

Teorie komplexních čísel

Marek Srpoň

Bakalářská práce
2015



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Marek Srpoň**
Osobní číslo: **A11159**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Teorie komplexních čísel**
Téma anglicky: **The Theory of Complex Numbers**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte základní pojmy týkající se komplexních čísel a počítání s nimi.
2. Popište příkazy softwaru Mathematica týkající se této problematiky.
3. Ukažte na příkladech řešení algebraických rovnic v oboru komplexních čísel.
4. Na příkladech předvedte využití komplexních čísel při řešení diferenciálních rovnic.
5. Sestavte sbírku neřešených příkladů s využitím především v předmětu Základy matematiky.
6. Popište využití komplexních čísel při řešení úloh v aplikacích z matematiky, fyziky aj.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

1. RÁB, Miloš. Komplexní čísla v elementární matematice. 2. přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1996. vii, 209 s. ISBN 80-210-1475-X.
2. HASS, Joel, Frank R. GIORDANO, Maurice D. WEIR a George B. THOMAS. Thomas' calculus. 11th ed. Boston: Pearson Addison Wesley, c2005, 1 sv. Irůzné stránkovaní. ISBN 0-321-48987-x.
3. BRDLÍK, Pavel. Komplexní čísla, kvaterniony a jejich aplikace. Č. Bud., 2013. bakalářská práce (Bc.). JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH, Pedagogická fakulta.
4. The Mathematica Book, manuál pro software Mathematica.
5. REKTORYS, Karel. Přehled užití matematiky I. 6. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995, xxxii, 720 s. ISBN 8085849925.

Vedoucí bakalářské práce:

Mgr. Vladimír Poláček, Ph.D.

Ústav matematiky

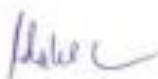
Datum zadání bakalářské práce:

6. března 2015

Termín odevzdání bakalářské práce:

22. května 2015

Ve Zlíně dne 6. března 2015



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



L.S.



prof. Ing. Vladimír Válek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného příměřného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž podmínkem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považuji se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně


.....
podepis diplomanta

ABSTRAKT

Táto bakalárska práca sa zaoberá teóriou komplexných čísel a ich aplikovaním. V teoretickej časti je uvedená história vývinu komplexných čísel, ich základne vlastnosti, aritmetické operácie a nakoniec ich aplikovanie v rôznych vedných oboroch. V praktickej časti je zbierka analyticky riešených úloh, príklady, na ktorých sú ukázané príkazy pre prácu s komplexnými číslami v programe Wolfram Mathematica a nakoniec príklady demonštrujúce využitie komplexných čísel v praxi.

Kľúčové slova: komplexné číslo, imaginárna jednotka, Gaussova rovina, aritmetické operácie, Moivreova veta, goniometrický tvar, exponenciálna forma, Eulerov vzťah

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the theory of complex numbers and their application. The theoretical part is dealing with the history of evolution of complex numbers, their basic characteristics, arithmetic operations and ultimately their application in a range of science-disciplines. Practical part contains collection of analytical solved problems, examples on which are shown commands for working with complex numbers in the program Mathematica, and finally the last part demonstrates examples of the use of complex numbers in practice.

Keywords: complex number, imaginary unit, Gauss plane, arithmetic operations, Moivre's formula, trigonometric shape, exponential shape, Euler relationship

Rád by som poďakoval pánovi Mgr. Vladimírovi Poláškovvi, Ph.D. za odborné vedenie, kontrolu, poskytnutú literatúru a pedagogickú podporu pri vypracovaní bakalárskej práce. Ďalej chcem poďakovať rodine a priateľke za podporu počas štúdia.

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČASŤ	9
1 KOMPLEXNÉ ČÍSLO	10
1.1 HISTÓRIA	10
1.2 TVARY KOMPLEXNÉHO ČÍSLA.....	12
1.2.1 Rovnosť	13
1.2.2 Opačné komplexné číslo	13
1.2.3 Inverzné komplexné číslo	13
1.3 GAUSSOVA ROVINA	13
1.3.1 Absolútna hodnota	14
1.3.2 Komplexne združené číslo	15
1.4 ARITMETICKÉ OPERÁCIE.....	16
1.4.1 Súčet.....	16
1.4.2 Rozdiel	17
1.4.3 Súčin.....	17
1.4.4 Podiel.....	18
1.5 GONIOMETRICKÝ TVAR	20
1.5.1 Hlavný argument	21
1.5.2 Súčin a podiel	21
1.5.3 Mocnina.....	22
1.5.4 Odmocnina	24
1.6 EXPONENCIÁLNA FORMA.....	24
2 APLIKÁCIA KOMPLEXNÝCH ČÍSEL	25
2.1 KVADRATICKÁ ROVNICA	25
2.2 DIFERENCIÁLNA ROVNICA	25
2.3 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA	26
2.4 RLC OBVOD	28
2.5 TEÓRIA SYSTÉMOV	30
2.5.1 Frekvenčný prenos	31
2.5.2 Stabilita dynamických systémov	33
II PRAKTICKÁ ČASŤ	35
3 RIEŠENÉ PRÍKLADY	36
3.1 DIFERENCIÁLNE ROVNICE	42
3.2 RLC PROBLEMTAIKA.....	47
3.2 TEÓRIA SYSTÉMOV	50
4 WOLFRAM MATHEMATICA	54
5 NERIEŠENÉ PRÍKLADY	59
ZÁVER	61
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY	62
ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK	63
ZOZNAM OBRÁZKOV	64

ÚVOD

Aplikovanie komplexných čísel v matematike nám umožňuje riešiť úlohy, ktoré sú v obore reálnych čísel neriešiteľné. Komplexné čísla sú abstraktným oborom, v ktorom je definovaná odmocnina z každého čísla. V obore reálnych čísel je definované sčítanie, násobenie, odčítanie a delenie ľubovoľným číslom okrem nuly. Pre reálne číslo je tiež definovaná n -tá mocnina, kde $n \in \mathbb{N}$. Avšak n -tá odmocnina $n \in \mathbb{N}$ je definovaná len z nezáporného čísla. V dôsledku toho je nemožné určiť korene kvadratickej rovnice so záporným diskriminantom a tiež korene niektorých algebrických rovníc vyšších stupňov. Aby bola kvadratická rovnica typu $x^2 + x + 5 = 0$ riešiteľná, bol obor reálnych čísel \mathbb{R} rozšírený na obor komplexných čísel označovaný \mathbb{C} . Komplexné čísla majú svoje uplatnenie aj v iných vedných oboroch ako je fyzika, grafika a elektrotechnika, ktoré sa opierajú o matematiku.

Táto bakalárska práca sa skladá z dvoch častí. V teoretickej časti je definovaná teória komplexných čísel, ich základné vlastnosti, vyjadrenie v komplexnej rovine, vykonávanie aritmetických operácií s týmito číslami, prehľad známych pojmov a ich využitie v rôznych vedných oboroch, konkrétne pri problematike RLC obvodu alebo frekvenčného prenosu v teórii systémov. V praktickej časti je zbierka riešených príkladov pre danú problematiku komplexných čísel, kde sú aplikované vzťahy použité v teoretickej časti. Následne sú demonštrované príkazy vo Wolfram Mathematica pre prácu s komplexnými číslami, príklady na využitie komplexných čísel pri RLC obvode či frekvenčnom prenose a nakoniec zbierka neriešených úloh pre predmet Základy matematiky.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 KOMPLEXNÉ ČÍSLO

1.1 História

Cesta k objaveniu komplexných čísel bola veľmi dlhá a mnoho známych svetových matematikov k nej prispelo. Prvú zmienku o komplexných číslach by sme mohli nájsť už v 1. st. nášho letopočtu, keď pri riešení objemu zrezaného ihlanu sa matematik Heron z Alexandrie dostal k druhej odmocnine záporného čísla. Heron toto číslo pod odmocninou „otočil“ a počítal tak s kladným číslom.

O dvesto rokov neskôr narazil Diofantos z Alexandrie na kvadratickú rovnicu, ktorá nemala reálne riešenie. Aj keď všetky koeficienty boli v tejto rovnici kladné, čo bolo znakom tejto doby, pretože bolo nepredstaviteľné riešiť niečo s číslami menšími ako „nič“, tak počas výpočtov dospel k tomu, že rovnica je nezmyselná. Uviedol, že rovnica nemá riešenie, pretože pre daný tvar rovnice musí existovať racionálne riešenie.

K vývoju komplexných čísel prispel aj Leonard Pisánský, známy ako Fibonacci. V jednej zo svojich kníh sa venuje kubickým rovniciam, ktoré rieši pomocou geometrie. A aj keď jeho spôsob výpočtu nebol úplne zrejímavý, tak pri určení výsledku jednej z jeho rovníc sa líšil asi len o 3×10^{-11} od výsledku po použití Cardanových vzorcov objavených neskôr.

V roku 1545 publikoval taliansky matematik Gerolamo Cardano knihu, v ktorých bola popísaná metóda riešenia kubických rovníc. Cardanova práca bola príliš komplikovaná a plná symboliky. V tej dobe boli stále záporné čísla považované za zvláštnu fikciu. V súčasnosti sa Cardanove vzorce príliš nevyužívajú až na niektoré špeciálne výnimky z dôvodu zložitosti a v niektorých prípadoch sa vyjadrujú reálne korene kubickej rovnice pomocou čísel imaginárnych.

Boloňský matematik Rafael Bombelli v roku 1550 vypracoval teóriu o rýdzo imaginárnych číslach, kde objasnil štruktúry výrazov v Cardanových vzorcoch. Výrazy v tvare

$$a + b\sqrt{-1},$$

ktoré sa objavujú vo vzorcoch pre riešenie algebrických rovníc druhého a tretieho radu, boli nazývané ako imaginárne. Bombelli skúmal rovnicu

$$x^3 = 15x + 4,$$

kde po užití Cardanových vzorcov možno dostať

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Postrehol, že riešením rovnice je $x = 4$. Následne sa snažil o objasnenie Cardanových vzorcov, kde udal nasledujúce rovnosti

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + bi,$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - bi.$$

Tieto rovnice riešil pomocou algebraických úprav a zistil, že $a = 2, b = 1$, čiže

$$x = a + bi + a - bi,$$

$$x = 2a = 4.$$

Francúzsky matematik René Descartes, dnes považovaný za zakladateľa analytickej geometrie vydal spis v roku 1636, kde využil algebraické rovnice pri štúdiu v analytickej geometrii. Uvádza tu teóriu algebraických rovníc, kde využíva pravidlo pre určovanie počtu kladných a záporných koreňov algebraických rovníc. Pracoval so zápornými aj komplexnými číslami, aj keď ich nepovažoval za seberovné kladným číslam.

V roku 1692 vydáva Albert Girard knihu, kde používa nulu, záporné čísla, ale aj komplexné čísla. Jeho znázornenia komplexných čísel v geometrickej podobe viedlo neskôr k vytvoreniu číselných os. Rešpektoval komplexné korene algebraických rovníc, čo mu umožnilo sformulovať základnú vetu algebry.

Komplexné čísla sa začali rozširovať v rôznych oboroch matematiky. Pracovali s nimi poprední matematici ako Isaac Newton, Johann Bernouli, Abraham de Moivre, John Wallis či Roger Cotes. Vládla v nich neistota vyplývajúca z neobjasnenej podstaty komplexných čísel.

Leonhard Paul Euler v roku 1755 usiloval o vytvorenie geometrického výkladu komplexných čísel. Pravdepodobne rozumel komplexné čísla ako body v rovine. V roku 1777 zaviedol ako prvý symbol $i = \sqrt{-1}$. Zavedením polárnych súradníc r a φ získal goniometrický tvar komplexného čísla

$$x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Na začiatku devätnásteho storočia sa niektorí matematici snažili o geometrické uvažovanie komplexných čísel. S úspechom sa komplexné čísla často stretávali v matematickej analýze.

Stále ale nebolo jasné, čo to vlastne komplexné číslo je a ako si ho predstaviť. Francúzsky matematik Lazare Nicolas Marquerite Carnot zaviedol ako prvý termín „komplexné číslo“.

Ďalší francúzsky matematik Adrien-Quentin Buée si začal uvedomovať rozdiel medzi znamienkami pri čísle a znamienkami jednotlivých operácií. Chápal číslo z dvoch pohľadov. Z aritmetického hľadiska sa nazdával, že každé číslo ma určitý „rozmer“ a z geometrického hľadiska sa domnieval, že je každé číslo orientované nejakým „smerom“. V roku 1806 vydal publikáciu, ktorá sa stala základom pre akceptovanie grafickej reprezentácie komplexných čísel.

Revolučným pokrokom prispel k vývoju komplexných čísel nemecký matematik Johann Carl Friedrich Gauss, ktorý rozvinul geometrickú interpretáciu komplexných čísel. V roku 1831 vydal publikáciu, v ktorej skonštruoval presnú aritmetiku komplexných čísel založenú na geometrickej komplexnej rovine. Položil tu základy komplexnej terminológie. Dokázal tiež platnosť viacerých operácií s komplexnými číslami, ktoré boli založené na geometrickom zobrazení. Taktiež ako prvý uviedol dôkaz o základnej vete algebry. Týmto spracovaním komplexných čísel sa umožnilo zakončiť teóriu o algebrických rovniciach. Podľa rôznych ohlasov bol Gauss prvý, kto pracoval s komplexnými číslami sebedovome a vedeckým spôsobom.

Ďalší matematici, ktorí sa venovali vývoju komplexných čísel boli Sir William Rowan Hamilton, Augustus-Louis Cauchy, Hermann Hankel, Georg Friedrich Bernhard Riemann, David Hilbert a mnoho ďalších. [1]

1.2 Tvary komplexného čísla

Komplexným číslom z možno nazvať usporiadanú dvojicu reálnych čísel d_0 a d_1 , ktoré je možné zapísať v zložkovom, algebrickom alebo goniometrickom tvare. Čísla d_0, d_1 sú reálne čísla, kde číslo d_0 vyjadruje reálnu časť komplexného čísla a číslo d_1 reprezentuje imaginárnu časť komplexného čísla. V zložkovom tvare možno nazvať akékoľvek číslo v tvare $z = [d_0; d_1]$ a v algebrickom tvare číslo $z = d_0 + d_1i$. Symbol i predstavuje komplexné číslo, ktoré sa nazýva imaginárna jednotka a pre ktoré platí vzťah $i^2 = -1$. Tento vzťah bude odvodený neskôr. V prípade, že je d_1 rovné nule, tak komplexné číslo je ekvivalentné reálnemu číslu predstavujúce len reálnu časť d_0 . Pokiaľ d_1 je nenulové tak sa tomto číslu hovorí imaginárne číslo. Ak je reálna časť d_0 rovná nule, tak komplexné číslo sa volá rýdzo imaginárne číslo. Tieto podmienky platia pre oba spomínané tvary. Môžeme si

zároveň všimnúť, že podľa vyššie uvedenej podmienky platnosti pre reálne číslo, je množina \mathbb{R} podmnožinou množiny \mathbb{C} .

Každé komplexné číslo má okrem zložkového a algebrického tvaru aj tvar goniometrický. Zapisuje sa v tvare $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

1.2.1 Rovnosť

Nech máme dve komplexné čísla v algebrickom tvare $z_1 = d_{10} + d_{20}i$ a $z_2 = d_{11} + d_{21}i$, respektíve v zložkovom tvare $z_1 = [d_{10}; d_{20}]$ a $z_2 = [d_{11}; d_{21}]$. Rovnosť medzi týmito komplexnými číslami nastane, ak ich reálna časť d_{10}, d_{11} a imaginárna časť d_{20}, d_{21} majú rovnakú hodnotu

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (d_{10} = d_{11}) \wedge (d_{20} = d_{21}).$$

V goniometrickom tvare sa tieto čísla rovnajú v prípade, že ich absolútna hodnota je rovnaká a ich argument φ je rozdielny o $2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 Opačné komplexné číslo

Nech máme komplexné číslo v tvare $z = d_0 + d_1i$, respektíve $z = [d_0; d_1]$, tak jeho opačným číslom bude číslo $\bar{z} = -d_0 - d_1i$, v zložkovom tvare $\bar{z} = [-d_0; -d_1]$. Zmenia sa teda znamienka pri oboch častiach komplexných čísel.

V goniometrickom tvare by bolo pre číslo, $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ bolo opačným číslom $\bar{z} = |z| \cdot [\cos(\varphi + k\pi) + i \sin(\varphi + k\pi)]$.

1.2.3 Inverzné komplexné číslo

Prevráteným, teda inverzným číslom \bar{z} ku komplexnému číslu $z = d_0 + d_1i$, bude číslo v tvare

$$\bar{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{d_0 + d_1i} = \frac{d_0}{d_0^2 + d_1^2} - \frac{d_1}{d_0^2 + d_1^2}i. \quad (1)$$

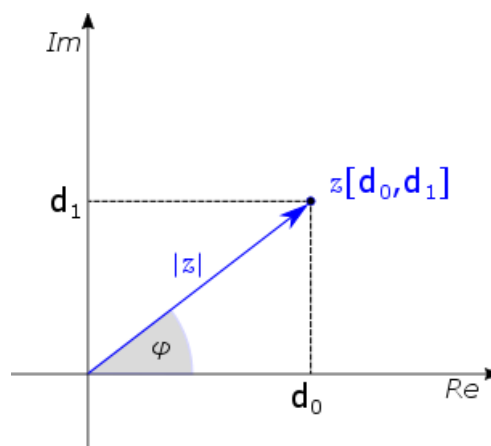
Postup, ako sme sa dopracovali k výslednému vyjadreniu inverzného čísla si ukážeme, až po ukážke aritmetických operácií s komplexnými číslami.

1.3 Gaussova rovina

Gaussova rovina \mathbb{G} , nazývaná aj rovina komplexných čísel alebo zjednodušene komplexná rovina, je rovina s pravouhlou sústavou súradníc x a y , kde zobrazujeme komplexné čísla

tak, že každému komplexnému číslu z je priradený každý bod roviny a naopak. Obrazy reálnych čísel ležia na osi x , nazývanej aj reálna os Re . Obrazy imaginárnych čísel sú body Gaussovej roviny, ktoré neležia na reálnej osi. Na osi y , nazývanej aj imaginárna os Im , sa nachádzajú obrazy rýdzo imaginárnych čísel.

Komplexné číslo si možno predstaviť ako polohový vektor v rovine, ktorý má dĺžku $|z|$ a smer \vec{Oz} , kde O predstavuje počiatok karteziánskej sústavy súradníc. Tým, že každý bod v Gaussovej rovine má svoje komplexné číslo, je priradenie medzi komplexnými číslami a polohovými vektormi vzájomné jednoznačné.



Obrázok 1: Komplexné číslo v zložkovom tvare

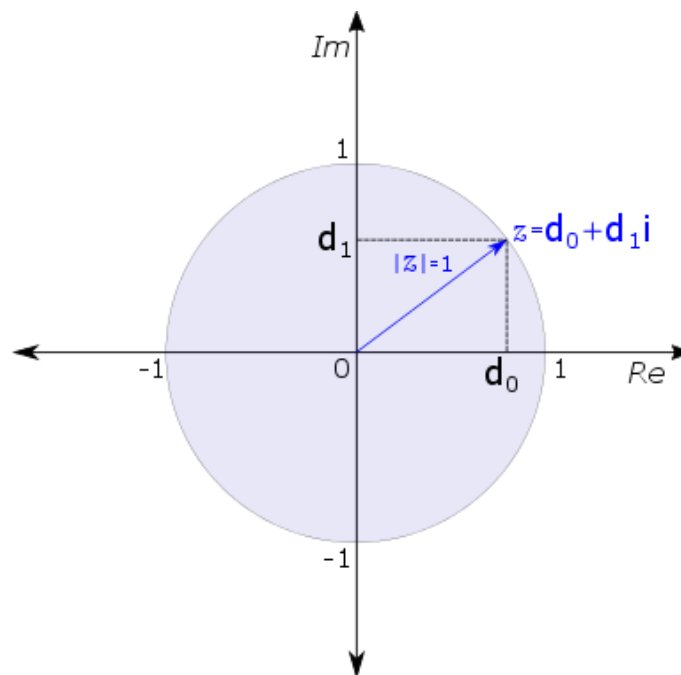
1.3.1 Absolútna hodnota

Absolútna hodnota komplexného čísla je vždy nezáporné reálne číslo. Značíme ju $|z|$ a je vyjadrená vzťahom

$$|z| = \sqrt{d_0^2 + d_1^2}, \quad (2)$$

ktorý platí pre zložkový aj algebrický tvar. Komplexné číslo, ktoré má absolútnu hodnotu rovnú jednej, sa nazýva komplexná jednotka.

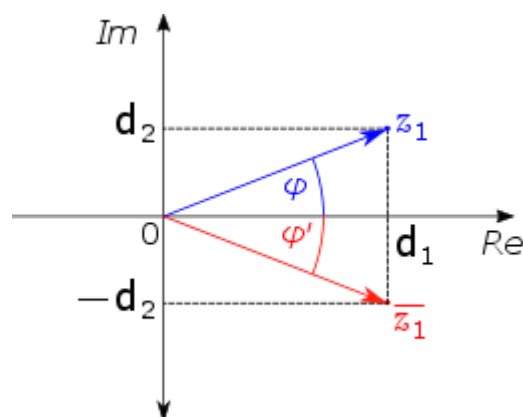
Z geometrického hľadiska nám absolútna hodnota komplexného čísla z určuje vzdialenosť obrazu tohto čísla od počiatku Gaussovej sústavy súradníc. Všetky komplexné čísla majúce rovnakú absolútnu hodnotu vytvoria v rovine kružnicu so stredom v počiatku súradnicovej sústavy a s polomerom $|z|$. V prípade komplexných jednotiek má táto kružnica polomer jedna. [3]



Obrázok 2: Jednotková kružnica

1.3.2 Komplexne združené číslo

Každé komplexné číslo má svoje komplexne združené číslo, ktoré je súmerne s pôvodným komplexným číslom podľa reálnej osi. To znamená, že sa mení znamienko pri imaginárnej zložke komplexného čísla. Pokiaľ komplexne číslo vynásobíme komplexne združeným číslom, tak získame reálne číslo. Táto metóda sa využíva najmä pri podiele dvoch komplexných čísel. Nech máme komplexné číslo $z = d_0 + d_1 i$, tak jeho komplexne združeným číslom bude $\bar{z} = d_0 - d_1 i$.



Obrázok 3: Komplexne združené číslo

1.4 Aritmetické operácie

V množine \mathbb{C} sú definované rovnaké aritmetické operácie ako v množine \mathbb{R} . Nech máme dve komplexné čísla v algebrickom tvare $z_1 = d_{10} + d_{20}i$ a $z_2 = d_{11} + d_{21}i$, respektíve ich zložkovú formu $z_1 = [d_{10}; d_{20}]$ a $z_2 = [d_{11}; d_{21}]$. Matematické operácie týchto dvoch čísel budú zobrazené v nasledujúcich podkapitolách v algebrickom tvare a následne v tvare zložkovom.

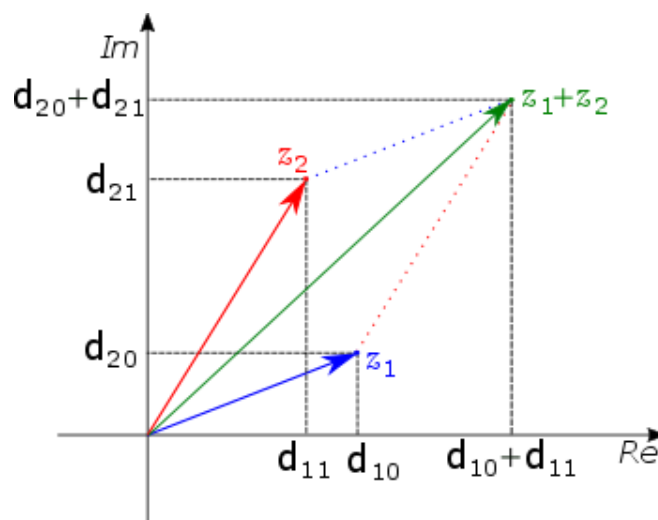
1.4.1 Súčet

Súčet komplexných čísel z_1 a z_2 prebieha tak, že sa sčítajú oba ich vektory. V koncovom bode prvého z komplexných čísel, v našom prípade z_1 , si môžeme predstaviť počiatok súradnicovej sústavy pre vektor druhého čísla. Výsledkom je znova vektor. Tento výsledný vektor spája počiatočný bod prvého vektora s koncovým bodom druhého vektora. Z algebrického hľadiska by sa dal súčet zapísať

$$z_1 + z_2 = (d_{10} + d_{11}) + (d_{20} + d_{21})i,$$

$$z_1 + z_2 = [d_{10} + d_{11}; d_{20} + d_{21}].$$

Samostatne sa sčítava reálna časť a samostatne imaginárna časť. Výsledkom sú koncové súradnice výsledného vektora v Gaussovej rovine. Z pohľadu binárnych operácií súčet splňuje asociatívny a komutatívny zákon. Z geometrickej stránky môžeme na obrázku 3 vidieť princíp súčtu dvoch komplexných čísel.



Obrázok 4: Súčet komplexných čísel

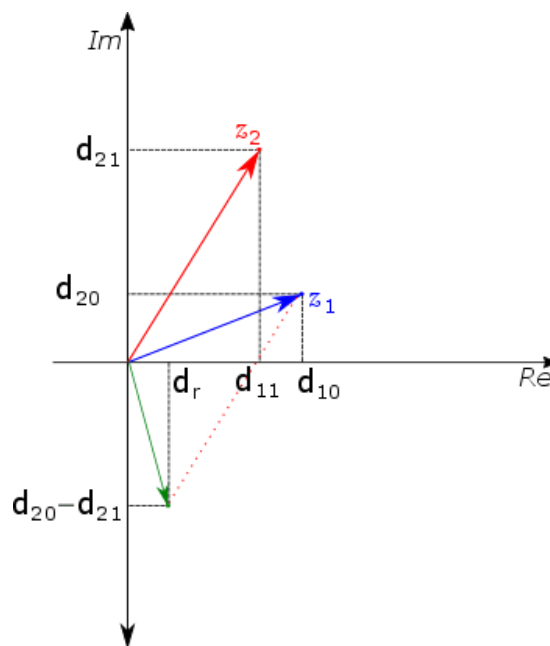
1.4.2 Rozdiel

Postupuje sa tým istým spôsobom ako pri súčte, no neplatí tu asociatívny ani komutatívny zákon. Do koncového bodu prvého vektora zavedieme počiatok druhého vektora, ktorý otočíme o 180° . Výsledkom je znova vektor, ktorého počiatok začína v počiatku prvého vektora a koniec má v koncovom bode druhého vektora. Algebraicky je možné rozdiel našich dvoch komplexných čísel zapísať

$$z_1 - z_2 = (d_{10} - d_{11}) + (d_{20} - d_{21})i$$

$$z_1 - z_2 = [d_{10} - d_{11}; d_{20} - d_{21}].$$

Z toho vyplýva, že tak ako pri súčte, tak aj pri rozdiel sa reálne časti a imaginárne časti dvoch čísel od seba odčítavajú. Na obrázku 4 môžeme vidieť princíp rozdielu komplexných čísel, kde som zvolil substitúciu $d_r = d_{10} - d_{11}$ z dôvodu prehľadnejšieho obrázku.



Obrázok 5: Rozdiel komplexných čísel

1.4.3 Súčin

Operácia násobenia je oproti dvom predchádzajúcim trochu zložitejšia. Využívajú sa tu totiž aj uhly vektorov zvierajúce s reálnou osou. Násobením dvoch vektorov získame vektor, ktorého uhol s reálnou osou je súčtom uhlov dvoch násobiacich čísel a veľkosť výsledného vektora bude reprezentovaná súčinom absolútnych hodnôt veľkostí násobených vektorov. Z algebraického hľadiska to môžeme zapísať

$$z_1 \cdot z_2 = d_{10}d_{11} + i \cdot (d_{10}d_{21} + d_{20}d_{11}) + i^2 d_{20}d_{21}.$$

Môžeme si všimnúť, že posledný člen obsahuje imaginárnu jednotku umocnenú na druhú. Symbol i je jednotkový vektor na imaginárnej osi Im, čo znamená, že zvierá 90° uhol s reálnou osou. Pokiaľ násobíme dve rovnaké čísla, tak súčet ich uhlov musí byť dvojnásobný oproti pôvodnému uhlu tohto čísla. Výsledný vektor bude teda v našom prípade 180° od reálnej osi, čo nás nasmeruje do zápornej časti reálnej osi. Z toho vyplýva, že vektor čísla i^2 bude mať veľkosť jedna, pretože ide o jednotkový vektor a súradnice koncového bodu budú $[-1;0]$, z čoho pramení, že $i^2 = -1$. Spätným dosadením získavame

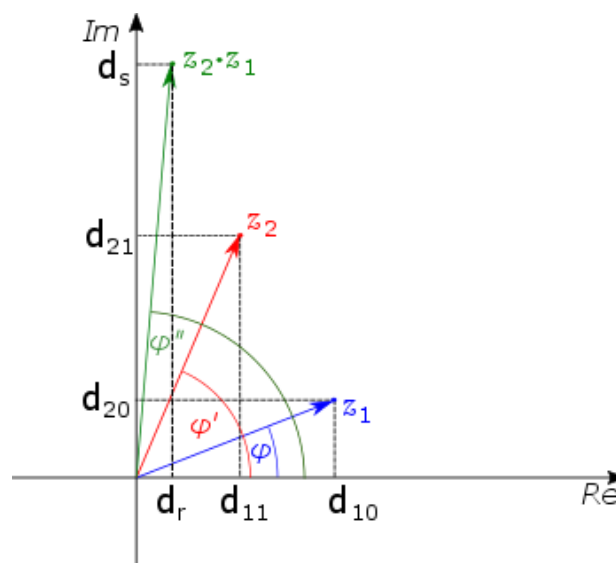
$$z_1 \cdot z_2 = (d_{10}d_{11} - d_{20}d_{21}) + i \cdot (d_{10}d_{21} + d_{20}d_{11})$$

$$z_1 \cdot z_2 = [d_{10}d_{11} - d_{20}d_{21} ; d_{10}d_{21} + d_{20}d_{11}]$$

Súčin splňuje asociatívny, komutatívny a navyše aj distributívny zákon voči súčtu komplexných čísel. Geometrický pohľad na súčin je na obrázku 5, kde som zaviedol dve substitúcie $d_s = d_{10}d_{21} + d_{20}d_{11}$ a $d_r = d_{10}d_{11} - d_{20}d_{21}$. Platia teda vzťahy

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\varphi'' = \varphi' + \varphi$$



Obrázok 6: Súčin komplexných čísel

1.4.4 Podiel

Pri podiele komplexných čísel sa bude využívať komplexne združené číslo deliteľa. Nech je v našom prípade deliteľom číslo z_2 . Jeho komplexne združeným číslom v algebrickom tvare bude $z_2' = d_{11} - d_{21}i$ a v zložkovom tvare $z_2 = [d_{11}; -d_{21}]$. Uhol vektora získame tento-

krát odčítaním uhla deliteľa od uhla delenca. Veľkosť vektora dosiahneme podielom veľkosti hodnôt jednotlivých vektorov. Z algebrického aspektu získame podiel tak, že zavedieme súčin pôvodného podielu s podielom komplexne združeného deliteľa. V našom prípade z_2' . Platia teda nasledujúce vzťahy

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2'}{z_2'}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{d_{10} + id_{20}}{d_{11} + id_{21}} \cdot \frac{d_{11} - id_{21}}{d_{11} - id_{21}}$$

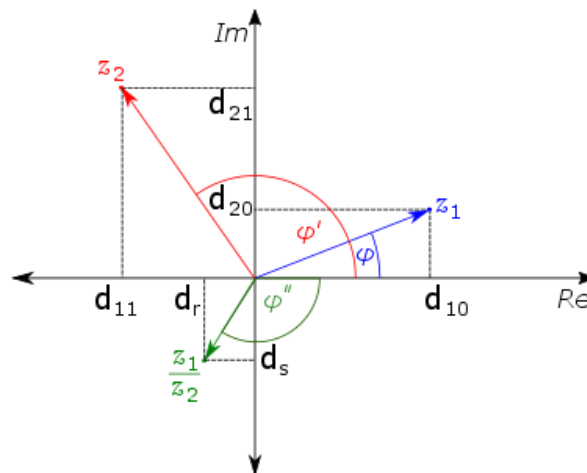
Roznásobením menovateľa získame reálne číslo, čo nám umožní zlomok rozdeliť na dve časti: reálnu a imaginárnu.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{d_{10}d_{11} - id_{10}d_{21} + id_{11}d_{20} - i^2d_{21}d_{20}}{d_{11}d_{11} + id_{21}d_{11} - d_{11}id_{21} - id_{21}id_{21}} = \\ &= \frac{(d_{10}d_{11} + d_{21}d_{20}) - i \cdot (d_{10}d_{21} + d_{11}d_{20})}{d_{11}^2 - i^2d_{21}^2} = \\ &= \frac{(d_{10}d_{11} + d_{21}d_{20}) - i \cdot (d_{10}d_{21} + d_{11}d_{20})}{d_{11}^2 + d_{21}^2} = \\ &= \frac{d_{10}d_{11} + d_{21}d_{20}}{d_{11}^2 + d_{21}^2} - \frac{d_{10}d_{21} + d_{11}d_{20}}{d_{11}^2 + d_{21}^2} i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \left[\frac{d_{10}d_{11} + d_{21}d_{20}}{d_{11}^2 + d_{21}^2}; -\frac{d_{10}d_{21} + d_{11}d_{20}}{d_{11}^2 + d_{21}^2} \right]. \end{aligned}$$

Po bližšom preskúmaní môžeme vidieť, že tak ako aj v prípade rozdielu, tak ani tu neplatí asociatívny ani komutatívny zákon. Geometrická predstava o podiele dvoch komplexných čísel je zobrazená na obrázku číslo 6. Zaviedol som tu znova rovnaké substitúcie ako pri súčine. Pre podiel platia teda vzťahy

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\varphi'' = \varphi - \varphi'.$$



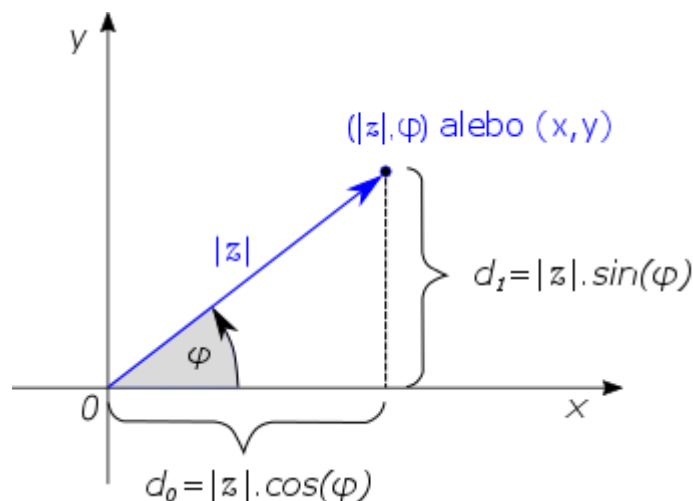
Obrázok 7: Podiel komplexných čísel

Inverzný tvar komplexného čísla v podobe (1) môžeme teda získať nasledujúcim postupom

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{d_0 - d_1 i}{(d_0 + d_1 i) \cdot (d_0 - d_1 i)} = \frac{d_0 - d_1 i}{d_0^2 + d_1^2} = \frac{d_0}{d_0^2 + d_1^2} - \frac{d_1}{d_0^2 + d_1^2} i.$$

1.5 Goniometrický tvar

Na obrázku 8 môžeme vidieť polárne súradnice komplexného čísla položeného v Gaussovej rovine s polárnymi osami.



Obrázok 8: Polárne súradnice v komplexnej rovine

Potom d_0 , d_1 , $|z|$ a φ sú skonštruované ako $d_0 = |z| \cos(\varphi)$ a $d_1 = |z| \sin(\varphi)$. Tieto rovnice nám vyjadrujú nenulové komplexné číslo $z = d_0 + i d_1$ ako

$$z = (|z| \cos \varphi) + i(|z| \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Tomuto tvaru sa hovorí goniometrický alebo polárny tvar komplexného čísla. Os x je reálna os Re a os y je imaginárna os Im . Uhol sklonu vektora z od reálnej osi, ktorý je vyjadrený v radiánoch alebo stupňoch, bude kladný v prípade, že sa bude merať v proti smere hodinových ručičiek a záporný naopak ak sa meria v smere hodinových ručičiek. Tento uhol je nazývaný argument komplexného čísla z a je označovaný $\varphi = \arg(z)$. Argument komplexného čísla musí spĺňať rovnice

$$\cos \varphi = \frac{d_0}{|z|}$$

$$\sin \varphi = \frac{d_1}{|z|}.$$

Argument komplexných čísel nemôže byť jedinečný, pretože $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ majú periodicitu 2π . To znamená, že pre komplexné číslo z , ktoré ma nejaký argument φ_0 , tak potom uhly $\varphi_0 \pm 2\pi$, $\varphi_0 \pm 4\pi$, $\varphi_0 \pm 6\pi \dots$ sú taktiež argumentami komplexného čísla z .

1.5.1 Hlavný argument

Symbol $\arg(z)$ v skutočnosti reprezentuje súbor hodnôt, ale argument φ komplexného čísla z , ktorý leží na intervale $-\pi < \varphi \leq \pi$ je hlavný argument čísla z alebo hlavná hodnota $\arg(z)$. Hlavný argument čísla z je jedinečný a je označovaný ako $\text{Arg}(z)$. Platí teda [2]

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi.$$

1.5.2 Súčin a podiel

Nech máme dve komplexné čísla v goniometrickom tvare $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, kde φ_1 a φ_2 sú príslušné argumenty z_1 a z_2 . Potom ich súčin

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)].$$

V prípade, že $z_2 \neq 0$, tak podiel je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)].$$

Podľa príslušných úprav pre sínus a kosínus sa dajú tieto rovnice pre súčin a podiel upraviť pomocou vzorca

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B,$$

na tvary

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Z týchto vzťahov nám vyplývajú rovnice pre jednotlivé argumenty

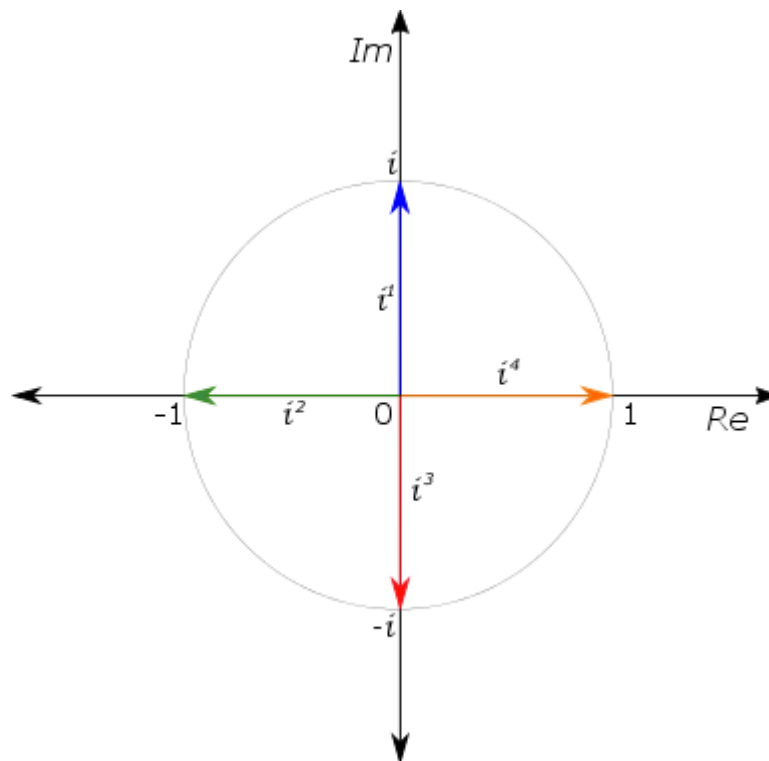
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Grafické zobrazenie týchto rovníc si môžeme znova pozrieť na obrázkoch 6 a 7, kde sa jednotlivé uhly komplexných čísel naozaj sčítavajú, respektíve odčítavajú.

1.5.3 Mocnina

Skôr ako prejdeme k umocňovaniu samotného komplexného čísla, ukážeme si jednotkový vektor položený priamo na každej ose Gaussovej roviny. Vieme, že $i^2 = -1$. V tom prípade $i^3 = -1 \cdot i = -i$ a nakoniec $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.



Obrázok 9: Jednotková kružnica komplexnej roviny

Nech máme komplexné číslo v algebrickom tvare $z = d_0 + d_1 i$. Jeho n -tú mocninu môžeme zapísať v tvare $z^n = \underbrace{(d_0 + d_1 i)}_1 \cdot \underbrace{(d_0 + d_1 i)}_2 \cdot \dots \cdot \underbrace{(d_0 + d_1 i)}_n$. V prípade, že počítame druhú alebo tretiu mocninu, tak môžeme využiť vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ respektíve $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Pre počítanie všeobecných mocnín v algebrickom tvare je možné použiť binomickú vetu, ktorá hovorí

$$(d_0 + d_1 i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (bi)^k,$$

kde $k, n \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$. Ďaleko jednoduchšie je však použiť miesto algebrického tvaru komplexného čísla tvar goniometrický. Nech máme komplexné číslo z zapísané v tvare $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, potom n -tou mocninou tohto čísla bude

$$z^n = |z|^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)].$$

Tento vzťah je odvodený od francúzskeho matematika Abrahama de Moivreho a nazýva sa Moivreova veta. Táto veta nám priamo prepája komplexné čísla s trigonometriou.

Túto vetu je možné dokázať matematickou indukciou. Pre $n = k$ dostaneme

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi.$$

Teraz chceme dosadiť za $n = k + 1$ a ukázať, že to naozaj platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} = (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k.$$

Na pravej strane použijeme rovnicu, ktorú sme si odvodili pre $n = k$

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \\ &= (\cos \varphi)(\cos k\varphi) + i^2(\sin \varphi)(\sin k\varphi) + i(\sin \varphi)(\cos k\varphi) + i(\sin k\varphi)(\cos \varphi) = \\ &= (\cos \varphi)(\cos k\varphi) - (\sin \varphi)(\sin k\varphi) + i(\sin \varphi)(\cos k\varphi) + i(\sin k\varphi)(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Teraz využijeme vzorce pre sínus a kosínus

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Dostaneme teda

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} = (\cos(k + 1)\varphi + i \sin(k + 1)\varphi),$$

čím sa nám podarilo dokázať Moivreovu vetu.

1.5.4 Odmocnina

Každé riešenie rovnice $z^n = a$ je n -tou odmocninou z čísla a . Ak máme $a = 0$, tak pre akékoľvek n má rovnica $z^n = 0$ práve jedno riešenie $z = 0$. Avšak ak je $a \neq 0$, tak potom aj $z \neq 0$. Nech máme obe komplexné čísla vyjadrené v goniometrickom tvare $z = |z|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ a $a = |a|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Potom rovnica $z^n = a$ má tvar $|z|^n(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) = |a|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak hodnota ich absolútnych hodnôt je rovnaká a zároveň sa ich argumenty rovnajú alebo odlišujú o celočíselný násobok periódy 2π . Z tejto odvodenej rovnosti vyplýva, že $|z|^n = |a|$ a $n\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ alebo $|z| = \sqrt[n]{|a|}$ a $\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. To znamená, že všetky riešenia rovnice $z^n = a$, môžeme zapísať v tvare

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left[\cos \left(\frac{\varphi_2}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi_2}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Všetky n -té odmocniny z a majú teda rovnakú absolútnu hodnotu $\sqrt[n]{|a|}$ a ich argumenty sú rozdielne o násobok $\frac{2\pi}{n}$. [3]

1.6 Exponenciálna forma

Komplexne číslo e^z je číslo definované

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Zákon exponentov pre komplexné čísla hovorí

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Okrem toho Eulerov vzorec je špeciálny prípad, keď z je rýdzo imaginárne číslo, tak $a = 0$ a b je nahradené φ . Eulerov vzorec má pohodlné využitie vo viacerých konceptoch. Goniometrický tvar komplexného čísla z môžeme teraz zapísať

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Tomuto zápisu hovoríme exponenciálny tvar komplexného čísla. [2]

2 APLIKÁCIA KOMPLEXNÝCH ČÍSEL

2.1 Kvadratická rovnica

V tejto práci sa budeme venovať kvadratickej rovnici s jednou neznámou. Ide o algebrickú rovnicu druhého stupňa, ktorá má všeobecný tvar

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde člen a nazývame kvadratický koeficient a nemôže byť rovný nule, b je lineárny koeficient a c je absolútny koeficient. V prípade, že $a = 0$, tak z kvadratickej rovnice sa stáva lineárna rovnica. [2]

Na to aby sme našli riešenie tejto rovnice sa používa diskriminant, ktorý sa určuje podľa vzorca

$$D = b^2 - 4ac.$$

Ak $D > 0$, tak kvadratická rovnica bude mať dva reálne korene. V prípade, že $D = 0$, tak rovnica bude mať jeden dvojnásobný koreň. A nakoniec ak bude $D < 0$, tak koreňmi budú dve komplexne združené čísla. Všeobecné korene môžeme určiť podľa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

V prípade, keď diskriminant bude záporný sa predchádzajúci vzťah môže zapísať v tvare

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

2.2 Diferenciálna rovnica

Prvým krokom k riešeniu lineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu $f(x) = ay'' + by' + cy$ s reálnymi koeficientami a, b, c je vyriešiť pridruženú homogénnu rovnicu $ay'' + by' + cy = 0$. Druhá rovnica má riešenie $y = e^{mx}$. Aby sme to spozorovali, zavedieme nasledujúce substitúcie $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$ a $y'' = m^2e^{mx}$, z čoho nám vyjde rovnica

$$ay'' + by' + cy = am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Z tejto rovnice môžeme vidieť, že $y = e^{mx}$ je riešením homogénnej rovnice, kde m je koreňom polynomickej rovnice $am^2 + bm + c = 0$. Táto rovnica je nazývaná charakteristická

rovnica. Aj keď sú koeficienty polynomickej rovnice reálne, nemusí mať rovnica ani jeden reálny koreň, to znamená, že korene budú tvoriť konjugovaný pár. V prípade, že charakteristická rovnica má komplexné korene $a + bi$, $a - bi$, $b > 0$, tak dve riešenia rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ sú komplexne exponenciálne funkcie $y = e^{(\alpha+i\beta)x}$ a $y = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Pre získanie reálneho riešenia sa používa Eulerov vzorec

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

kde φ je reálne. Nahradením φ za βx a $-\beta x$ pri použití Eulerovho vzorca dostávame

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad (3)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Teraz keď je diferenciálna rovnica homogénna, je lineárna kombinácia

$$y_1 = \frac{1}{2} [e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}],$$

$$y_2 = \frac{1}{2i} [e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}],$$

tiež riešením. Ale s ohľadom na rovnicu (3), sú oba z vyššie uvedených výrazov reálne funkcie vo fundamentálnom systéme

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (4)$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde fundamentálnym systémom riešení sa rozumie n -tica riešení, ktoré sú lineárne nezávislé. Nech máme funkcie y_1 a y_2 , ktoré sú riešením zadanej diferenciálnej rovnice a sú lineárne nezávislé v danom interval, potom za všeobecné riešenie považujeme

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2 = C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

2.3 Laplaceova transformácia

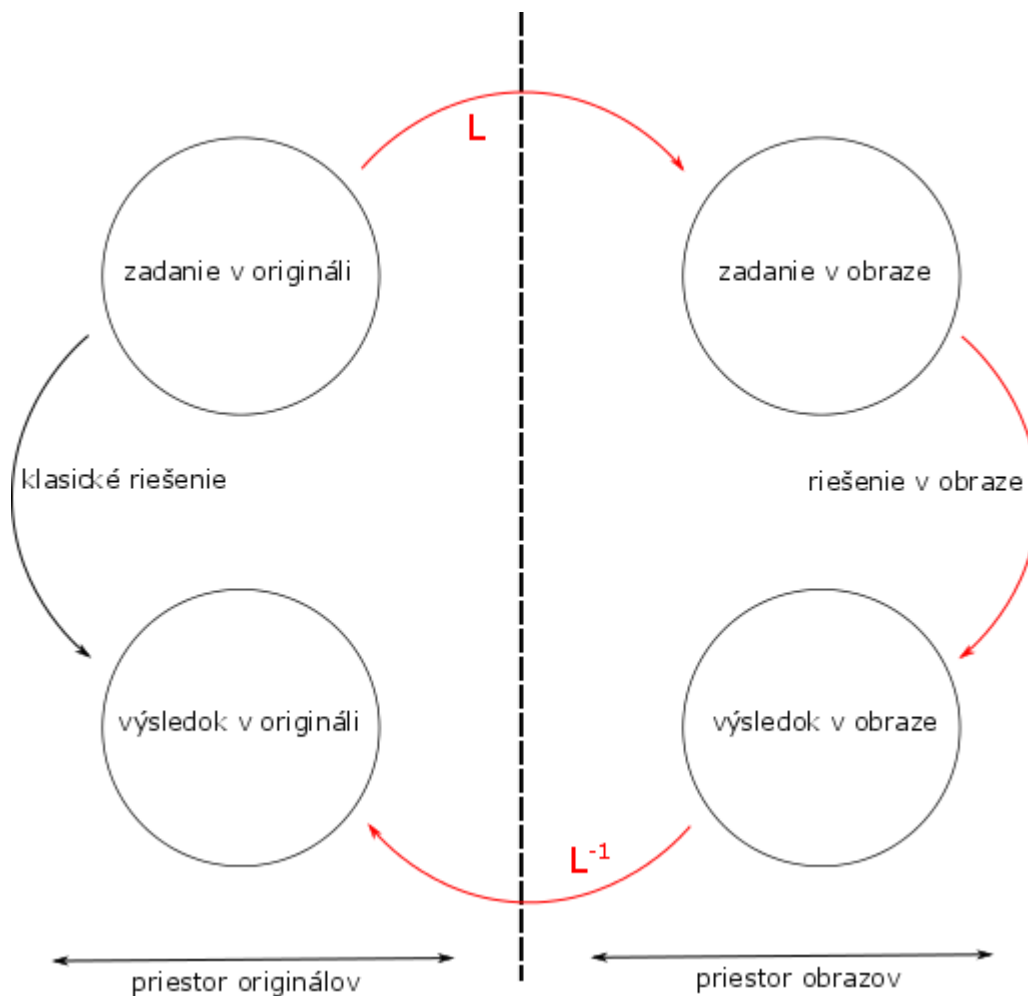
Riešenie diferenciálnych rovníc je často komplikované mnohými výpočtami. Pre zjednodušenie výpočtu diferenciálnych rovníc a ich sústav sa používajú rôzne integrálne transformácie. Najvýznamnejšou a najčastejšie používanou transformáciou je Laplaceova transformácia. Nech máme funkciu $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, potom jej Laplaceova transformácia bude funkcia $F(s)$, ktorá je určená vzťahom

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (5)$$

kde s je komplexná premenná v tvare $a + bi$. Funkcia $f(t)$ sa nazýva originál a funkcia $F(s)$ sa nazýva obraz. Laplaceova transformácia využíva operátor \mathbb{L} , ktorý symbolizuje priradenie $f(t) \rightarrow F(s)$. Zápis pomocou tohto operátora je $\mathbb{L}\{f(t)\} = F(s)$. Spätný prevod z obrazu na originál sa nazýva spätná Laplaceova transformácia a značí sa operátorom \mathbb{L}^{-1} . Jej zápis je $\mathbb{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. [4]

S komplexnou premennou s sa pri získavaní obrazov počíta podľa rovnakých pravidiel, aké sa používajú pri derivovaní a integrovaní reálnych funkcií reálnej premennej. Pri počítaní obrazov môžeme teda predpokladať, že s je kladná reálna premenná.

Na obrázku 10 môžeme vidieť princíp výpočtu úlohy zadanej v origináli pomocou Laplaceovej transformácie. Originál sa transformuje na obraz, následne sa vyrieši a riešenie sa potom prevedie pomocou spätnej Laplaceovej transformácie na výsledok v origináli. [4]



Obrázok 10: Princíp výpočtu pri použití Laplaceovej transformácie

Spätňú Laplaceovu transformáciu je možné vykonávať viacerými metódami. V tejto práci si ozrejníme metódu súčtu reziduí, kde súčtom reziduí rozumieme súčet reziduí vo všetkých singulárnych bodoch funkcie $F(s)$.

$$f(t) = \mathbb{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum \text{res}[F(s)e^{st}].$$

V prípade, že obraz $F(s)$ obsahuje póly prvého radu tak

$$\text{res}[F(s)e^{st}]_{s=s_m} = \lim_{s \rightarrow s_m} [(s - s_m)F(s)e^{st}],$$

kde s_m je rôzny pól charakteristického polynómu v menovateli daného obrazu $F(s)$. Keď máme póly n -tého radu tak výpočet reziduí bude

$$\text{res}[F(s)e^{st}]_{s=s_m} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_m} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s - s_m)^n F(s)e^{st}]. \quad (6)$$

Laplaceova transformácia má mnoho vlastností. My si predstavíme vetu o derivácií originálu, ktorú budeme využívať pri riešení diferenciálnych rovníc. Pre prvú deriváciu platí

$$\mathbb{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0).$$

Pre n -tu deriváciu platí

$$\begin{aligned} \mathbb{L}\{f^n(t)\} &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^n \frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}} = \\ &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{n-1}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

2.4 RLC obvod

V elektrotechnike sa s komplexnými číslami môžeme stretnúť napríklad pri hľadaní prúdu i_p v ustálenom stave v zapojenom RLC obvode, v ktorom je náboj $q(t)$ na kondenzátore pre čas $t > 0$ opísaný diferenciálnou rovnicou

$$R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin at, \quad (8)$$

kde R, L, C, E_0 sú známe kladné konštanty pre odpor, impedanciu, kapacitu a napätie. K zisteniu prúdu i_p musíme najprv získať náboj na kondenzátore nájdením partikulárneho riešenia $q_p(t)$, kde využijeme metódu neurčitých koeficientov. Za predpokladu, že partikulárne riešenie je $q_p(t) = A \sin at + B \cos at$, substituujeme tento výraz do diferenciálnej rovnice

a riešime pre neznáme koeficienty A a B , pre ktoré platí vzťah $A = \frac{E_0 X}{-\alpha Z^2}$ a $B = \frac{E_0 R}{-\alpha Z^2}$, kde premenné

$$X = L\alpha - \frac{1}{C\alpha}, \quad (9)$$

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \quad (10)$$

sú nazývané reaktancia a impedancia obvodu. Takže riešenie bude

$$q_p(t) = -\frac{E_0 X}{\alpha Z^2} \sin \alpha t - \frac{E_0 R}{\alpha Z^2} \cos \alpha t.$$

Z tohto riešenia a vzťahu $i_p(t) = q'_p(t)$ získame

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z} \left(\frac{R}{Z} \sin \alpha t - \frac{X}{Z} \cos \alpha t \right).$$

Takéto problémy sa často riešia komplexnými číslami, pretože preformulovaním fyzikálnych problémov do komplexných čísel sa väčšinou tieto problémy zjednodušia. V tomto prípade sa bude používať symbol j , ako komplexná premenná aby nedochádzalo k zámene s prúdom i . Čiže $j = \sqrt{-1}$. Vzhľadom k tomu, že prúd i s nábojom q je vo vzťahu $i = \frac{dq}{dt}$, tak diferenciálna rovnica (8) bude rovnaká ako

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \alpha t. \quad (11)$$

Podľa Eulerovho vzorca, ak nahradíme φ za symbol α , tak napätie $E_0 \sin \alpha t$ je rovnaké ako $\text{Im}(E_0 e^{j\alpha t})$. Vzhľadom k poslednému tvaru, spôsob neurčitých koeficientov ukazuje, že sa snažíme o riešenie vo forme konštantného násobku komplexnej exponenciály $i_p(t) = \text{Im}(A e^{j\alpha t})$. Tento výraz dosadíme do rovnice (11) a predpokladáme, že komplexná exponenciála spĺňa zvyčajne pravidla diferenciácie, využijeme toho, že náboj q je neurčitým integrálom prúdu i a porovnáme koeficienty pri $e^{j\alpha t}$. [2]

Výsledkom je

$$A \left(R + jL\alpha + \frac{1}{jC\alpha} \right) = E_0,$$

z ktorého dostávame

$$A = \frac{E_0}{R + j \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha} \right)} = \frac{E_0}{R + jX'}$$

kde X je reaktancia a menovateľ posledného výrazu je komplexná impedancia obvodu.

$$Z_c = R + j \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha} \right) = R + jX.$$

Podľa modelu komplexnej impedancie $|Z_c| = \sqrt{R^2 + \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha} \right)^2}$, a podľa impedancie vyjadrenej vo vzťahu (10) môžeme tvrdiť, že komplexná impedancia je $|Z_c| = Z$. Z exponenciálneho tvaru komplexného čísla môžeme vyjadriť komplexnú impedanciu ako

$$Z_c = |Z_c|e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi},$$

kde

$$\tan \varphi = \frac{L\alpha - \frac{1}{C\alpha}}{R}.$$

Preto sa stáva $A = \frac{E_0}{Z_c} = \frac{E_0}{Ze^{j\varphi}}$ a vzniká nám vzťah pre prúd

$$i_p(t) = \text{Im} \left(\frac{E_0}{Z} e^{-j\varphi} e^{j\alpha t} \right).$$

Fázorové diagramy znázorňujú rozloženie fázoru napätia a prúdu len v určitom časovom okamžiku: v čase $t = 0$ a potom vždy za určitú periódu.

2.5 Teória systémov

Teória systémov je založená na interdisciplinárnom chápaní pojmu systém. Zamiera sa primárne na štúdium všeobecných abstraktných ale aj reálnych systémov, ich aktivitu, adaptabilitu a interakcie s okolím. Taktiež sa zaoberá špecializovanými teóriami konkrétnych tried modelov. Systém môžeme definovať viacerými spôsobmi podľa typu prístupu. Môžeme ho vnímať ako danú množinu veličín, ako množinu variácií veličín v čase pri zložitých systémoch. Pri návrhu regulácie ako časovo nemenný vzťah medzi aktuálnymi a predchádzajúcimi alebo budúcimi hodnotami veličín. Pri kybernetickom prístupe v biológii alebo fyzike ho môžeme definovať ako množinu prvkov spolu s ich správaním a množina väzieb medzi týmito prvkami a ich okolím. A nakoniec v teoretickej informatike ako množinu stavov a množinu prechodov medzi stavmi.

2.5.1 Frekvenčný prenos

Frekvenčný prenos získame v prípade, že na vstup systému privedieme harmonický signál napr. $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$, kde u_0 je amplitúda vstupného signálu a ωt je uhlová frekvencia. Výstupným signálom bude znova sínus, ktorý bude mať rovnakú uhlovú frekvenciu ale odlišnú amplitúdu a bude oproti vstupnému signálu fázovo posunutý $y(t) = u_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

V komplexnom tvare sa vyjadruje vstupná funkcia v tvare $u(t) = u_0 e^{j\omega t}$ a výstupná funkcia v tvare $y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$. Frekvenčný prenos definuje pomer týchto dvoch vektorov, ktoré sú vyjadrené v komplexnej rovine a otáčajúce sa uhlovou rýchlosťou ω . [4]

Frekvenčný prenos môžeme získať z jeho spojitého prenosu zavedením substitúcie

$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega},$$

kde j predstavuje imaginárnu jednotku. Vychádzajúc zo spojitého prenosu v tvare

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n},$$

Získame frekvenčný prenos v tvare

$$G(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n}.$$

V nasledujúcich úpravách využijeme prvé štyri členy v čitateli a menovateli z dôvodu väčšej prehľadnosti

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) - b_2(\omega)^2 - b_3(j\omega)^3 + b_4(\omega)^4}{a_0 + a_1(j\omega) - a_2(\omega)^2 - a_3(j\omega)^3 + a_4(\omega)^4},$$

kde teraz vzájomne oddelíme reálne a imaginárne členy

$$G(j\omega) = \frac{b_0 - b_2(\omega)^2 + b_4(\omega)^4 + j[b_1(\omega) - b_3(\omega)^3]}{a_0 - a_2(\omega)^2 + a_4(\omega)^4 + j[a_1(\omega) - a_3(\omega)^3]}.$$

Označíme si polynómy pre každú reálnu a imaginárnu časť

$$d(\omega) = b_0 - b_2(\omega)^2 + b_4(\omega)^4$$

$$e(\omega) = a_0 - a_2(\omega)^2 + a_4(\omega)^4$$

$$f(\omega) = b_1(\omega) - b_3(\omega)^3$$

$$g(\omega) = a_1(\omega) - a_3(\omega)^3$$

a teraz môžeme frekvenčný prenos zapísať ako

$$G(j\omega) = \frac{d(\omega) + jf(\omega)}{e(\omega) + jg(\omega)}.$$

Teraz využijeme komplexne združené číslo tohto prenosu, ktorým vynásobíme čitateľa aj menovateľa

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{d(\omega) + jf(\omega)}{e(\omega) + jg(\omega)} \cdot \frac{e(\omega) - jg(\omega)}{e(\omega) - jg(\omega)} = \\ &= \frac{d(\omega)e(\omega) + jf(\omega)e(\omega) - jd(\omega)g(\omega) - j^2f(\omega)g(\omega)}{e^2(\omega) - j^2g^2(\omega)} = \\ &= \frac{d(\omega)e(\omega) + f(\omega)g(\omega) + j[f(\omega)e(\omega) - d(\omega)g(\omega)]}{e^2(\omega) + g^2(\omega)} = \\ &= \frac{d(\omega)e(\omega) + f(\omega)g(\omega)}{e^2(\omega) + g^2(\omega)} + j \frac{f(\omega)e(\omega) - d(\omega)g(\omega)}{e^2(\omega) + g^2(\omega)} \end{aligned}$$

a získame tak reálnu časť komplexného čísla frekvenčného prenosu označovanú aj ako $P(\omega)$ a imaginárnu časť $Q(\omega)$

$$P(\omega) = \frac{d(\omega)e(\omega) + f(\omega)g(\omega)}{e^2(\omega) + g^2(\omega)},$$

$$Q(\omega) = \frac{f(\omega)e(\omega) - d(\omega)g(\omega)}{e^2(\omega) + g^2(\omega)},$$

kde $P(\omega)$ a $Q(\omega)$ sú racionálne funkcie v ω . Karteziánsky tvar frekvenčného prenosu je teda v tvare

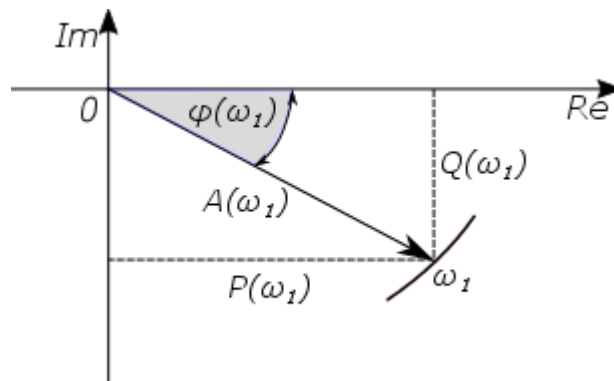
$$G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Existuje aj takzvaný polárny tvar frekvenčného prenosu

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

ktorý sme schopný získať z karteziánskeho tvaru. Vieme, že komplexné číslo je v komplexnej rovine bod. Jeho absolútna hodnota sa vyjadruje pomocou vzťahu (2). Amplitúdu frekvenčného prenosu, označovanú $A(\omega)$, môžeme považovať za absolútnu hodnotu tohto komplexného čísla a preto teda platí v tomto prípade vzťah

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$



Obrázok 11 Frekvenčný prenos v komplexnej rovine

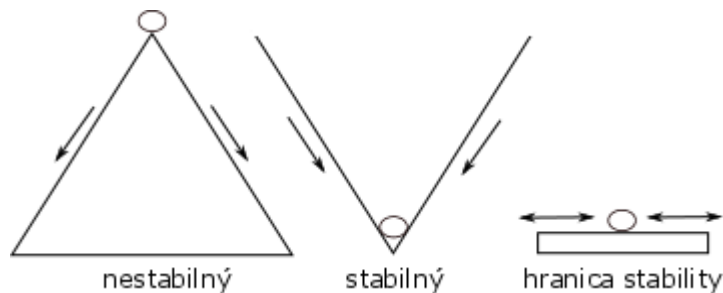
Pre fázový posun označovaný φ platí vzťah

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \rightarrow \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Grafické zobrazenie frekvenčného prenosu $G(j\omega)$ nazývané frekvenčná charakteristika sa prevádza v komplexnej rovine pre $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$. [4]

2.5.2 Stabilita dynamických systémov

V roku 1892 ruský matematik a fyzik Aleksander Mikhailovich Lyapunov vydal publikáciu *Všeobecný problém stability pohybu*, kde stanovil definíciu pre vnútornú stabilitu dynamických lineárnych a nelineárnych systémov. Stabilita dynamického systému predstavuje schopnosť systému vrátiť sa do pôvodného alebo iného rovnovážneho stavu pri vychýlení, spôsobením vonkajšími poruchami alebo zmenou požadovanej hodnoty. Na obrázku 11 môžeme vidieť štandardný príklad stability, kde je guľôčka v gravitačnom poli. Ak by guľôčka pri nestabilnom systéme sa trocha vychýlila, tak spadne dole bez možnosti vrátiť sa späť do pôvodného stavu. V prípade stabilného systému sa guľôčka vždy vráti späť do svojej rovnovážnej polohy po akomkoľvek vychýlení. [4]



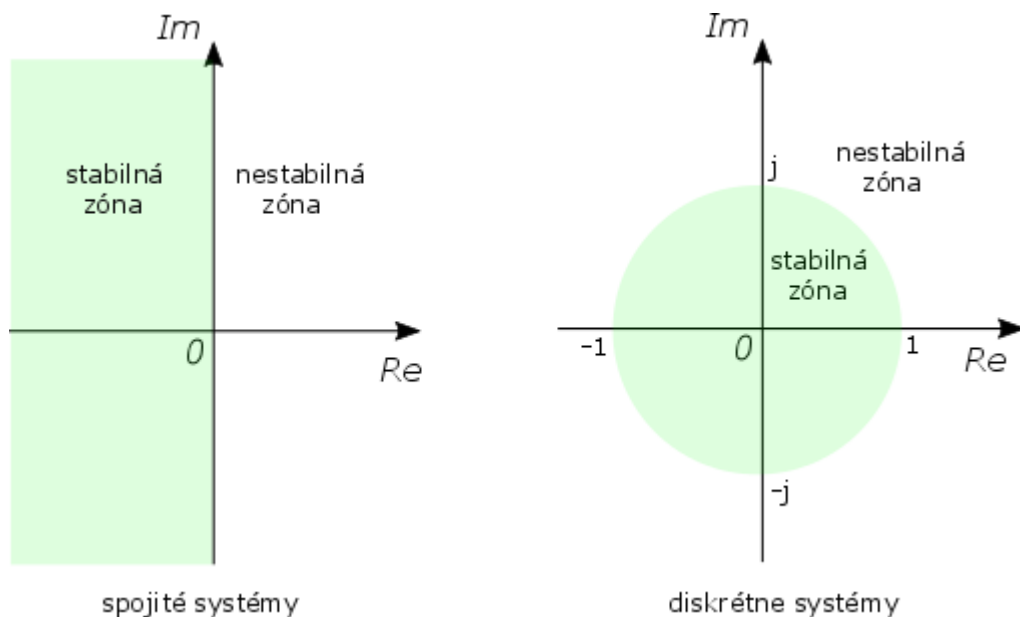
Obrázok 11: Stabilita guľôčky v gravitačnom poli

Pre pokračovanie charakterizovania stability dynamických systémov je nutné si vysvetliť pojem „pól“. Pól systému charakterizuje vnútornú dynamiku systému. Je rovný komplexným frekvenciám, ktoré je systém schopný vytvárať. Určujú sa z charakteristického polynómu menovateľa daného prenosu. Príklad určenia pólov môžeme vidieť podľa zadaného prenosu

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \rightarrow s_i: a(s_i) = 0,$$

kde $b(s)$ je Laplaceov obraz výstupnej veličiny, $a(s)$ je obraz vstupnej veličiny a s_i je pól daného prenosu. [4]

Pri definícii stability spojitých a diskretných systémov sa opäť využíva komplexná rovina. Pokiaľ sa póly spojitého systému nachádzajú v ľavej polrovine komplexnej roviny, tak systém považujeme za stabilný. Hlavnou podmienkou stability týchto systémov je, aby všetky koeficienty charakteristického polynómu mali rovnaké znamienko a ani jeden nebol rovný nule. V prípade diskretných systémov sa využíva jednotková kružnica v komplexnej rovine, kde ak všetky korene ležia vnútri tejto kružnice, tak systém je stabilný. [4]



Obrázok 13: Stabilita spojitých a diskretných systémov

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

3 RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1. Preved'te algebraický tvar komplexného čísla $z = 4\sqrt{2} + 4i$, na goniometrický tvar.

Riešenie.

Najprv vypočítame absolútnu hodnotu $|z|$, podľa vzorca (2)

$$|z| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4)^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48}$$

Teraz potrebujeme zistiť uhol, ktorý získame pomocou jednoduchých úprav

$$\cos \varphi = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{48}} = 35,26^\circ$$

Goniometrický tvar teda bude

$$z = \sqrt{48}(\cos 35,26^\circ + i \sin 35,26^\circ).$$

Príklad 2. Vypočítajte podiel dvoch komplexných čísel v goniometrickom tvare pre $z_1 = 4(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$ a $z_2 = 6(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$.

Riešenie.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}{6 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)}$$

Využijeme Eulerovu vetu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

$$\frac{4e^{i\frac{4\pi}{3}}}{6e^{i\frac{11\pi}{6}}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{4\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{8\pi - 11\pi}{6}} = \frac{2}{3} e^{i\frac{-\pi}{2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right).$$

Příklad 3. Pomocou exponenciálního tvaru vypočítajte $\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^{14}$.

Riešenie.

Najprv si prevediem komplexné číslo z goniometrického tvaru na tvar exponenciálny

$$\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^{14} = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{14} = e^{i\frac{4\pi}{3} \cdot 14} = e^{i\frac{56\pi}{3}}.$$

Vieme, že jedno otočenie okolo kružnice je 2π . Preto si od $\frac{56}{3}\pi = 18\frac{2}{3}\pi$ odčítam čo najväčší násobok 2π . V tomto prípade sa „otočíme“ po kružnici 9 krát, čo je 18π a po odčítaní mi ostane $\frac{2}{3}\pi$.

$$e^{i\frac{56\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Výsledkom je teda

$$\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^{14} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

Příklad 4. Vyriešte pomocou Moivreovej vety výraz $z = (3\sqrt{5} + 2i)^3$.

Riešenie.

Algebraický tvar si pretransformujeme najprv na tvar goniometrický

$$|z| = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + (2)^2} = \sqrt{45 + 4} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{7},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{2}{7} = 16,6^\circ.$$

Goniometrický tvar bude teda

$$z = 7(\cos 16,6^\circ + i \sin 16,6^\circ).$$

Teraz využijeme Moivreovu vetu a výsledok bude

$$\begin{aligned} (3\sqrt{5} + 2i)^3 &= 7^3(\cos 16,6^\circ + i \sin 16,6^\circ)^3 = \\ &= 343(\cos 16,6^\circ \cdot 3 + i \sin 16,6^\circ \cdot 3) = \\ &= 343(\cos 49,8^\circ + i \sin 49,8^\circ). \end{aligned}$$

Příklad 5. Vyjadrite v goniometrickom tvare komplexné číslo $z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Riešenie.

Najprv vypočítame

$$|z| = \sqrt{\left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

$$z = \sqrt{3} \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} + i \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

Získame teda argument φ podľa jednej z rovnice

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2},$$

použijeme napríklad sínus

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Takže

$$z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Příklad 6. V algebrickom tvare vyjadrite $z = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{9}{2} \pi + i \sin \frac{9}{2} \pi \right)$.

Riešenie.

Upravíme si tvar podľa periódy 2π

$$z = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{9}{2} \pi + i \sin \frac{9}{2} \pi \right) = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{1}{2} \pi + i \sin \frac{1}{2} \pi \right) = 0 + i \frac{\pi}{2}.$$

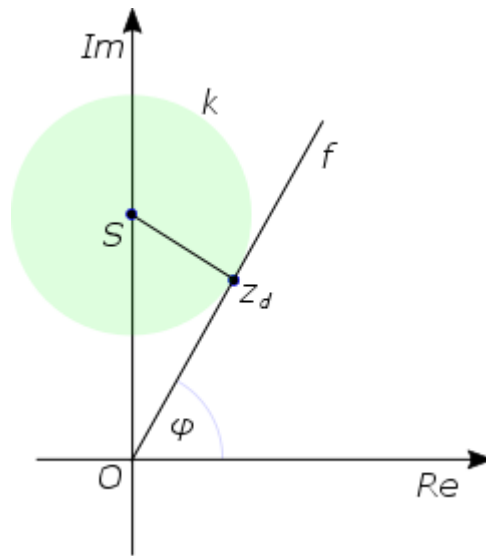
Algebrický tvar teda bude

$$z = i \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 7. Z komplexných čísel z , pre ktoré platí $|z - 20i| \leq 10$, vyberte tie, ktoré na intervale $(0, 2\pi)$ majú najmenší argument.

Riešenie.

Komplexné čísla, ktoré splňujú zadanú podmienku, vytvoria v komplexnej rovine kruh so stredom S , ktorý je obrazom čísla $20i$ a s polomerom 10. Z logického hľadiska teda najmenší argument bude číslo, kde sa akoby vektor rotujúci okolo počiatočného bodu v protismere hodinových ručičiek prvý krát dotkne kružnice. Tento bod sa nazýva dotykový bod, v našom prípade z_d , ktorý získame položením tečny f vedenej z počiatku súradnicovej sústavy ku kružnici k .



Obrázok 14: Znázornenie problému

$$z_d = |z_d|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$|z_d| = \sqrt{|OS|^2 - |Sz_d|^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10 \cdot \sqrt{3}.$$

Ďalej určíme

$$\cos \varphi = \frac{|Sz_d|}{|OS|} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{|z_d|}{|OS|} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dostali sme teda

$$z_d = 10 \cdot \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 5\sqrt{3} + 15i.$$

Příklad 8. V obore komplexných čísel vyriešte rovnicu $(p - 2)x^2 - (p - 4)x + 2p - 2 = 0$, premennej x , kde p je reálny parameter.

Riešenie.

$$D = (p - 4)^2 - 4(p - 2)(2p - 2)$$

$$D = p^2 - 8p + 16 - 4(2p^2 - 4p - 2p + 4)$$

$$D = -7p^2 + 16p = p(-7p + 16).$$

Pre $p = 2$, ide o lineárnu rovnicu, ktorá ma jedno riešenie, kde $x = -1$. Podľa diskriminantu dostaneme pre $D > 0 \rightarrow p \in (0, 2) \cup \left(2, \frac{16}{7}\right)$, pre $D = 0 \rightarrow p_1 = 0$ a $p_2 = \frac{16}{7}$, pre $D < 0 \rightarrow (-\infty, 0) \cup \left(\frac{16}{7}, \infty\right)$. V závislosti na parametri p teda dostávame:

$$p \in (-\infty, 0) \rightarrow \text{dva imaginárne korene } x_{1,2} = \frac{p-4 \pm i\sqrt{-p(16-7p)}}{2(p-2)},$$

$$p = 0 \rightarrow \text{dvojnásobný reálny koreň } x_{1,2} = 1,$$

$$p \in (0, 2) \rightarrow \text{dva rôzne reálne korene } x_{1,2} = \frac{p-4 \pm \sqrt{p(16-7p)}}{2(p-2)},$$

$$p = 2 \rightarrow \text{lineárna rovnica s koreňom } x_1 = -1,$$

$$p \in \left(2, \frac{16}{7}\right) \rightarrow \text{dva rôzne reálne korene } x_{1,2} = \frac{p-4 \pm \sqrt{p(16-7p)}}{2(p-2)},$$

$$p = \frac{16}{7} \rightarrow \text{dvojnásobný reálny koreň } x_{1,2} = -3,$$

$$p \in \left(\frac{16}{7}, \infty\right) \rightarrow \text{dva imaginárne korene } x_{1,2} = \frac{p-4 \pm i\sqrt{-p(16-7p)}}{2(p-2)}.$$

Příklad 9. V množine \mathbb{C} riešte rovnicu $x^5 + 4 - 4i = 0$.

Riešenie.

Rovnicu si upravíme na tvar

$$x^5 - (-4 + 4i) = 0,$$

kde číslo $-4 + 4i$ prevedieme do goniometrického tvaru

$$-4 + 4i = \sqrt{32} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Korene danej rovnice teda budú

$$x_k = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Po dosadení jednotlivých koeficientov za k dostaneme riešenia

$$x_0 = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right),$$

$$x_1 = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20} \right),$$

$$x_2 = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{17\pi}{20} + i \sin \frac{17\pi}{20} \right),$$

$$x_3 = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{25\pi}{20} + i \sin \frac{25\pi}{20} \right),$$

$$x_4 = \sqrt[5]{\sqrt{32}} \left(\cos \frac{33\pi}{20} + i \sin \frac{33\pi}{20} \right).$$

Príklad 10. V množine \mathbb{C} riešte rovnicu $(1 - i)x^2 - (5 - i)x + 6 - 4i = 0$.

Riešenie.

Určíme diskriminant

$$D = (5 - i)^2 - 4(1 - i)(6 - 4i) = 16 + 30i.$$

Prevedením diskriminantu na goniometrický tvar

$$D = 34 \left(\frac{16}{34} + i \frac{30}{34} \right),$$

Zistíme, že pre argument φ čísla D platí

$$\cos \varphi = \frac{8}{17},$$

$$\sin \varphi = \frac{15}{17}.$$

Odtiaľ potom pomocou vzorcov

$$\left| \cos \frac{1}{2} \varphi \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}},$$

$$\left| \sin \frac{1}{2} \varphi \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}},$$

získame

$$\left| \cos \frac{1}{2} \varphi \right| = \cos \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{25}{34}},$$

$$\left| \sin \frac{1}{2} \varphi \right| = \sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{9}{34}}.$$

Uvedomíme si, že $\sqrt{|D|} = \sqrt{34}$, dostaneme dva korene danej rovnice

$$x_{1,2} = \frac{5 - i \pm \sqrt{34} \left(\sqrt{\frac{25}{34}} + i \sqrt{\frac{9}{34}} \right)}{2(1 - i)} = \frac{5 - i \pm (5 + 3i)}{2(1 - i)}$$

a po úprave dostaneme

$$x_1 = 2 + 3i,$$

$$x_2 = 1 - i.$$

3.1 Diferenciálne rovnice

Príklad 11. Vyriešte zadanú diferenciálnu rovnicu $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Riešenie.

Aplikujeme kvadratickú formulu do charakteristickej rovnice $x^2 + 2x + 2 = 0$ a získame komplexné korene $x_{1,2} = -1 \pm i$. Podľa koreňov určíme $\alpha = -1$ a $\beta = 1$, ktoré po dosadení do rovnice (4) získam tvary

$$y_1 = e^{-x} \cos x,$$

$$y_2 = e^{-x} \sin x.$$

Príklad 12. Vyriešte zadanú diferenciálnu rovnicu $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Aplikujeme kvadratickú formulu do charakteristickej rovnice $x^2 - 3x + 13 = 0$ a získame komplexné korene $x_{1,2} = 2 \pm 3i$. Podľa koreňov určíme $\alpha = -3$ a $\beta = 3$, ktoré po dosadení do rovnice (4) získam tvary

$$y_1 = e^{-3x} \cos 3x,$$

$$y_2 = e^{-3x} \sin 3.$$

Příklad 13. Vyriešte zadanú lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu $6y'(t) + 8y(t) = 10t$ pri nulových počiatkových podmienkach pomocou Laplaceovej transformácie.

Riešenie.

Obraz ľavej strany získame použitím vzťahu (7), teda vety o derivácií originálu

$$\mathbb{L}\{6y'(t) + 8y(t)\} = 6sY(s) - y(0) + 8Y(s) = Y(s)(6s + 8).$$

Obraz pravej strany získame použitím vzťahu (5)

$$\mathbb{L}\{10t\} = \int_0^{\infty} 10te^{-st} dt.$$

Využijem metódu per partes

$$v = t \rightarrow v' = 1$$

$$u' = e^{-st} \rightarrow u = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

a pokračujeme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} 10te^{-st} dt &= 10 \left\{ \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} dt \right\} = \\ &= 10 \left\{ [0 - 0] + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right\} = \frac{10}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \\ &= -\frac{10}{s^2} [0 - 1] = \frac{10}{s^2}. \end{aligned}$$

Vypočítane obrazy ľavej a pravej strany dosadíme späť do rovnice a získame

$$Y(s)(6s + 8) = \frac{10}{s^2},$$

kde si vyjadríme $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{10}{s^2(6s + 8)}.$$

Teraz potrebujeme riešenie previezť späť do priestoru originálu pomocou spätnej Laplaceovej transformácie

$$y(t) = \mathbb{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2(6s + 8)}\right\}.$$

Použijeme metódu súčtu reziduí. Charakteristický polynóm menovateľa $s^2(6s + 8) = 0$ je polynóm tretieho stupňa a má pól druhého rádu $s_1 = 0$ a pól prvého rádu $s_2 = -\frac{8}{6}$. Výpočet teda bude prebiehať

$$y(t) = \sum \operatorname{res} \left[\frac{10}{s^2(6s + 8)} e^{st} \right]_{s=s_m},$$

kde pre pól s_1 sa musí využiť vzťah (6)

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{10}{s^2(6s + 8)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -\frac{8}{6}} \left[(6s + 8) \frac{10}{s^2(6s + 8)} e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{10te^{st}(6s + 8) - 60e^{st}}{(6s + 8)^2} \right] + \lim_{s \rightarrow -\frac{8}{6}} \left[\frac{10}{s^2} e^{st} \right] = \\ &= \frac{80t - 60}{64} + \frac{10}{16} e^{-\frac{8}{6}t} = \frac{80}{64}t - \frac{60}{64} + \frac{90}{16} e^{-\frac{4}{3}t}. \end{aligned}$$

Po skrátení výsledku dostávame partikulárne riešenie zadanej diferenciálnej rovnice v tvare

$$y(t) = \frac{5}{4}t - \frac{15}{16} + \frac{45}{8} e^{-\frac{4}{3}t}.$$

Príklad 14. Vyriešte zadanú lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 1$ pri počiatočných podmienkach $y(0) = 1, y'(0) = 0$, pomocou Laplaceovej transformácie.

Riešenie.

Obraz ľavej strany získame podľa vzťahu (7)

$$\begin{aligned} &s^2Y(s) - y(0) - y'(0) + 5[sY(s) - y(0)] + 4Y(s) = \\ &= s^2Y(s) - 1 + 5sY(s) - 5 + 4Y(s) = Y(s)(s^2 + 5s + 4) - 6 \end{aligned}$$

Obraz pravej strany získame pomocou vzťahu (5)

$$\mathbb{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s}.$$

Dosadíme oba obrazy do rovnosti a získame tvar

$$Y(s)(s^2 + 5s + 4) - 6 = \frac{1}{s}.$$

Vyjadříme si $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1 + 6s}{s^2 + 5s + 4} = \frac{6s + 1}{s(s^2 + 5s + 4)} = \frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)}.$$

Riešenie prevedieme pomocou spätnej Laplaceovej transformácie na originál

$$y(t) = \mathbb{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)}\right\}.$$

Použijeme metódu súčtu reziduí. Charakteristický polynóm menovateľa $s(s + 1)(s + 4) = 0$, je polynóm tretieho stupňa a má póly prvého rádu $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = -4$. Výpočet bude

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum \operatorname{res} \left[\frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)} e^{st} \right]_{s=s_m}, \\ y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -1} \left[(s + 1) \frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)} e^{st} \right] + \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow -4} \left[(s + 4) \frac{6s + 1}{s(s + 1)(s + 4)} e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{3} e^{-t} + \frac{-23}{12} e^{-4t}. \end{aligned}$$

Riešením diferenciálnej rovnice je

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{5}{3} e^{-t} + \frac{-23}{12} e^{-4t}.$$

Príklad 15. Vyriešte zadanú lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$ pri počiatočných podmienkach $y'(0) = 3, y(0) = 0$ pomocou Laplaceovej transformácie.

Riešenie.

Obraz ľavej strany získame podľa vzťahu (7)

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - y(0) - 3 + 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) &= \\ = s^2 Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) - 3 &= Y(s)(s^2 + 2s + 3) - 3 \end{aligned}$$

Určme teraz obraz na pravej strane

$$\mathbb{L}\{0\} = 0.$$

Položíme do rovnosti obe strany a získame tvar

$$Y(s)(s^2 + 2s + 3) - 3 = 0.$$

Vyjadříme $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 3} = \frac{3}{(s^2 + 2s + 3)}.$$

Získame korene charakteristického polynómu menovateľa $(s^2 + 2s + 3) = 0$

$$s_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Rozložíme menovateľ teda na súčin koreňových činiteľov a riešime spätnú Laplaceovu transformáciu

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{(s^2 + 2s + 3)} = \frac{3}{(s + 1 + i\sqrt{2})(s + 1 - i\sqrt{2})}. \\ y(t) &= \mathbb{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathbb{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s + 1 - i\sqrt{2})(s + 1 + i\sqrt{2})}\right\} = \\ &= \sum \operatorname{res} \left[\frac{3}{(s + 1 - i\sqrt{2})(s + 1 + i\sqrt{2})} \right]_{s=s_m} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1 + i\sqrt{2}} \left[(s + 1 - i\sqrt{2}) \frac{3}{(s + 1 - i\sqrt{2})(s + 1 + i\sqrt{2})} e^{st} \right] + \\ &+ \lim_{s \rightarrow -1 - i\sqrt{2}} \left[(s + 1 + i\sqrt{2}) \frac{3}{(s + 1 - i\sqrt{2})(s + 1 + i\sqrt{2})} e^{st} \right] = \\ &= \frac{3}{-1 + i\sqrt{2} + 1 + i\sqrt{2}} e^{(-1 + i\sqrt{2})t} + \frac{3}{-1 - i\sqrt{2} + 1 - i\sqrt{2}} e^{(-1 - i\sqrt{2})t} = \\ &= \frac{3}{2i\sqrt{2}} e^{(-1 + i\sqrt{2})t} + \frac{3}{-2i\sqrt{2}} e^{(-1 - i\sqrt{2})t} = \\ &= 3 \left[\frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{(-1 + i\sqrt{2})t} + \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{(-1 - i\sqrt{2})t} \right]. \end{aligned}$$

Využijeme teraz Eulerovo vzťah a získame tvar

$$y(t) = 3 \left\{ \frac{-i}{2\sqrt{2}} [\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t)] e^{-t} + \frac{i}{2\sqrt{2}} [\cos(\sqrt{2}t) - i \sin(\sqrt{2}t)] e^{-t} \right\},$$

kde po úpravách dostávame riešenie zadanej diferenciálnej rovnice

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) e^{-t}.$$

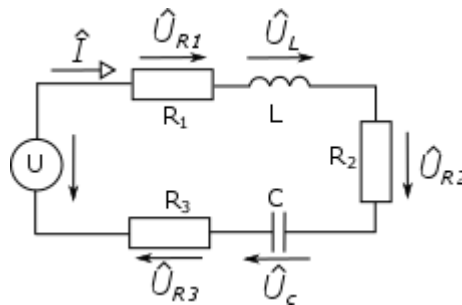
3.2 RLC problematika

Príklad 16. Máme sériovo zapojené prvky R,L,C k striedavému napätiu U s frekvenciou f . Vypočítajte prúd \hat{I} , tečúci obvodom a úbytok napätia na jednotlivých prvkoch v obvode.

Zadané hodnoty:

$$U = 220 \text{ V}, R_1 = 50 \text{ } \Omega, R_2 = 150 \text{ } \Omega, R_3 = 100 \text{ } \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 12 \text{ } \mu\text{F}, f = 50 \text{ Hz}$$

$$\hat{I}, \hat{U}_{R_1}, \hat{U}_{R_2}, \hat{U}_{R_3}, \hat{U}_C, \hat{U}_L = ?$$



Obrázok 15: Zapojenie RLC pre príklad 16

Riešenie.

Celková impedancia sériovo zapojených prvkov v obvode bude vyjadrená v tvare

$$\hat{Z} = R_1 + j\omega L + R_2 + \frac{1}{j\omega C} + R_3.$$

Vypočítame si uhlovú frekvenciu podľa vzťahu

$$\omega = 2\pi f = 314.$$

Dosadíme do rovnice pre impedanciu všetky známe hodnoty a vypočítame ju

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= 50 + 314j + 150 + \frac{1}{314j \cdot 12 \cdot 10^{-6}} + 100 = \\ &= 300 + 314j - 265,39j = (300 - j48,61) \text{ } \Omega. \end{aligned}$$

Teraz si môžeme vypočítať prúd I tečúci obvodom

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \frac{220}{300 - 48,61j} = \frac{220(300 + 48,61j)}{300^2 + 48,61^2} = (0,71 + j0,12) \text{ A},$$

$$I = \sqrt{0,71^2 + 0,12^2} = 0,72 \text{ A.}$$

Fázor \hat{I} prevedieme do exponenciálneho tvaru

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(\hat{I})}{\text{Re}(\hat{I})},$$

$$\varphi = \arctan \frac{0,12}{0,71} = 9,6^\circ,$$

$$\hat{I} = 0,72e^{j9,6^\circ} \text{ A.}$$

Teraz určíme napätia na jednotlivých prvkoch v obvode

$$\hat{U}_{R1} = R_1 \hat{I} = 50 \cdot 0,72e^{j9,59^\circ} = 36e^{j9,6^\circ} \text{ V,}$$

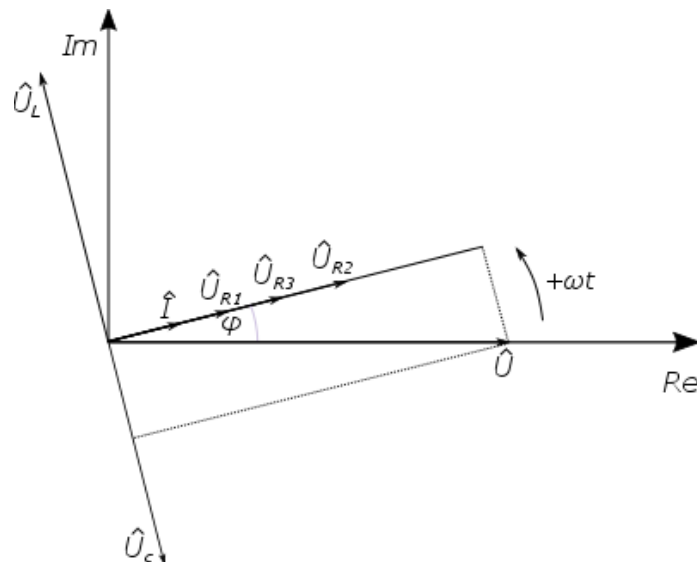
$$\hat{U}_{R2} = R_2 \hat{I} = 150 \cdot 0,72e^{j9,59^\circ} = 108e^{j9,6^\circ} \text{ V,}$$

$$\hat{U}_{R3} = R_3 \hat{I} = 100 \cdot 0,72e^{j9,59^\circ} = 72e^{j9,6^\circ} \text{ V,}$$

$$\hat{U}_L = j\omega L \hat{I} = j314 \cdot 1 \cdot 0,72e^{j9,59^\circ} = 226,08e^{j99,6^\circ} \text{ V,}$$

$$\hat{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \hat{I} = -j \frac{1}{314 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,72e^{j9,59^\circ} = 191,08e^{-j80,4^\circ} \text{ V.}$$

Fázový diagram bude vyzerat' podľa obrázka 16



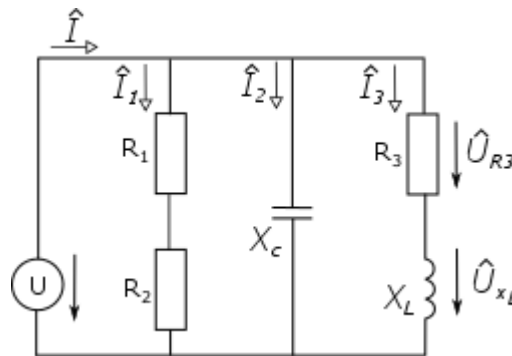
Obrázok 16: Fázový diagram

Príklad 17. Prvky R,L,C v paralelnom zapojení podľa obrázka 17 sú pripojené k striedavému napätiu U s frekvenciou f . Vypočítajte finálny prúd \hat{I} , prúdy $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ v jednotlivých vetvách a úbytky napätia na jednotlivých prvkoch R_3 a X_L .

Zadané hodnoty:

$$U = 220 \text{ V}, R_1 = 200 \text{ } \Omega, R_2 = 50 \text{ } \Omega, R_3 = 50 \text{ } \Omega, X_L = 200 \text{ } \Omega, X_C = 400 \text{ } \Omega, f = 50 \text{ Hz}$$

$$\hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3, \hat{U}_{X_L}, \hat{U}_{R_3} = ?$$



Obrázok 17: Zapojenie RLC pre príklad 17

Riešenie.

Hneď na začiatku sme schopní určiť \hat{I}_3 ako

$$\hat{I}_3 = \frac{\hat{U}}{R_3 + jX_L} = \frac{220}{50 + j200} = \frac{220(50 - j200)}{50^2 + 200^2} = (0,26 - j1,04)A,$$

$$|\hat{I}_3| = \sqrt{0,26^2 + 1,04^2} = 1,07A,$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{-1,04}{0,26} = -76^\circ,$$

$$\hat{I}_3 = 1,07e^{-j76^\circ} A.$$

Ďalej určíme \hat{I}_2 a \hat{I}_1 ako

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}}{-jX_C} = j \frac{220}{400} = j0,5 = 0,5e^{90^\circ} A,$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{R_1 + R_2} = \frac{220}{250} = 0,88 A.$$

Celkový prúd určíme súčtom všetkých fázových prúdov, čo v našom prípade bude

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3,$$

$$\hat{I} = 0,88 + 0,5j + 0,26 - 1,04j,$$

$$\hat{I} = (1,14 - j0,54) A,$$

$$I = \sqrt{1,14^2 + 0,54^2} = 1,26 A,$$

$$\varphi = \arctan \frac{-0,54}{1,14} = -25,35^\circ,$$

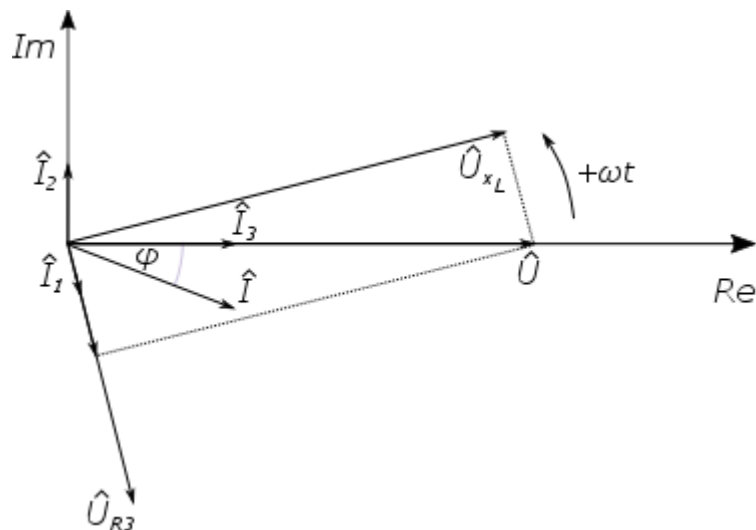
$$\hat{I} = 1,26e^{-j25,35^\circ} A.$$

A nakoniec zistíme úbytky napätia na R_3 a X_L

$$\hat{U}_{X_L} = jX_L \cdot \hat{I}_3 = j200 \cdot 1,07e^{-j76^\circ} = 214e^{j14^\circ} V,$$

$$\hat{U}_{R_3} = R_3 \cdot \hat{I}_3 = 50 \cdot 1,07e^{-j76^\circ} = 53,5e^{-j76^\circ} V.$$

Fázový diagram je na obrázku 18.



Obrázok 18: Fázový diagram

3.3 Teória systémov

Príklad 18. Určte frekvenčný prenos pre zadaný prenos $G(s) = \frac{3}{3s+1}$ v zložkovom tvare.

Riešenie.

Zavedieme substitúciu

$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega},$$

$$G(j\omega) = \frac{3}{3(j\omega) + 1} = \frac{3}{3(j\omega) + 1} \cdot \frac{-3(j\omega) + 1}{-3(j\omega) + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{-9j\omega + 3}{9\omega^2 + 1} = \frac{3}{9\omega^2 + 1} + j \frac{(-9\omega)}{9\omega^2 + 1}.$$

Příklad 19. Určte frekvenční prenos v exponenciálnom tvare z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie.

Zložkový tvar z minulého príkladu bol

$$G(j\omega) = \frac{3}{9\omega^2 + 1} + j \frac{(-9\omega)}{9\omega^2 + 1}.$$

Exponenciálny tvar určíme podľa

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

kde amplitúda

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2},$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{3}{9\omega^2 + 1}\right)^2 + j \left(\frac{-9\omega}{9\omega^2 + 1}\right)^2},$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{9 + 81\omega^2}{(9\omega^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{9(9\omega^2 + 1)}{(9\omega^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{9}{9\omega^2 + 1}},$$

$$A(\omega) = \frac{3}{\sqrt{9\omega^2 + 1}}$$

Fáza bude

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctan \left(\frac{\frac{(-9\omega)}{9\omega^2 + 1}}{\frac{3}{9\omega^2 + 1}} \right) = \arctan(-3\omega),$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(3\omega).$$

Exponenciálny tvar teda bude

$$G(j\omega) = \frac{3}{\sqrt{9\omega^2 + 1}} e^{-j \cdot \arctan(3\omega)}.$$

Příklad 20. Určte frekvenční přenos pro zadaný přenos $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ v exponenciálním tvaru.

Riešenie.

Zavedieme substitúciu

$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega}$$

a riešime

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 4} = \frac{1}{-\omega^2 + 4j\omega + 4} \cdot \frac{-\omega^2 - 4j\omega + 4}{-\omega^2 - 4j\omega + 4}$$

$$G(j\omega) = \frac{4 - \omega^2 - 4j\omega}{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} = \frac{4 - \omega^2}{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2} - j \frac{4\omega}{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

Vypočítame teraz amplitúdu

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}{\sqrt{[(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2]^2}} = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}$$

Fáza bude

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-4\omega}{4 - \omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{4\omega}{4 - \omega^2}\right)$$

Exponenciálny tvar frekvenčného prenosu bude

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan\left(\frac{4\omega}{4 - \omega^2}\right)}$$

Příklad 21. Určte stabilitu systému zadaného charakteristickým polynómom $F(s) = s^2 + 7s + 12$.

Riešenie.

Vyriešime daný polynóm ako kvadratickú rovnicu a získame korene

$$s_1 = -3,$$

$$s_2 = -4.$$

Oba korene ležia teda v ľavej polrovine Gaussovej roviny a môžeme povedať, že systém je stabilný.

Příklad 22. Určte stabilitu systému zadaného charakteristickým polynómom $F(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$.

Riešenie.

Zistíme korene danej rovnice pomocou ľubovoľnej metódy pre riešenie polynómov vyšších radov a získame trojnásobný koreň

$$s_{1,2,3} = -1.$$

Všetky korene sú záporné a systém je teda stabilný.

Příklad 23. Určte stabilitu systému zadaného charakteristickým polynómom $F(s) = s^4 + s^3 - 12s^2 - 28s - 16$.

Riešenie.

Zistíme korene danej rovnice pomocou ľubovoľnej metódy pre riešenie polynómov vyšších radov a získame korene

$$s_1 = -1,$$

$$s_{2,3} = -2$$

$$s_4 = 4.$$

Jeden z koreňov leží v pravej polrovine Gaussovej roviny a systém je teda nestabilný.

4 WOLFRAM MATHEMATICA

Mathematica je výpočtový program používaný najmä vo vedeckých, strojárskych, počítačových a matematických oborov, založený na symbolickej matematike. Bol vyvinutý spoločnosťou Wolfram Research Champaign a využíva svoj vlastný programovací jazyk Wolfram.

Wolfram Jazyk má podporu pre obe explicitne vyjadrené komplexné čísla a symbolické komplexné premenné. Všetky použiteľné matematické funkcie podporujú vyhodnotenie výsledku pre komplexné hodnoty všetkých parametrov a symbolické operácie automaticky zaobchádzajú s komplexnými premennými v plnej všeobecnosti. Reprezentácia imaginárnej jednotky v jazyku Wolfram sa definuje konštantou I rovnajúcej sa $\sqrt{-1}$.

Príklad 24. V programe Mathematica zapíšte komplexné číslo $3 + 2I$ do premennej x a následne vypíšte jeho reálnu a imaginárnu časť, absolútnu hodnotu, komplexne združené číslo a argument.

Riešenie.

```
In[1]:= x = 3 + 2 I
Out[1]= 3 + 2 i

In[2]:= Re[x]
Out[2]= 3

In[3]:= Im[x]
Out[3]= 2

In[4]:= Abs[x]
Out[4]=  $\sqrt{13}$ 

In[5]:= Conjugate[x]
Out[5]= 3 - 2 i

In[6]:= Arg[x]
Out[6]= ArcTan[ $\frac{2}{3}$ ]
```

Príklad 25. Pre dve zadané komplexné čísla $a = 5 + 2i$, $b = 6 - 4i$ analyticky vypočítajte nasledovné operácie: a) súčet b) súčin c) rozdiel d) podiel a porovnajte ich so softvérom Wolfram Mathematica.

Analytické riešenie.a) *Súčet*

$$(5 + 2i) + (6 - 4i) = (5 + 6) + [2i + (-4i)] = 11 - 2i$$

b) *Súčin*

$$(5 + 2i) \times (6 - 4i) = 30 - 20i + 12i - 8i^2 = 30 - 8i + 8 = 38 - 8i$$

c) *Rozdiel*

$$(5 + 2i) - (6 - 4i) = (5 - 6) + [2i - (-4i)] = -1 + 6i$$

d) *Podiel*

$$\begin{aligned} \frac{(5 + 2i)}{(6 - 4i)} &= \frac{(5 + 2i)}{(6 - 4i)} \cdot \frac{(6 + 4i)}{(6 + 4i)} = \frac{30 + 20i + 12i + 8i^2}{36 - 24i + 24i - 16i^2} = \frac{30 + 32i - 8}{36 + 16} = \\ &= \frac{22 + 32i}{52} = \frac{22}{52} + \frac{32}{52}i = \frac{11}{26} + \frac{8}{13}i \end{aligned}$$

Riešenie v programe Mathematica.

Najprv si zadané komplexné čísla uložíme do premenných a, b a nasledovne s nimi vykonávame jednotlivé operácie.

In[7]:= $a = 5 + 2 I$ Out[7]= $5 + 2 i$ In[8]:= $b = 6 - 4 I$ Out[8]= $6 - 4 i$ a) *Súčet*In[9]:= $a + b$ Out[9]= $11 - 2 i$ b) *Súčin*In[10]:= $a * b$ Out[10]= $38 - 8 i$ c) *Rozdiel*In[11]:= $a - b$ Out[11]= $-1 + 6 i$

d) Podiel

```
In[12]:= a / b
Out[12]=  $\frac{11}{26} + \frac{8 i}{13}$ 
```

Môžeme vidieť, že riešenia sú zhodné a náš analyticky výpočet je teda správny.

Príklad 26. Určte korene kvadratickej rovnice $x^2 - 4x + 5 = 0$ v komplexnej rovine pomocou Wolfram Mathematica.

Riešenie.

```
In[13]:= Solve[x^2 - 4 x + 5 == 0, x]
Out[13]= {{x -> 2 - i}, {x -> 2 + i}}
```

Príklad 27. Nech máme zadanú kvadratickú rovnicu $2x^2 + \beta x + 15 = 0$. Určte analyticky množinu celých čísel pre premennú β , tak aby korene tejto rovnice po vyriešení patrili do množiny \mathbb{C} . Overte v programe Wolfram Mathematica.

Riešenie.

Po dosadení do vzorca pre diskriminant dostávame

$$D = \beta^2 - 120.$$

Pokiaľ chceme získať komplexné korene, musí byť diskriminant záporný. Upravíme teda rovnicu pre diskriminant do tvaru

$$\beta^2 < 120,$$

$$\beta < \sqrt{120},$$

$$\beta > -\sqrt{120}.$$

Po umocnení dostávame vyhovujúci interval $(-10,95; 10,95)$. Keďže je podľa zadania nutné určiť celočíselnú množinu, tak zaokrúhľime koncové hodnoty vypočítaného intervalu a získame celočíselný interval $\langle -10; 10 \rangle$. V programe Wolfram Mathematica dosadíme čísla z intervalu, mimo interval a na hranici intervalu.


```

In[14]:= Solve[2 x^2 - 11 x + 15 == 0, x]
Out[14]= {{x -> 5/2}, {x -> 3}}

In[15]:= Solve[2 x^2 + 11 x + 15 == 0, x]
Out[15]= {{x -> -3}, {x -> -5/2}}

In[16]:= Solve[2 x^2 - 10 x + 15 == 0, x]
Out[16]= {{x -> 1/2 (5 - i sqrt(5))}, {x -> 1/2 (5 + i sqrt(5))}}

In[17]:= Solve[2 x^2 + 10 x + 15 == 0, x]
Out[17]= {{x -> 1/2 (-5 - i sqrt(5))}, {x -> 1/2 (-5 + i sqrt(5))}}

In[18]:= Solve[2 x^2 - 9 x + 15 == 0, x]
Out[18]= {{x -> 1/4 (9 - i sqrt(39))}, {x -> 1/4 (9 + i sqrt(39))}}

In[19]:= Solve[2 x^2 + 9 x + 15 == 0, x]
Out[19]= {{x -> 1/4 (-9 - i sqrt(39))}, {x -> 1/4 (-9 + i sqrt(39))}}

```

Môžeme vidieť, že náš analyticky výpočet je správny.

Príklad 28. Vyjadrite komplexné číslo $2e^{3i}$ v goniometrickom tvare.

Riešenie.

Príkaz `ExpToTrig[výraz]` konvertuje výraz z exponenciálneho tvaru na goniometrický tvar.

```

In[20]:= ExpToTrig[2 Exp[3 I (x)]]
Out[20]= 2 Cos[3 x] + 2 i Sin[3 x]

```

Príklad 29. Vyjadrite komplexné číslo $2 \cos 3x + 2i \sin 3x$ v exponenciálnom tvare.

Riešenie.

Príkaz `TrigToExp[výraz]` konvertuje výraz z goniometrického tvaru na exponenciálny tvar.

```

In[21]:= TrigToExp[2 * Cos[3 * x] + 2 * I * Sin[3 * x]]
Out[21]= 2 e^{3 i x}

```

Môžeme si všimnúť, že riešenie je zhodné zo zadaným komplexným číslom v predchádzajúcom príklade a tak je to naozaj správne.

Příklad 30. Rozložte na súčin polynómov výraz $x^4 - 1$ tak, aby tento rozložený súčin obsahoval aj súčiniteľ s komplexnými číslami.

Riešenie.

Príkaz `Factor`[výraz] vyjadruje výraz v tvare súčinu koreňových činiteľov reálnych čísel.

```
In[22]:= Factor[x^4 - 1]
Out[22]= (-1 + x) (1 + x) (1 + x^2)
```

Príkaz `GaussianIntegers` rozširuje v tomto prípade možnosti príkazu `Factor` o množinu súčinu koreňových činiteľov komplexných celých čísel.

```
In[23]:= Factor[x^4 - 1, GaussianIntegers -> True]
Out[23]= (-1 + x) (-i + x) (i + x) (1 + x)
```

Příklad 31. Vygenerujte tri náhodne komplexné číslo v kde reálna časť bude z intervalu $\langle 0,5 \rangle$ a imaginárna časť bude z intervalu $\langle 10,15 \rangle$.

Riešenie.

Pre generovanie náhodných komplexných čísel slúži príkaz `RandomComplex`[výraz].

```
In[24]:= RandomComplex[{5 + 10 I, 15 I}, 3]
Out[24]= {4.11014 + 12.1823 i, 4.72874 + 11.9752 i, 2.24906 + 10.3446 i}
```

Příklad 32. Rozložte funkciu $f(x) = \cos 2x + i \sin 2x$.

Riešenie.

Funkcia `TrigExpand`[výraz] rozkladá zadanú funkciu.

```
In[25]:= TrigExpand[Cos[2 x] + I * Sin[2 x]]
Out[25]= Cos[x]^2 + 2 i Cos[x] Sin[x] - Sin[x]^2
```

Příklad 33. Výsledok z minulého príkladu redukujte.

Riešenie.

Príkaz `TrigReduce`[výraz] slúži k zredukovaní zadaného výrazu.

```
In[26]:= TrigReduce[Cos[x * x] + 2 * I * Cos[x] * Sin[x] - Sin[x * x]]
Out[26]= Cos[x^2] + i Sin[2 x] - Sin[x^2]
```

5 NERIEŠENÉ PŘÍKLADY

1. Vypočítajte a zjednodušte

a) i^9

b) i^{799}

c) $i^{65} + i^{15} - i^{17}$

d) $18i^6 + 8i^{18} - 10i^{15} + 6i^{533}$

e) $1 - \frac{1}{i+1}(2 - i)$

f) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

g) $(3i - 5)5 + (1 + 2i)^2$

h) $6i^2 - 3(4 + 3i^2)^2 + \frac{(2-5i)}{6}$

2. Vypočítajte absolútnu hodnotu

a) $3 + 3i$

b) $-7 - 2i$

c) $\frac{1}{6} + \frac{i}{4}$

d) $(i + 1)^2$

e) $\frac{2+i}{1+3i}$

f) $i^8 + 2i - 6$

g) $(2 + 2i)^3$

h) $\frac{1}{i}$

3. Vypočítajte súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch čísel x a y

a) $x = 5 + 3i, y = 1 + i$

b) $x = \frac{5}{2} + \frac{3}{4}i, y = 3i^2 + \frac{2}{3}i$

c) $x = (2 + i)^2 + 3i, y = 5i$

d) $x = \frac{1+2i}{5}, y = i^4 + 2i^8 + 3i^{12}$

4. Preved'te na goniometrický tvar

a) $3 + 4i$

b) $\sqrt{4} - i\sqrt{6}$

c) $(1 + 3i)^2$

d) $\frac{5}{2} + \frac{3}{i}$

5. Preved'te na algebraický tvar

a) $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

b) $\frac{5}{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

c) $10 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

6. Riešte rovnicu v množine \mathbb{C}

a) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

b) $x^2 - 4x = -6$

c) $x^4 - 1 = 0$

d) $x^2 - 11x + 6 = 0$

e) $\frac{1}{x-5} + \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x-4}$

f) $2x + i = \frac{3}{x} + \frac{2}{i}$

ZÁVER

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bolo ozrejmiť teóriu komplexných čísel, poukázať na ich vlastnosti, na operácie vykonávané pomocou týchto čísel, ich grafické znázornenie v komplexnej rovine, upozorniť na známe vety a vzorce týkajúce sa výpočtov a práce s komplexnými číslami, následne demonštrovať tieto teoretické poznatky na príkladoch a nakoniec aplikovanie týchto čísel v rôznych vedných oboroch.

V teoretickej časti som uviedol historický vývoj komplexného čísla, kde sa prvý krát objavuje komplexné číslo už v prvom storočí nášho letopočtu a známých matematikov, ktorí prispeli k tomuto vývoju. Poukázal som na fakt, že komplexné číslo sa dá reprezentovať vo viacerých tvaroch a objasnil súvislosť medzi týmito vzťahmi. Poukázal som na komplexné číslo ako vektor a zobrazil jednotlivé aritmetické operácie nielen analyticky ale aj pomocou vektorov v komplexnej rovine. Počas práce som ozrejmil Eulerov vzťah či Moivreovu vetu, ktorú som dokázal matematickou indukciou. V poslednej kapitole teoretickej časti som poukázal na využitie komplexných čísel pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie, v oblasti elektrotechniky pri riešení RLC problematiky a v obore teórie systémov pri výpočtoch frekvenčného prenosu a určení stability lineárne dynamických systémov.

V praktickej časti sa mi podarilo ukázať základné vzťahy komplexných čísel uvedené v teoretickej časti na riešených príkladoch. Taktiež som objasnil teoretický výklad problematiky v RLC obvodoch a teórii systémov na riešených príkladoch. Následne som definoval základné príkazy v prostredí Wolfram Mathematica a ozrejmil ich použitie pomocou demonštrujúcich príkladov. Nakoniec som zostavil zbierku neriešených úloh, ktoré by mohli slúžiť pri výuke predmetu Základy matematiky.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY

- [1] KOLÁŘ, Martin a Čestmír BÁRTA. *Přehled historie komplexních čísel* [online]. 2013 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: http://trilian.ujep.cz/svoc/2013/k1/Barta_Kolar.pdf
- [2] ZILL, Dennis G a Patrick D SHANAHAN. *A first course in complex analysis with applications*. Boston: Jones and Bartlett, c2003, 1 v. (various pagings). ISBN 0763714372.
- [3] ŠILÁROVÁ, . *Komplexní čísla ve výuce matematiky na střední škole s využitím internetu* [online]. 2006 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/silarova/index.html>
- [4] NAVRÁTIL, Pavel. *Automatizace - vybrané statě* [online]. 2011 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <https://digilib.k.utb.cz/handle/10563/18581>
- [5] RÁB, Miloš. *Komplexní čísla v elementární matematice*. 2. přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1996, vii, 209 s. ISBN 80-210-1475-x.
- [6] WEIR, Maurice D, Joel HASS, George B THOMAS a Ross L FINNEY. *Thomas' calculus*. 11th ed., media upgrade. Boston: Pearson Addison Wesley, c2008, 1 v. (various pagings). ISBN 032148987x.
- [7] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 6., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995, xxxii, 720 s. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-85849-92-5.
- [8] WOLFRAM [online]. 1988 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <http://reference.wolfram.com/language/>
- [9] JAROSLAV, Reichl. *RLC obvody* [online]. 2006 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: http://www.jreichl.com/fyzika/vyuka/texty/rlc_obvody.pdf
- [10] CAIN, George. *Complex Analysis* [online]. 1999 [cit. 2015-05-21]. Dostupné z: <http://people.math.gatech.edu/~cain/winter99/complex.html>

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

\mathbb{Z}	Množina celých čísel
\mathbb{N}	Množina prirodzených čísel
\mathbb{R}	Množina reálnych čísel
\mathbb{C}	Množina komplexných čísel
\mathbb{L}	Operátor Laplaceovej transformácie
\mathbb{L}^{-1}	Operátor spätnej Laplaceovej transformácie
$G(s)$	Prenos lineárneho dynamického systému
s	Komplexná premenná
\mathbb{G}	Gaussova rovina
$\arg(z)$	Argument komplexného čísla z
$\text{Arg}(z)$	Hlavný argument komplexného čísla z
V	Volt
A	Ampér

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1: Komplexné číslo v zložkovom tvare.....	14
Obrázok 2: Jednotková kružnica.....	15
Obrázok 3: Komplexne združené číslo.....	15
Obrázok 4: Súčet komplexných čísel.....	16
Obrázok 5: Rozdiel komplexných čísel.....	17
Obrázok 6: Súčin komplexných čísel.....	18
Obrázok 7: Podiel komplexných čísel.....	20
Obrázok 8: Polárne súradnice v komplexnej rovine.....	20
Obrázok 9: Jednotková kružnica komplexnej roviny.....	22
Obrázok 10: Princíp výpočtu pri použití Laplaceovej transformácie.....	27
Obrázok 11: Frekvenčný prenos v komplexnej rovine.....	33
Obrázok 12: Stability guľôčky v gravitačnom poli.....	33
Obrázok 13: Stabilita spojitých a diskretných systémov v komplexnej rovine.....	34
Obrázok 14: Znáročenie problému.....	39
Obrázok 15: Zapojenie RLC pre príklad 16.....	47
Obrázok 16: Fázový diagram.....	48
Obrázok 17: Zapojenie RLC pre príklad 17.....	49
Obrázok 18: Fázový diagram.....	50