte se relativní četnost jevu, že náhodný bod (x_i, y_i) padne do oblasti ω

$$I' = \frac{m}{n}. \quad (31)$$

Tuto relativní četnost lze tedy považovat za přibližnou hodnotu integrálu I . Přesnost výsledku závisí na počtu opakování náhodného pokusu, poněvadž podle zákona velkých čísel platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad (32)$$

pro $\varepsilon > 0$. To znamená, že při velkém počtu opakování náhodného pokusu konverguje relativní četnost náhodného jevu stochasticky k jeho pravděpodobnosti.

Výše uvedený pokus se modeluje pomocí náhodných čísel. Jeho realizace se pak skládá ze dvou částí [1]:

- I. Z posloupnosti náhodných čísel vygenerovaných vhodně zvoleným generátorem a rovnoměrně rozdělených na intervalu $<0,1>$ se vybírají dvojice po sobě jdoucích náhodných čísel a považují se za souřadnice (x_i, y_i) náhodného bodu.

II. Náhodný bod spadne do oblasti ω jestliže bude splněna nerovnost

$$y_i < g(x_i) \quad (33)$$

Při výpočtu integrálu

$$I = \int_a^b g(x) dx, \quad (34)$$

kde funkce je omezena ve zvoleném intervalu $\langle a, b \rangle$, se převádí výpočet integrálu na předchozí vyšetřovaný případ $I = \int_0^1 g(x) dx$ [1]. Supremum funkce $g(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ se označí písmenem A a infimum funkce $g(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ pak písmenem B . Zavede se substituce $x = a + (b - a)z$ a posléze se vyšetřovaný integrál převede na tvar:

$$I = (A - B)(b - a) \int_0^1 g^*(z) dz + (b - a)B, \quad (35)$$

kde $g^*(z) = \frac{g[a + (b - a)z] - B}{A - B}$. Funkce $g^*(z)$ tedy splňuje požadavek $0 \leq g^*(x) \leq 1$ [1].

2.1.2 Metoda odhadu střední hodnoty funkce

Principem této metody je, že se nejprve zkouší nalézt střední hodnotu $\bar{g}$ integrované funkce $g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ [1], [2], [5]. Pokud se to podaří, přibližná hodnota integrálu I' se určí velmi snadno

$$I' = (b - a)\bar{g} \quad (36)$$

K nalezení střední hodnoty $\bar{g}$ se právě užívá metody Monte Carlo. Princip spočívá v tom, že se vezme náhodná veličina X rovnoměrně rozdělená na intervalu $\langle a, b \rangle$ a zavede se náhodná veličina $Y = g(x)$, jejíž matematické očekávání $E(Y)$ je rovno průměrné hodnotě funkce $g(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Hodnota $E(Y)$ se odhadne pomocí zákona velkých čísel, tj. pomocí aritmetického průměru n nezávislých realizací veličiny Y . Potom se přibližná hodnota integrálu I' vypočítá podle vztahu

$$I' = (b - a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i). \quad (37)$$

2.1.3 Srovnání efektivity obou metod

O efektivitě metody rozhoduje doba potřebná k dosažení dané přesnosti a zde se musí v úvahu brát délka výpočtu jedné realizace. Při porovnání počtu operací potřebných k dosažení jedné hodnoty pro výpočet hledané veličiny I' , bude tento počet menší pro metodu střední hodnoty funkce než pro metodu geometrickou. Délka trvání těchto operací však záleží na složitosti integrované funkce. Zatímco při realizaci jedné hodnoty v metodě střední hodnoty funkce je nutno počítat funkční hodnotu $g(x_i)$, při geometrické metodě je třeba pouze provádět test, zda negenerovaný bod leží pod křivkou $y = g(x)$. Jeho vhodnou úpravou se lze v případě potřeby výpočtu nevhodně složité funkce $g(x)$ vyhnout, což nelze udělat v případě metody střední hodnoty. Na obecné úrovni proto nelze o efektivitě obou metod rozhodnout.

2.1.4 Metody se zvýšenou účinností

Bez znalosti integrované funkce nelze tedy rozhodnout, zda je efektivnější metoda střední hodnoty nebo metoda geometrická, avšak porovnání algoritmů založených na metodě Monte Carlo a klasických numerických algoritmů vyznívá jednoznačně ve prospěch postupů numerické matematiky. Pro zmenšení tohoto rozdílu se oba výše uvedené algoritmy upravují a zdokonalují. Existuje celá řada postupů a jejich volba závisí na konkrétní integrované funkci.

Některé příklady těchto postupů:

I. Nalezení hlavní části integrálu [5]

Počítaný integrál se rozděluje na dvě části. První část dává hlavní vklad do výsledku a druhá je jako upřesňující korekce. Řešený integrál se tedy zapisuje takto:

$$I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_a^b k(x)dx. \quad (38)$$

Pokud lze první integrál funkce $g(x)$ spočítat analyticky, je nutné numericky určit pouze hodnotu integrálu funkce $k(x)$. Pokud však první integrál obsahuje převážnou část výsledku, projeví se chyba v přibližném určení hodnoty druhého integrálu na výsledku jen málo a získá se tak celkový výsledek přesněji.

II. Metoda váženého výběru [5]

Princip této modifikace obou základních metod spočívá v tom, že se nevolí náhodná čísla X v intervalu $\langle a, b \rangle$ rozdělená rovnoměrně, ale v oblasti nejvíce přispívající k odhadu hodnoty počítaného integrálu I se generují s větší hustotou.

Tato metoda existuje ve dvou modifikacích. V jednodušším případě se integrační interval $\langle a, b \rangle$ rozděluje na několik dílčích intervalů $\langle a, c_1 \rangle, \langle c_1, c_2 \rangle, \dots, \langle c_k, b \rangle$ a v každém se generuje jiný počet náhodných čísel x_i . Pokud se zvolí počty náhodných čísel n_i úměrné jak šířce dílčího intervalu tak i průměrné velikosti integrované funkce na tomto podintervalu, efektivita použitých algoritmů se zvýší. Pro integraci se pak používá vztah

$$I = \int_a^{c_1} g(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} g(x)dx + \dots + \int_{c_k}^b g(x)dx. \quad (39)$$

Výsledek bude přesnější než při práci s n náhodnými čísly x na celkovém intervalu $\langle a, b \rangle$ a to tím více, čím více se bude integrovaná funkce $g(x)$ na tomto intervalu měnit.

Při obecnější a přesnější variantě metody váženého výběru se v dílčích intervalech nepracuje s konstantními hustotami bodů, ale náhodná veličina X se generuje s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ spojitě se měnící na celém intervalu $\langle a, b \rangle$. Hledaný integrál se upravuje do tvaru

$$I = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx. \quad (40)$$

III. Metoda symetrizace integrované funkce [5]

Zde se vychází z obecného předpokladu, že rozptyl metody je tím menší, čím se bude integrovaná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ pomaleji měnit. Integrovaná funkce se proto upravuje tak, aby rozptyl výpočtu poklesl. Konkrétní úprava pak závisí na tvaru integrované funkce.

2.2 Výpočet vícerozměrných integrálů metodou Monte Carlo

Často se lze setkat s případy, kdy je potřeba počítat místo jednorozměrných integrálů i integrály vícerozměrné. Nejčastěji jsou to pak případy, kdy se řeší integrály dvourozměrné

$$I = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} g(x, y) dy dx . \quad (41)$$

nebo třírozměrné.

Zatímco pro jednorozměrné integrály existuje v numerické matematice mnoho výhodných integračních metod, přechod k vícerozměrným integrálům však vždy znamená značné zkomplikování používaných kvadraturních vzorců a velké prodloužení doby výpočtu. Jestliže se při výpočtu jednorozměrného integrálu berou funkční hodnoty v n uzlových bodech, pak při přechodu k d -rozměrnému případu vzroste počet uzlových bodů na n^d a známé metody numerické matematiky se stanou velice neefektivními a v některých případech i nepoužitelnými.

Proto je při řešení těchto problémů vhodné použít metodu Monte Carlo, protože ta tuto nevhodnou vlastnost nemá. Pro výpočty vícerozměrných integrálů se používá základních metod navržených pro jednorozměrné integrály. Tyto metody jsou pouze zobecněny pro více rozměrů a to bez výrazné ztráty jejich účinnosti. Při řešení problémů lze použít i většinu doplňujících postupů zvyšující efektivitu výpočtu.

Obecná formulace problému bude

$$I = \int_G g(P) f(P) dP , \quad (42)$$

kde $f(P)$ zastupuje zadanou hustotu pravděpodobnosti v oblasti G , přes kterou se integruje, a $P = (x, y, \dots)$ je bod z oblasti G .

Princip střední hodnoty funkce spočívá v tom, že se vezmou náhodné body $P_1, P_2, \dots$ s hustou $f(P)$ a zavede se náhodná veličina $\eta = g(P)$, jejíž matematické očekávání je rovno I

$$E(\eta) = \int_G g(P) f(P) dP = I . \quad (43)$$

Pro nalezení odhadu řešeného integrálu lze pak použít vztah

$$\bar{\eta} = I' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(P_i). \quad (44)$$

Analogicky lze také zobecnit i geometrickou metodu. Předpokládá se, že funkce $g(P)$ je ve vyšetřované oblasti G omezená a tudíž platí vztah $0 \leq g(P) \leq 1$. Vytvoří se nová $d + 1$ rozměrná oblast $G \times (0, c)$ a v ní se pak generují náhodné body Q . Vygeneruje se n bodů a vyšetřuje se, kolik z těchto vygenerovaných bodů leží pod povrchem plochy vytvořené funkcí $z = g(P)$. Jejich počet se může označit n' . Odhad hodnoty řešeného integrálu I se pak vypočítá pomocí vztahu

$$I' = cG \frac{n'}{n}. \quad (45)$$

Bylo citováno z [5].

2.3 Výpočet integrálů pomocí numerických metod

Pro výpočet integrálů lze, jak již bylo uvedeno, použít také postupy z oblasti numerické matematiky. Většinou se jen omezují na řešení jednorozměrných integrálů, protože pro vícerozměrné integrály je potřeba takový obrovský rozsah práce, že se tak stávají prakticky nedostupnými. Přestože existuje větší množství numerických metod [4], [6]. V této práci budou zmíněny a použity pouze tři nejzákladnější metody spadající do oblasti Newton-Cotesových vzorců. Jsou jimi: obdélníkové pravidlo [4], [6], lichoběžníkové pravidlo [4], [6] a Simpsonovo pravidlo [4], [6].

Obecně se při použití Newton-Cotesových vzorců rozděluje integrační interval $\langle a, b \rangle$ na n stejně velkých intervalů. Jejich krajní body se označují x_i a délka intervalů písmenem h . Vyšetřovaný integrál se vyjadřuje ve tvaru součtu

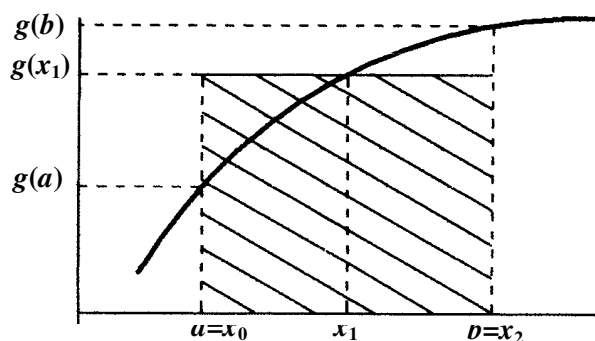
$$\int_a^b g(x) dx = c_0 g(x_0) + \dots + c_n g(x_n), \quad (46)$$

kde c_i jsou vhodně zvolené konstanty.

2.3.1 Obdélníkové pravidlo

Obdélníkové pravidlo (Obr. 3) patří do otevřených Newton-Cotesových vzorců, což znamená, že se ve vzorci (46) nepoužívají krajní body a jsou tedy rovny nule. Toto pravidlo je pravidlem prvního řádu a využívá dva intervaly $n = 2$. Z toho vyplývá, že koeficienty ve vzorci (46) jsou $c_0 = c_2 = 0$, $c_1 = 2h$ a hodnota hledaného integrálu se počítá vztahem

$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = 2hg(x_1). \quad (47)$$

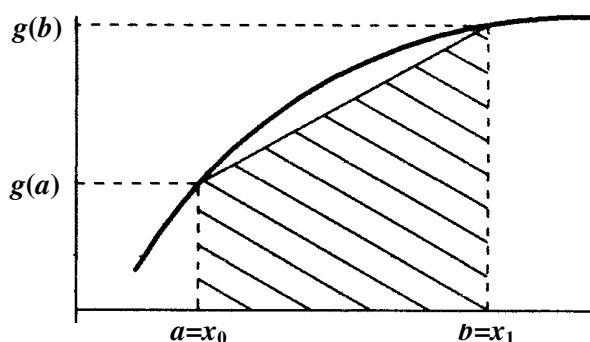


Obr. 3. Obdélníkové pravidlo

2.3.2 Lichoběžníkové pravidlo

Lichoběžníkové pravidlo (Obr. 4) se řadí do uzavřených pravidel a využívá pouze jeden interval $n = 1$. Je pravidlem prvního řádu a jeho koeficienty ve vzorci (46) jsou $c_0 = c_1 = h/2$. Výsledný vztah pro výpočet integrálu má tedy tvar

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx = \frac{h}{2} [g(x_0) + g(x_1)]. \quad (48)$$



Obr. 4. Lichoběžníkové pravidlo

2.3.3 Simpsonovo pravidlo

Simpsonovo pravidlo patří do uzavřených vzorců a počítá pomocí dvou intervalů (tedy tří bodů). Je to pravidlo druhého řádu a integruje tedy přesně kvadratické funkce.

Vztah pro výpočet integrálu pomocí Simpsonova pravidla je:

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{h}{3} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] \quad (49)$$

2.3.4 Složené vzorce

Výše uvedené vzorce dosahují při výpočtech integrálů poměrně nízkých přesností. Tento problém se ve většině případů dá eliminovat použitím složených vzorců [4], [6]. Jejich princip je založen na tom, že se celkový interval $\langle a, b \rangle$ rozdělí na několik intervalů n_{int} a integrál se spočítá jako součet dílčích integrálů.

Složené vzorce lze aplikovat na všechny uvedené pravidla.

3 SESTAVENÍ PROGRAMU A POPIS OVLÁDÁNÍ PROGRAMU

Realizace metody Monte Carlo pro výpočet jednorozměrných a vícerozměrných integrálů je provedena prostřednictvím dvou programů. Program pro jednorozměrné integrály je dle zadání navíc rozšířen o numerické metody z kapitoly (2.3), které byly realizovány pomocí složených vzorců. V rámci druhého programu jsou pak vícerozměrné integrály reprezentovány pouze integrály dvourozměrnými.

Veškeré programování proběhlo v prostředí Matlab 6.5 [10], přičemž uživatelské rozhraní bylo vytvořeno prostřednictvím nástroje Matlab GUI [10]. V Následujících kapitolách (3.1) a (3.2) je uveden stručný popis daných programů a jejich ovládání.

3.1 Program pro jednorozměrné integrály

Výpočetní schéma metody Monte Carlo je u programu pro jednorozměrné integrály založeno na geometrickém principu uvedeném v kapitole (2.1.1), přičemž souvislost mezi maximální relativní chybou a počtem potřebných pokusů je definována vztahem (27).

Program se spouští prostřednictvím souboru *integrals.fig* a zdrojový kód je uložen v M-file souboru *integrals.m*. Nedílnou součástí programu jsou také i tyto vytvořené funkce:

- *count_number.m* – funkce pro výpočet počtu čísel ze zadané relativní přesnosti
- *count_epsilon.m* – funkce pro výpočet relativní přesnosti ze zadaného počtu čísel
- *count_error.m* – funkce pro výpočet absolutní chyby výsledku
- *roots.m* – funkce pro nalezení průsečíků s osou x

3.1.1 Spuštění programu, zadávání vstupních parametrů

Po spuštění souboru *integrals.fig* se zobrazí okno uvedené na obrázku (Obr. 7). Nejprve se zadává integrovaná funkce ve tvaru $y = g(x)$, která se pro představu o jejím průběhu okamžitě ve spodní části okna vykreslí v základním intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Následně se prostřednictvím číselného intervalu $\langle a, b \rangle$, znázorněného na obrázku (Obr. 5), zadají integrační meze a funkce se v tomto zvoleném intervalu překreslí. Na základě těchto vstupních parametrů se pak vypočítá a zobrazí analytická hodnota integrálu.

Funkce $y =$

interval

Obr. 5. Oblast pro zadání funkce a intervalu

Jestliže chce uživatel počítat hodnotu zvoleného integrálu pomocí metody Monte Carlo, je potřebné vyplnit další vstupní údaje uvedené na obrázku (Obr. 6). Lze tedy zadávat nejen maximální relativní chybu (= přesnost), podle které se zjistí a zobrazí potřebný počet čísel ke generování, ale i přímo počet čísel, na jehož základě je pak zobrazena informace o relativní přesnosti. Zde je nutno podotknout, že program počítá s poslední zadanou hodnotou, čímž je vyřešena základní otázka, se kterým počtem čísel algoritmus metody Monte Carlo pracuje.

přesnost		počet čísel	
počet čísel		přesnost	

Obr. 6. Vstupní parametry metody Monte Carlo

U numerických metod je jedinou vstupní informací počet intervalů n_{int} , na který se má zvolený interval $\langle a, b \rangle$ rozdělit.

integrals

Funkce $y =$

interval

přesnost počet čísel

počet čísel přesnost

vypisovat výsledek po číslech

Monte Carlo ☐ vykreslení bodů ☐ Mřížka

Výsledek analyticky

Výsledek Monte Carlo %

Numerické metody

počet intervalů krok Start

Lichoběžníková metoda %

Obdélníková metoda %

Simpsonova metoda %

Konec

Graph area: y-axis from 0 to 1, x-axis from 0 to 1.

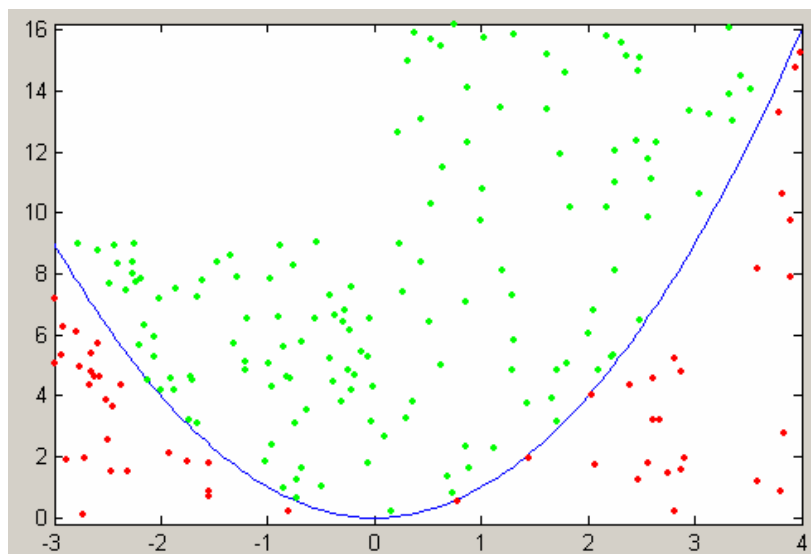
Obr. 7. Prostředí programu pro jednorozměrné integrály

3.1.2 Spuštění výpočetních metod

Metoda Monte Carlo

Spuštění metody Monte Carlo se provádí tlačítkem s nápisem Monte Carlo. Jelikož jsou ale její výsledky zobrazovány průběžně, je nejprve nutné zadat, po kolika číslech (provedených pokusech) se bude výsledek vypisovat. Pokud uživatel zadá hodnotu, která není násobkem zvoleného počtu čísel, je při jejím spuštění zobrazeno chybové hlášení a výpočet se neprovede.

Vedle průběžného vypisování výsledků umožňuje také program ukázat simulaci základního principu geometrické metody vyjádřeného vztahem (33). Simulace se zapíná prostřednictvím kloubového spínače Vykreslení bodů a její příklad je ukázán na obrázku (Obr. 8). Jednotlivé tečky představují vygenerované body, přičemž jejich barva je závislá na splnění nebo nesplnění vztahu (33).



Obr. 8. Ukázka simulace geometrické metody

Numerické metody

Numerické metody jsou umístěné v zeleném obdélníku, který se nachází v pravé části okna a spouští se stisknutím tlačítka Start. Spolu s výsledky jednotlivých metod je uživatel také informován o kroku, který byl při výpočtech použit.

3.1.3 Zobrazení výsledků

Výsledky všech používaných metod jsou zobrazovány vždy v jednotném formátu, který je uveden na obrázku (Obr. 9). Ve světle modrém poli je uveden výsledek, v červeném poli pak údaj o absolutní chybě výsledku. Tmavě modré pole ukazuje informaci, o kterou metodu se jedná.



Obr. 9. Používaný formát výsledků

3.2 Program pro dvourozměrné integrály

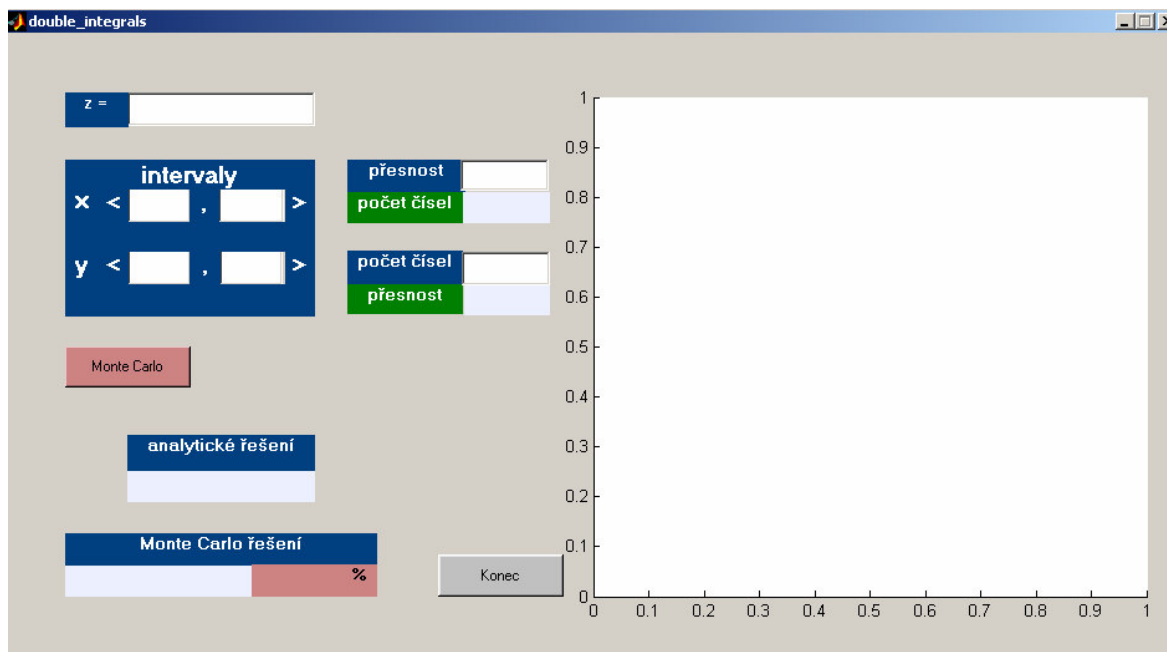
Výpočetní schéma metody Monte Carlo pro dvourozměrné integrály bylo naprogramováno na základě metody střední hodnoty funkce. Odpadla tak potřeba vyšetřovat místo, ve kterém zvolená funkce protíná plochu $z = 0$. Vztah mezi počtem čísel (počtem pokusů) a zvolenou relativní chybou byl pak naprogramován dle nerovnice (24).

Celý program je oproti jednorozměrným integrálům tvořen pouze těmito dvěma soubory:

- *double_integrals.fig* – soubor obsahující grafické rozhraní programu
- *double_integrals.m* – soubor s vlastním zdrojovým kódem

3.2.1 Spuštění programu, zadávání vstupních hodnot

Spuštěním souboru *double_integrals.fig* se otevře grafické okno, které je zachyceno na obrázku (Obr. 10). V levé části uživatel najde vstupní a výstupní políčka, na pravé straně pak oblast pro vykreslování zadané funkce.



Obr. 10. Prostředí programu pro dvourozměrné integrály

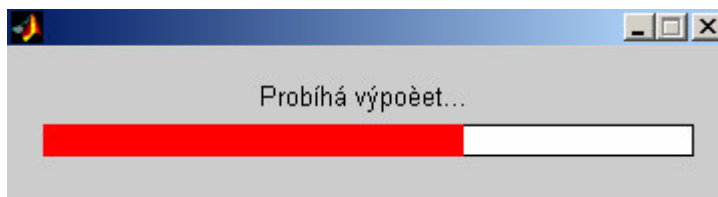
Postup při zadávání vstupních hodnot je podobný jako u jednorozměrných integrálů.

Integrovaná funkce se zadává ve tvaru $z = g(x, y)$ a integrační oblast je potřeba definovat pomocí dvou číselných intervalů, které se jsou umístěny v tmavě modrém poli. Po zadání horní meze intervalu y se integrovaná funkce vykreslí a spočítá se její přesné analytické řešení.

Výpočet dvourozměrných integrálů metodou Monte Carlo lze pak opět založit na zvoleném počtu bodů nebo na zvolené maximální relativní chybě. Zadávání těchto hodnot se řídí stejnými pravidly jako v kapitole (3.1.1) a provádí se do bílých editačních polí.

3.2.2 Spuštění metody, výpis výsledků

Samostatný výpočet metodou Monte Carlo se opět spouští prostřednictvím tlačítka Monte Carlo. Oproti jednorozměrným integrálům nejsou výsledky vypisovány postupně, ale je vypsán až konečný výsledek. Tento fakt může však při větším počtu čísel navodit dojem havarování či nefunkčnosti programu, což je odstraněno prostřednictvím „waitbaru“ (Obr. 11), který udává procentuální informaci o provedených výpočtech. Zjištěná hodnota dvourozměrného integrálu je pak zobrazena ve stejném formátu, který je uveden a popsán v kapitole (3.1.3).



Obr. 11. Dvourozměrné integrály - waitbar

3.3 Informace a doporučení pro užívání programů

Před užíváním vytvořených programů je nutné, aby si uživatel zkontroloval, zda má nainstalovanou plnou verzi programu Matlab 6.5. Pokud tomu tak není, program nebude s největší pravděpodobností fungovat.

Vstupní funkce se zadávají pomocí symbolů a funkcí běžně užívaných v Matlabu, přičemž některé z nich jsou uvedeny v tabulce (Tab. 1). Vyhodnocování funkčních hodnot je pak prováděno na základě priorit jednotlivých použitých symbolů a nebo v závislosti na vhodně zvolených kulatých závorkách. Desetinná čísla se zapisují prostřednictvím desetinné tečky.

Veškeré vstupní hodnoty se potvrzují klávesou Enter. Pokud uživatel změní některé z již zadaných hodnot, je dobré všechny vstupní hodnoty znovu potvrdit.

Tab. 1. Symboly pro zadávání funkcí

Symbol / funkce	Popis symbolu
+	sčítání
-	odčítání
*	násobení
/	dělení
^	umocnění
sqrt(x)	odmocnina
sin(x), cos(x)	sinus, cosinus
tan(x), cot(x)	tangent, cotangent

Na závěr je dobré upozornit, že oba programy byly navrženy jen pro práci s jednoduchými funkcemi a tudíž nelze jejich bezproblémový chod u složitějších typů funkcí zaručit.

4 VÝSLEDKY NAVRŽENÝCH EXPERIMENTŮ

4.1 Ověření platnosti limitních vět

Před provedením jakýchkoliv experimentů je dobré zkusit ověřit platnost limitních vět uvedených v kapitole (1.3.4), tedy vztahů mezi zadanou maximální přípustnou chybou ε , hladinou významnosti α a počtem potřebných pokusů n .

Ověření je ukázáno na výpočtu hodnoty jednorozměrného integrálu uvedeného v kapitole (4.2). Výpočty byly prováděny na 95% hladině významnosti, což by při zvolené maximálně přípustné relativní chybě $\varepsilon = 0,1$ mělo znamenat, že počet výsledků s absolutní chybou větší jak 10 % bude maximálně 5 %. Pro zvolenou relativní chybu $\varepsilon = 0,1$ bylo třeba vygenerovat 850 bodů. Provedlo se 10 testů, přičemž v každém z nich byla hodnota integrálu spočítána stokrát a následně zprůměrněna. Výsledky jsou uvedeny v tabulce (Tab. 2).

Tab. 2. Ověření platností limitních vět

Číslo testu	Průměrná hodnota integrálu	Průměrná absolutní chyba výpočtu [%]	Počet výsledků s prům. abs. chybou > 10 %
1	22,923334	2,730414	0
2	22,918110	2,606255	0
3	22,854179	2,554491	1
4	22,801388	2,848584	0
5	22,773309	3,022102	2
6	22,771828	2,727290	0
7	22,905968	2,671285	0
8	22,842767	2,887993	1
9	22,791161	2,534873	0
10	22,796818	2,500396	1

Jelikož nenastal ani jeden případ, ve kterém by byl počet výsledků s větší jak 10% chybou vyšší než stanovených 5 %, lze potvrdit platnost vztahu (27), který je u jednorozměrných integrálů pro výpočet nutných pokusů n použit.

Stejným postupem by se dala ověřit i platnost vztahu (24), který je použit u dvourozměrných integrálů.

4.2 Jednorozměrné integrály

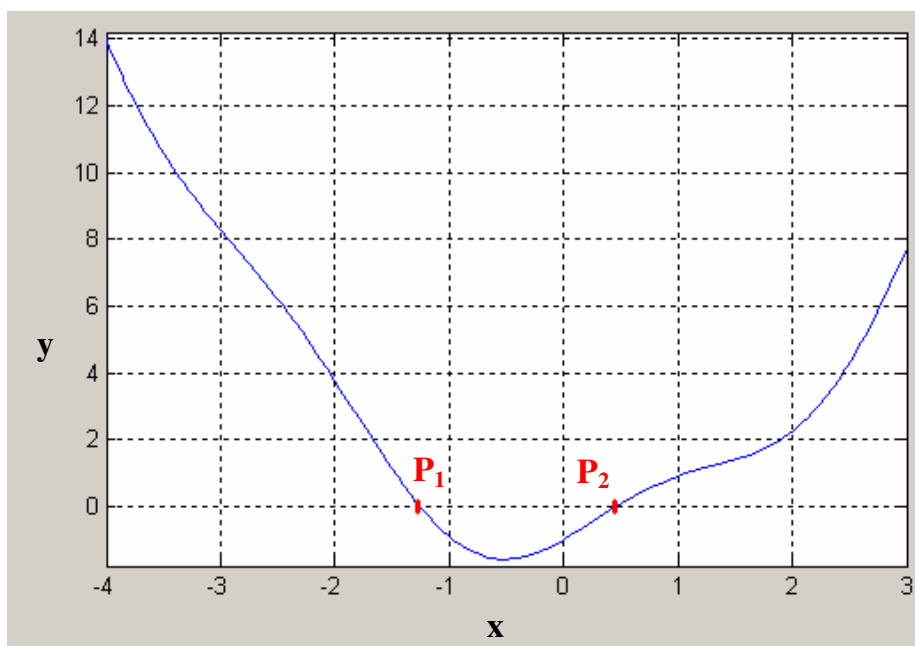
Při volbě funkce pro integrování byly stanoveny dvě kritéria. Pro ověření funkčnosti naprogramovaného algoritmu Monte Carlo musela funkce minimálně dvakrát protínat osu x a tudíž zvolený interval rozdělit alespoň na tři podintervaly. Druhou podmínkou pak bylo nezvolit čistě kvadratickou funkci 2. řádu, protože jak je známo, při výpočtu hodnoty integrálu Simpsonovou metodou se integrovaná funkce prokládá kvadratickou funkcí 2. řádu a tudíž by chyba této metody byla minimální i při vysokém kroku.

S ohledem na obě tyto kritéria byla zvolena funkce $y = x^2 + \sin(2x) - 1$, přičemž oblast integrování byla definována intervalem $\langle -4, 3 \rangle$. Výsledný jednorozměrný integrál má tedy tvar

$$\int_{-4}^3 (x^2 + \sin(2x) - 1) dx. \quad (50)$$

Průsečíky integrované funkce na zvoleném intervalu byly vypočítány programem a jsou:

$P_1[-1,2587;0]$ a $P_2[0,4566;0]$. Společně s grafem integrované funkce jsou pak znázorněny na obrázku (Obr. 12).



Obr. 12. Jednorozměrné integrály - graf integrované funkce

4.2.1 Analytický výpočet zvoleného jednorozměrného integrálu

$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^3 (\sin(2x) + x^2 - 1) dx &= \int_{-4}^3 \sin(2x) dx + \int_{-4}^3 x^2 dx - \int_{-4}^3 dx = \left. \begin{array}{l} \text{subs} \\ t = 2x \Rightarrow x = \frac{t}{2} \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \\ x = -4 \rightarrow t = -8 \\ x = 3 \rightarrow t = 6 \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-8}^6 \sin(t) dt + \int_{-4}^3 x^2 dx - \int_{-4}^3 dx = -\frac{1}{2} [\cos(t)]_{-8}^6 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-4}^3 - [x]_{-4}^3 = \\
 &= -\frac{1}{2} [\cos(6) - \cos(-8)] + 9 + \frac{64}{3} - 7 = \underline{\underline{22,7805}}
 \end{aligned}$$

4.2.2 Srovnání výsledků metody Monte Carlo s analytickým výsledkem

Srovnání výsledků získaných pomocí metody Monte Carlo s přesným analytickým výsledkem je možné založit na dvou přístupech. Prvním z nich je zkoumání vztahu absolutní chyby výsledků získaných metodou Monte Carlo a zvoleného počtu bodů n . Druhou možností je pak vyšetřovat závislost mezi zvoleným počtem bodů n a hodnotou integrálu vypočítanou metodou Monte Carlo.

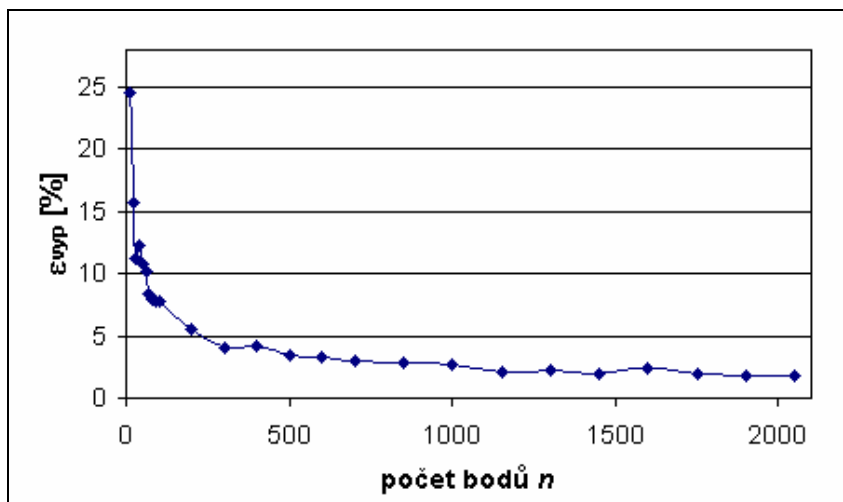
Oba přístupy byly realizovány prostřednictvím experimentu, který spočíval ve výpočtu hodnoty integrálu v závislosti na 25 odlišně zvolených počtech bodů $n_1, n_2, \dots, n_{25}$. Jelikož je výpočet hodnoty integrálu metodou Monte Carlo ovlivněn náhodností, byla pro každé n_i hodnota integrálů spočítána stokrát a poté zprůměrněna.

V tabulce (Tab. 3) jsou uvedeny výsledky tohoto experimentu. První sloupec obsahuje zvolený počet bodů (čísel) n , přičemž příslušná maximální relativní chyba je vyjádřena ve druhém sloupci ϵ_{tab} . Poslední dva sloupce **hodnota I** a **$\epsilon_{\text{vy}} [\%]$** pak ukazují odhadnutou hodnotu integrálu a její absolutní chybu.

Tab. 3. Výpočet hodnoty jednorozměrného integrálu metodou Monte Carlo

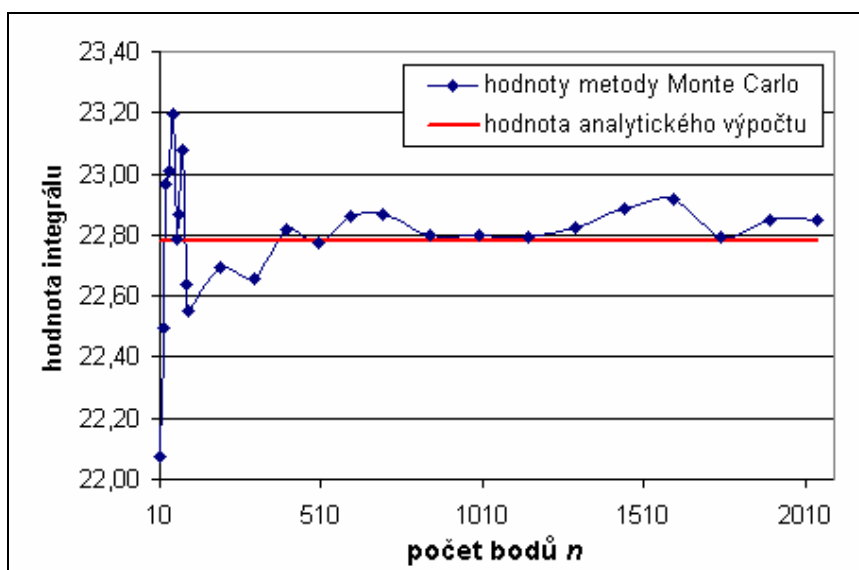
Počet bodů n	ϵ_{tab}	hodnota I'	$\epsilon_{\text{vyp}} [\%]$
10	0,92185	22,07438	24,61882
20	0,65185	22,49669	15,67036
30	0,53223	22,96822	11,22624
40	0,46093	23,00842	12,30469
50	0,41226	23,19432	10,73851
60	0,37636	22,78416	10,15297
70	0,34843	22,86620	8,33921
80	0,32592	23,07992	7,90820
90	0,30728	22,63757	7,83467
100	0,29152	22,55336	7,73349
200	0,20613	22,69615	5,56535
300	0,16831	22,65432	3,98532
400	0,14576	22,81778	4,24477
500	0,13037	22,77562	3,50714
600	0,11901	22,86375	3,23142
700	0,11018	22,86587	2,94062
850	0,10000	22,80139	2,84858
1000	0,09219	22,79756	2,62121
1150	0,08596	22,79408	2,08809
1300	0,08085	22,82361	2,18186
1450	0,07656	22,88347	1,95585
1600	0,07288	22,91592	2,33226
1750	0,06969	22,79509	1,88917
1900	0,06688	22,85145	1,83455
2050	0,06439	22,84853	1,72487

Vztah absolutní chyby výsledků získaných metodou Monte Carlo ε_{vyp} a zvoleného počtu bodů n je znázorněn na obrázku (Obr. 13). Je zde jasně vidět, že vztah mezi ε_{vyp} a zvoleným počtem bodů n je nelineárního charakteru a se zvyšujícím se n absolutní chyba ε_{vyp} klesá. Pro přesnější odhad integrálu je tedy nutné zvolit velký počet bodů n .



Obr. 13. Závislost absolutní chyby ε_{vyp} na počtu bodů n

Druhý přístup, závislost mezi počtem bodů n a hodnotou integrálu, je zobrazen na obrázku (Obr. 14). Z uvedené závislosti opět vyplývá, že hodnota počítaného integrálu metodou Monte Carlo je přesnější se zvyšujícím se počtem bodů n . Při $n = 1600$ ovšem došlo k malé výchylce, čímž lze ale potvrdit známý fakt, že metoda Monte Carlo je založena na náhodnosti.



Obr. 14. Závislost hodnoty zvoleného integrálu na zvoleném počtu bodů n

4.2.3 Srovnání výsledků numerických metod s analytickým výsledkem

Pro srovnání výsledků numerických metod s analytickým výsledkem byl proveden experiment, ve kterém se pro jednotlivé numerické metody sledovala závislost hodnoty integrálu na zvoleném počtu intervalů n_{int} . S ohledem na Simpsonovu metodu byl vždy zvolen sudý počet intervalů.

Při analýze provedeného experimentu bylo zjištěno tyto výsledky:

- Závislost mezi hodnotou integrálu a počtem intervalů má pro všechny metody nelineární charakter.
- Pro všechny metody obecně platí, že s rostoucím počtem intervalů je výsledek přesnější
- Pro maximální zvolený počet intervalů je nejméně přesná obdélníková metoda.
- Nejvíce přesná je Simpsonova metoda, což je zde způsobeno tím, že při výpočtu hodnoty integrálu touto metodou je integrovaná funkce prokládána kvadratickou funkcí 2. řádu.

Celkové výsledky experimentu jsou pak spolu s grafickým znázorněním sledované závislosti zaznamenány v tabulce (Tab. 5) a obrázku (Obr. 15) pro lichoběžníkovou metodu, v tabulce (Tab. 4) a obrázku (Obr. 16) pro obdélníkovou metodu a v tabulce (Tab. 6) a obrázku (Obr. 17) pro Simpsonovu metodu.

Tab. 4. Výsledky získané obdélníkovou metodou

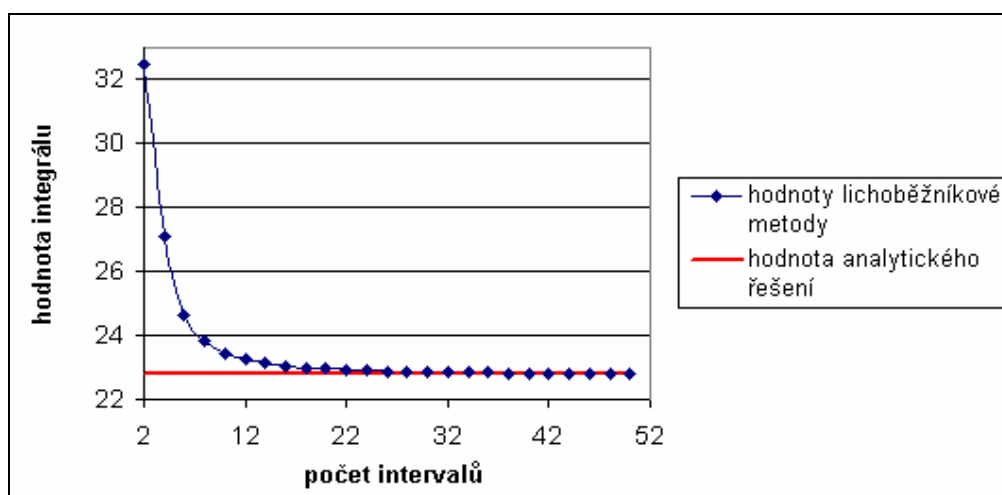
Počet intervalů n_{int}	Odpovídající krok	Hodnota integrálu	$\varepsilon_{\text{vyp}} [\%]$
2	3,5000	70,4891	209,4276
4	1,7500	46,0963	102,3499
6	1,1667	37,3220	63,8632
8	0,8750	33,3300	46,3093
10	0,7000	31,0515	36,3073
12	0,5833	29,5799	29,8476
14	0,5000	28,5518	25,3345
16	0,4375	27,7932	22,0045
18	0,3889	27,2106	19,4469
20	0,3500	26,7491	17,4120
22	0,3182	26,3746	15,7773
24	0,2917	26,0646	14,4165
26	0,2692	25,8038	13,2716
28	0,2500	25,5814	12,2951
30	0,2333	25,3894	11,4523
32	0,2188	25,2220	10,7168
34	0,2059	25,0748	10,0714
36	0,1944	24,9444	9,4987
38	0,1842	24,8279	8,9876
40	0,1750	24,7234	8,5286
42	0,1667	24,6290	8,1143
44	0,1591	24,5433	7,7383
46	0,1522	24,4653	7,3956
48	0,1458	24,3938	7,0820
50	0,1400	24,3282	6,7938

Tab. 5. Výsledky získané lichoběžníkovou metodou

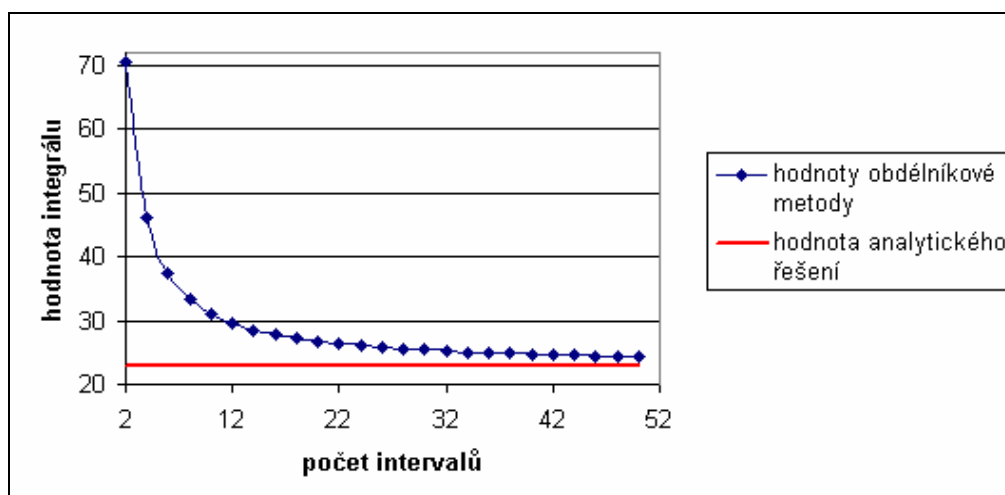
Počet intervalů n_{int}	Odpovídající krok	Hodnota integrálu	$\varepsilon_{\text{vyp}} [\%]$
2	3,5000	32,4595	42,4881
4	1,7500	27,0815	18,8802
6	1,1667	24,6455	8,1867
8	0,8750	23,8226	4,5745
10	0,7000	23,4456	2,9194
12	0,5833	23,2417	2,0244
14	0,5000	23,1190	1,4860
16	0,4375	23,0395	1,1371
18	0,3889	22,9851	0,8981
20	0,3500	22,9462	0,7273
22	0,3182	22,9174	0,6009
24	0,2917	22,8955	0,5049
26	0,2692	22,8785	0,4301
28	0,2500	22,8650	0,3709
30	0,2333	22,8541	0,3230
32	0,2188	22,8452	0,2839
34	0,2059	22,8378	0,2515
36	0,1944	22,8316	0,2243
38	0,1842	22,8264	0,2013
40	0,1750	22,8219	0,1817
42	0,1667	22,8180	0,1648
44	0,1591	22,8147	0,1501
46	0,1522	22,8118	0,1374
48	0,1458	22,8092	0,1262
50	0,1400	22,8070	0,1163

Tab. 6. Výsledky získané Simpsonovou metodou

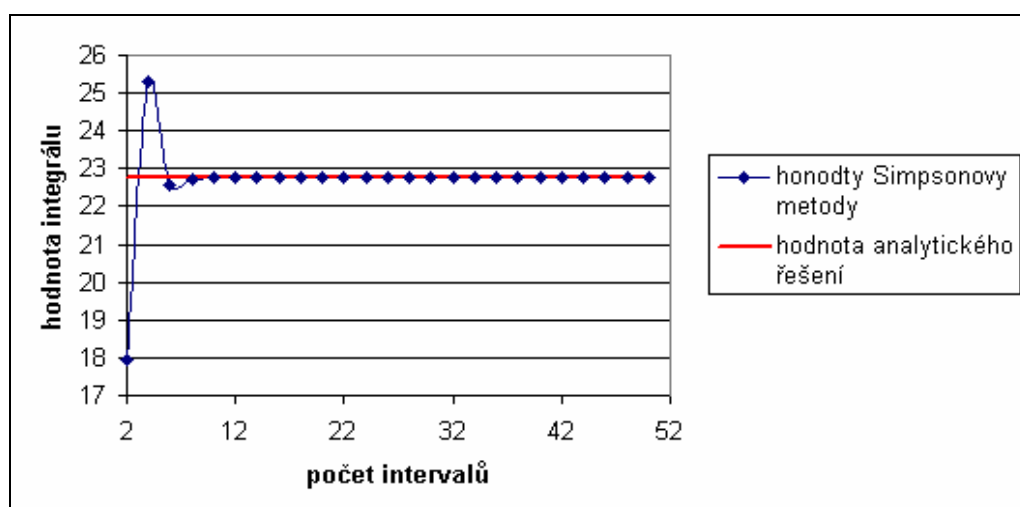
Počet intervalů n_{int}	Odpovídající krok	Hodnota integrálu	$\epsilon_{\text{vyp}} [\%]$
2	3,5000	17,9262	21,3089
4	1,7500	25,2880	11,0109
6	1,1667	22,5548	0,9907
8	0,8750	22,7363	0,1941
10	0,7000	22,7652	0,0670
12	0,5833	22,7737	0,0297
14	0,5000	22,7770	0,0153
16	0,4375	22,7785	0,0087
18	0,3889	22,7793	0,0053
20	0,3500	22,7797	0,0034
22	0,3182	22,7800	0,0023
24	0,2917	22,7801	0,0016
26	0,2692	22,7802	0,0012
28	0,2500	22,7803	0,0009
30	0,2333	22,7803	0,0007
32	0,2188	22,7804	0,0005
34	0,2059	22,7804	0,0004
36	0,1944	22,7804	0,0003
38	0,1842	22,7804	0,0003
40	0,1750	22,7805	0,0002
42	0,1667	22,7805	0,0002
44	0,1591	22,7805	0,0001
46	0,1522	22,7805	0,0001
48	0,1458	22,7805	0,0001
50	0,1400	22,7805	0,0001



Obr. 15. Lichoběžníková metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů



Obr. 16. Obdélníková metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů



Obr. 17. Simpsonova metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů

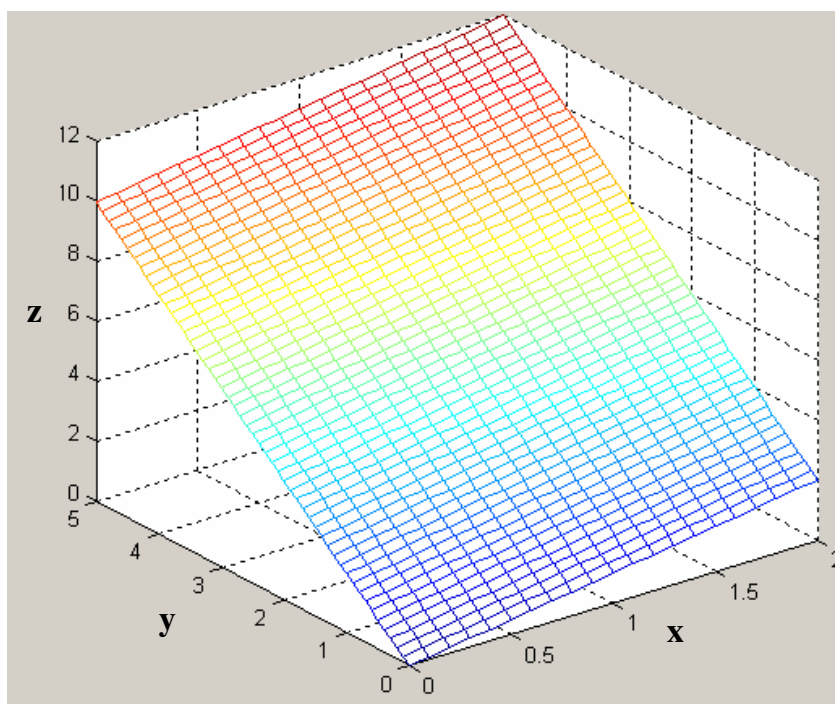
4.3 Dvourozměrné integrály

U dvourozměrných integrálů bylo třeba zvolit takovou funkci $z = g(x, y)$ a takovou oblast integrování Ω , aby výsledek integrování funkce $z = g(x, y)$ nebyl z oblasti komplexních čísel.

Z tohoto důvodu byla zvolena jednoduchá funkce $z = x + 2y$, která je graficky znázorněna na obrázku (Obr. 18). Oblast integrování Ω je definována rozměry $\Omega = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 5 \rangle$.

Výsledný integrál má tedy tvar

$$\int_0^2 \int_0^5 (x + 2y) dx dy. \quad (51)$$



Obr. 18. Dvourozměrné integrály - graf integrované funkce

4.3.1 Analytický výpočet zvoleného dvourozměrného integrálu

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^5 (x+2y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^5 (x+2y) dy \right) dx = \int_0^2 \left([xy]_0^5 + \left[2 \frac{y^2}{2} \right]_0^5 \right) dx = \int_0^2 (5x+25) dx = \\ &= 5 \int_0^2 x dx + 25 \int_0^2 dx = 5 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 25 [x]_0^2 = 10 + 50 = \underline{\underline{60}}\end{aligned}$$

Výsledek analytického výpočtu by se dal zjistit i geometrickou cestou, kdy by se počítal objem tělesa vzniklého pod plochou definovanou zvolenou funkcí $z = x + 2y$ a oblastí integrování Ω . Tvar a rozměry tělesa jsou zřejmé z obrázku (Obr. 18).

4.3.2 Srovnání výsledků metody Monte Carlo s analytickým výsledkem

Pro dvourozměrné integrály bylo srovnání hodnot metody Monte Carlo s analytickým výsledkem provedeno stejným způsobem jako u jednorozměrných integrálů, který je uveden v kapitole (4.2.2).

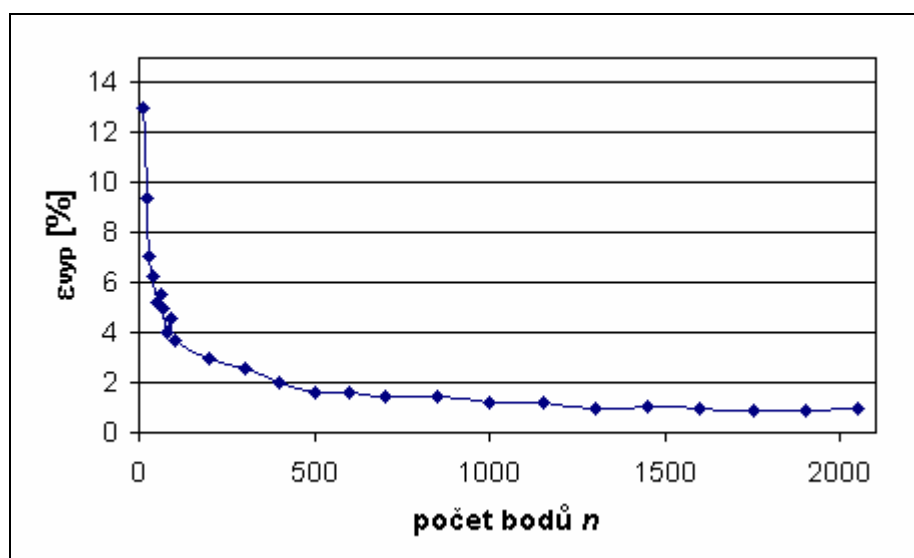
Byl opět sledován nejen vztah mezi zvoleným počtem bodů n a hodnotu integrálu zjištěnou metodou Monte Carlo, ale i vztah absolutní chyby výsledků metody Monte Carlo k zvolnému počtu bodů n .

Provedený experiment měl stejné parametry jako v kapitole (4.2.2) a jeho výsledky jsou zapsány v tabulce (Tab. 7).

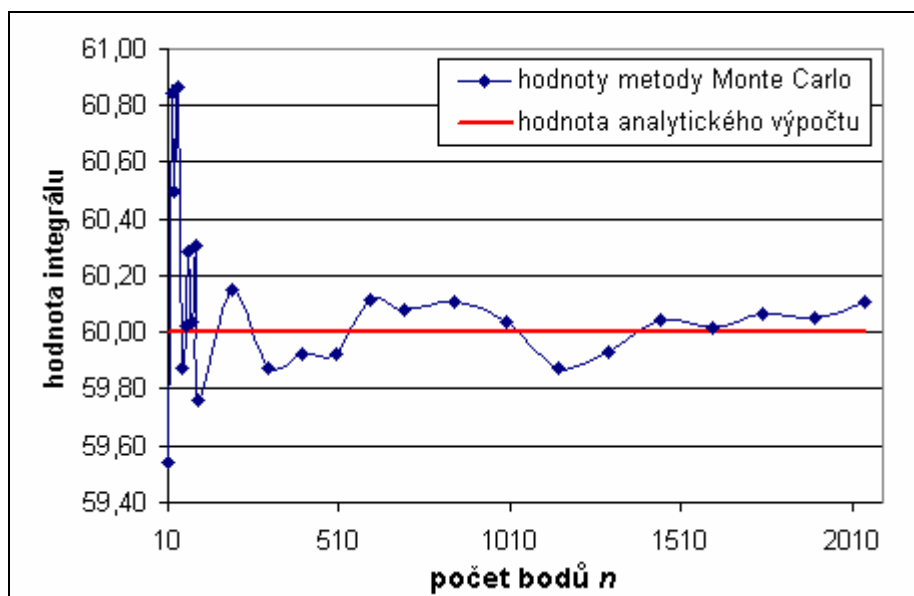
Tab. 7. Výpočet hodnoty dvourozměrného integrálu metodou Monte Carlo

Počet bodů n	$\mathcal{E}_{\text{tab}}$	ϕ hodnota I'	$\mathcal{E}_{\text{vyp}} [\%]$
10	0,70711	59,54430	13,03147
20	0,50000	60,84501	9,42229
30	0,40825	60,49394	7,07744
40	0,35355	60,86795	6,26108
50	0,31623	59,87442	5,18305
60	0,28868	60,02294	5,57095
70	0,26726	60,28613	4,95285
80	0,25000	60,03992	4,00245
90	0,23570	60,30874	4,55750
100	0,22361	59,76093	3,68456
200	0,15811	60,15181	2,96322
300	0,12910	59,87709	2,57597
400	0,11180	59,92304	1,97354
500	0,10000	59,92370	1,60082
600	0,09129	60,11328	1,61719
700	0,08452	60,08308	1,46171
850	0,07670	60,11088	1,41742
1000	0,07071	60,03968	1,23767
1150	0,06594	59,87607	1,19953
1300	0,06202	59,93013	0,99433
1450	0,05872	60,04371	1,05880
1600	0,05590	60,01466	0,94053
1750	0,05345	60,06473	0,84511
1900	0,05130	60,04923	0,86940
2050	0,04939	60,10669	0,95901

Při rozboru závislosti absolutní chyby ε_{vyp} na zvoleném počtu bodů n uvedené na obrázku (Obr. 19) se došlo opětovně k závěru, že se zvyšujícím se n absolutní chyba metody klesá. Tento fakt, potvrzuje i následující obrázek (Obr. 20), kde je vyjádřena závislost hodnoty integrálu na zvoleném počtu bodů n . Pro přesnější odhady dvourozměrných je tedy nutné volit co největší počet generovaných bodů.



Obr. 19. Závislost absolutní chyby ε_{vyp} na počtu bodů n



Obr. 20. Závislost hodnoty zvoleného integrálu na zvoleném počtu bodů n

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce představuje matematický aparát nazývaný metoda Monte Carlo a jeho využití pro výpočet určitých integrálů.

První, teoretická část bakalářské práce je vypracována jako seznámení s metodou Monte Carlo a jejím obecným principem. Jelikož jsou základy metody Monte Carlo položeny na oblasti pravděpodobnosti a matematické statistiky, uvádím zde i důležité teoretické poznatky z oblasti těchto disciplín. Není zde opomenuta ani podstata generátorů náhodných čísel, jakožto zdroje náhodných veličin.

Ve druhé části se pak práce zabývá využitím metody Monte Carlo v oblasti matematiky, a to pro výpočet jednorozměrných a vícerozměrných integrálů. Jsou zde představeny na obecné formulaci určitého integrálu základní existující metody výpočtu, jimiž jsou geometrická metoda a metoda střední hodnoty funkce. Jsou uvedeny také postupy, kterými lze u složitějších funkcí dosáhnout přesnějších výsledků. V poslední kapitole teoretické části jsou popsány způsoby výpočtů integrálů pomocí numerických metod, v jejichž rámci jsou naznačeny tři nejzákladnější pravidla spadající do oblasti Newton-Cotesových vzorců.

Třetí část je zaměřena na praktické realizování uvedených metod pro výpočet jednorozměrných a vícerozměrných integrálů s tím, že oblast vícerozměrných integrálů je reprezentována pouze integrály dvourozměrnými. Cílem bylo sestavit program, který by se dal využít při výuce v předmětu Simulace systémů. Pro tento účel byly v prostředí programu Matlab 6.5 vytvořeny dva programy a tím byla oddělena oblast výpočtu jednorozměrných a dvourozměrných integrálů. Je popsáno prostředí programů a jejich ovládání, dále je nastíněn způsob zadávání vstupních hodnot, spouštění výpočetních algoritmů a formát prezentace výsledků.

Poslední, experimentální část, je zaměřena na srovnání přesností výsledků uvedených metod pro výpočty určitých integrálů s jejich přesnými analytickými výsledky. Toto srovnání je provedeno na dvou náhodně zvolených funkcích prostřednictvím použití vytvořeného programu. U metody Monte Carlo byla sledována nejen závislost odhadnutých hodnot integrálů na počtu zvolených bodů n pro generování, ale také vztah mezi počtem bodů n a absolutní chybou získaných odhadů. V rámci numerických metod byla zkoumána spojitost mezi odhadnutou hodnotou integrálu a zvoleným počtem intervalů, přičemž byla také srovnána efektivita použitých metod.

Následná analýza těchto provedených experimentů potvrdila teoretické znalosti, které říkají, že jedním ze základů metody Monte Carlo je náhodnost a její přesnost se se zvyšujícím počtem pokusů zvětšuje. U numerických metod byla potvrzena platnost tvrzení, že metoda s řádem n je přesná pro všechny polynomy stupně n .

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] FABIÁN, F., KLUIBER, Z. Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění. Praha: Prospektum s.r.o., 1998. ISBN 80-7175-058-1.
- [2] HUŠEK, R., LAUBER, J. Simulační modely. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1987.
- [3] VAŠEK, V., VAŠEK, L. Simulace systémů. Skriptum VUT Brno, Fakulta technologická. Brno: Ediční středisko VUT Brno, 1991. ISBN 80-214-0262-8.
- [4] ČASTOVÁ, N., BOHÁČ, Z. Základní numerické metody. Skriptum VŠB TU Ostrava. Ostrava, 1997. ISBN 80-7078-975-1.
- [5] HRACH, R. Počítačová fyzika I. 1. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 2003. ISBN 80-7044-521-1.
- [6] VICHER, M. Numerická matematika [online]. C2003, [cit. 2005-05-01]. Dostupné z WWW: <http://alpha.ujep.cz/~mlisal/nm_2/vicher_nm.pdf>.
- [7] CYHELSKÝ, L., KAHOUNOVÁ, J., HINDLS, R. Elementární statistická analýza. 2. vyd. Praha: Management Press, 1999. ISBN 80-7261-003-1.
- [8] MATHEWS, J. Module for Monte Carlo Integration [online]. C2005, [cit. 2005-04-07]. Dostupné z WWW: <<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/MonteCarloMod.html>>.
- [9] PELIKÁN, J. Modelování a simulace náhodných jevů [online]. C2002, [cit. 2005-04-10]. Dostupné z WWW: <<http://www.fast.vsb.cz/science/konf-2002-04-10/prednasky/22-Pelikan.pdf>>.
- [10] HERNIGOVÁ B., HORA, P. Matlab: Díl I. - práce s programem [online]. C1995, [cit. 2005-02-19]. Dostupné z WWW: <<http://www.cdm.cas.cz/czech/hora/vyuka/mvs/tutorial.pdf>> .

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

I'	Označení pro odhadnutou hodnotu řešeného integrálu.
$F(x)$	Označení distribuční funkce.
$f(x)$	Označení hustoty pravděpodobnosti.
G, Ω	Symbole pro oblast integrování u dvourozměrných integrálů.
GUI	Graphical User Interface - grafické uživatelské rozhraní.
h	Délka intervalu u numerických metod.
m	Počet pokusů, které splňují zvolenou podmínku.
n	Počet všech provedených pokusů, počet generovaných čísel (bodů).
n_{int}	Počet intervalů u numerických metod.
n_{int}	Počet intervalů u složených vzorců v numerických metodách.
$P(A)$	Pravděpodobnost jevu A .
X, x	Náhodná veličina a její realizace.
Θ	Obecné označení pro hledanou veličinu.
α	Hladina významnosti.
$\varepsilon, \varepsilon_{\text{tab}}$	Maximální přípustná relativní chyba.
ε_{vyp}	Zjištěná absolutní chyba výsledku.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Buffonova jehla	7
Obr. 2. Znázornění geometrického řešení	20
Obr. 3. Obdélníkové pravidlo	26
Obr. 4. Lichoběžníkové pravidlo	26
Obr. 5. Oblast pro zadání funkce a intervalu	29
Obr. 6. Vstupní parametry metody Monte Carlo	29
Obr. 7. Prostředí programu pro jednorozměrné integrály	29
Obr. 8. Ukázka simulace geometrické metody	30
Obr. 9. Používaný formát výsledků	31
Obr. 10. Prostředí programu pro dvourozměrné integrály	32
Obr. 11. Dvourozměrné integrály - waitbar	33
Obr. 12. Jednorozměrné integrály - graf integrované funkce	35
Obr. 13. Závislost absolutní chyby ε_{vyp} na počtu bodů n	38
Obr. 14. Závislost hodnoty zvoleného integrálu na zvoleném počtu bodů n	38
Obr. 15. Lichoběžníková metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů	43
Obr. 16. Obdélníková metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů	43
Obr. 17. Simpsonova metoda – závislost hodnoty integrálu na počtu intervalů	43
Obr. 18. Dvourozměrné integrály - graf integrované funkce	44
Obr. 19. Závislost absolutní chyby ε_{vyp} na počtu bodů n	47
Obr. 20. Závislost hodnoty zvoleného integrálu na zvoleném počtu bodů n	47

SEZNAM TABULEK

Tab. 1. Symboly pro zadávání funkcí	33
Tab. 2. Ověření platností limitních vět	34
Tab. 3. Výpočet hodnoty jednorozměrného integrálu metodou Monte Carlo	37
Tab. 4. Výsledky získané obdélníkovou metodou	40
Tab. 5. Výsledky získané lichoběžníkovou metodou	41
Tab. 6. Výsledky získané Simpsonovou metodou	42
Tab. 7. Výpočet hodnoty dvourozměrného integrálu metodou Monte Carlo	46