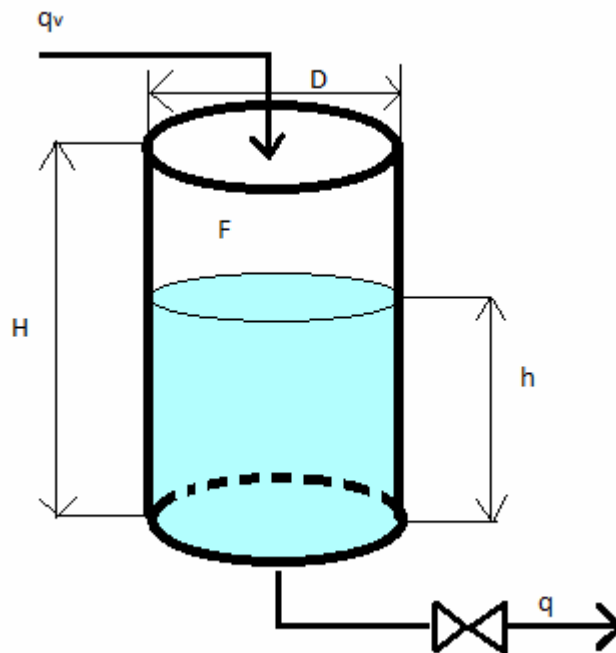


Válcový zásobník na kapalinu

Na obrázku vidíme válcový zásobník na kapalinu o průměru D [m] a výšce H [m] s průřezem F [m²] a objemovým průtokem kapaliny q [m³/min]. Vstupem do systému je objemový průtok $q_v(t)$ a stavovou veličinou, totožnou se výstupní veličinou, je výška hladiny kapaliny $h(t)$ [m].



Válcový zásobník na kapalinu

Zjednodušující předpoklady

- zásobník je otevřený.
- průřez zásobníku a atmosférický tlak jsou konstantní.

Výsledný matematický model má tvar:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{F} [q_v(t) - k\sqrt{h(t)}]$$

Ošetření chybových stavů saturací

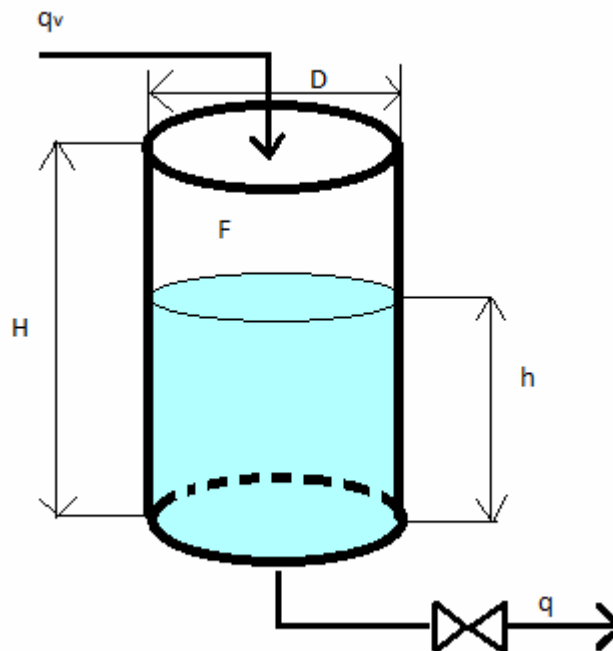
- min $h(t) = 0$
- max $h(t) = H$

Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Cylindrical Tank for Liquid

The picture shows a cylindrical tank for liquid with a diameter D [m] and height H [m] with a cross F [m²] and the volumetric fluid flow rate q [m³/min]. Input to the system is the volumetric flow rate $q_v(t)$ and state variable, which is identical to output variable, the height of the liquid level $h(t)$ [m].



Cylindrical Tank for Liquid

Simplifying assumptions

- tank is open.
- cross section of tank and atmospheric pressure are constant.

The final mathematical model has the form:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{F} [q_v(t) - k\sqrt{h(t)}]$$

Error handling by saturation

- $\min h(t) = 0$

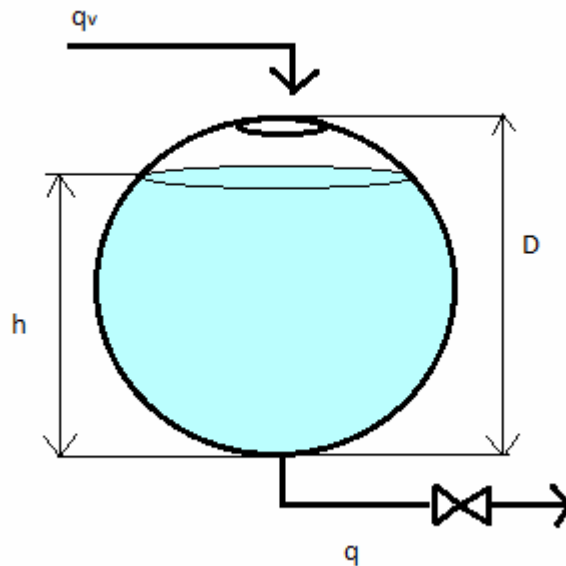
- $\max h(t) = H$

The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Kulový zásobník na kapalinu

Na obrázku vidíme zásobník na kapalinu s nekonstantním průřezem. Jde o kulový zásobník na kapalinu s průměrem D [m], vstupním přítokem q_v [m³/min], výstupním odtokem q [m³/min] a výškou hladiny kapaliny h [m]. Vstupem do systému je vstupní přítok q_v , stavovou a zároveň i výstupní veličinou je výška hladiny $h(t)$.



Kulový zásobník na kapalinu

Zjednodušující předpoklady

- zásobník je otevřený s konstantním atmosférickým tlakem, který působí na hladinu kapaliny v zásobníku.

Výsledný matematický model má tvar:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left[q_v(t) - k\sqrt{h(t)} \right] \frac{1}{\pi h \cdot (D - h)}$$

Ošetření chybových stavů saturací

Jelikož se výška hladiny vyskytuje ve jmenovateli, byly omezení nastaveny následovně:

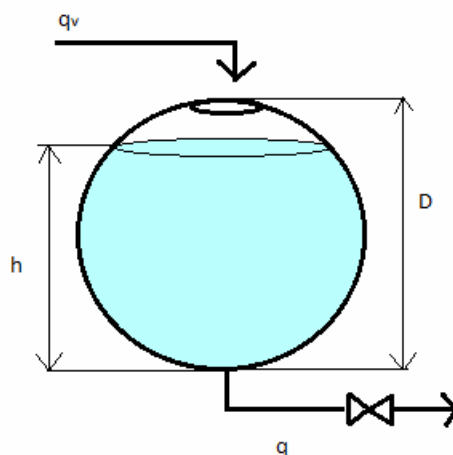
- min $h(t) = 0,01D$
- max $h(t) = 0,99D$

Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Spherical Tank for Liquid

The picture shows a tank for liquid with non-constant cross-section. It is a spherical tank for a liquid storage with a diameter D [m], the input volumetric fluid flow rate q_v [m³/min], drain output q [m³/min] and liquid level h [m]. Input to the system is the volumetric fluid flow rate q_v , stat and also the output variable is the water level h .



Spherical Tank for Liquid

Simplifying assumptions

- tank is opened with constant atmospheric pressure which acts on the fluid level in the tray.

The final mathematical model has the form:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left[q_v(t) - k\sqrt{h(t)} \right] \frac{1}{\pi h \cdot (D - h)}$$

Error handling by saturation

As the liquid level occurs in the denominator, the limits are set as follows:

- min $h(t) = 0,01D$

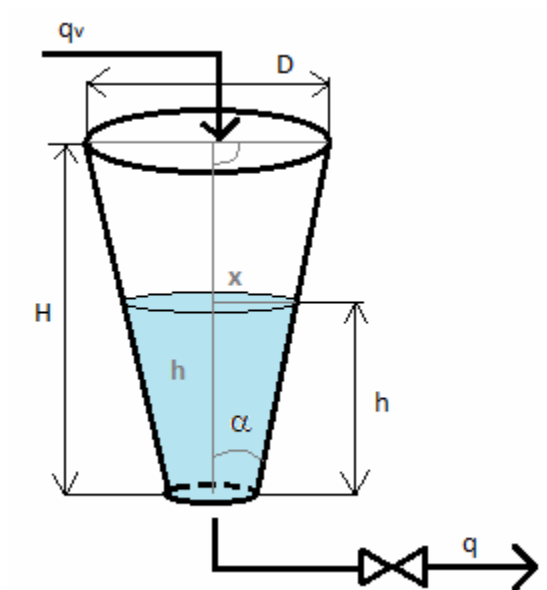
- max $h(t) = 0,99D$

The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Trychtýřový zásobník na kapalinu

Na obrázku se nachází trychtýřový zásobník na kapalinu o horním průměru D [m] a výšce H [m] s výškou hladiny h [m]. Do zásobníku vtéká kapalina vstupním průtokem q_v [m³/min] a na výstupu vytéká průtokem q [m³/min] přes ventil. Na vstupu do systému je vstupní přítok q_v , stavovou a zároveň i výstupní veličinou je výška hladiny kapaliny.



Trychtýřový zásobník na kapalinu

Zjednodušující předpoklady

- zásobník je otevřený.
- atmosférický tlak působící na hladinu kapaliny je konstantní.

Výsledný matematický model simulace má tvar:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left[q_v(t) - k\sqrt{h(t)} \right] \frac{4H^2}{h^2 \pi D^2}$$

Ošetření chybových stavů saturací

Jelikož se výška hladiny vyskytuje ve jmenovateli, byly omezení nastaveny následovně:

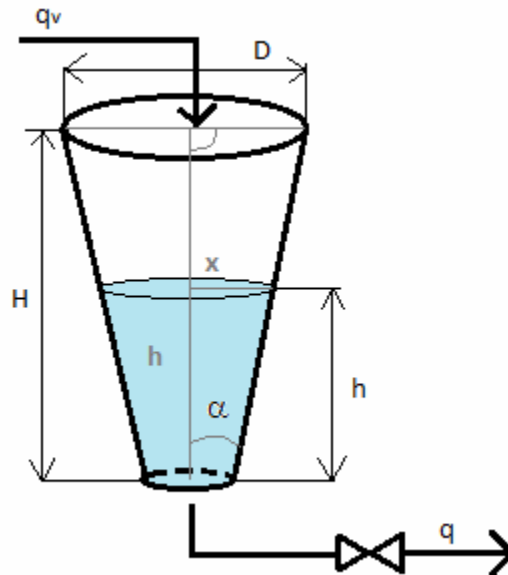
- min $h(t) = 0,01H$
- max $h(t) = H$

Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Funnel Tank for Liquid

The figure is a funnel tank for liquid with the upper diameter D [m], height H [m] and the liquid level h [m]. Liquid flows into the tank with input flow q_v [m³/min] and output with flow q [m³/min] through the valve. Input to the system is flow q_v , state and also the output variable is the height level of liquid.



Funnel Tank for Liquid

Simplifying assumptions

- tank is opened with constant atmospheric pressure which acts on the liquid level in the tank.

The final mathematical model has the form:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left[q_v(t) - k\sqrt{h(t)} \right] \frac{4H^2}{h^2 \pi D^2}$$

Error handling by saturation

As the liquid level occurs in the denominator, the limit is set as follows:

- min $h(t) = 0,01H$

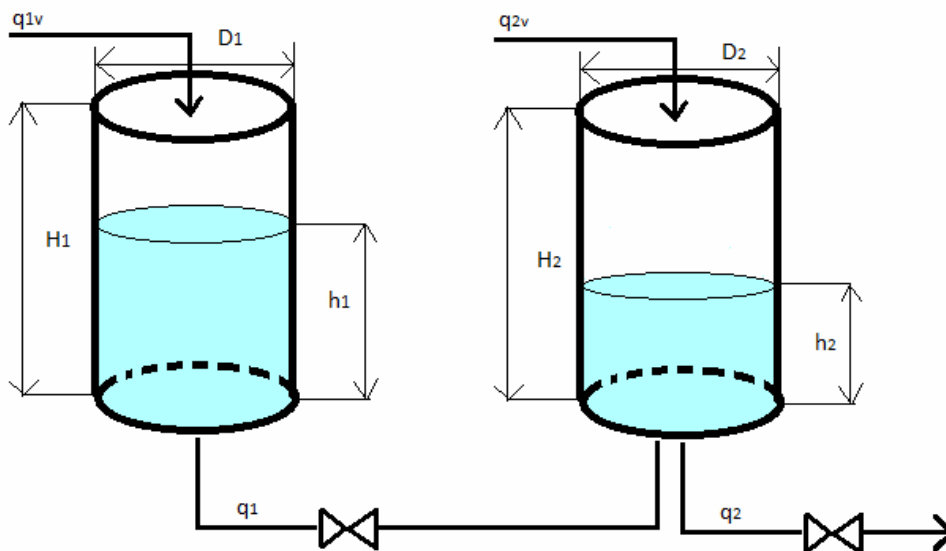
- max $h(t) = H$

The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Válcové zásobníky na kapalinu v sérii

Na obrázku se nachází zásobníky na kapalinu zapojené do série. Jde o válcové zásobníky s průměrem D [m], výškou H [m] a výškou hladiny kapaliny h [m]. Na vstupu obou zásobníků je vstupný přítok q_v [m^3/min]. Kapalina opouští zásobník odtokem q [m^3/min] přes ventil. Odtok q_1 přivádí kapalinu do druhého zásobníku. Vstupem do systému jsou vstupní přítoky q_{v1} a q_{v2} , stavovými veličinami a zároveň i výstupními veličinami jsou výšky hladin prvního a druhého zásobníku. Z toho vyplývá, že se jedná o mnohorozměrný systém (2 vstupy – 2 výstupy).



Válcové zásobníky na kapalinu v sérii

Zjednodušující předpoklady

- zásobníky jsou otevřené s konstantním průřezem.
- atmosférický tlak působící na hladinu kapaliny je konstantní.
- dna zásobníků se nachází v stejné výšce.

Výsledný matematický model simulace pro oba zásobníky má tvar:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$

když $h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$

$$q_1 = k_1 \sqrt{|h_1 - h_2|} \quad q_2 = k_2 \sqrt{h_2}$$

Ošetření chybových stavů saturací

- min $h_1(t) = 0$

- min $h_2(t) = 0$

- max $h_1(t) = H_1$

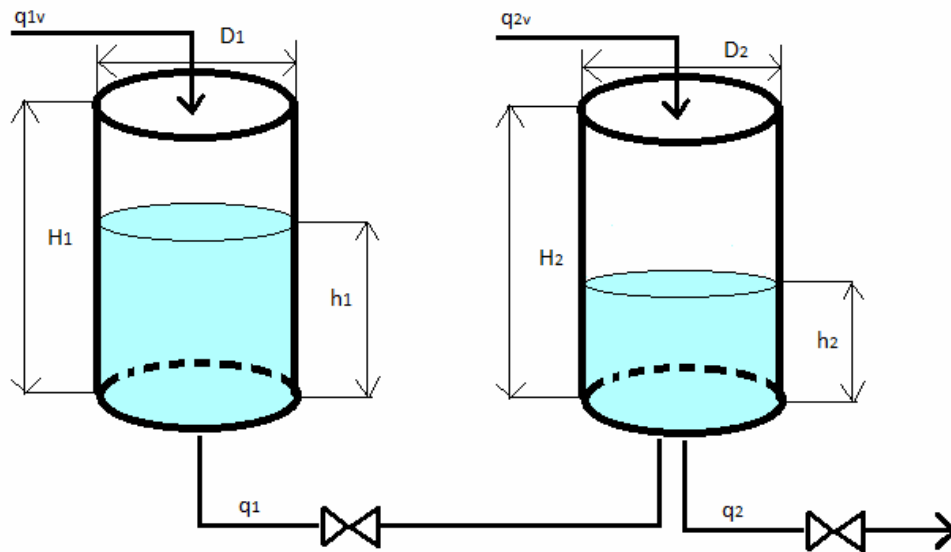
- max $h_2(t) = H_2$

Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Cylindrical Tanks for Liquid in Series

The picture is the cylindrical tanks connected in series. These cylindrical tanks with a diameter D [m], and height H [m] and height level of liquid h [m]. The input of both tanks is input flow rate q_v [m³/min]. The liquid leaves the tank by drain q [m³/min] through the valve. Drain q_1 brings liquid to second tank. Input to the system are input flow rates q_{v1} and q_{v2} , state and also the output variables are the heights level of the first and second tank. It follows that it is a multi-dimensional system (2 inputs - 2 outputs).



Cylindrical Tank for Liquid in Series

Simplifying assumptions

- tanks are opened with constant cross-section.
- atmospheric pressure on the liquid level is constant.
- tank bottoms are the same height.

The final mathematical model for both tanks has the form:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$

$$\text{if } h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$$

$$q_1 = k_1 \sqrt{|h_1 - h_2|} \quad q_2 = k_2 \sqrt{h_2}$$

Error handling by saturation

- min $h_1(t) = 0$
- min $h_2(t) = 0$
- max $h_1(t) = H_1$

- $\max h_2(t) = H_2$

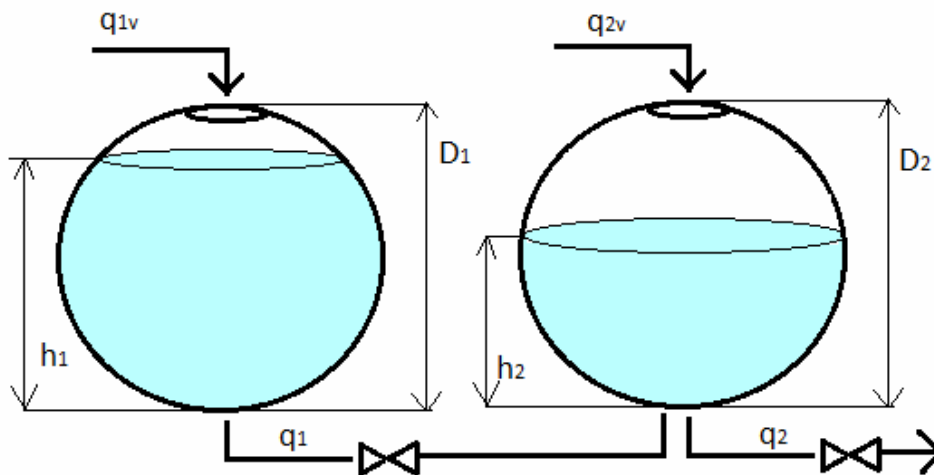
The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Kulové zásobníky na kapalinu v sérii

Na obrázku se nachází dva kulové zásobníky s nekonstantním průřezem zapojené do série. Vstupem do prvního zásobníku je vstupní přítok q_{1v} [m^3/min] a výstupem je odtok q_1 [m^3/min]. Přítokem do druhého zásobníku je vstupní přítok q_{2v} [m^3/min] a výstupní odtok q_2 [m^3/min] z prvního zásobníku. Výstupem druhého zásobníku je odtok q_2 [m^3/min]. Oba zásobníky mají následující parametry: průměr zásobníku D [m] a výšku hladiny h [m]. Mezi těmito zásobníky a na výstupu druhého zásobníku se nachází ventily.

Vstupními veličinami systému jsou vstupní přítoky, stavovými a taky výstupními veličinami jsou výšky hladin.



Kulové zásobníky na kapalinu v sérii

Zjednodušující předpoklady

- zásobníky jsou otevřené s nekonstantním průřezem.
- atmosférický tlak působící na hladinu kapaliny je konstantní.
- dna zásobníků se nachází ve stejné výšce.

Výsledný matematický model pro oba zásobníky má tvar:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$
$$q_1(t) = k_1 \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}, \quad F_1 = \pi h_1(t) [D_1 - h_1(t)]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$
$$q_2(t) = k_2 \sqrt{h_2(t)}, \quad F_2 = \pi h_2(t) [D_2 - h_2(t)]$$

$$\text{když } h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$$

Ošetření chybových stavů saturací

Jelikož se výšky hladin vyskytují ve jmenovateli, byli omezení nastavené následovně:

- min $h_1(t) = 0,01 * D_1$
- min $h_2(t) = 0,01 * D_2$
- max $h_1(t) = 0,99 * D_1$
- max $h_2(t) = 0,99 * D_2$

Parametry pro simulaci:

Parametry	1. zásobník	2. zásobník
Průměr [m]	3	3
Počáteční výška hladiny [m]	0,5	0,2
Konstanta ventilu [m ² /min]	0,25	0,5
Vstupní přítok [m ³ /min]	0,3	0,3

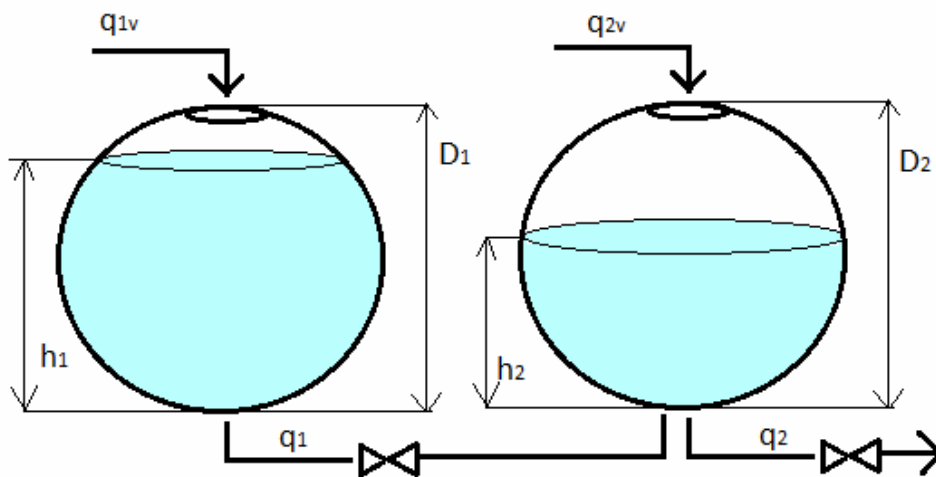
Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Spherical Tanks for Liquid in Series

In the picture there are two spherical tanks with non-constant cross-section connected in series. The input to the first tank is q_{1v} [m³/min] and output is drain q_1 [m³/min]. Input flow rate to the second tank is input q_{2v} [m³/min] and output drain q_2 [m³/min] from the first tank. The output of the second tank is drain q_2 [m³/min]. Both tanks have the following parameters: diameter of the tank D [m] and height level h [m]. Among these tanks and the output of second tank are located valves.

The input variables are input flow rates, state and output variables are liquid levels.



Spherical Tank for Liquid in Series

Simplifying assumptions

- tanks are opened with non-constant cross-section.
- atmospheric pressure on the liquid level is constant.
- tank bottoms are the same height.

The final mathematical model for both tanks has the form:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$

$$q_1(t) = k_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}, \quad F_1 = \pi h_1(t) [D_1 - h_1(t)]$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$

$$q_2(t) = k_2 \sqrt{h_2(t)}, \quad F_2 = \pi h_2(t) [D_2 - h_2(t)]$$

$$\text{if } h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$$

Error handling by saturation

As the liquid level occurs in the denominator, the limit are set as follows:

- $\min h_1(t) = 0,01 * D_1$

- $\min h_2(t) = 0,01 * D_2$

- $\max h_1(t) = 0,99 * D_1$

- $\max h_2(t) = 0,99 * D_2$

Parameters for simulation:

Parameters	1. tank	2. tank
Diameter [m]	3	3
Initial Level of Liquid [m]	0,5	0,2
Constant of the valve [m ² /min]	0,25	0,5
Input flow rate [m ³ /min]	0,3	0,3

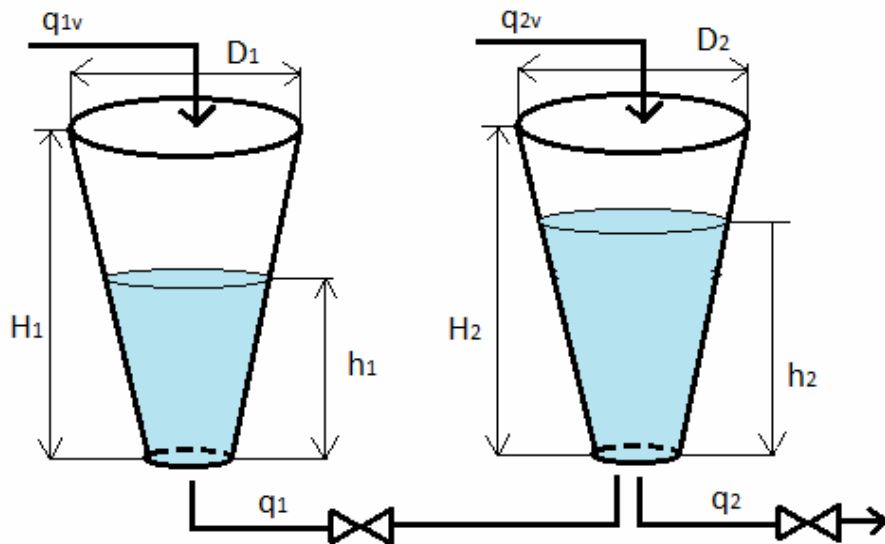
The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Trychtýřové zásobníky na kapalinu v sérii

Na obrázku je schéma dvou za sebou zapojených trychtýřových zásobníků na kapalinu o průměru D [m] a výšce H [m] s výškou hladiny h [m]. Indexy $(.)_1$ a $(.)_2$ určují, o který zásobník se jedná. První zásobník má na vstupu přítok q_{1v} [m³/min] a na výstupu odtok q_1 [m³/min]. Druhý zásobník má dva vstupy a to přítok q_{2v} [m³/min] a odtok q_1 [m³/min] z prvního zásobníku, na výstupu má odtok q_2 [m³/min].

Vstupními veličinami systému jsou vstupní přítoky q_{1v} , q_{2v} , výstupními a zároveň stavovými veličinami jsou výšky hladin h_1 a h_2 . Tento zásobník patří do skupiny mnohorozměrných systémů.



Trychtýřový zásobník na kapalinu v serii

Zjednodušující předpoklady

- zásobníky jsou otevřené s nekonztantním průřezem.
- atmosférický tlak působící na hladinu kapaliny je konstantní.
- dna zásobníků se nachází ve stejné výšce.

Výsledný matematický model simulace pro oba zásobníky má tvar:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$

$$q_1(t) = k_1 \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}, \quad F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4H_1^2} h_1^2(t)$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$

$$q_2(t) = k_2 \sqrt{h_2(t)}, \quad F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4H_2^2} h_2^2(t)$$

$$\text{když } h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$$

Ošetření chybových stavů saturací

Jelikož se výšky hladin vyskytují ve jmenovateli, byli omezení nastavené následovně:

- $\min h_1(t) = 0,01 * H_1$

- $\min h_2(t) = 0,01 * H_2$
- $\max h_1(t) = H_1$
- $\max h_2(t) = H_2$

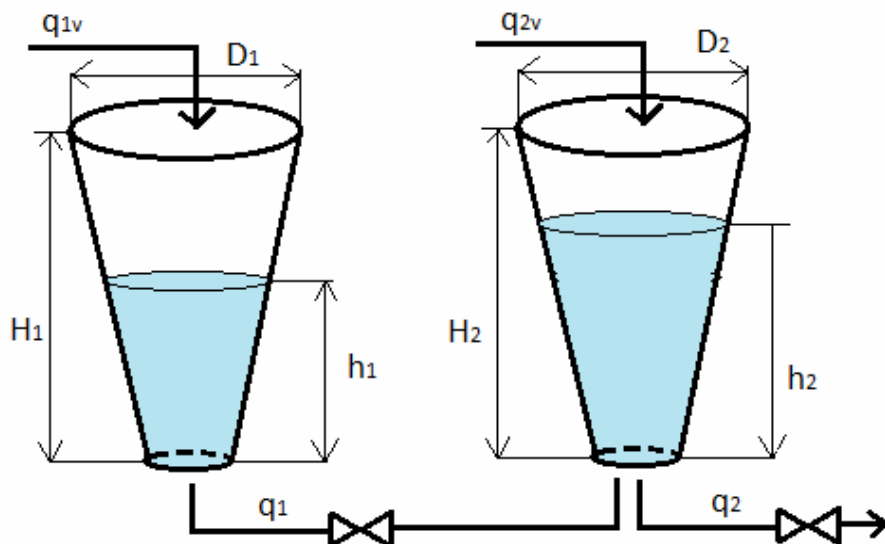
Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Funnel Tanks for Liquid in Series

The figure is a diagram of two funnel tanks connected to series with a diameter D [m], height H [m] and the liquid level h [m]. Indices (.) 1 and (.) 2 determines on the tanks. The first tank has at input tributary q_{1v} [m³/min], and the output drain q_1 [m³/min]. The second tank has two inputs, tributary q_{2v} [m³/min] and drain q_1 [m³/min] from the first tank, on output is drain q_2 [m³/min].

The input variables of the systém are input tributaries q_{1v} , q_{2v} , state and output are water levels h_1 and h_2 . This tank belongs to the multidimensional systems.



Funnel Tank for Liquid in Series

Simplifying assumptions

- tank are opened with non-constant cross-section.

- atmospheric pressure on the liquid level is constant.
- tank bottom are the same height.

The final mathematical model for both tanks has the form:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{F_1} [q_{1v}(t) - q_1(t)]$$

$$q_1(t) = k_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}, \quad F_1 = \frac{\pi D_1^2}{4H_1^2} h_1^2(t)$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{F_2} [q_{2v}(t) + q_1(t) - q_2(t)]$$

$$q_2(t) = k_2 \sqrt{h_2(t)}, \quad F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4H_2^2} h_2^2(t)$$

if $h_2(t) > h_1(t) \Rightarrow q_1(t) = -q_1(t)$

Error handling by saturation

As the liquid level occurs in the denominator, the limit is set as follows:

- min $h_1(t) = 0,01 * H_1$
- min $h_2(t) = 0,01 * H_2$
- max $h_1(t) = H_1$
- max $h_2(t) = H_2$

The source:

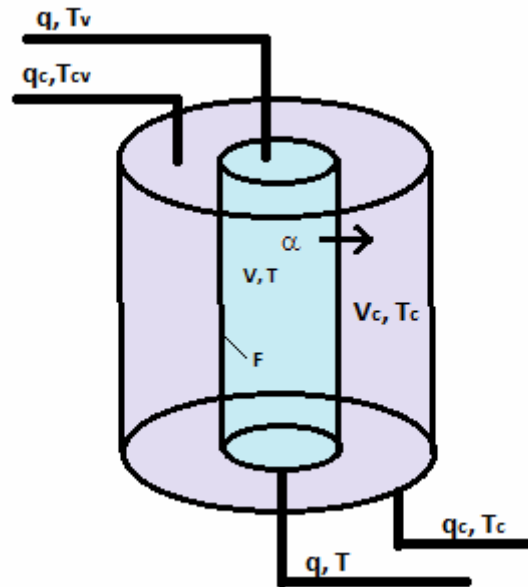
DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Průtočný výměník tepla s promícháváním

Na obrázku se nachází průtokový výměník tepla, který obsahuje chladicí kapalinu v plášti a chlazenou uvnitř výměníku. Vstupy do výměníku jsou tedy chladicí (index c) a chlazená kapalina (bez indexu) o vstupní teplotě T_{cv} [°C] a T_v [°C] se vstupními přítoky q_c [m³/min] a q [m³/min]. Parametry kapalin

jsou: hustota ρ [kg/m³], měrné teplo c_p [kJ/kgK] a objem V [m³]. Prostup tepla udává koeficient přestupu tepla α [W/m²K], přestupná plocha je určena parametrem F [m²].

Vstupními veličinami jsou vstupní teploty chladicí T_{cv} a chlazené T_v kapaliny a také průtoky chlazené q a chladicí q_c kapaliny. Stavovými a zároveň i výstupními veličinami jsou teploty kapalin T_c a T .



Průtočný výměník tepla s promícháváním

Zjednodušující předpoklady

- chlazená i chladicí kapalina jsou dokonale promíchávány.
- tepelná kapacita stěny oddělující kapaliny je zanedbaná.
- objemy, průtoky, koeficient přechodu tepla, měrné tepla i hustoty obou kapalin jsou konstantní.

Výsledný matematický model simulace průtokového zásobníku má tvar:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{qa_1T_v(t) - qa_1T(t) - a_2[T(t) - T_c(t)]}{a_3}$$

$$a_1 = \rho c_p ; a_2 = F\alpha ; a_3 = V\rho c_p$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{q_c b_1 T_{cv}(t) - q_c b_1 T_c(t) + a_2 [T(t) - T_c(t)]}{b_2}$$

$$b_1 = \rho_c c_{pc} ; b_2 = V_c \rho_c c_{pc}$$

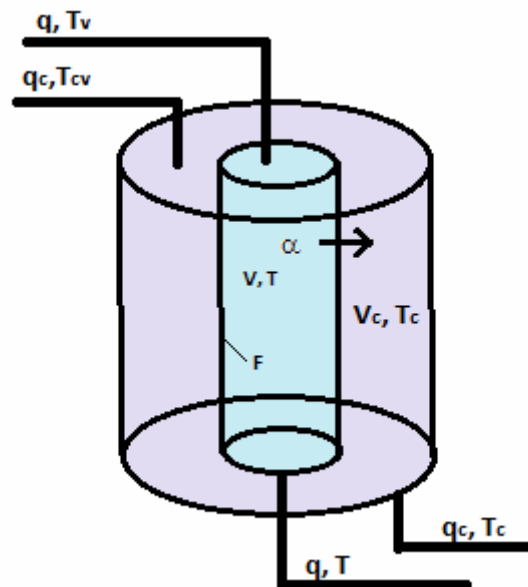
Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Flow heat exchanger with blending

The figure is a flow heat exchanger, which contains the coolant in the jacket and cooled in the heat exchanger. Inputs to the heat exchanger are coolant (index c) a cooled liquid (no index) of T_{cv} input temperature [$^{\circ}$ C] and T_v [$^{\circ}$ C] with the input tributaries q_c [m³/min] and q [m³/min]. Parameters of liquids are: density ρ [kg/m³], c_p specific heat [kJ / kgK] and the volume V [m³]. Heat transmission gives the heat transfer coefficient α [W/m²K], transfer surface is determined by the parameter F [m²].

Input variables are the input temperatures of coolant T_{cv} cooled liquid T_v and also flow cooled q and coolant q_c . State and also the output variables are temperature of liquids T_c and T .



Flow heat exchanger with blending

Simplifying assumptions

- cooling and coolant are perfectly blended.

- Heat capacity of the wall separating the liquid is neglected.
- Volume, flow, heat transfer coefficient, specific heat and density of the both liquids are constant.

The final mathematical model of flow heat exchanger has the form:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{qa_1T_v(t) - qa_1T(t) - a_2[T(t) - T_c(t)]}{a_3}$$

$$a_1 = \rho c_p ; a_2 = F\alpha ; a_3 = V\rho c_p$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{q_c b_1 T_{c_v}(t) - q_c b_1 T_c(t) + a_2 [T(t) - T_c(t)]}{b_2}$$

$$b_1 = \rho_c c_{p_c} ; b_2 = V_c \rho_c c_{p_c}$$

The source:

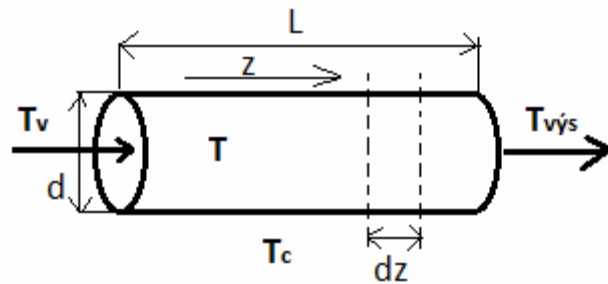
DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Jednkapacitní trubkový výměník tepla

Na obrázku se nachází trubkový výměník tepla o průměru d [m] a délce L [m], v kterém proudí chlazená kapalina o teplotě T [°C]. Kapalina je chlazená přestupem tepla přes stěny trubky do jejího okolí (teplota okolí T_c [°C]). Prostorová nezávisle proměnná z patří do intervalu $\langle 0, L \rangle$.

Jde o model systému se spojitě rozloženými parametry, co znamená, že teplota kapaliny se mění podél trubky a v dynamickém stavu je funkcí prostorové nezávisle proměnné a zároveň i funkcí času.

Do systému vstupují dvě veličiny, a to teplota okolí $T_c(t)$ a teplota kapaliny na vstupu $T_v(t)$. Stavovou veličinou je teplota kapaliny ve vnitř trubky $T(z, t)$ a na výstupu je teplota kapaliny $T_v(s, t)$.



Jednokapacitní trubkový výměník tepla

Zjednodušující předpoklady

- hustota ρ [kg/m³], koeficient přestupu tepla α [W/m²K], měrné teplo c_p [kJ/kgK] a průtok q [m³/min] chlazené kapaliny jsou konstantní.
- ideální pístový tok kapaliny
- tepelná kapacita stěny trubky je zanedbána.

Výsledný matematický model trubkového výměníku tepla má tvar:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a(T_c - T)$$

$$v = \frac{q}{f} \quad a = \frac{4\alpha}{d\rho c_p}$$

Parametry pro simulaci:

Parametry	Hodnota
Průměr trubky [m]	0,08
Délka trubky [m]	120
Teplota kapaliny na vstupu [°C]	20
Teplota okolí [°C]	10
Objemový průtok [m ³ /min]	0,05
Hustota kapaliny [kg/m ³]	985
Měrné teplo [kJ/kgK]	4,05
Součinitel přestupu tepla [W/m ² K]	43,5

Zdroj:

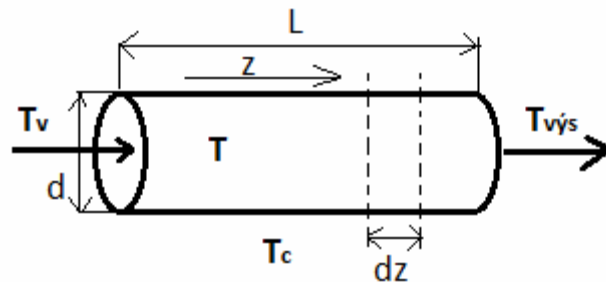
FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbíрка řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

One-capacity tubular heat exchanger

The figure is a tubular heat exchanger with a diameter d [m] and a length L [m], in which the flow of cooled liquid of temperature T [° C]. The liquid is cooled by heat transfer through the tube wall into the surroundings (temperature T_c [° C]). Spatial independent variable z belongs to the interval $\langle 0, L \rangle$.

It is a model system with continuously distributed parameters, which means that the temperature of the liquid changes along the tube and the dynamic state is a function of spatial independent variable and also a function of time.

The system has two input variables, ambient temperature $T_c(t)$ and the liquid temperature on the input $T_v(t)$. State variable is the temperature of the liquid in the tube $T(z, t)$ and the output is the temperature of the liquid $T_{vys}(t)$.



One-capacity tube heat exchanger

Simplifying assumptions

- density ρ [kg/m³], the heat transfer coefficient α [W/m²K], c_p specific heat [kJ / kgK] and flow q [m³/min] the cooled liquid are constant.
- ideal plug flow of the liquid
- heat capacity of the tube wall is neglected.

The final mathematical model of tube heat exchanger has the form

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} = a(T_e - T)$$

$$v = \frac{q}{f} \quad a = \frac{4\alpha}{d\rho c_p}$$

Parameters for simulation:

Parameters	Value
Diameter of tube [m]	0,08
Length of tube [m]	120
Input temperature of liquid [°C]	20
Ambient temperature [°C]	10
Volumetric flow [m ³ /min]	0,05
Density of liquid [kg/m ³]	985
Specific heat [kJ/kgK]	4,05
Heat transfer coefficient [W/m ² K]	43,5

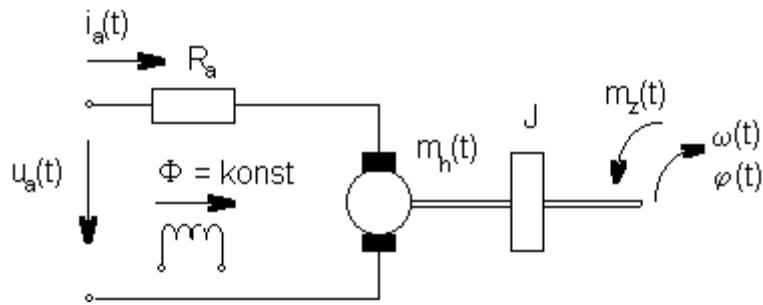
The source:

FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbíрка řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

Stejnoseměrný motor řízený proudem kotvy

Na obrázku je vidět schéma stejnosměrného motoru s konstantním buzením. V tomto případě je motor řízený proudem kotvy. Parametry motoru jsou: proud kotvy $i_a(t)$ [A], zátěžový moment $m_z(t)$ [Nm], hnací moment $m_h(t)$ [Nm], celkový moment setrvačnosti J [kgm²], uhlová rychlost $\omega(t)$ [rad/s], uhlové natočení $\varphi(t)$ [rad].

Vstupem do systému je proud kotvy $i_a(t)$ a zátěžový moment $m_z(t)$, stavovými a zároveň i výstupními veličinami je uhlové natočení $\varphi(t)$ a uhlová rychlost $\omega(t)$.



Jednosměrný motor řízený proudem

Zjednodušující předpoklady

- buzení kotvy je konstantní
- celková indukčnost kotvy je zanedbána.

Výsledný matematický model má tvar:

$$m_h(t) = k_m \cdot i_a(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_h(t) - m_z(t)}{J}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$$

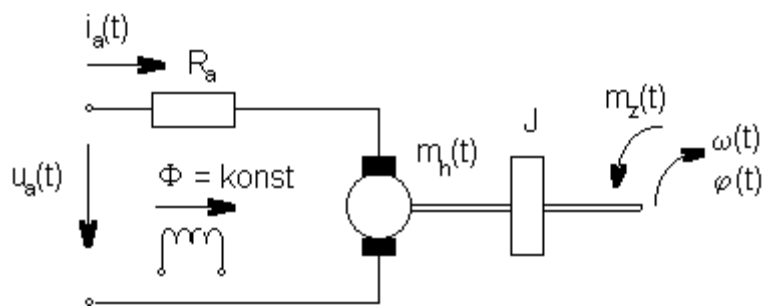
Zdroj:

FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbíрка řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

DC motor controlled by armature current

The figure shows a diagram of a DC motor with constant excitation. In this case, the motor is controlled by armature current. The motor parameters are: armature current $i(t)$ [A] load moment $m_z(t)$ [Nm], the torque $m_h(t)$ [Nm], the total moment of inertia J [kgm²], the angular velocity $\omega(t)$ [rad / s], the angular rotation $\phi(t)$ [rad].

Input to the system is the armature current $i_a(t)$ and the load moment $m_z(t)$, state, and also the output variables is the angular rotation $\phi(t)$ and angular velocity $\omega(t)$.



One-way motor controlled by armature current

Simplifying assumptions

- excitation of armature is constant
- total inductance of armature is neglected.

The final mathematical model of the DC motor controlled by armature current has the form:

$$m_h(t) = k_m \cdot i_a(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_h(t) - m_z(t)}{J}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$$

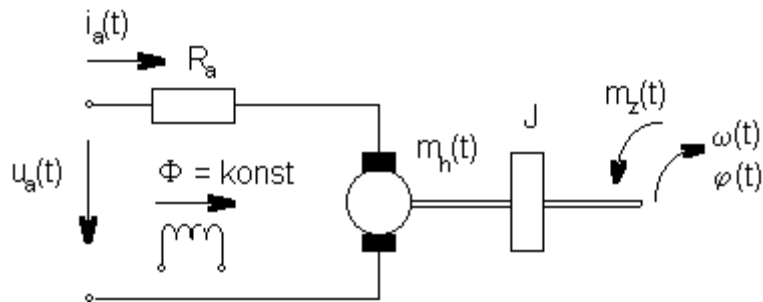
The source:

FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sběrka řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

Stojnosměrný motor řízený napětím kotvy

Na obrázku je vidět schéma stejnosměrného motoru s konstantním buzením. V tomto případě je motor řízený napětím kotvy. Parametry motoru jsou: napětí kotvy $u_a(t)$ [V], celkový odpor kotvy R_a [Ω], proud kotvy $i_a(t)$ [A], zátěžový moment $m_z(t)$ [Nm], hnací moment $m_h(t)$ [Nm], celkový moment setrvačnosti J [kgm^2], uhlová rychlost $\omega(t)$ [rad/s], uhlové natočení $\varphi(t)$ [rad].

Vstupem do systému je napětí kotvy $u_a(t)$ a zátěžový moment $m_z(t)$, stavovými a zároveň i výstupními veličinami je uhlové natočení $\varphi(t)$ a uhlová rychlost $\omega(t)$.



Jednosměrný motor řízený napětím kotvy

Zjednodušující předpoklady

- buzení kotvy je konstantní
- celková indukčnost kotvy je zanedbána.

Výsledný matematický model má tvar:

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_h(t) - m_z(t)$$

$$m_h(t) = k_m \cdot i_a(t)$$

$$i_a(t) = \frac{u_a(t) - k_m \cdot \omega(t)}{R_a}$$

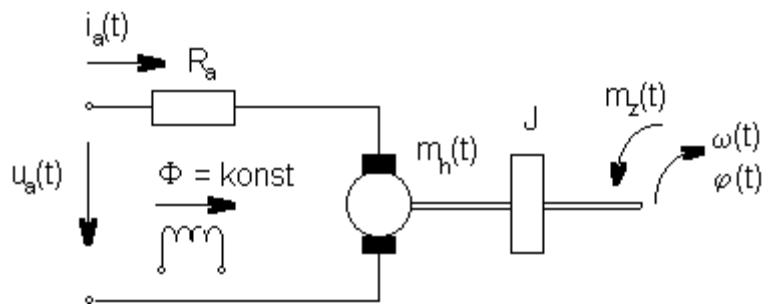
The source:

FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbíрка řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

DC motor controlled by armature voltage

The figure shows a diagram of a DC motor with constant excitation. In this case, the motor is controlled by armature voltage. The motor parameters are: armature voltage $u_a(t)$, total resistance of the armature R_a [A], armature current $i_a(t)$, load moment $m_z(t)$ [Nm], the torque $m_h(t)$ [Nm], the total moment of inertia J [kgm²], the angular velocity $\omega(t)$ [rad / s], the angular rotation $\varphi(t)$ [rad].

Input to the system is the armature voltage $u_a(t)$ and the load moment $m_z(t)$, state, and also the output variables are the angular rotation $\phi(t)$ and angular velocity $\omega(t)$.



One-way motor controlled by armature voltage

Simplifying assumptions

- excitation of armature is constant
- total inductance of armature is neglected.

The final mathematical model of the DC motor controlled by armature voltage has the form:

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_h(t) - m_z(t)$$

$$m_h(t) = k_m \cdot i_a(t)$$

$$i_a(t) = \frac{u_a(t) - k_m \cdot \omega(t)}{R_a}$$

The source:

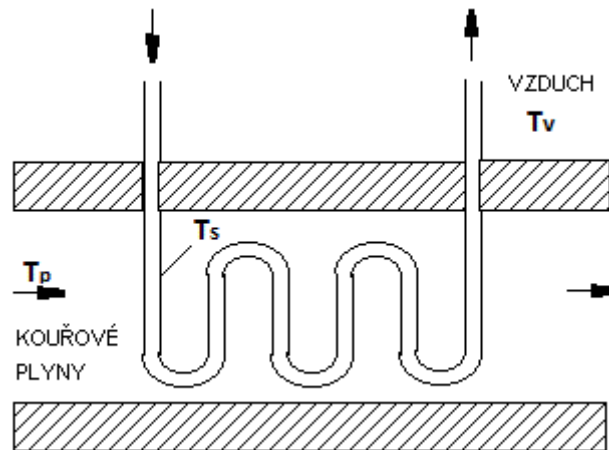
FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbírka řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

Rekuperátor pro ohřev vzduchu

Obrázek zobrazuje schéma rekuperátoru pro ohřev vzduchu, v kterém probíhá výměna tepla vedením od kouřových plynů přes stěnu trubky (součinitel přestupu tepla α_1 [W/m²K]) a od stěny trubky k vzduchu (součinitel přestupu tepla α_2 [W/m²K]). Parametry trubky a ohřivaného vzduchu jsou: hustota ρ [kg/m³], měrné teplo c_p [kJ/kgK] a objem V [m³]. Indexy použité při parametrech:

- kouřové plyny - $(.)_p$,
- stěna trubky - $(.)_s$,
- vzduch - $(.)_v$.

Na vstupu systému je teplota kouřových plynů T_p [°C] a na výstupu ze systému je teplota vzduchu T_v [°C]. Stavovými veličinami jsou teplota stěny trubky T_s [°C] a teplota vzduchu T_v .



Rekuperátor pro ohřev vzduchu

Zjednodušující předpoklady

- rozdíl teplot na stěnách trubky je zanedbán

Výsledný matematický model rekuperátoru pro ohřev vzduchu má tvar:

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = a_s [T_p(t) - T_s(t)]$$

$$a_s = \frac{\alpha_1 F_1}{V_s \rho_s c_{ps}}$$

$$\frac{dT_v(t)}{dt} = a_v [T_s(t) - T_v(t)]$$

$$a_v = \frac{\alpha_2 F_2}{V_v \rho_v c_{pv}}$$

Parametry pro simulaci:

Parametry	Trubka	Ohříváný vzduch	Kouřové plyny
Teplota [°C]			80

Počáteční teplota [°C]	15	10
Hustota [kg/m ³]	7850	1,29
Objem [m ³]	0,1413	0,098
Měrné teplo [kJ/kgK]	0,469	1,1

Zdroj:

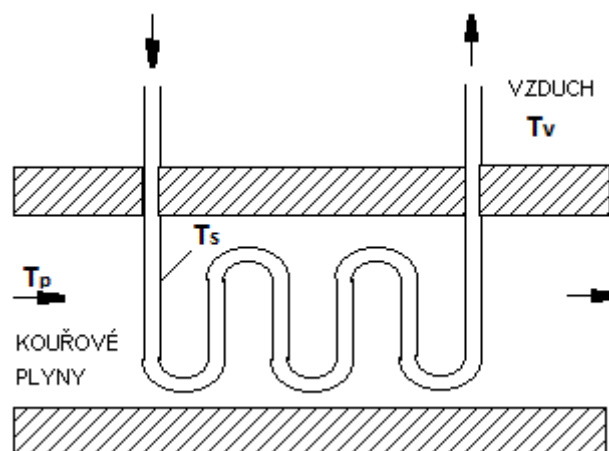
FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbírka řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

Recuperator for hot air

Figure shows a diagram of the heat exchanger for hot air in which is exchanging of heat by conduction from the smoke gases through the tube wall (heat transfer coefficient α_1 [W/m²K]) and from the tube wall to the air (heat transfer coefficient α_2 [W/m²K]). Parameters of tube and heated air are: density ρ [kg/m³], c_p specific heat [kJ / kgK] and the volume V [m³]. Indices used in the following parameters:

- Flue gases - (.) P
- Pipe wall - (.) S
- Air - (.) In.

The system input is the temperature of the smoke gases T_p [° C] and the output of the system is the air temperature T_v [° C]. State variables are the tube wall temperature T_s [° C] and air temperature T_v .



Recuperator for hot air

Simplifying assumptions

- temperature difference on the walls of the tube is neglected.

The final mathematical model of recuperator for hot air has the form:

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = a_s [T_p(t) - T_s(t)]$$
$$a_s = \frac{\alpha_1 F_1}{V_s \rho_s c_{ps}}$$

$$\frac{dT_v(t)}{dt} = a_v [T_s(t) - T_v(t)]$$
$$a_v = \frac{\alpha_2 F_2}{V_v \rho_v c_{pv}}$$

Parameters for simulation:

Parameters	Tube	Heated air	Smoke gas
Temperature [°C]			80
Initial temperature [°C]	15	10	
Density [kg/m ³]	7850	1,29	
Volume [m ³]	0,1413	0,098	
Specific heat [kJ/kgK]	0,469	1,1	

The source:

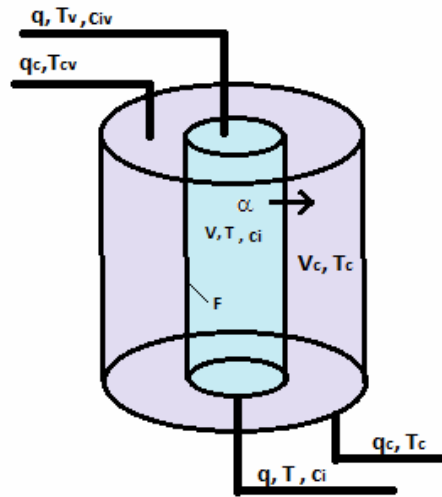
FARANA, Radim et al. *Programová podpora simulace dynamických systémů: Sbírnka řešených příkladů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. ISBN 978-80-251-1448-3.

Průtočný chemický reaktor s chlazením v plášti

Na obrázku se nachází průtočný chemický reaktor s reakční směsí v reaktoru a s chladicí kapalinou v plášti. Budeme uvažovat obecnou exotermickou reakci, v které reaguje i složek v j reakcích, přičemž určitá složka nemusí reagovat ve všech reakcích současně.

Na vstupu do reaktoru je vstupní přítok reakční směsi q [m³/min], její teplota T_v [m³/min] a vstupní koncentrace složek c_{iv} [kmol/m³]. Na vstupu do pláště je vstupní přítok chladicí kapaliny q_c [m³/min]

a její teplota T_{cv} [°C]. Stavovými veličinami jsou koncentrace jednotlivých složek v reaktoru $c_i(t)$ pro $i=1,2,\dots,i_0$, teplota reakční směsi v reaktoru $T(t)$ [°C] a teplota chladicí kapaliny $T_c(t)$ [°C] v plášti. Parametry reakční směsi v reaktoru a chladicí kapaliny: objem V [m³], hustota ρ [kg/m³], měrné teplo c_p [kJ/kgK].



Průtokový chemický reaktor s chlazením v plášti

Zjednodušující předpoklady

- reakční směs i chladicí kapalina jsou dokonale promíchávané
- tepelná kapacita stěny oddělující reakční směs od kapaliny je zanedbaná
- objemy, koeficient přechodu tepla, měrné tepla i hustoty reakční směsi a chladicí kapaliny jsou konstantní.

Výsledný matematický model chemického reaktoru pro dvě složky A a B, kde žadáným produktem je látka B, má tvar:

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{qc_{A_v} - qc_A - Vk_1c_A}{V}$$

$$\frac{dc_B}{dt} = \frac{qc_B - qc_B + V(k_1c_A - k_2c_B)}{V}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(q\rho c_p T_v + V(h_1k_1c_A + h_2k_2c_B)) - q\rho c_p T - F\alpha(T - T_c)}{V\rho c_p}$$

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{q_c\rho_c c_{pc} T_{cv} + F\alpha(T - T_c) - q_c\rho_c c_{pc} T_c}{V_c\rho_c c_{pc}}$$

$$k_1 = k_{10}e^{-\frac{E_1}{RT}}, \quad k_2 = k_{20}e^{-\frac{E_2}{RT}}$$

Proměnné k_1 a k_2 jsou rychlostní konstanty, kde k_{10} a k_{20} jsou pre-exponenciální faktory a E_1 a E_2 aktivační energie.

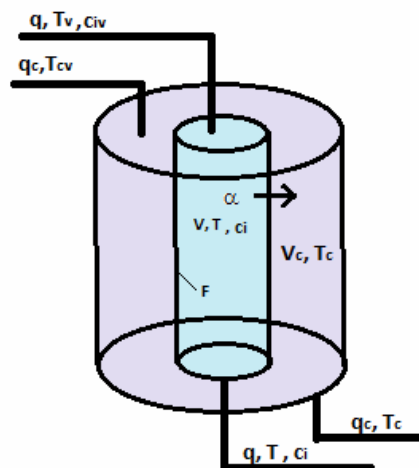
Zdroj:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.

Continuous Stirred Tank Reactor with Cooling in the Jacket

The figure is a CSTR with the reaction mixture in the reactor and with coolant in the jacket. We consider a general exothermic reaction, in which reacts i components in j reactions, while an ingredient may not respond to all responses simultaneously.

On input the reactor are input tributary reaction mixture Q [m^3/min], the temperature T_v [m^3/min], and input concentration of ingredients c_{iv} [kmol/m^3]. On input into the jacket is the input tributary of coolant q_c [m^3/min], and its temperature T_{cv} [$^\circ\text{C}$]. State variables are the concentration of the individual components in the reactor $c_i(t)$ for $i = 1, 2, \dots, i_0$, the temperature of the reaction mixture in the reactor $T(t)$ [$^\circ\text{C}$] and the coolant temperature $T_c(t)$ [$^\circ\text{C}$] in the mantle. Parameters of the reaction mixture in the reactor and coolant: volume V [m^3], density ρ [kg/m^3], the specific heat c_p [kJ/kgK].



Flow chemical reactor with cooling in the mantle

Simplifying assumptions

- the reaction mixture and coolant are perfectly mixed

- heat capacity of the wall separating the reaction mixture from the liquid is neglected
- volumes, coefficient of heat transfer, specific heat and density of the reaction mixture and of coolant are constant.

The final mathematical model of chemical reactor for two elements A and B, where is the desired product substance B, has the form:

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{qc_{Av} - qc_A - Vk_1c_A}{V}$$

$$\frac{dc_B}{dt} = \frac{qc_B - qc_B + V(k_1c_A - k_2c_B)}{V}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(q\rho c_p T_v + V(h_1k_1c_A + h_2k_2c_B)) - q\rho c_p T - F\alpha(T - T_c)}{V\rho c_p}$$

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{q_c\rho_c c_{pc} T_{cv} + F\alpha(T - T_c) - q_c\rho_c c_{pc} T_c}{V_c\rho_c c_{pc}}$$

$$k_1 = k_{10}e^{-\frac{E_1}{RT}}, \quad k_2 = k_{20}e^{-\frac{E_2}{RT}}$$

The variables k_1 and k_2 are the rate constants, where k_{10} and k_{20} are the pre-exponential factors and E_1 and E_2 are activation energies.

The source:

DOSTÁL, Petr. *Matematické modely vybraných technologických procesů: Studijní materiál do předmětu Analýza a simulace technologických procesů*. Zlín: UTB ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011.