

# Robustní řízení mnohorozměrných systémů

Robust control of multivariable systems

Bc. Martin Roháček

---

Diplomová práce  
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
akademický rok: 2011/2012

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Martin ROHÁČEK**  
Osobní číslo: **A10442**  
Studijní program: **N 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Robustní řízení mnohorozměrných systémů**

Zásady pro vypracování:

1. Popište MIMO spojitě systémy pomocí maticových zlomků.
2. Formulujte zákony řízení pro MIMO systémy.
3. Zpracujte pojem robustnosti a mu-funkce.
4. Využijte Matlab toolboxy pro řešení MIMO regulačních úloh.
5. Řešte typové příklady a jejich simulace (Simulink).

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Aström, K.J., Murray, R.M. (2008). Feedback Systems. Princeton University Press.
2. Rosenwasser, E.N., Lampe, B.P. (2006). Multivariable computer-controlled systems. Springer, Germany.
3. Dorf, R.C., Bishop, R.H. (2008). Modern control systems. Pearson Ed.Int. USA.
4. Ogata, K. (2002). Modern control engineering. Prentice Hall Inc, New Jersey.
5. Skogestad S., Postlethwaite, I. (2006). Multivariable feedback systems. John Wiley&Sons.
6. Vidyasagar, M.(1985). Control systems Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press. Cambridge. MA.
7. Dlapa, M. Vybrané kapitoly a teorie robustního řízení. Učební texty FAI UTB. Zlín 2008.
8. Balas M. et al. (1999): Mu Analysis Toolbox. The MathWorks Inc., Natic Mass.
9. PolyX, Ltd.(1999): The Polynomial Toolbox for MATLAB, Prague.

Vedoucí diplomové práce:

**prof. Ing. Roman Prokop, CSc.**

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

**24. února 2012**

Termín odevzdání diplomové práce:

**6. června 2012**

Ve Zlíně dne 24. února 2012



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*děkan*



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## ABSTRAKT

Prostredie Matlab ponúka rad vedeckých a inžinierskych prostriedkov (nazývaných Toolboxy). Jedným s týchto prostriedkov je Robust Control Toolbox (RCT), ktorý ponúka množstvo prostriedkov pre robustnú analýzu a návrh riadenia. Cieľom práce je vysvetlenie pojmov, vytvorenie príkladov pre aplikačné použitie toolboxu pre návrh MIMO systémov. Práca vysvetľuje teoretické aspekty používané v toolboxe a pri robustnej analýze s dôrazom na použitie  $\mu$ -funkcie. Teoretická časť obsahuje popis MIMO spojitých systémov, požiadavky pre riadenie MIMO, pojem robustnosti a  $\mu$ -funkcie. Praktická časť popisuje opis prostredia RCT, simulačné príklady spojené s RCT a sprievodcu s príkladmi pre študijné účely.

Kľúčové slová:

Robustná analýza, robustná stabilita,  $\mu$ -funkcia, MIMO, neurčitosť, návrh riadenia, Robust Control Toolbox

## ABSTRACT

Matlab environment offers a range of scientific and engineering resources (called toolboxes). One of these means is the Robust Control Toolbox (RCT), which offers a variety of resources for a robust analysis and control design. The aim of the work is to explain terms and develop examples for applications for the toolbox for the design of MIMO systems. This paper explains the theoretical aspects used in the Toolbox and the robust analysis with emphasis on the use of  $\mu$ -function. The theoretical part contains a description of the MIMO continuous-time systems, requirements for control of the MIMO, concept of robustness and explanation of the  $\mu$ -function. The practical part describes the description of the RCT environment, simulation examples related to the RCT and guide with examples for study purposes.

Keywords:

Robust analysis, robust stability,  $\mu$ -function, MIMO, uncertainty, control design, Robust Control Toolbox

Veľké poďakovanie patrí vedúcemu diplomovej práce prof. Ing. Romanovi Prokopovi, CSc. za odbornú pomoc pri riešení problematiky a cenné pripomienky.

**Prohlašuji, že**

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

**Prohlašuji,**

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....  
podpis diplomanta

**OBSAH**

<b>ÚVOD</b> .....	<b>9</b>
<b>I TEORETICKÁ ČASŤ</b> .....	<b>11</b>
<b>1 ZÁKLADNÉ POJMY</b> .....	<b>12</b>
1.1 ZÁKLADY SPÄTNOVÄZBOVEJ REGULÁCIE .....	12
1.2 SPOJITÝ LINEÁRNY STAVOVÝ POPIS SYSTÉMU .....	13
1.3 URČENIE PRENOSOVEJ FUNKCIE .....	15
1.4 FREKVENČNÁ ODOZVA MIMO SYSTÉMU .....	16
1.5 PÓLY A NULY STAVOVÉHO MODELU .....	18
1.6 POZOROVATEĽNOSŤ A RIADITEĽNOSŤ .....	18
1.6.1 Riaditeľnosť .....	18
1.6.2 Pozorovateľnosť .....	19
1.7 NORMY.....	20
1.7.1 Normy pre signály .....	20
1.7.1.1 Norma $H_1$ .....	21
1.7.1.2 Norma $H_2$ .....	21
1.7.1.3 Norma $H_\infty$ .....	21
1.7.1.4 Výkonové signály .....	21
1.7.2 Normy pre prenosy.....	21
<b>2 STABILITA</b> .....	<b>23</b>
<b>3 ROBUSTNOSŤ</b> .....	<b>25</b>
3.1 MODELOVÁ NEURČITOSŤ.....	25
3.1.1 Parametrická neurčitost' .....	25
3.1.1.1 Intervalová neurčitost' .....	26
3.1.1.2 Afinity lineárna neurčitost' .....	26
3.1.1.3 Multilineárna neurčitost' .....	26
3.1.1.4 Nelineárna neurčitost' .....	26
3.2 NEURČITOSŤ VO FREKVENČNEJ OBLASTI .....	27
3.2.1 Oblasti neurčitosti .....	27
3.2.2 Voľba nominálneho modelu.....	28
3.2.3 Komplexné odchýlky oblasti neurčitosti.....	28
3.2.4 Amplitúdová a fázová bezpečnosť .....	29
3.3 ANALÝZA SLEDOVANIA VÝKONU .....	29
3.4 ANALÝZA POTLAČENIA PORUCHY .....	30
3.5 ČITLIVOSTNÁ FUNKCIA.....	31
<b>4 <math>\mu</math>-FUNKCIA</b> .....	<b>33</b>

4.1	ZÁKLADNÉ POJMY $\mu$ -FUNKCIE .....	33
4.2	FREKVENČNÁ OBLASŤ $\mu$ -ANALÝZY .....	36
4.3	$\mu$ -SYNTÉZA .....	37
4.3.1	D-K iterácia .....	37
4.3.2	$\mu$ -K iterácia .....	39
4.4	EVOLUČNÉ $\mu$ -SYNTÉZY .....	40
<b>II</b>	<b>PRAKTICKÁ ČASŤ .....</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>POPIS PROSTREDIA .....</b>	<b>43</b>
<b>6</b>	<b>SIMULÁCIA STÚPANIA/KLESANIA MODELU F-14.....</b>	<b>47</b>
6.1	POPIS SYSTÉMU .....	47
6.2	ŠPECIFIKÁCIE MODELU .....	49
6.3	NOMINÁLNY MODEL.....	51
6.3.1	Chyby modelu .....	52
6.4	MODELOVANIE NEURČITOSTI .....	53
6.5	NÁVRH REGULÁTORA.....	55
6.6	POROVNANIE REGULÁTOROV VO FREKVENČNEJ OBLASTI.....	55
6.7	VALIDÁCIA VHODNÉHO STABILIZUJÚCEHO REGULÁTORA.....	57
<b>7</b>	<b>SPRIEVODCA POUŽITÍM <math>\mu</math>-FUNKCIE .....</b>	<b>59</b>
	<b>ZÁVER.....</b>	<b>61</b>
	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>62</b>
	<b>ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY .....</b>	<b>63</b>
	<b>ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK.....</b>	<b>65</b>
	<b>ZOZNAM OBRÁZKOV .....</b>	<b>66</b>
	<b>ZOZNAM PRÍLOH.....</b>	<b>67</b>

## ÚVOD

Vyjadrenia rôznych procesov, situácií, fyzikálnych javov, bilancií a ďalších objektov reálneho sveta pomocou matematického popisu stojí v popredí vedeckého záujmu už niekoľko storočí. V minulých storočiach bola pozornosť venovaná najmä všeobecným fyzikálnym, prírodným a chemickým zákonom a matematické modely z nich boli deduktívne odvodzované. Takéto modelovanie sa nazýva analytické. V oblasti teórie riadenia je podmienkou pre kvalitné riadenie lineárnych či nelineárnych procesov určenie, čo najpresnejšieho matematického, prípadne fyzikálneho modelu.

Klasické metódy návrhu regulátorov boli rozvinuté počas 60tych rokov 20teho storočia a boli charakterizované hľadaním koreňov, Bodeho charakteristikou alebo Nyquistovou charakteristikou a analýzou. Požadovaná prechodová charakteristika bola dosiahnutá analýzou koreňov alebo frekvenčnými odozvami. Požadovaný ustálený stav alebo utlmenie poruchy bolo docielené zvýšením rádu systému alebo modifikovaním frekvenčnej odozvy obvodu prenosovej funkcie.

Robustnosť je analyzovaná krajnými hranicami zosilnenia a fázy, kde akceptovateľná stabilita je charakterizovaná minimálnym zosilnením a fázovými hranicami. Klasický výsledný systém je charakterizovaný kompromisom medzi výkonom, robustnosťou a limitami rozsahu riadiaceho vstupu. V prípade robustnosti sú naopak staršie metódy používané ako nástroje chápania príčiny a efektu modifikácií regulátora na stav regulovaného systému a takisto pre výber parametrov. Výhoda klasického návrhu je intuitívnosť postupu pri návrhu. Nevýhoda je, že klasický návrh zlyháva práve pri systémoch vyššieho rádu a MIMO systémoch.

Optimalizačné metódy, ako napr. LQG boli zdokonalené v 60tych rokoch pre letecké aplikácie. Tento typ návrhu bol úspešne používaný v mnohých aplikáciách. Tieto metódy priniesli širšie využitie stavového priestoru, ktorý ponúka lepšie výsledky hlavne pri regulácii MIMO systémov a takisto použitie váhovej funkcie. Nevýhoda LQG návrhu bola strata intuitívnych informácií o regulátore. Váhové funkcie neobsahujú robustné špecifikácie, aj keď metóda môže byť použitá na zlepšenie stability. Nevýhodou je takisto, že rád regulátora je rovnaký alebo vyšší ako rád riadeného systému, návrh môže byť jedine vylepšený aproximáciou na nižší rád regulátora.

Neskôr prichádza dlhšie vylepšovaná  $H_{\infty}$  a  $\mu$ -syntéza (často uvádzaná ako  $\mu$ -syntéza), ktorá sa používa úspešne pri mnohých zložitých a špecifických aplikáciách jadrovej fúzie (regulovanie plazmového systému), v letectve, pri výkonných raketových strelách, ...

$\mu$ -syntéza môže obsahovať výkonové špecifikácie, špecifikácie potlačenia poruchy, limitácie vstupných veličín a v neposlednej rade robustné požiadavky. Nevýhodou pri inžinierskom návrhu môže byť vyšší rád aj pri jednoduchších problémoch.

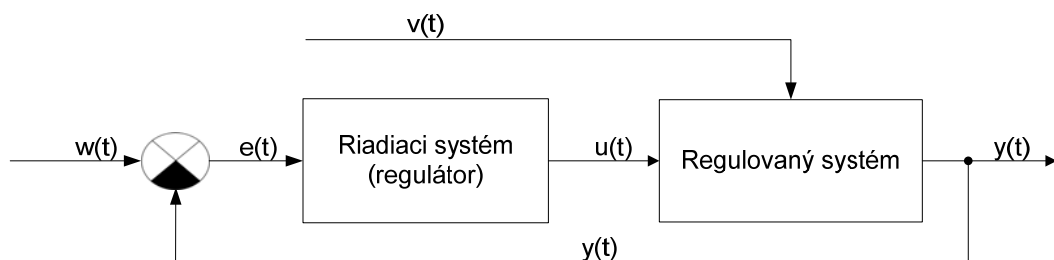
## **I. TEORETICKÁ ČASŤ**

# 1 ZÁKLADNÉ POJMY

## 1.1 Základy spätnoväzbovej regulácie

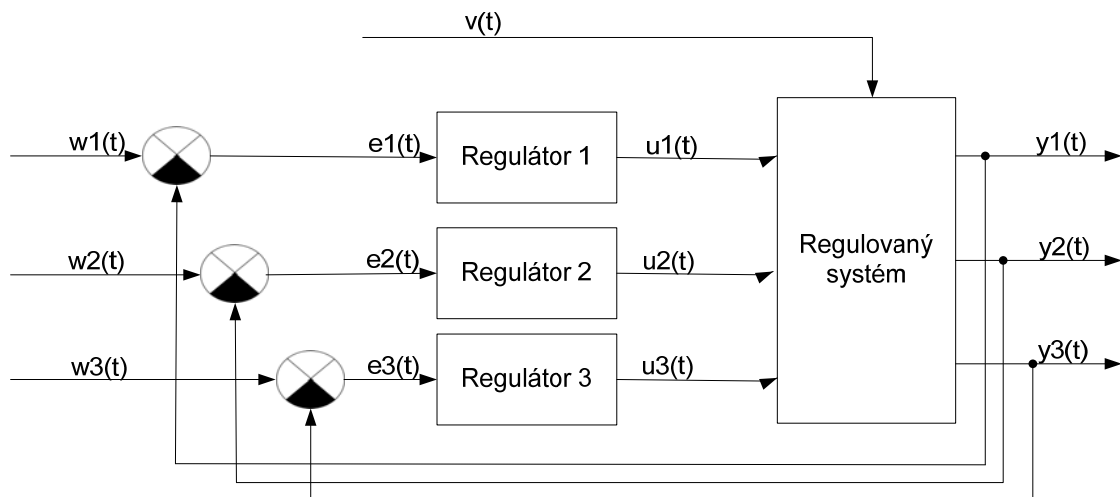
Teória regulácie je najväčšou časťou teórie riadenia. Úlohou systému regulácie je pôsobiť riadiacim systémom na riadený systém, aby bol výsledok v súlade s cieľom riadenia. Cieľom riadenia je, aby sa výstupná veličina, čo najviac blížila žiadanej hodnote, v ideálnom prípade aby bola rovná žiadanej hodnote bez ohľadu na poruchové veličiny. Je zrejmé, že spätnoväzbový obvod zaisťuje kvalitnejšie riadenie, pretože riadiaci systém je spätne informovaný o zmenách, poruchách a vlastnostiach riadeného systému.

Bloková schéma je zobrazená na obr. 1. Riadiaci signál  $u(t)$  je generovaný riadiacim systémom (regulátorom) a je aplikovaný na regulovaný systém za účelom požadovaného chovania systému. Meraný výstup systému  $y(t)$  sa navracia do regulátoru pomocou regulačnej odchýlky  $e(t)$ , ktorá je definovaná ako rozdiel žiadanej hodnoty  $w(t)$  a výstupnej hodnoty  $y(t)$ . Do regulovaného systému takisto vstupuje súhrnná poruchová veličina  $v(t)$ . Súhrnná poruchová chyba  $v(t)$  je generovaná prostredím, často pôsobí na systém a spôsobuje nežiaduce chovanie systému. Je zrejmé, že regulátor zastáva dve funkcie, zaistenie sledovania žiadanej hodnoty  $w(t)$  riadiacim signálom  $u(t)$  a potlačenie poruchovej veličiny  $v(t)$ .



Obr. 1. Všeobecné blokové schéma uzavretého obvodu

Príklad mnohorozmerného regulačného obvodu je zobrazený na obr. 2. Mnohorozmerné regulačné obvody môžu mať veľmi variabilnú štruktúru, v ktorých výstupné signály regulovaného systému môžu byť na seba ľubovoľne viazané a vzájomne sa ovplyvňovať, prípadne neovplyvňovať.



Obr. 2. Příklad mnohorozmerného uzavretého regulačního obvodu

Ako príklad je vyobrazený trojrozmerný, čiže mnohorozmerný uzavretý obvod. Obsahuje tri regulátory a tri hlavné regulované veličiny  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  a  $y_3(t)$ . Regulačná odchýlka je vypočítaná rovnako vo všetkých troch prípadoch, pomocou výstupov systém a žiadaných hodnôt  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  a  $w_3(t)$ . Úlohou regulačného obvodu následne bude zaistenie regulácie pre tri regulované veličiny. Je treba podotknúť, že počet vstupov a výstupov sústavy nemusí byť zhodný (a často nie je), takisto ako počet regulátorov.

## 1.2 Spojitý lineárny stavový popis systému

Spojité lineárny systém je popísaný transformáciou medzi vstupom a výstupom so zahrnutím počiatočných podmienok, pričom obidva sú vektorové funkcie času. Matematický model lineárneho spojitého systému je typicky vo forme jednej alebo viacerých jednoduchých diferenciálnych rovníc obsahujúcich vstupy, výstupy a prípadne premenné reprezentujúce vzťah vstupu a výstupu. Viac informácií v knihe [101111111]. Pre matematický model je používaná forma stavového modelu:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2)$$

Stavy systému sú popísané pomocou  $x(t)$ ,  $u(t)$  je vektor vstupov a  $y(t)$  je vektor výstupov, za predpokladu vstupnej podmienky  $x(0)=x^s$ , počiatočný stav sa rovná ustálenému stavu. Matice pre mnohorozmerné prípady sú:

$$A(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}, \quad C(t) \in \mathfrak{R}^{r \times n}, \quad D(t) \in \mathfrak{R}^{r \times m} \quad (3)$$

Pokiaľ sú premenné v maticiach, rovnica (3), premenné v čase, jedná sa o t-variantný systém a ak sú konštantné ide o t-invariantný systém. Počet prvkov  $n$  označuje rád systému. Často sa používa zjednodušená verzia  $D=0$ , ktorá spĺňa podmienku fyzikálnej realizovateľnosti pre regulovaný systém (výstup neobsahuje vstupné veličiny):

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (5)$$

Po matematických úpravách uvedených v knihe [11] je výstup ako funkcia vstupných podmienok a vstupu. Odvodenie vyplýva z podmienky počiatočnej odozvy a nútenej odozvy. Výstup sa zjednoduší pri t-invariantnom systéme:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7)$$

V t-invariantných systémoch je typicky počiatočný čas nulový. Prechodová stavová matica je exponenciálny rozklad (mocninová rada). Výsledný systém pre t-invariantný systém je:

$$y(t) = Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (8)$$

Takisto impulzná odozva je zložená z častí jedno vstupných a výstupných z každého vstupu a výstupu:

$$i(t) = Ce^{At} B + D\delta(t) \quad t \geq 0 \quad (9)$$

Kde  $\delta(t)$  je diracov impulz. Impulzná odozva je vyjadrená ako aplikovanie impulzov na každý vstup a vyjadrená výstupom rovnice (8). Matica impulznej odozvy:

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_{11}(t) & i_{12}(t) & \cdots & i_{1n_n}(t) \\ i_{21}(t) & i_{22}(t) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{m_m1}(t) & \cdots & \cdots & i_{m_m n_n}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

### 1.3 Určenie prenosovej funkcie

Pre lepšiu predstavivosť v oblasti prenosových funkcií je možné previesť stavový model na prenosovú funkciu. Použitím rovnice (6,7) a použitím Laplaceovej transformácie:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (11)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (12)$$

kde  $X(s)$ ,  $Y(s)$  a  $U(s)$  sú obrazy Laplaceovej transformácie. Do úvahy treba brať aj počiatočnú podmienku  $x(0)$ .

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \quad (13)$$

Prenos systému je jednoducho vyjadrením Laplaceovej transformácie vstupného vektoru a Laplaceovej transformácie výstupného vektora:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (14)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (15)$$

Prvky matíc sú konštantné a matica  $I$  je diagonálna jednotková matica.

Výsledná matice  $G(s)$  má tvar:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1n}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \cdots & \cdots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$G_{ij}(s) = \left[ \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right]_{ij} \quad q, r \in N_0 \quad i = 1..m_m \quad j = 1..n, \quad (17)$$

Pre dodržanie podmienky realizovateľnosti musí platiť, že  $r$  musí byť menšie alebo rovné  $q$ , teda čitateľ prenosu musí byť menší alebo rovný. Samozrejme v prípade rovnice (4,5) bude čitateľ prenosu menší ako menovateľ.

Po zložitejšom odvodení sa dá takisto dokázať [11], že prenos sa dá určiť aj Laplaceovou transformáciou impulznej odozvy (9,10):

$$G(s) = L\{i(t)\} \quad (18)$$

#### 1.4 Frekvenčná odozva MIMO systému

Frekvenčná odozva sa dá ľahko vypočítať pomocou umelých vstupov do sústavy pomocou sínusoidy odvodením z prenosovej funkcie. Lineárny systém mení iba amplitúdu a fázu, avšak nemení frekvenciu. Pre SISO systémy fázový posun a zosilnenie systému. U MIMO systému, fázový posun a zosilnenie systému závisí na tom, ktorý vstup a výstup je práve sledovaný.

Na systém pôsobí vstupný signál popísaný ako:

$$u_j(t) = u_{j0} \sin(\omega t + \varphi_j) \quad (19)$$

Signál je periodický. Takže prislúchajúci výstupný signál je takisto sínusoida:

$$y_i(t) = y_{i0} \sin(\omega t + \zeta_i) \quad (20)$$

Následnou úpravou, použitím amplitúdy (zosilnenia) a fázového posunu s použitím základov [5] a vzťahu (17):

$$\frac{y_{i0}}{u_{i0}} = |G_{ij}(j\omega)| \quad \zeta_i - \varphi_j = \text{Im}(G_{ij}(j\omega)) \quad (21)$$

$$y_i(\omega) = G_{ij}(j\omega)u_j(\omega) \quad (22)$$

Celková odozva na simultánny vstupný signál rovnakej frekvencie s viacerými vstupmi na základe prekrývania lineárnych systémov je suma individuálnych odoziev:

$$y(\omega) = G(j\omega)u(\omega) \quad (23)$$

Kde vstupné a výstupné signály sínusového charakteru sú reprezentované na základe vektorov. Zosilnenie je potom pre SISO dané jednoducho:

$$\frac{|y(\omega)|}{|u(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)u(\omega)|}{|u(\omega)|} \quad (24)$$

Výpočet naopak nie je jednoduchý pre MIMO, kde ako bolo zmienené signály sú vektory. Môžeme použiť rôzne normy, použiť môžeme Euklidovu normu pre výpočet obidvoch signálov:

$$\frac{\|y(\omega)\|}{\|u(\omega)\|} = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots}} \quad (25)$$

Zosilnenie závisí na frekvencii a amplitúde. Avšak, pre MIMO existujú ďalšie väzby. Maximálne a minimálne zosilnenie v smere vstupu je závislé singulárnej hodnote  $G$ , viac v [1] a [5].

$$\max \frac{\|G(j\omega)u(\omega)\|}{\|u(\omega)\|} = \max_{\|u(\omega)\|=1} \|G(j\omega)u(\omega)\| \quad (26)$$

$$\min \frac{\|G(j\omega)u(\omega)\|}{\|u(\omega)\|} = \min_{\|u(\omega)\|=1} \|G(j\omega)u(\omega)\| \quad (27)$$

## 1.5 Póly a nuly stavového modelu

Prenosová funkcia MIMO systémov je matica SISO prenosových funkcií. Systémové póly sú definované ako spojenie pólov jednotlivých SISO prenosových funkcií. Táto definícia postačuje, neobsahuje však informácie mnohonásobnosti pólov. V špeciálnom prípade je možné vyjadriť nuly systému ako:

$$\det(G(s)) = 0 \quad (28)$$

Pre minimálnu realizáciu môže byť mnohnásobnosť pólov rovná vlastným hodnotám matice A:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (29)$$

Pri využití Laplaceovej transformácie rovnice (11,12) pri nulovej počiatkovej podmienke a  $Y(s)=0$  je možné jednoducho prepísať rovnice do maticovej rovnice a ekvivalentne určiť:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

Tento vzťah je možné takisto použiť na určenie núl systému, avšak systém musí byť pozorovateľný a riaditeľný (viď nižšie).

## 1.6 Pozorovateľnosť a riaditeľnosť

Na otázku za akých podmienok môže byť systém riaditeľný zo vstupu a za akých podmienok je stav systému odhadnuteľný na základe znalosti vstupu a výstupu odpovedá určenie riaditeľnosti a pozorovateľnosti.

### 1.6.1 Riaditeľnosť

Otázka riaditeľnosti zo vstupu je samozrejme zaujímavá pre veľa aplikácií.

System je kompletne kontrolovateľný ak existuje nenútený riadiaci signál  $u(t)$ , ktorý dokáže preniesť každý počiatočný stav  $x(t_0)$  na ktorúkoľvek inú požadovanú pozíciu  $x(t)$  v konečnom čase a to  $t_0 \leq t \leq T$  [3].

Pre systém:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (31)$$

Je možné stanoviť, či je systém riaditeľný skúmaním algebrickej podmienky:

$$\text{stupeň} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n, \quad (32)$$

kde matice  $A, B$  sú popísané ako (3). Jednoduchý test riaditeľnosti je tak určený pre lineárne,  $t$ -invariantné práve len vtedy, ak determinant  $\det(R)$  matice riaditeľnosti

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (33)$$

**nie je rovný nule.** Moderné metódy návrhu dokážu zvládnuť situáciu, pokiaľ systém nie je kompletne kontrolovateľný, ale stavy, ktoré nie sú kontrolovateľné, sú aspoň stabilné. Takýto systém sa nazýva **stabilizovateľný**. Samozrejme riaditeľný systém je implicitne aj stabilizovateľný.

### 1.6.2 Pozorovateľnosť

Pozorovateľnosť je treba posúdiť takisto v mnohých prípadoch. Ako príklad sa dá uviesť, či je možné určiť spotrebu benzínu automobilu z merania otáčok motoru. Pozorovateľnosť je definovaná ako:

Systemu sa hovorí pozorovateľný iba a len vtedy, pokiaľ existuje konečný čas  $T$  tak, že pre počiatočný stav  $x(0)$  môže byť odvodený z pozorovania hodnoty  $y(t)$  kontrolovanej signálom  $u(t)$ , platí  $0 \leq t \leq T$  [3].

Pre systém:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (34)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (35)$$

Pozorovateľnosť je definovaná ako schopnosť odhadnúť stav, ale dôsledky pozorovateľnosti sú podstatne zložitejšie. Tento koncept je často spomínaný pri návrhu regulátorov, teórii systémov a rôznych analýzach. Póly pozorovateľa, ktoré riadia stupeň konvergencie, môžu byť použité v každej pozícii iba ak je systém pozorovateľný.

Jednoduchý test pozorovateľnosti môže byť určený lineárne a t-invariantné systémy pomocou matice P:

$$P = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Systém je pozorovateľný v prípade, ak determinant  $\det(P)$  **nie je rovný nule**. Niektoré návrhy dokážu zvládnuť ak systém nie je kompletne pozorovateľný, ale stavy, ktoré nie sú pozorovateľné, sú aspoň stabilné. Tieto systémy sú nazývané ako **detekovateľné**. Samozrejme, pokiaľ je systém pozorovateľný, je aj detekovateľný.

## 1.7 Normy

Normy sa s výhodou používajú pre klasifikáciu štruktúrálnej neurčitosti, ktorá bude diskutovaná ďalej. Takisto jednou z ciest ako popísať kvalitu riadenia je určiť veľkosť daného signálu. Samozrejme kvalitu riadenia najčastejšie posudzujeme podľa odchýlky od žiadanej hodnoty. Existuje niekoľko noriem popisujúcich veľkosť signálu. Voľba normy závisí na situácii. Existujú normy pre popis signálu, tak aj pre prenosy systémov.

### 1.7.1 Normy pre signály

Predpoklad je, že signál je minimálne po častiach spojitý. Podmienky, ktoré musí každá norma splňovať:

$$\|u\| \geq 0 \quad (37)$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0 \quad \forall t \quad (38)$$

$$\|au\| = |a|\|u\| \quad \forall t \in \mathfrak{R} \quad (39)$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (40)$$

### 1.7.1.1 Norma $H_1$

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \quad (41)$$

### 1.7.1.2 Norma $H_2$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt} \quad (42)$$

Kvadratická norma má význam energie. Konečnost normy znamená konečnou energii.

### 1.7.1.3 Norma $H_\infty$

$$\|u\|_\infty = \sup_t |u(t)| \quad (43)$$

Konečnost normy  $H_\infty$  znamená, že signál má obmedzenú amplitúdu.

### 1.7.1.4 Výkonové signály

Priemerný výkon signálu  $u(t)$  je definovaný:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)^2 dt \quad (44)$$

Ak je signál  $u(t)$  nazývaný ako výkonový signál, táto limita samozrejme existuje. Vo výpočtoch sa používa aj druhá odmocnina výkonu.

## 1.7.2 Normy pre prenosy

Normy pre lineárne, t-invariantné sústavy:

**Norma  $H_1$**  (absolútna norma):

$$\|G\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)| d\omega \quad (45)$$

**Norma  $H_2$  :**

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega} \quad (46)$$

**Norma  $H_\infty$  :**

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (47)$$

Základné používané normy sú  $H_2$  a  $H_\infty$ .  $H_2$  je konečná, len ak systém nemá žiadny pól na imaginárnej osi a je s vyšším stupňom menovateľa ako čitateľa. Norma  $H_\infty$  je rovná vzdialenosti najvzdialenejšieho bodu frekvenčnej charakteristiky od počiatku. Je to teda vrchol Bode charakteristiky. Dôležitá vlastnosť  $H_\infty$  je submultiplikatívnosť [7]:

$$\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|H\|_\infty \quad (48)$$

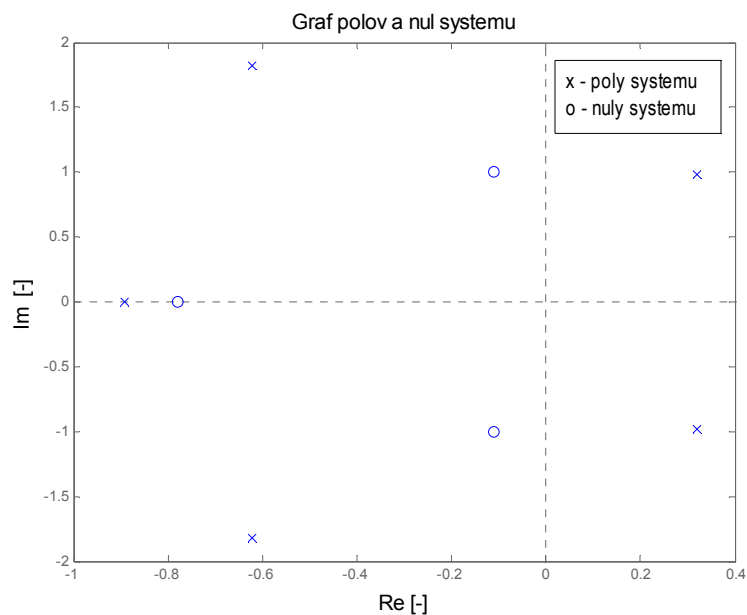
Pre ďalšie informácie a príklad noriem slúžia [5],[7] a [121212].

## 2 STABILITA

Existuje mnoho spôsobov definovania stability. Našťastie pre lineárne t-invariantné tieto rozdiely nemajú vplyv.

Systém je vnútorne stabilný, ak žiadny z jeho komponentov neobsahuje skryté nestabilné súčasti a vstupovanie obmedzených externých vstupov v ktoromkoľvek mieste systému s obmedzeným výstupovým merateľným signálom je merateľné v celom systéme. Signál  $u(t)$  musí byť obmedzený konštantou v celom rozsahu  $t$ . Slovo vnútorne zdôrazňuje, že nie je požadovaný iba čiastočný vstup k čiastočnému výstupu, ale stabilita signálov je v každom bode systému. Každá nestabilita komponentov musí byť obsiahnutá vo vstupne-výstupnom správaní. Systém je stabilizovaný, ak všetky nestabilné módy sú stavovo riaditeľné [5].

Je možné stretnúť s pojmom **absolútna stabilita**, ktorá sa skrakuje len na pojem **stabilita**. Charakterizuje, či je systém stabilný alebo nestabilný. **Relatívna stabilita** je zaujímavý pojem a označuje **stupeň stability**. Tento pojem je dlho ustálený v letectve. Používa sa na vyjadrenie stability lietadla. Čím viac je lietadlo stabilné, tým je ťažšie manévrovateľné. Je jasné, že stabilita dnešných stíhacích lietadiel je nižšia v porovnaní s dopravnými lietadlami, u ktorých sa jedná o bezpečnosť. Relatívna stabilita sa dá určiť jednoducho pomocou pozície pólov alebo charakteristickej hodnoty v komplexnej rovine.



Obr. 3. Příklad zobrazení pólov a nul systému

Ukázkový příklad stability spojitého systému je zobrazený na obr. 3. Systém má dva páry komplexne združených pólov a jeden reálný pól. Má takisto jeden pár komplexne združených núl a jednu reálnu nulu. Na základe podobnej charakteristiky môžeme určiť relatívnu stabilitu, koreň je stabilnejší, čím je jeho reálna zložka zápornejšia, to znamená, že reálný pól je najstabilnejší. Týmto spôsobom môžeme určiť relatívnu stabilitu, avšak v tomto prípade sa pár komplexne združených pólov nachádza v pravej polrovine, čo znamená, že systém je celkove nestabilný.

Najvhodnejšiu definíciu však ponúka [3]: Stabilný systém je dynamický systém s obmedzenou odozvou na obmedzený vstup.

Systém je takisto stabilný podľa impulznej charakteristiky. Je stabilný, iba ak každá časť impulznej odozvy je úplne integrovateľná:

$$\int_0^{\infty} |G_{ij}(\tau)| d\tau < \infty \quad (49)$$

Impulzná charakteristika demonštruje, že systém musí dosiahnuť na výstupe nulu ako sa čas približuje nekonečnu, aby mohol byť stabilný. Po výchylke na vstupe stabilný systém vracia nulovú hodnotu. Tento spôsob je značne používaný pre klasické lineárne systémy.

Pojem stability a robustnej stability je rozoberaný v priebehu celej práce. Pre podrobnejšie informácie je vhodné pozrieť [3], [4], [5], [10] a pre pojem Lyapunovej stability [1].

### 3 ROBUSTNOST'

Táto časť sa sústreďí na analýzu robustnosti systémov so spätnou väzbou. Táto téma je veľmi rozsiahla, preto budú uvedené len základy. Budú posudzované stability a vlastnosti systémov, ktorých dynamika je neurčitá (neistá), budú určené limity robustnej stability.

#### 3.1 Modelová neurčitosť

Jedným zo základov robustnosti je použitie neurčitosti. Poskytuje aj veľmi zjednodušené modely pri návrhu spätnoväzbových obvodov. Jednou zo základných neurčitostí (neistôt) pri dynamických systémoch je Parametrická neurčitosť.

##### 3.1.1 Parametrická neurčitosť

Pri parametrickej neurčitosti je známa štruktúra modelu, ale jeden alebo viac parametrov nie je známych. Pre popis neurčitosti sa môže použiť vektor reálnych neurčitých parametrov  $q$ . Prenosová funkcia s parametrickou neurčitosťou je vyjadrená:

$$G(s, q) = \frac{A(s, q)}{B(s, q)} = \frac{b_r(q)s^r + \dots + b_1(q)s^1 + b_0(q)}{s^q + \dots + a_1(q)s + a_0(q)} \quad i = 1..m_m \quad j = 1..n_n \quad (50)$$

Je možné odlíšiť neurčitosť čitateľa a menovateľa. Podobným spôsobom bude definovaný charakteristický polynóm  $p$ . Vektory neurčitosti sú samozrejme ohraničené spodným aj horným intervalom, čiže parametre patria do obmedzujúcej množiny  $Q$ . Spôsob ohraničenia spočíva v použití normy, napr. normy  $L_\infty$ ,  $Q$  má tvar kváдру. Neurčité parametre sú teda ohraničené pomocou intervalov. Stabilita definuje pre spojité systémy korene v ľavej časti komplexnej polroviny, teda polynóm (38) môže byť stabilný len po splnení tejto podmienky. Celá skupina je teda stabilná, ak celá skupina charakteristických polynómov závislých od  $Q$  je stabilná pre všetky  $q$  patriace do  $Q$ , to znamená, že všetky možné korene musia byť stabilné. Môže sa preto zdať, že pre testovanie robustnej stability stačí postupne vypočítať všetky korene. Výpočet bude exponenciálne závislý na veľkosti  $Q$ , čo prinesie zásadne veľmi dlhé predĺženie výpočtu. Toto robí spôsob výpočtu neefektívnym, preto je potrebné použiť dostupné pokročilejšie metódy. Spôsob akým parameter  $q$  vstupuje do charakteristického polynómu určuje jeho základnú štruktúru:

### 3.1.1.1 Intervalová neurčitost'

Je základnou parametrickou neurčitost'ou. Má nezávislú štruktúru a koeficient  $q$  je spojitá funkcia. Uvedenie názorného príkladu:

$$p(s, q) = (q_1 + 5)s + (q_0 - 2) \quad q_0, q_1 \in \langle -2; 2 \rangle \quad (51)$$

Zápis sa dá skrátit' pomocou zápisu (určenie intervalu):

$$p(s, q) = [3; 7]s + [-4; 0] \quad (52)$$

Zložitejšie štruktúry neurčitosti sú všetky ostatné štruktúry, okrem intervalovej neurčitosti. Je vidieť, že u intervalovej neurčitosti vstupuje len jeden parameter do jedného koeficientu. U zložitejších môžu byť parametre navzájom závislé priamo od koeficienta. Jednotlivé príklady zložitejších štruktúr:

### 3.1.1.2 Afinitná lineárna neurčitost'

Príklad:

$$p(s, q) = (q_1 - q_2 + 5)s + (q_0 + q_1 - 2) \quad q_0, q_1, q_2 \in \langle -2; 2 \rangle \quad (53)$$

Jednotlivé prvky sú lineárne funkcie, môžu byť teda len v prvých mocninách. Neurčitost' je taktiež niekedy pomenovaná polytopická.

### 3.1.1.3 Multilineárna neurčitost'

$$p(s, q) = (q_1 \cdot q_0 + 5)s + (q_0 + q_1 \cdot q_2 - 2) \quad q_0, q_1, q_2 \in \langle -2; 2 \rangle \quad (54)$$

Jednotlivé prvky sú znova lineárne funkcie, ktoré obsahujú len prvé mocniny. Avšak prvé mocniny parametrov sa už môžu násobiť.

### 3.1.1.4 Nelineárna neurčitost'

$$p(s, q) = (q_1 \cdot \sqrt[3]{q_0} + 5)s + (\cos(q_0) + q_1^3 \cdot q_2 - 2) \quad q_0, q_1, q_2 \in \langle -2; 2 \rangle \quad (55)$$

Prvky obsahujú mocniny a matematické funkcie. Tieto väzby môžu značne komplikovať výpočet robustnej analýzy. Nástroje na určenie intervalovej neurčitosti sú založené na extrémoch, ale v prípade nelineárnej neurčitosti nemusí stačiť stabilita extrémov.

## 3.2 Neurčitost' vo frekvenčnej oblasti

### 3.2.1 Oblasti neurčitosti

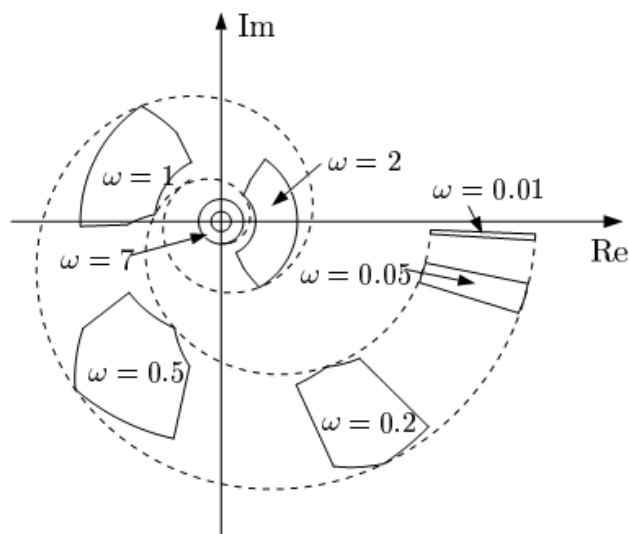
Pre objasnenie ako funguje parametrická neurčitost' vo frekvenčnej oblasti je uvažovaný nasledujúci príklad [5]:

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} e^{-\theta s} \quad 2 \leq (k, \theta, T) \leq 3 \quad (56)$$

**Krok 1:** V každej frekvencii sú generované všetky 3 parametre v rozsahu popísanom v (44). Vo všeobecnosti majú oblasti neurčitosti zložité tvary, ako je tomu na obr. 4 a komplikované matematické popisy a teda nie sú vhodné pre syntézu riadenia.

**Krok 2:** Prevedieme zjednodušenie komplexných oblastí nahradením za jednoduchší tvar (kruh), čo má za následok ďalší opis neurčitosti.

Podľa zadania (44) a obr.4 sa dá postrehnúť, že systém poskytuje vysokú neurčitost', systém dovoľuje presun z jednej frekvencie na druhú v oblasti neurčitosti. Zjednodušením a vytvorením kruhov okolo oblastí neurčite túto oblasť zväčší. Existujú však aj metódy, ktoré zabraňujú zväčšeniu oblasti a aj keď sa používajú pre analýzu, nie sú vhodné pre návrh riadenia pre jednoduchšie systémy. Hľadanie stredu opisujúceho kruhu (zmena nominálneho modelu) je takisto vhodná metóda .



Obr. 4. Oblasti neistoty, Nyquistova charakteristika [5]

### 3.2.2 Voľba nominálneho modelu

Existujú tri možnosti pre voľbu nominálneho modelu s parametrickou neurčitost'ou reprezentovanou komplexnou poruchou:

1. Zjednodušený model (napr. nižší rád)
2. Model priemerných hodnôt parametrov  $\bar{G}(s)$
3. Centrálny systém z Nyquistovej charakteristiky (čo najmenšie kruhy)

Prvý prípad prinesie najväčšiu oblasť neurčitosti, avšak model je jednoduchý a to uľahčuje návrh regulátora v neskorších fázach. Druhý prípad je najpriamejšie riešenie. Tretí prípad prinesie najmenšiu oblasť, ale určenie nominálneho modelu je podstatne zložitejšie, pretože model zvyčajne nie je racionálna prenosová funkcia a aproximácia modelu môže viesť k vysokému rádu [5].

Pre príklad použijeme znova jednoduchý príklad (56). Ukážka zjednodušeného nominálneho modelu  $G_1$  a  $G_2$  je:

$$G_1 = \frac{\bar{k}}{Ts+1} \quad G_2 = \frac{\bar{k}}{Ts+1} e^{-\bar{\theta}s} \quad (57)$$

Systém  $G_1$  naznačuje zjednodušený model,  $G_2$  opisuje model hodnôt priemerných parametrov. Centrálny systém ako tretia voľba ukazuje, že model nie je racionálny. Najlepšie výsledky sa dosiahnu nominálnym systémom  $G_1$  aj keď má najväčšiu oblasť neurčitosti. Dôvod, pre toto tvrdenie, je že región najhoršieho prípadu sa približuje systémom s najzápornejšou fázou. Takže systémy obsiahnuté v najväčšom regióne (model  $G_1$ ) sú podstatne ľahšie pre reguláciu. Pre systém s dopravným oneskorením je teda jednoduchšie použiť zjednodušený nominálny systém bez dopravného oneskorenia a oneskorenie radšej pridať do ďalšej neurčitosti (platí hlavne pre jednorozmerné systémy).

### 3.2.3 Komplexné odchýlky oblasti neurčitosti

Oblasti z obr. 4 zaokrúhlené na kruhové oblasti môžu byť generované komplexnými odchýlkami (prídavnou neurčitost'ou) okolo nominálnej sústavy  $G$ :

$$G_k(s) = G(s) + G_A(s)G_B(s) \quad |G_B(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (58)$$

Kde  $G_B$  je akákoľvek stabilná prenosová funkcia, ktorá v každej frekvencii neprekračuje rozsah. Vo väčšine prípadov je  $G_A$  racionálna prenosová funkcia.

Takisto  $G_A$  môže byť „váha“, ktorá je zavedená s cieľom normalizovať odchýlku pod hodnotu jedna v každej frekvencii. A tak záleží len na veľkosti váhy. Pre odstránenie problémov je vhodné vždy použiť stabilné  $G_A$ , ktoré je takisto minimálne fázové.

Oblasti môžu byť popísané aj multiplikatívnou neurčitost'ou :

$$G_k(s) = G(s)(1 + G_C(s)G_D(s)) \quad |G_D(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (59)$$

Multiplikatívna neurčitost' je viac používaná, pretože jej numerické hodnoty sú viac informatívne. Vo frekvenciách, kde  $|G_C(j\omega)| > 1$  neurčitost' presahuje 100% a Nyquistova krivka môže prejsť cez počiatok. V týchto frekvenciách nie je známa fáza systému a tým je povolený prechod núl systému pravou stranu komplexnej roviny. Potom samozrejme nie je možná presná regulácia vo frekvenciách, kde  $|G_C(j\omega)| > 1$ .

### 3.2.4 Amplitúdová a fázová bezpečnosť

Je dôležité definovať pojem amplitúdovej a frekvenčnej bezpečnosti spojenej s tvarovaním frekvenčnej charakteristiky. Obidva pojmy vychádzajú z Nyquistovej stability.

**Amplitúdová bezpečnosť**  $G_M$  je vyjadrená kritickou frekvenciou otvoreného obvodu  $\omega_k$  a udáva hodnotu, pri ktorej je uzavretý obvod na hranici stability (po vynásobení zosilnením otvoreného obvodu).  $G_p$  je prenos otvoreného obvodu.

$$G_M = \frac{1}{|G_p(j\omega_k)|} \quad (60)$$

**Fázová bezpečnosť** sa napríklad používa ako ochrana pred neznámym dopravným oneskorením. Je to uhol, ktorý definuje koľko fázového oneskorenia môžeme pridať, aby sa uzavretý obvod ocitol na hranici stability.

## 3.3 Analýza sledovania výkonu

Regulačná odchýlka a požadovaná regulácia môžu byť vypočítané pre špecifický vstup ako pre stavový model, tak pre prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu. Lineárnosť zaisťuje, že odozva na referenčný signál a odozva na možné poruchy môže byť počítaná oddelene. Odozva na referenčný vstup je generovaná nastavením všetkých počiatočných podmienok na nula a všetkých poruchových vstupov na nula. Stavový model môže byť vytvorený len ako odozva referenčného signálu, odstránením stĺpcov s poruchovým

vstupom ako vo vstupnej matici, tak vo vstupno-výstupnej matici uzavretého stavového modelu.

Realistický referenčný signál závisí na aplikácii. Mnoho aplikácií požaduje výstup, ktorý je riadený len konštantnou úrovňou požadovanej hodnoty. Napríklad autopilot lietadiel musí dodržiavať smer a výšku na konštantné hodnoty. Tieto požadované hodnoty sa môžu občasne meniť napr. kvôli kolíznemu smeru, vo väčšej miere skokovo. Ostatné aplikácie môžu mať vstup, ktorý leží vo frekvenčnom pásme. Napríklad rádiolokátor pre riadenie paľby musí sledovať pohyb lietadla, ktoré sa rôzne pohybuje. Tento náhodný proces môže byť popísaný ako výstup tvarovacieho filtra budeného bielym šumom.

Sledovanie výkonu riadeného systému môže byť zhodnotené aplikovaním referenčného vstupu na systém, žiadanej hodnoty a výpočtom regulačnej odchýlky. Frekvenčná odozva uzavretého obvodu systému môže byť takisto použitá na posúdenie sledovania výkonu.

### 3.4 Analýza potlačenia poruchy

Regulačná odchýlka a požadované parametre regulácie môžu byť zhodnotené špecifickým šumovým vstupom. Odozva vzhľadom ku poruche (šumu) je generovaná nastavením všetkých počiatočných podmienok na nula a všetkých referenčných vstupov na nula. Znova stavový model môže byť vytvorený len ako odozva šumového signálu, odstránením stĺpcov s referenčným vstupom ako vo vstupnej matici, tak vo vstupno-výstupnej matici uzavretého stavového modelu.

Výstup regulovaného systému sa musí udržiavať blízko požadovanej hodnoty aj s poruchami. Poruchy sú mimo kontroly dizajnéra a samozrejme udržiavajú výstup od požadovanej hodnoty. Poruchový vstup pozostáva s nekonečne veľa kombinácií, čo zhoršuje analýzu potlačenia poruchy.

Porucha často pôsobí v krátkych periódach času. Trenie motoru pri rozbehu, ohýbanie antény, statický elektrický impulz a krátka turbulencia lietadla sú dočasné (krátkodobé) poruchy.

Konštantné a skokové poruchy sú taktiež veľmi časté. Váha lietadla, točivý moment vrtule alebo váha plavidla sú konštantné poruchy. Analýza skokových porúch vyžaduje samozrejme použitie prechodových charakteristík.

Kmitavé poruchy sú napríklad vlny pôsobiace na loď, akustické vibrácie, zemetrasenia alebo vibrácie motora. Furiérova transformácia môže byť použitá rozložením zložitejších porúch do „sínusových“ porúch. Prechod do sínusových charakteristík je používaný s praktických aplikáciách. Tieto poruchy sa často vyjadrujú vo frekvenčnom pásme. Frekvenčná odozva ponúka účinný nástroj pre šírko obmedzený šum a šum tvaru sínusovej funkcie.

Poruchy sa najlepšie modelujú ako náhodné procesy. Často používaný je **biely šum**. Príklad bieleho šumu sú turbulencie lietadla alebo loď na rozbúrenom mori. Pre biely šum platí, že je stacionárny náhodný proces, ktorý má pre všetky frekvencie rovnakú hodnotu výkonovej spektrálnej hustoty. Priemerný výkon bieleho šumu je nekonečný, preto je fyzikálne nerealizovateľný. Je to ideálny šum s nekonečne veľkým stredným výkonom. V praktických aplikáciách sa používa šírko-obmedzený biely šum. Presnú matematickú definíciu bieleho šumu je možné nájsť v [1], [10], [11] a ďalších.

Špecifikácia porúch (šumov) je jedna z najťažších úloh návrhu riadenia. Vyššie zmienené šumy sú najviac používané a sú aplikovateľné na široké spektrum riadiacich systémov (sú ľahšie použiteľné). Často sa používa taktiež zjednodušenie šumu na niektorý z použitých príkladov.

Analýza potlačenia poruchy regulovaného systému môže byť určená s poruchy pôsobiacej na systém, výslednej regulačnej odchýlky a žiadanej hodnoty. Rovnako používaná je frekvenčná analýza.

### 3.5 Citlivostná funkcia

Klasický uzatvorený obvod (obr.1) má regulátor  $R(s)$  a riadený systém  $S(s)$ . Obsahuje signály  $w(t)$  žiadaná hodnota,  $e(t)$  regulačná odchýlka vstupný signál  $u(t)$ , výstupný signál  $y(t)$ , poruchy na vstupe  $n(t)$  a poruchy na výstupe  $v(t)$ . s použitím obrázku vyplýva maticový tvar:

$$\begin{aligned} Z &= V + G(N + R(W - Y)) \\ U &= N + R(W - GU - V) \\ E &= W - V - G(N + RE) \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ E \end{pmatrix} = \frac{1}{1+RG} \begin{pmatrix} RG & G & 1 \\ R & 1 & -R \\ 1 & -G & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ N \\ V \end{pmatrix} \quad (62)$$

Citlivostná funkcia S je daná [12]:

$$S(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)} \quad (63)$$

Komplementárna citlivostná funkcia (je zhodná s prenosom riadenia  $G_{wy}$ ):

$$T(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} \quad (64)$$

Citlivosť relatívnej zmeny prenosu riadenia na relatívnu zmenu modelu riadeného systému:

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta G_{wy}}{G_{wy}}}{\frac{\Delta G}{G}} = \frac{\frac{R(1+RG) - R^2G}{\left(\frac{RG}{1+RG}\right)}}{\frac{(1+RG)^2}{G}} = \frac{RG + R^2G^2 - R^2G^2}{(RG + R^2G^2)} = \frac{1}{1+RG} = S = \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta G}{G}} \quad (65)$$

Platí z rovníc (62) a (63):

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)} + \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{1+R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = 1 \quad (66)$$

Z tvrdenia (65) vyplýva obmedzenie návrhu uzavretého obvodu. Funkcie citlivosti a komplementárnej citlivosti ukazujú, že nie je možné navrhnuť regulátor, ktorý by súčasne zaistil obvod necitlivý voči poruche v aj žiadanej hodnote  $w$ . Volia sa teda priority pre jednotlivé rozsahy frekvencií. Tvarovanie frekvenčnej charakteristiky ponúka tvarovanie otvoreného obvodu. Sú do nej zahrnuté základné pravidlá a skúsenosti, pričom cieľom je získať výsledný prenos riadenia, ktorý bude mať požadovanú šírku frekvenčného pásma a ďalšie špecifické požiadavky. Avšak je zrejmé, že tento postup neberie plne do úvahy prenosy uzavretého obvodu.

## 4 $\mu$ -FUNKCIA

### 4.1 Základné pojmy $\mu$ -funkcie

Štruktúrovaná singulárna hodnota (označovaná  $\mu$ ,  $\mu$ , SSV alebo  $\mu$ ) je funkcia, ktorá poskytuje zovšeobecnenie singulárnej hodnoty  $\bar{\sigma}$  a spektrálneho polomeru  $\rho$ .  $\mu$  je používané pre nutnú a postačujúcu podmienku robustnej stability a robustný výkon.  $\mu$  je definované ako [5]:

$$\mu(M)^{-1} = \min_{\Delta} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0 \quad \text{pre } \Delta \} \quad (67)$$

Je teda potreba nájsť najmenšie štruktúrované  $\Delta$  (primerané  $\bar{\sigma}(\Delta)$ ), ktoré urobí maticu  $(I - M\Delta)$  singulárnou, potom platí  $\mu(M) = 1 / \bar{\sigma}(\Delta)$ . Samozrejme  $\mu(M)$  nezávisí len od  $M$ , ale aj od  $\Delta$ . Preto sa niekedy používa zápis  $\mu_{\Delta}(M)$ .

Pre definíciu  $\mu$ -funkcia, musí byť najprv definovaná množina  $\Delta$ , od ktorej závisí nasledujúci výklad:

$$\Delta = \left\{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbf{C}, \Delta_j \in \mathbf{C}^{m_j \times m_j} \right\} \quad (68)$$

kd  $S$  je počet opakovaných skalárnych blokov,

$F$  je počet tzv. plných blokov,

$r_1, \dots, r_S$  a  $m_1, \dots, m_F$  sú kladné celé čísla, ktoré určujú dimenzie skalárnych a plných blokov.

Pre zachovanie celkovej dimenzie matíc, ktoré patria do množiny  $\Delta$ , musí platiť

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n \quad (69)$$

Mnohokrát je rovnako dôležité použiť obmedzenú podmnožinu množiny  $\Delta$ , ktorá bude označovaná ako

$$\mathbf{B}_{\Delta} = \{ \Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \} \quad (70)$$

Aj keď sú v definícii (68) skalárne bloky uvedené pred plnými blokmi, je možné poradie skalárnych a plných blokov ľubovoľne zmeniť. Plné bloky totiž nemusia byť len štvorcové.

Pre  $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$  je funkcia  $\mu_{\Delta}(M)$  definovaná ako [9]

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (71)$$

Keby neexistovala žiadna  $\Delta \in \Delta$ , pre ktorú je matica  $I - M\Delta$  singulárna, tak by  $\mu_{\Delta}(M) = 0$ .

Bez straty všeobecnosti môžu byť plné bloky, pri zachovaní veľkosti ich normy, zvolené ako matice s hodnotou rovnou jedná. Na to, aby toto tvrdenie bolo dokázateľné musí len jeden plný blok  $\Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}$ . Za predpokladu, že  $I - M\Delta$  je singulárna matica, tak potom pre jednotkový vektor (Euklidova norma)  $x \in \mathbf{C}^n$  platí, že  $M\Delta x = x$ . Ďalej treba definovať vektor  $y = \Delta x$ , potom  $y \neq 0$  a  $\|y\| \leq \bar{\sigma}(\Delta)$ . Nakoniec je definovaná nová porucha  $\tilde{\Delta} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , v ktorej  $\tilde{\Delta} = yx^*$ .

Pretože matica  $\tilde{\Delta}$  sa skladá z násobkov vektora  $x^*$ , tak je samozrejmé, že hodnota matice  $\tilde{\Delta}$  je rovná jednej. Takýmto spôsobom bola nahradená všeobecná porucha  $\Delta$ , ktorá spĺňa podmienku singularity, matice s hodnotou jedná, ktorej veľkosť nie je väčšia, ale pritom rovnako spĺňa podmienku singularity. Opakovaním tohto postupu blok za blokom umožní zvoliť každý blok ako maticu s hodnotou jedná.

Nasleduje charakteristika spätnoväzbovej interpretácie normy  $\mu_{\Delta}(M)$ . Je definovaná:

$$\begin{aligned} u &= Mv \\ v &= \Delta u. \end{aligned} \quad (72)$$

Pokiaľ nie je matica  $I - M\Delta$  singulárna, potom jediné riešenie pre neznáme  $u$ ,  $v$  je triviálne riešenie  $u = v = 0$ . Ale ak je matica  $I - M\Delta$  singulárna, potom máme nekonečne veľa riešení sústavy rovníc (72) a euklidovské normy  $\|u\|$ ,  $\|v\|$  môžu byť nekonečne veľké. Takýto spätnoväzbový obvod je potom nestabilný. Znamená to, že termín stabilný bude označovať situáciu, kedy existuje iba jedno triviálne riešenie identicky rovné nule. V tomto kontexte je funkcia  $\mu_{\Delta}(M)$  mierou, ktorá udáva najmenšiu maticu  $\Delta$  spôsobujúcu nestabilitu spätnoväzbového obvodu.

Ak  $\bar{\sigma}(\Delta) < \frac{1}{\bar{\sigma}(M)}$ , potom  $\bar{\sigma}(M\Delta) < 1$ , z čoho vyplýva, že  $I - M\Delta$  nie je singulárna matica, takže musí platiť  $\bar{\sigma}(\Delta) \geq \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} \Rightarrow \frac{1}{\bar{\sigma}(\Delta)} \leq \bar{\sigma}(M)$ . Z definičnej rovnice (71) vyplýva, že  $\mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$ . Rozložením  $M$  pomocou dekompozície na singulárne čísla na  $M = U \cdot S \cdot V$ , kde  $U$  a  $V$  sú unitárne matice a  $S$  je diagonálna matica tvorená singulárnymi

číslami  $a$  je daná  $\Delta = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} v^* u^*$ . Tak potom  $\bar{\sigma}(\Delta) = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)}$  a

$$I - M\Delta = I - U \cdot S \cdot U^* \bar{\sigma}(\Delta).$$

Keď táto matica nie je singulárna, potom ju nemožno previesť na nesingulárnu len vynásobením ľubovoľnou unitárnou maticou. Vynásobením matice sprava  $U$  a zľava  $U^*$  dostaneme diagonálnu maticu  $I - S \frac{1}{\bar{\sigma}(M)}$ , ktorá má aspoň jeden koeficient na hlavnej

diagonále rovnej 0 a tým pádom i svoj determinant. Preto  $\mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$ .

Je jasné, že pre všeobecnú komplexnú množinu matic  $\Delta$  musí platiť:

$$\{\delta I_n : \delta \in \mathbf{C}\} \subset \Delta \subset \mathbf{C}^{n \times n} \quad (73)$$

Potom priamo z definície  $\mu$  a z dvoch predchádzajúcich špeciálnych prípadov vyplýva:

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (74)$$

Tieto obmedzenia nie sú dostačujúce pre účely analýzy, lebo rozdiel medzi  $\rho$  a  $\sigma$  môže byť ľubovoľne veľký. Kvôli tomu musí byť ešte zúžená pomocou transformácií matice  $M$ , ktoré nemajú vplyv na hodnotu  $\mu_{\Delta}(M)$ , ale ovplyvňujú  $\rho$  a  $\sigma$ . Aby tieto transformácie mohli byť spravené [7], tak treba definovať dve podmnožiny  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{Q} = \{Q \in \Delta : Q^* Q = I_n\} \quad (75)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag}[D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : \\ D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbf{R}, d_j > 0 \end{array} \right\} \quad (76)$$

Matica  $Q$  je tvorená systémom ortogonálnych jednotkových vektorov (75). Teraz možno sformulovať nasledujúcu vetu [7]:

Pre všetky  $Q \in \mathbf{Q}$  a  $D \in \mathbf{D}$  platí

$$\mu_{\Delta}(MQ) = \mu_{\Delta}(QM) = \mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1}) \quad (77)$$

Z vyššie uvedeného plynie, že možno medze (73) zúžiť na

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \max_{\Delta \in \mathbf{B}_{\Delta}} \rho(\Delta M) = \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (78)$$

Posledný prvok matice  $D$  možno vždy normalizovať na 1.

Spodná medza v (78) je vždy rovnosť [9]. Veličina  $\rho(QM)$  žiaľ môže mať viac lokálnych maxím, ktoré nie sú globálne. Lokálne hľadanie preto nemôže garantovať to, že sa získa hodnota  $\mu$ , ale iba jej spodná hranica.

Problém hornej medze možno preformulovať na problém konvexnej optimalizácie, takže globálne minimum možno v princípe nájsť. Horná medza však nie je vždy rovná  $\mu$ . Pre blokové štruktúry  $\Delta$  splňajúce  $2S + F \leq 3$ , je horná medza vždy rovná  $\mu_{\Delta}(M)$  a pre štruktúry, kde  $2S + F > 3$  existujú matice, pre ktoré je  $\mu$  menšie ako infimum vo (78).

Pre účely praktického výpočtu je najdôležitejšie to, že môžeme kombinovať schémy pre výpočet hornej a dolnej medze. Pre spoľahlivé používanie  $\mu$  teórie je nevyhnutné poznať hornú a dolnú medzu  $\mu$ . Dôležitou vlastnosťou hornej medze je to, že môže byť kombinovaná so syntézou v  $\mathbf{H}_{\infty}$ , čím sa z nej stáva metóda použiteľná pre  $\mu$ -syntézu. Pokiaľ aplikujeme hornú medzu na prenosové funkcie, stáva sa z nej vážená norma  $\mathbf{H}_{\infty}$ .

## 4.2 Frekvenčná oblasť $\mu$ -analýzy

Frekvenčná oblasť  $\mu$ -analýzy je kľúčová v analýze. Práve najznámejšie je použitie  $\mu$ -funkcie v robustnej analýze vo frekvenčnej oblasti. Aby poruchy  $G(s)$  boli sami o sebe dynamické systémy s diagonálnou blokovou štruktúrou množiny  $\Delta$ , musí byť najskôr definovaná množina  $\mathbf{M}_{\Delta}$ , ktorá označuje celú množinu reálnych racionálnych a stabilných prenosových matic. Nech  $\mathbf{M}(\Delta)$  označuje množinu všetkých blokovo diagonálnych stabilných racionálnych prenosových funkcií s blokovou štruktúrou rovnakou ako je  $\Delta$ , čo možno skrátene zapísať nasledovne:

$$\mathbf{M}(\Delta) = \{ \Delta(\cdot) \in \mathbf{M}_{\Delta} : \Delta(s_0) \in \Delta, \forall s_0 \in \overline{\mathbf{C}}_+ \} \quad (79)$$

Nech  $\beta > 0$ . Uzatvorený obvod  $G(s)$  vo spätnej väzbe s  $\Delta(s)$  je vnútorne stabilný pre všetky  $\Delta(\cdot) \in \mathbf{M}(\Delta)$  s  $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\beta}$  len vtedy, keď [7]:

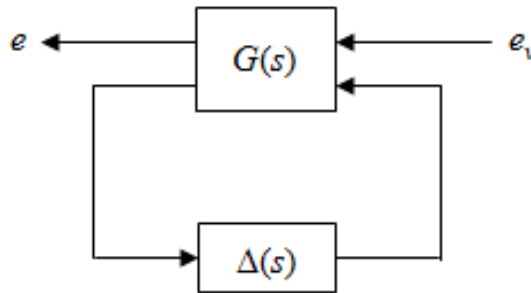
$$\|G\|_{\Delta} = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta}(G(j\omega)) \leq \beta \quad (80)$$

Stabilita nie je často jedinou vlastnosťou uzatvoreného regulačného obvodu, ktorá musí byť odolná proti poruchám. Typickým prípadom sú vonkajšie poruchy pôsobiace na obvod (turbulencia, šum senzoru), ktoré majú za následok poruchy sledovania žiadanej hodnoty a chyby regulácie. Pôsobením poruchy sa môže vplyv týchto porúch výrazne zväčšiť. Vo väčšine prípadov dochádza k tomu, že oveľa skôr ako vznikne nestabilita, tak sa zhorší kvalita regulácie pod únosnú mieru. Preto vzniká potreba testu kvality robustnej regulácie. Tento test potom indikuje najhorší možný prípad zhoršenia kvality regulácie pre daný stupeň poruchy.

Nech  $\Delta \subset \mathbf{C}^{n_w \times n_z}$  je bloková štruktúra podľa definície (68). Definovaná rozšírená bloková štruktúra bude:

$$\Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_F & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_F \in \mathbf{C}^{n_d \times n_e} \right\} \quad (81)$$

Definície posudzujú kvalitu robustnej regulácie podľa obr. 5.



Obr. 5. Kvalita robustnej regulácie

Poruchová prenosová funkcia z  $e_v$  na  $e$  je odteraz označená  $F_l(G, \Delta)$ .

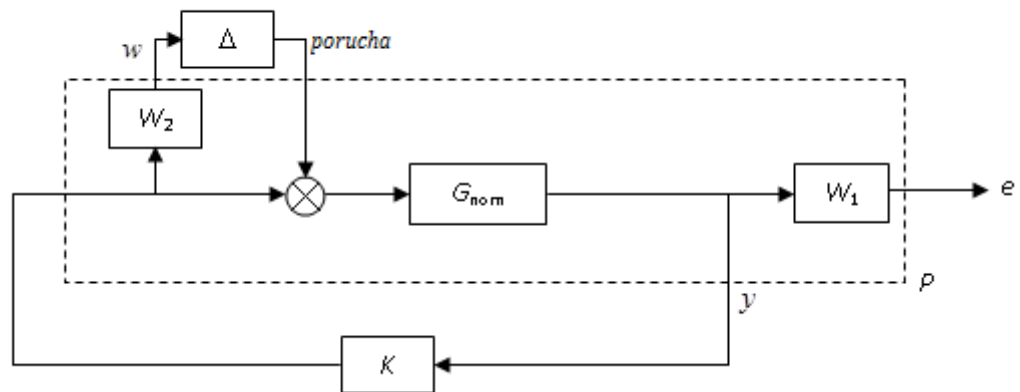
Nech  $\beta > 0$ , potom pre všetky  $\Delta(s) \in \mathbf{M}(\Delta)$  s  $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\beta}$  je obvod na obr. 5 vnútorne stabilný a  $\|F_l(G, \Delta)\|_\infty \leq \beta$  len vtedy, keď

$$\|G\|_{\Delta_P} = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta_P}(G(j\omega)) \leq \beta \quad (82)$$

## 4.3 $\mu$ -syntéza

### 4.3.1 D-K iterácia

V predchádzajúcich kapitolách boli uvedené základné súvislosti a predpoklady používané pri posudzovaní robustnej stability. Využitie týchto vzťahov bude viesť k hľadaniu maxima  $\mu$ -funkcie ( $\mu$ -funkcie) vo frekvenčnej oblasti. Pre D-K iteráciu je charakteristický obvod na obr.5.



Obr. 6. Uzavretý regulačný obvod s neurčitost'ou

Podobné schéma je použité takisto v praktickej časti práce pre nominálny model F-14, ktorý obsahuje navyše bloky na sledovanie kvality regulácie (len pre simuláciu) a ten slúži pre ohodnotenie výstupov  $e$ . V tomto sú do schémy znázornené len bloky na vnesenie neurčitosti do chovania systému.

Stabilizujúci regulátor  $K$  spĺňa podmienku kvality regulácie práve vtedy, keď pre každú frekvenciu  $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$  je štruktúrovaná singulárna hodnota,

$$\mu_{\Delta, p} [F_l(P, K)(j\omega)] < 1 \quad (83)$$

kde  $P$  je časť regulačného obvodu ohraničená na obr. 6 čiarkovaným obdĺžnikom, ktorého vstupy sú riadenie, vstup poruchy a výstupy sú regulačná odchýlka, porucha a výstup. Tento postup je samozrejme podobný s postupom v praktickej časti, kde je možné teoretické znalosti aplikovať na model a pochopenie súvislostí je jednoduchšie.

Použitím hornej hranice pre  $\mu$  je možné optimalizovať regulačný obvod tak, že je transformovaný optimalizačný problém do tvaru [5]:

$$\min \|D_{\omega}^{-1} \cdot F_l(P, K)(j\omega) \cdot D_{\omega}\|_{\infty} \quad (84)$$

Pokiaľ je matica  $\Delta$  tvorená len plnými blokmi, tak má matica  $D(j\omega)$  ( $D_{\omega}(j\omega) \in D(j\omega)$ ) nasledujúcu štruktúru ( $F$  je rozmer matice  $\Delta$ ):

$$D = \{diag[d_1 I, d_2 I, d_3 I, \dots, d_{F-1} I, I]\} \quad (85)$$

pričom pre ľubovoľnú komplexnú maticu  $F_l$ , môžu prvky  $D$  nadobúdať nenulových komplexných hodnôt.

Problém (83) sa najčastejšie rieši pomocou  $D$ - $K$  iterácie. Pri tomto postupe sa najprv považuje  $D$  za konštantnú a hľadá sa taký regulátor  $K$ , ktorý minimalizuje

$\|D \cdot F_l(P, K) \cdot D^{-1}\|_\infty$ , čo je problém optimalizácie v  $H_\infty$ . Riešenie tohto problému sa robí cez Riccatioho rovnice v stavovom priestore. Ak bol nájdený stabilizujúci regulátor  $K$ , potom sa rieši nasledujúci optimalizačný problém korešpondujúci s hornou medzou  $\mu$ :

$$\min_{D_\omega \in \mathbf{D}} \bar{\sigma} \left[ D_\omega \cdot F_l(P, K)(j\omega) \cdot D_\omega^{-1} \right] \quad (86)$$

Teraz je možné každú diskretnú funkciu  $d_i$  závislou na frekvencii aproximovať stabilnými, minimálne fázovými prenosovými funkciami  $\hat{d}_{R_i}(s)$ , ktoré sú usporiadané do matice  $\hat{D}(s)$ .

$$\hat{D}(s) = \text{diag} \left[ \hat{d}_{R_1}(s)I, \hat{d}_{R_2}(s)I, \dots, \hat{d}_{R_{F-1}}(s)I, I \right] \quad (87)$$

Ktorá je absorbovaná do všeobecného prenosu sústavy  $P$ . Opakovaním týchto dvoch krokov je potom nájdený optimálny regulátor.

#### 4.3.2 $\mu$ -K iterácia

V predchádzajúcej podkapitole bola popísaná  $D$ - $K$  iterácia, ktorá využíva hornú medzu  $\mu$ -funkcie k nájdeniu pokiaľ možno optimálneho regulátora vzhľadom k maximálnej hodnote  $\mu$ -funkcie. Z praxe vyplýva, že  $D$ - $K$  iterácia obvykle vyhladzuje priebeh  $\mu$ -funkcie tak, aby mala čo najmenšiu odchýlku medzi maximom a minimom. Práve tieto skutočnosti si všimli autori algoritmu  $\mu$ - $K$  iterácie.

Podstatou tohto postupu je práve vyrovnávanie priebehu  $\mu$ -funkcie v závislosti na frekvencii. Vzhľadom k tomu, že neexistujú nástroje pre nájdenie regulátora minimalizujúceho priamo  $\mu$ , je nutné vykonávať syntézu pre ich hornú medzu  $\bar{\sigma}$ . V prípade  $D$ - $K$  iterácie sa tento problém rieši cez maticu  $D$ , ktorá sa postupne približuje k hornej medzi. U  $\mu$ - $K$  iterácie je najskôr nájdený regulátor minimalizujúci  $\bar{\sigma}$ , a potom je určená závislosť  $\mu$  na frekvencii. Táto závislosť je potom aproximovaná prenosovou funkciou  $\tilde{\mu}_0(s)$ , ktorá je vynásobená hornou medzou. Tým dôjde k tomu, že miesta s väčšou hodnotou  $\mu$  majú väčšiu váhu než ostatné, takže sa priebeh  $\mu$  začne postupne vyhladzovať.

Postup výpočtu algoritmu definovaný v [7]:

Krok 1: Nájst' stabilizujúci  $H_\infty$  regulátor

$$K_0 = \arg \inf_K \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (88)$$

Optimalizácia je vykonaná cez stabilizujúce regulátory  $K$ .

Krok 2: Nájst' priebeh  $\mu$ -funkcie korešpondujúcej s  $K_0$  vo vhodnom frekvenčnom pásme.

$$\mu_0(j\omega) = \mu_{\Delta}[F_l(P, K_0)] \quad (89)$$

Krok 3: Normalizovať  $\mu_0(j\omega)$  maximálnou hodnotou:

$$\tilde{\mu}_0(j\omega) = \frac{\mu_0(j\omega)}{\|\mu_0(j\omega)\|_{\infty}} \quad (90)$$

Krok 4: Nájst' stabilnú minimálne fázovú funkciu  $\tilde{\mu}_0(s)$ , ktorá aproximuje krivku  $\tilde{\mu}_0(j\omega)$  získanú v kroku 3.

Krok 5: Vynásobiť maticu  $F_l(P, K)$  funkciou  $\tilde{\mu}_0(s)$ .

Krok 6: Nájst'  $H_{\infty}$  optimálny stabilizujúci regulátor.

$$K_1(s) = \arg \inf_K \|\tilde{\mu}_0(s)F_l(P, K)\|_{\infty} \quad (91)$$

Krok 7: Nájst' priebeh  $\mu$ -funkcie korešpondujúcej s  $K_1$  vo frekvenčnom pásme.

$$\mu_1(j\omega) = \mu_{\Delta}[F_l(P, K_1)] \quad (92)$$

Krok 8: Normalizovať  $\mu_1(j\omega)$  a výsledok označiť ako  $\tilde{\mu}_1(j\omega)$ .

Krok 9: Nájst' funkciu  $\tilde{\mu}_1(s)$  aproximujúcu  $\tilde{\mu}_1(j\omega)$ .

Krok 10: Nájst'  $H_{\infty}$  stabilizujúci regulátor

$$K_2(s) = \arg \inf_K \|\tilde{\mu}_1(s)\tilde{\mu}_0(s)F_l(P, K)\|_{\infty} \quad (93)$$

Krok 11: Nájst' priebeh  $\mu$ -funkcie korešpondujúcej s  $K_2$

$$\mu_2(j\omega) = \mu_{\Delta}[F_l(P, K_2)] \quad (94)$$

Algoritmus sa stále opakuje a končí v okamihu, kedy je priebeh  $\mu$ -funkcie v závislosti na frekvencii vhodne rovný (dosiahnutie kvality regulácie vrcholom  $\mu$ -funkcie).

#### 4.4 Evolučné $\mu$ -syntézy

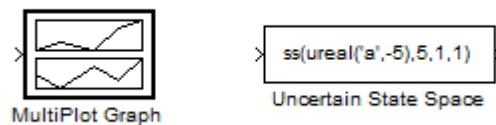
Evolučné  $\mu$ -syntézy spočívajú v ladení parametrov regulátora pomocou evolučných algoritmov samozrejme s ohodnotením pomocou  $\mu$ -funkcie.  $\mu$ -syntéza vyžaduje stabilitu nominálneho systému, z čoho vyplýva, že je nutné zachovať stabilitu pólov. Jednou z mnoho metód je napríklad priradenie pólov uvedené v [19], pre ďalšiu optimalizáciu umiestnenia týchto pólov je možné použiť diferenciálnu migráciu [18] (hľadajúca globálne extrémum). Hľadanie pólov prebieha testovaním funkcie  $\mu_{\Delta}$  závislej na P, K, kde regulátor K je získaný metódou priradenia pólov. Výhoda tejto metódy spočíva v nájdení napr.

regulátora 2DOF, ktorý sa nedá použiť pre D-K ani  $\mu$ -K iteráciu. Evolučné metódy teda možno použiť aj preddefinované regulátory.

## **II. PRAKTICKÁ ČASŤ**

## 5 POPIS PROSTREDIA

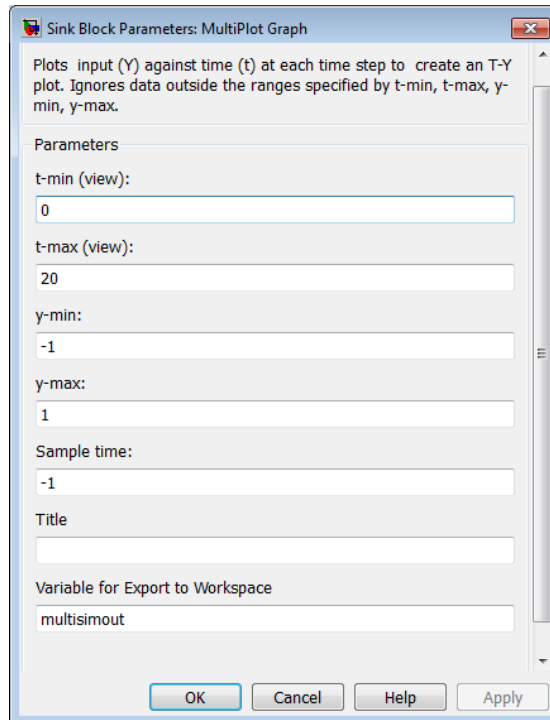
$\mu$ -Analysis and Synthesis toolbox býval súčasťou programového balíka Matlab. Neskôr sa pridružil a začal plne používať s Robust Control Toolboxom (RCT). Už dlhšie obdobie sú všetky funkcie používané pre  $\mu$ -analýzu používané v Robust Control Toolboxe. Tento balík (toolbox) sa základne nenachádza v Matlabe, preto je potrebné si ho zakúpiť, avšak je často používaný aj pre výučbové účely. Príkazom „ver“ v príkazovom riadku Matlab sa zobrazia všetky nainštalované balíky, a tak sa dá overiť jeho prítomnosť. V tejto práci sa pracovalo s verziou Matlabu 7.1 a R2011b. Bola používaná najnovšia dostupná verzia Robust Toolboxu. Robust Toolbox neobsahuje GUI ako väčšina balíkov, je preto potreba pracovať v príkazovom riadku. Pre použitie Matlab/Simulink sa používajú štandardné bloky Control System Toolboxu, tento nástroj takisto nie súčasťou, je však základne používaný. V najnovšej verzii sú dostupné 2 bloky, ktoré slúžia hlavne pre zjednodušenie.



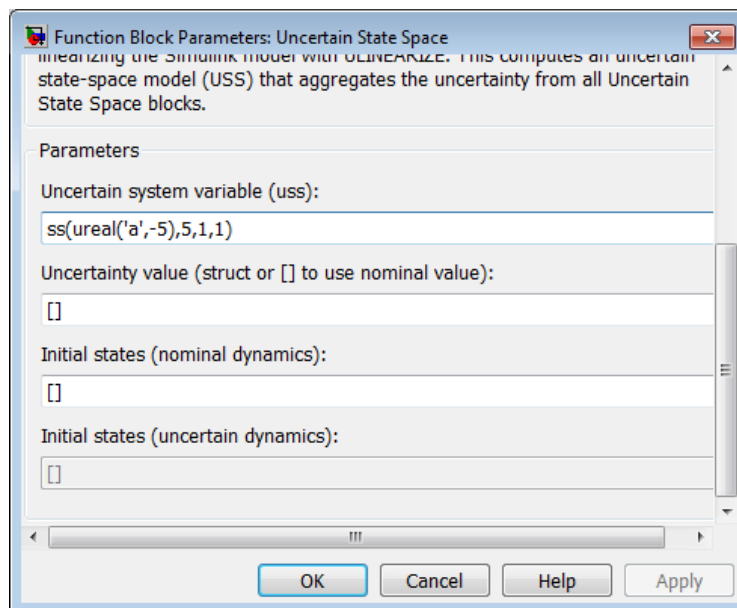
Obr. 7. Simulink, bloky RCT

Prvý z blokov slúži na jednoduché vykreslenie viacnásobného výstupu do bloku. V bloku sa dajú nastaviť základné nastavenie, dĺžky snímania času  $t$  a rozsah vykreslenia hodnôt, prípadne názov grafu. Výstupné hodnoty sa zapisujú do pracovného prostredia ako vektor viacerých vstupov. Ukážka nastavenie bloku je na obr. 8.

Ďalší prístupný blok je stavový model neurčitosti. Tento blok modeluje lineárne systémy s neurčitými parametrami a neurčitou dynamikou. Je možné testovať ako neurčitosť pôsobí na systémové chovanie generovaním náhodných hodnôt pre neurčité premenné. Jednoducho použitím príkazu „ufind“ sa dajú nájsť všetky neurčité premenné a príkazom „usample“ budú vygenerované vzorkové hodnoty parametrov neistoty. Takisto je možné sledovať chovanie vo frekvenčnej oblasti linearizovaním modelu príkazom „ulinearize“. Výsledkom je vytvorenie stavového modelu neurčitosti, ktorý môže spojiť všetky neurčitosti. Blok obsahuje voľbu modelu, hodnoty neurčitosti a počiatočný stav, pozri obr.9.



*Obr. 8. Nastavenia multivýstupného grafu*



*Obr. 9. Nastavenia stavového modelu neurčitosti*

Je zřejmé, že druhý blok ponúka vstup aj výstup a prvý blok ponúka len vstup bloku.

RCT pomáha pri všetkých častiach návrhu regulátoru, pri jednoduchšom používaní noriem, pri analýze obvodu a kontrole robustnosti. Tento balík sa používa aj pri optimálnom návrhu.

Z nepreberného množstva funkcií budú objasnené len základné funkcie  $\mu$ -syntézy ( $\mu$ -syntézy), pretože v práci je kladený dôraz na použitie  $\mu$ -funkcie pri návrhu a analýze regulačného obvodu. Funkcie budú samozrejme použité v priebehu práce.

Funkcia „cmsclsyn“ rieši problém vrchnej hranice  $\mu$ -syntézy približným riešením konštantnej matice. Algoritmus je iteratívny alebo prípadne drží  $Q$  konštantné.

Návrh robustného regulátora použitím  $\mu$ -syntézy zabezpečuje „dksyn“. Vypočíta robustný regulátor  $K$  pre neurčitý otvorený obvod systému cez D-K alebo D-G-K algoritmus  $\mu$ -syntézy. Je potrebné určiť stavový model neurčitosti  $p$ , výstupy a vstupy systému  $p$  v tomto poradí. Limitácie môžu byť nasledovné: kalkulácia štruktúrovanej singulárnej hodnoty je aproximovaná hornou hranicou. Toto nemusí byť problém, pretože hodnota  $\mu$  a jej horná hranica sú často blízko. D-K iterácia negarantuje konvergenciu ku globálnemu alebo lokálnemu minimu. Toto je vážne problém a predstavuje hlavný problém tohto návrhu.

Ku zmienenej funkcii patrí „dkitopt“, ktorý definuje vlastnosti funkcie ako objektu. Inak samozrejme zostávajú základné nastavenia. Nastavenie počtu iterácií, nastavenie zastavenia iterácie alebo tolerancia sú vhodné možnosti.

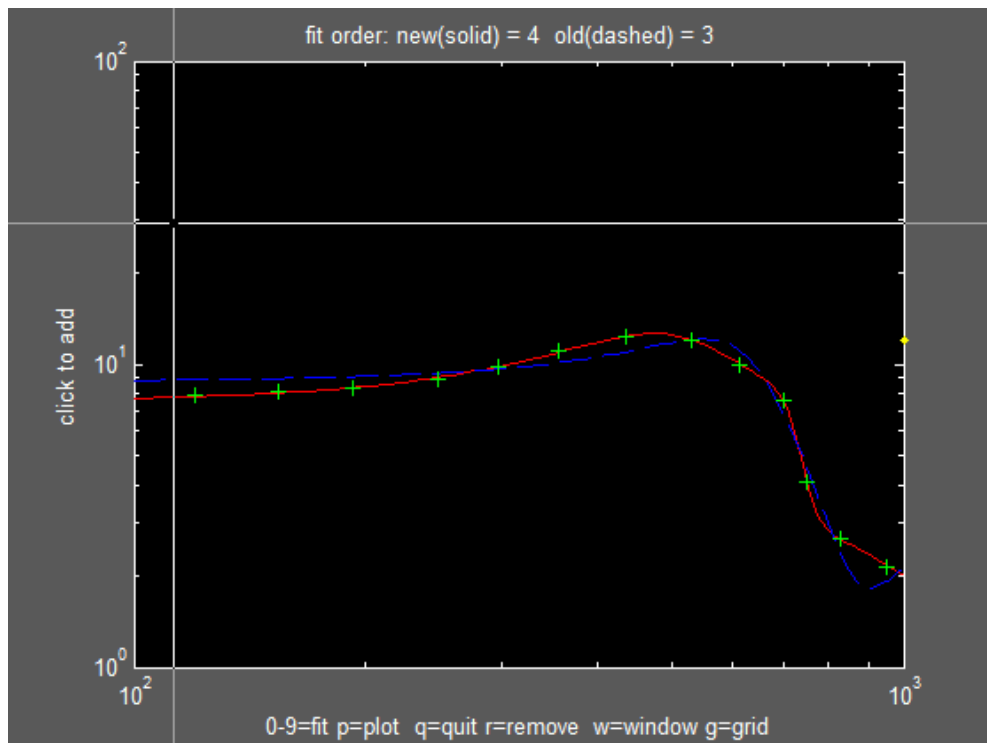
Zaujímavá funkcia je „drawmag“, ktorá ponúka načrtnutie frekvenčnej odozvy pomocou myši. Pri kreslení načrtnutím bodov odozvy funkcia počíta následne vhodný stabilný, minimálne fázový model stavového priestoru, ktorý sa najviac približuje zadaným bodom v amplitúde. Volením čísel 0-9 zvolíme vhodný rád. Body sa dajú vhodne zakresľovať a odstraňovať. Pred zavolaním funkcie je treba zvoliť hranice  $\omega$ s. Po nájdení správneho modelu sa ukončí analýza tlačidlom „q“. Ukážka nakreslenia bodov a preloženia je na obr.8. V tomto prípade stavový model štvrtého rádu preložil body presne, nižšie rády nedokázali presne reprodukovat' zadané body. Záleží však na aplikácii a často je vysoký rád nepotrebný alebo dokonca redundantný.

Podobne funguje „fitfrd“. Z dát frekvenčnej odozvy pomáha určiť model stavového priestoru. Vstupné parametre sú požadovaný rozmer stavového modelu a samozrejme dáta frekvenčnej odozvy. Pre spätnú kontrolu sa dá použiť príkaz „frd“.

Pokročilejšou metódou je hľadanie minimálne fázového stavového modelu pomocou logaritmickeo-Chebyscheovho amplitúdového dizajnu pomocou príkazu „fitmagfrd“.

Algoritmus nie je podrobnejšie popísaný, pretože patrí do kategórie spracovania signálu. Znova volíme rovnaké vstupné parametre.

Posledným príkazom  $\mu$ -analýzy je „genphase“. Prispôsobí jednorozmerný vstup a výstup (frekvenčnú odozvu) na komplexnú frekvenčnú odozvu, ktorej amplitúda je reálna pozitívna, ale fáza sa zhoduje s reálnou, racionálnou, minimálne fázovou prenosovou funkciou.



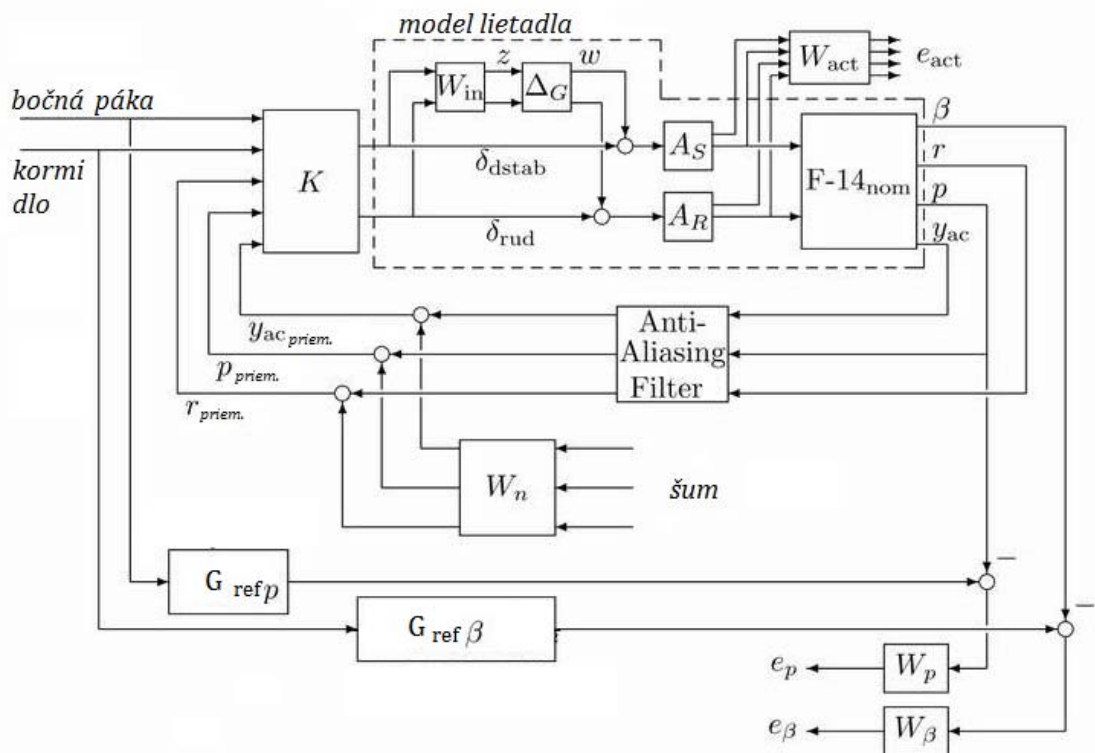
Obr. 10. Použitie funkcie drawmag načrtnutím bodov

## 6 SIMULÁCIA STÚPANIA/KLESANIA MODELU F-14

Aplikácia  $\mu$ -syntézy na zaujímavom príklade stúpania/klesania (bočné osi) stíhacieho lietadla F-14 je ukázaná v tejto kapitole. Príklad opisuje návrh robustného regulátora pre bočné osi pri pristávaní. Pre príklad je použitý linearizovaný model. Model je prevzatý z článku [13]. Model je vytvorený z nelineárneho modelu využívaného pre americkú armádu.

### 6.1 Popis systému

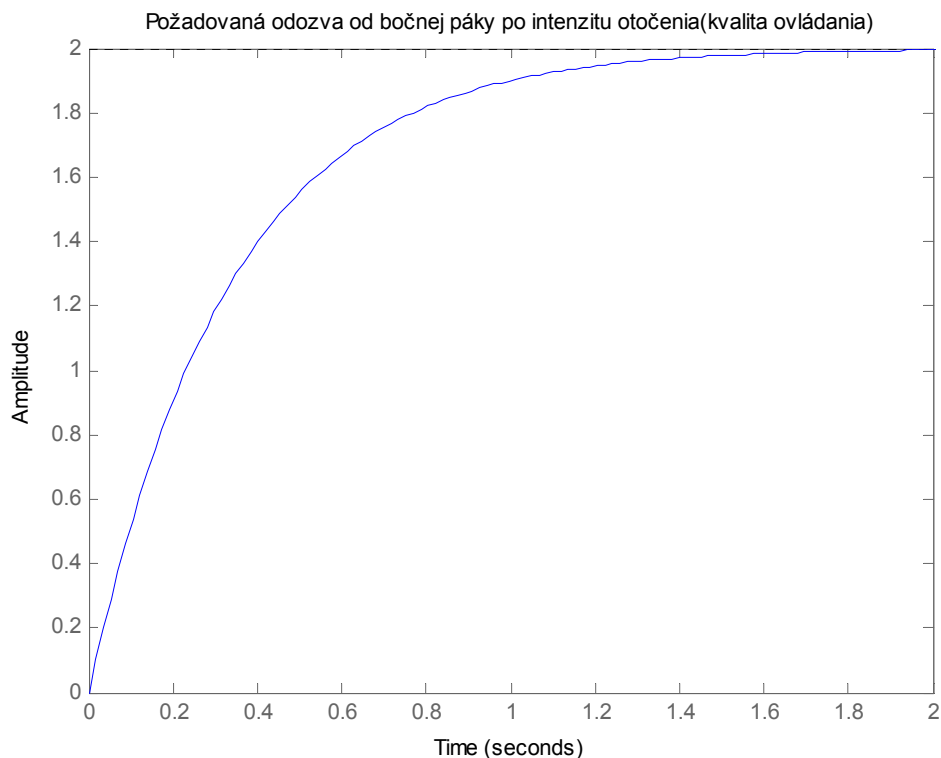
Popis systému je podrobne zobrazený na obr. 11 (upravená schéma). Schéma obsahuje nominálny model lietadla, regulátor  $K$ , modely popisujúce neistoty a výkonové ciele. Žiadané hodnoty bočnej riadiacej páky a kormidla vchádzajú do regulátora  $K$  a do porovnávacích referenčných systémov. Schéma takisto obsahuje anti-aliasing filter, ktorý spracováva priemerné výstupné hodnoty nominálneho systému. Pri spracúvaní týchto hodnôt vstupuje šum do kanálov. Cieľom riadenia je dosiahnutie efektívnych hodnôt reálnych odoziev lietadla ku bočnej páke a kormidlu (pedálu).



Obr. 11. Robustný návrh regulácie pre F-14

Požadované odozvy sú intenzita otočenia „p“ páky a sklúznutie uhlu „β“ kormidla. Obidva vstupy majú maximálnu odchýlku  $\pm 2,54\text{cm}$  (jeden palec). Odozva kvality ovládania lietadla z bočnej páky ku intenzite otočenia by mala dosahovať požadovanú kvalitu odozvy prvého rádu, prechodová charakteristika systému na obr. 12.

$$G_{refp} = \frac{6}{s + 3} \quad (95)$$



Obr. 12. Požadovaná kvalita ovládania bočnej páky

Kvalita ovládania lietadla od kormidla ku sklúznutiu uhlu "β" by mala dosiahnuť tlmenú odozvu druhého rádu, vzťah (96), ktorého prechodová charakteristika je na obr.11. Stabilizujúce akčné členy majú limit  $\pm 20^\circ$  vychýlenia a  $\pm 90^\circ/\text{s}$  stupeň vychýlenia. Akčný člen kormidla má limity  $\pm 30^\circ$  vychýlenia a  $\pm 125^\circ/\text{s}$  stupeň vychýlenia. Tri signály merania (intenzita otočenia „p“, stupeň točenia „r“, stranové zrýchlenie „y<sub>ac</sub>“) sú filtrované cez anti-aliasing filter druhého rádu.

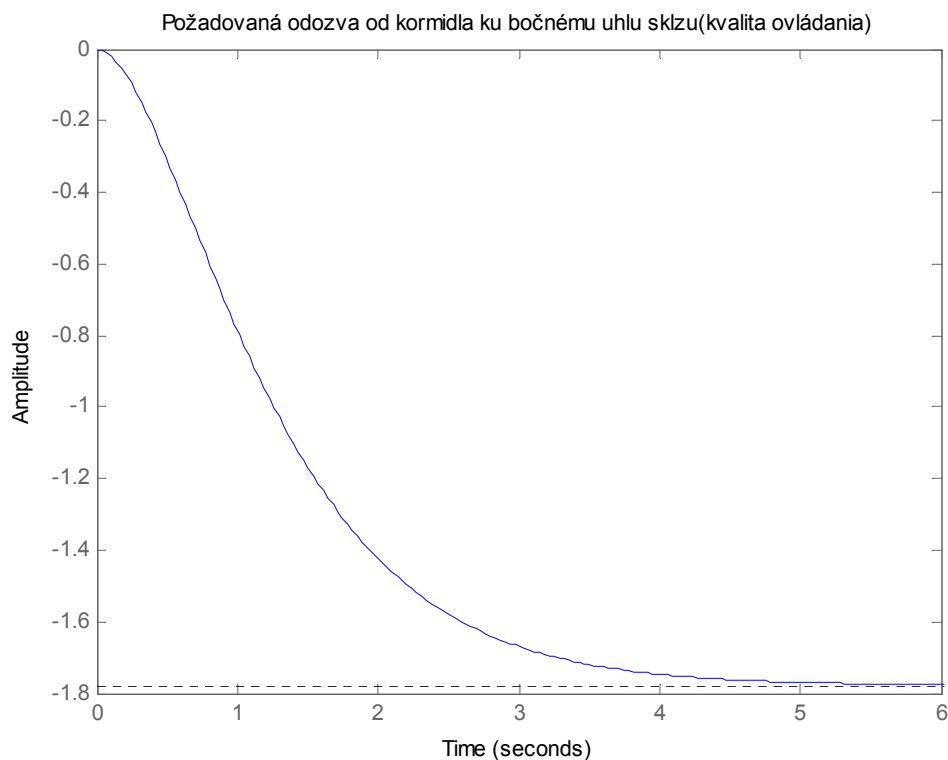
$$G_{ref\beta} = \frac{-4}{s^2 + 3s + 2,25} \quad (96)$$

$$F_p = \frac{\omega_1}{s^2 + 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} = \frac{3948}{s^2 + 62,83s + 3948} \quad (97)$$

$$F_r = F_p = \frac{\omega_1}{s^2 + 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2} = \frac{3948}{s^2 + 62,83s + 3948} \quad (98)$$

$$F_{y_{ac}} = \frac{\omega_2}{s^2 + 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2} = \frac{987}{s^2 + 43,98s + 987} \quad (99)$$

Vyššie uvedené vzťahy pre anti-aliasing filter druhého rádu sú jednotlivé zložky, ktoré utvárajú jeden filter. Požadované parametre pre filtre sú frekvencia  $f_1=10\text{Hz}$ ,  $f_2=5\text{Hz}$ , pre ktoré sa používa vzťah  $\omega = 2\pi f$  a parameter tlmenia  $\xi_1=0,5$  a  $\xi_2=0,7$ .



Obr. 13. Požadovaná kvalita ovládania kormidla

## 6.2 Špecifikácie modelu

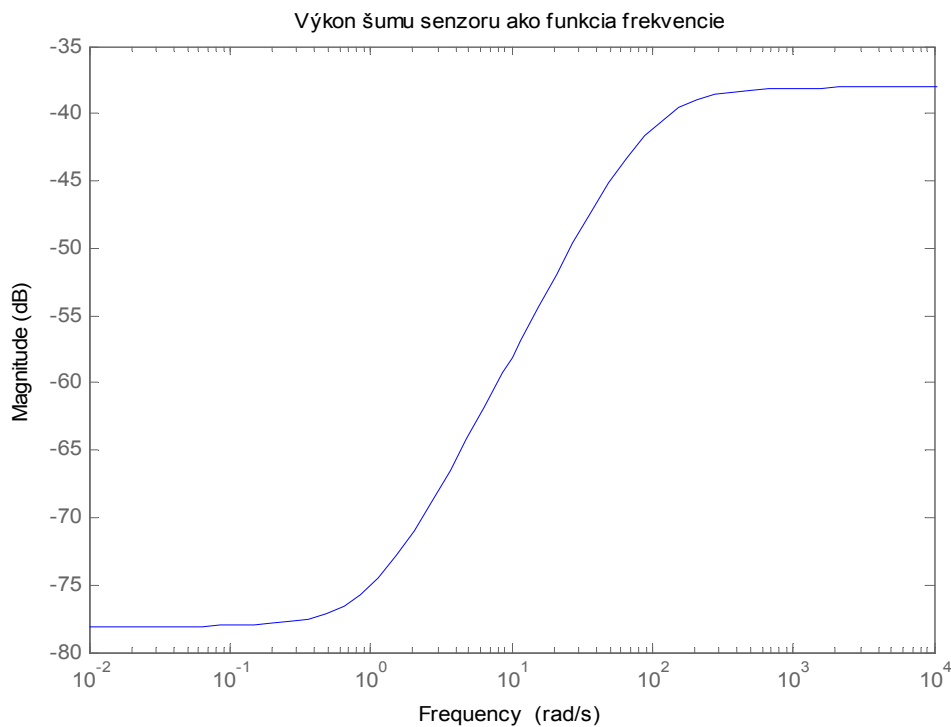
$H_\infty$  algoritmus používa minimalizáciu najväčšieho zosilnenia celou frekvenciou uzatvoreného obvodu. Pre aplikáciu takýchto nástrojov je potreba utvoriť kompromisy a upraviť frekvenčne závislé špecifikácie ako obmedzenia zosilnenia uzavretého obvodu.

Bude použitá váhová funkcia pre normalizovanie našich špecifikácií frekvencií a každá požiadavka bude "vážená" zodpovedajúcim spôsobom.

Pre špecifikácie F-14 vyjadrené váženou funkciou (pre zachytenie limít akčného člena) je použitá diagonálna vážená matica  $W_{act}$ , korešpondujúca s limitami. Je použitá  $3 \times 3$  diagonálna matica, hornopriepustný filter  $W_n$  (parametre sú zvolené ľubovoľne) pre modelovanie frekvencie šumu senzoru v intenzite otočenia, stupni točenia a stranového zrýchlenia.

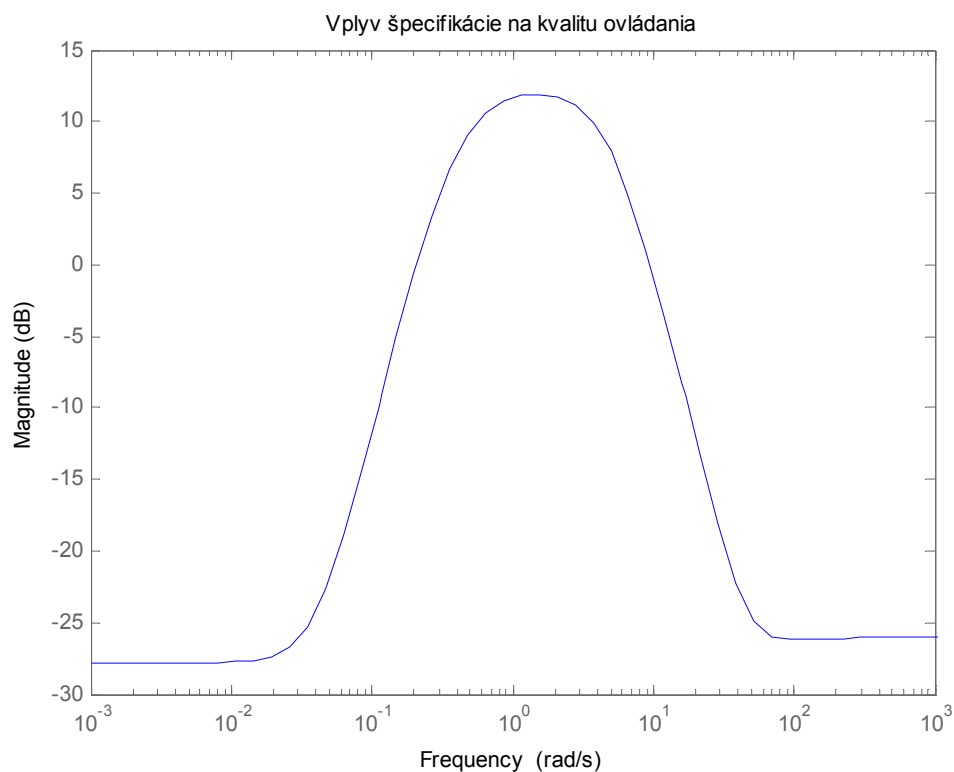
$$W_{act} = \begin{bmatrix} \frac{1}{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{125} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$W_n = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,01s + 0,01}{s + 100} & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \quad (101)$$



Obr. 14. Frekvenčná charakteristika šumu senzoru pre „p“

Odozva bočnej riadiacej páky "p" a kormidla "β" by sa mali zhodovať s kvalitou ovládania referenčných prenosov (95) a (96). Cieľ zhody modelov: minimalizácia rozdielu medzi požadovaným a skutočným prenosom uzavretého obvodu. Uskutočnenie je však limitované pravou polovicou nuly modelu v 0,002 rad/s, takže presné sledovanie sinusoidy pod 0,002rad/s je nemožné. Adekvátne posúdenie prvej špecifikácie kvality ovládania s pásmovým filtrom  $W_p$ , ktorý používa frekvenciu medzi 0,06 a 30 rad/s (štandardne sa pri intenzite otočenia preferuje uhlová chyba menej ako 5%).



Obr. 15. Vplyv špecifikácie na kvalitu riadenia (pásmový filter)

Podobne sa dá použiť  $W_\beta = 2 * W_p$  pre druhú špecifikáciu ovládania.  $W_{act}$ ,  $W_n$ ,  $W_p$  a  $W_\beta$  sú zmenšené, takže zosilnenie zatvoreného obvodu medzi vonkajšími vstupmi a všetkými "váženými" výstupmi je menšie ako 1 pri všetkých frekvenciách.

### 6.3 Nominálny model

Pilot môže ovládať bočno-smerové odozvy lietadla s bočnou riadiacou pákou a kormidlom. Lietadlo má nasledovné charakteristiky:

Dva kontrolné vstupy: diferenciálna výchylka stabilizátoru  $\delta_{\text{dstab}}$  v stupňoch a výchylka kormidla  $\delta_{\text{rud}}$  v stupňoch.

Tri merané výstupy: intenzitu otočenia  $p$  [ $^{\circ}/s$ ], stupeň točenia  $r$  [ $^{\circ}/s$ ], stranové zrýchlenie  $y_{\text{ac}}$  [g/s].

Jeden počítaný výstup: bočný uhol sklonu  $\beta$ .

Nominálny priamy bočný smerový model F-14 má 4 stavy: bočnú rýchlosť "v", rýchlosť stáčania "r", intenzitu otočenia "p" a uhol naklonenia "phi". Pre skompletizovanie modelu lietadla boli takisto zahrnuté akčné členy modelu  $A_S$  a  $A_R$ . Výstupy akčných členov sú ich vlastné intenzity a výchylky. Intenzity akčných členov sú použité na penalizáciu ovládania.

Nominálny lineárny spojité model stavového priestoru nie je potreba zadávať ručne do Matlabu, pretože je dostupný ako ukázkový, dá sa načítať príkazom „load F14nominal“.

Model má tvar:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -0,1160 & -227,3000 & 43,0200 & 31,6300 \\ 0,0027 & -0,2590 & -0,1445 & 0 \\ -0,0211 & 0,6703 & -1,3650 & 0 \\ 0 & 0,1853 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,0622 & 0,1013 \\ -0,0052 & -0,0112 \\ -0,0467 & 0,0036 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (102)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,2469 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57,3000 & 0 \\ 0 & 57,3000 & 0 & 0 \\ -0,0028 & -0,0079 & 0,0511 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0029 & 0,0023 \end{bmatrix} u(t) \quad (103)$$

Akčné členy sa určia ako ľubovoľné prenosové funkcie prvého rádu:

$$A_S(1) = A_R(1) = \frac{10s}{s+10} \quad (104)$$

$$A_S(2) = A_R(2) = \frac{10}{s+10} \quad (105)$$

Prenosy akčných členov s jedným vstupom a dvoma výstupmi. Preto  $A_S(1)$  definuje odozvu prvého výstupu na spoločný vstup a  $A_S(2)$  odozvu druhého výstupu na spoločný vstup. U  $A_R$  je model rovnaký.

### 6.3.1 Chyby modelu

Nominálny model F-14 iba približuje skutočné správanie lietadla. Pre použitie nemodelovanej dynamiky, je možné zaviesť relatívny pojem násobnej neistoty  $W_{\text{in}} * \Delta_G$  na

vstupu systému, kde chybová dynamika  $\Delta_G$  má zosilnenie menšie ako 1 vo všetkých frekvenciách a "váhová" funkcia  $W_{in}$  odráža rozsahy frekvencií, v ktorých model je viac alebo menej presný. Typicky je viac chýb modelu vo vyšších frekvenciách, potom  $W_{in}$  je hornopriepustný.

Zadanie chybovej dynamiky je jednoduché s príkazom „ultidyn“, kde parametre príkazu sú v tomto prípade 2 vstupy a 2 výstupy a zosilnenie menšie ako 1. Váhová funkcia  $W_{in}$  závisí od frekvencií, v tomto prípade nie sú zadané požiadavky, čiže budú použité ľubovoľné prenosy prvého rádu.

$$W_{in} = \begin{bmatrix} \frac{2s+10}{s+100} & 0 \\ 0 & \frac{3s+20}{s+200} \end{bmatrix} \quad (106)$$

Po určení všetkých neistôt a definovaní väzieb je model neurčitosti pre dynamiku lietadla popísaný v čiarkovanom ohraničení na obr.9.

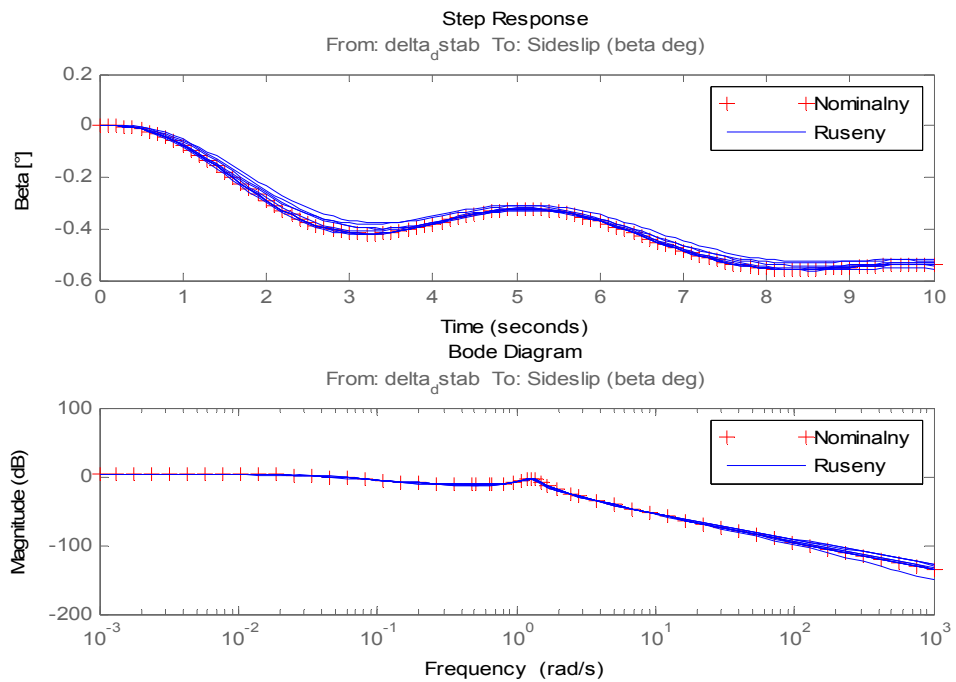
#### 6.4 Modelovanie neurčitosti

Príkaz "sysic" posluži na kombinovanie nominálneho modelu, akčných členov modelu  $A_S$  a  $A_R$  a popis modelovej chyby  $W_{in} \cdot \Delta_G$  v jednoduchej neistote modelu mapuje  $[\delta_{dstab}; \delta_{rud}]$  na systém a výstup akčných členov.

Vyprodukovaný stavový model neistoty  $F14_{unc}$  pre lietadlo bude mať 8 výstupov, 2 vstupy a 8 stavov. „sysic“ má špeciálnu syntax, preto je potreba postupne definovať všetky väzby, vstupy, výstupy a následne len zavolať túto funkciu.

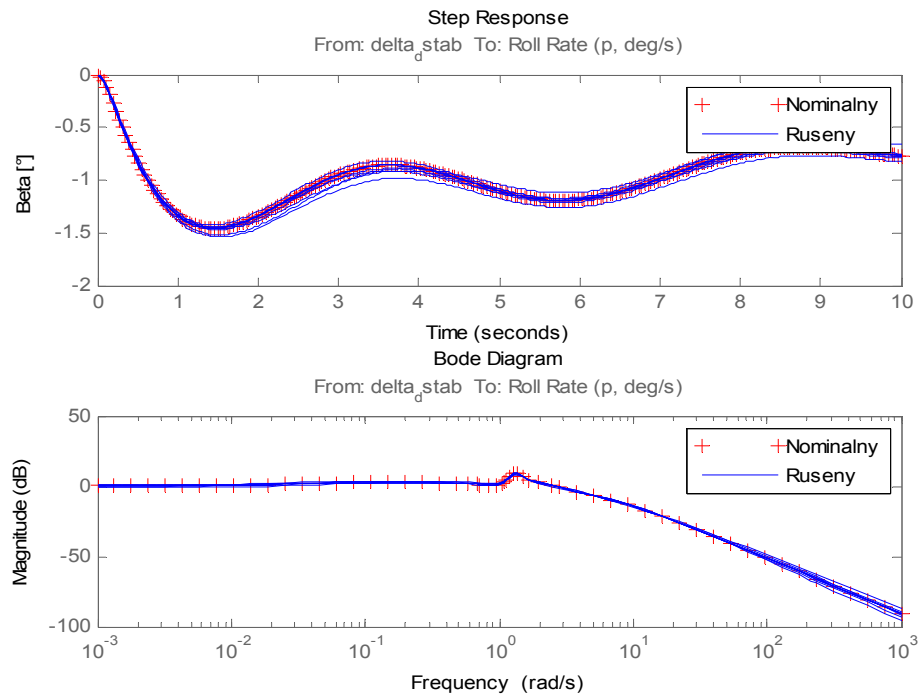
Efekt modelovania neurčitosti sa dá analyzovať vybraním náhodných vzoriek nemodelovanej dynamiky  $\Delta_G$  a následným vykreslením nominálnej a rušenej odozvy.

Náhodné vzorky je možné vytvoriť príkazom „usample“ (generuje náhodné vzorky matic neurčitosti), ktorého parametre sú počet vzorkou a matica neurčitosti. Pre vykreslenie sú použité klasické príkazy so zavolaním vygenerovaných vzoriek.



Obr. 16. Prechodová a Bode odozva diferenciálneho stabilizátora k „ $\beta$ “

Z obrázku vyššie je vidieť, že diferenciálny stabilizátor naznačuje 5% chybu modelu pri  $W_{in}(1)$  v nižších frekvenciách a nárast na 100% po 100 rad/s. Podobný prípad nastáva v obrázku nižšie, kedy je chyba modelu 5% a nárast na 50% je po 90 rad/s.



Obr. 17. Prechod. a Bode odozva diferenciálneho stabilizátora ku „ $p$ “

## 6.5 Návrh regulátora

Postup pokračuje v návrhu robustného regulátora, ktorý dosiahne špecifikácie, čo v robustnosti znamená pre každý rušený model lietadla dosiahnuť modelovaciu chybu v medziach  $W_{in}$ . Návrh sa začína otvoreným obvodom F14IC mapujúcim externé vstupné signály (ovládanie bočnej páky, ovládanie kormidla, šum,  $\delta_{dtab}$ ,  $\delta_{rud}$ ) pôsobiace na výkonovo súvisiace výstupy ( $e_p$ ,  $e_\beta$ , ovládanie bočnej páky, ovládanie kormidla, priemerné hodnoty „p“ a „r“ a „y<sub>ac</sub>“). Znova je použitý "sysic" pre vytvorenie F-14IC. Tento model neurčitosti bude mať 11 výstupov, 7 vstupov a 26 stavov.

Odvolajúc sa na návrh váhovej funkcie, regulátor dosahuje špecifikácie vždy, ak zosilnenie uzavretého obvodu je nižšie ako 1 vo všetkých frekvenciách a pre všetky vstupno-výstupné smery. Prvý bude použitý návrh  $H_\infty$  normy, ktorá minimalizuje zosilnenie uzavretého obvodu pre nominálny model. Pre návrh regulátora sa používa funkcia „hinfsyn“, ktorého vstupné parametre sú počet meraní (entalpicky v tomto prípade viac ako 4), počet kontrol (viac ako 1) a nominálne hodnoty modelu. Kontrola sa prevedie výstupnými parametrami funkcie, hlavným parametrom je  $\gamma_\infty$  (zosilnenie uzavretého obvodu pri všetkých frekvenciách). V prípade zvolenia najnižších hodnôt udáva  $\gamma_\infty = 0,4$ , čo je menej ako 1, čiže špecifikácie **dosahujú** nominálny model lietadla.

Ďalej,  $\mu$ -syntéza ukáže či špecifikácie môžu dosiahnuť robustnosť, keď sa berú do úvahy chyby modelovania (neurčitost'  $\Delta_G$ ). Pomocou „dksyn“ bude prevedená analýza syntézy. Je potrebné zadať frekvenčnú sieť pre  $\mu$ -analýzu (napr. 0,01 až 100) a počet iterácií D-K (napr. 5) s príkazom "dksynOption".

Najlepší regulátor  $K_{\mu}$  môže udržať zosilnenie uzavretého obvodu iba pod 1.23 pre špecifikovaný model neistoty, ukazujúc že špecifikácie môžu byť blízko, ale úplne nepokryli všetky uvažované modely.

## 6.6 Porovnanie regulátorov vo frekvenčnej oblasti

Účinnosť a robustnosť  $H_\infty$  regulátora  $K_\infty$  a  $\mu$ -regulátora  $K_{\mu}$  je určená odvolajúc sa na špecifikácie, ktoré boli dosiahnuté, ak zosilnenie uzavretého obvodu je menej ako 1 pre každú frekvenciu. Funkcia "lft" ukončuje uzavretý obvod pre každý regulátor.

Pre umožnenie analýzy, bude navzorkovaná frekvenčná odozva uzavretého modelu neurčitosti s frekvenčnou miežkou  $f_{\mu}$ , čím bude vytvorená frekvenčná odozva

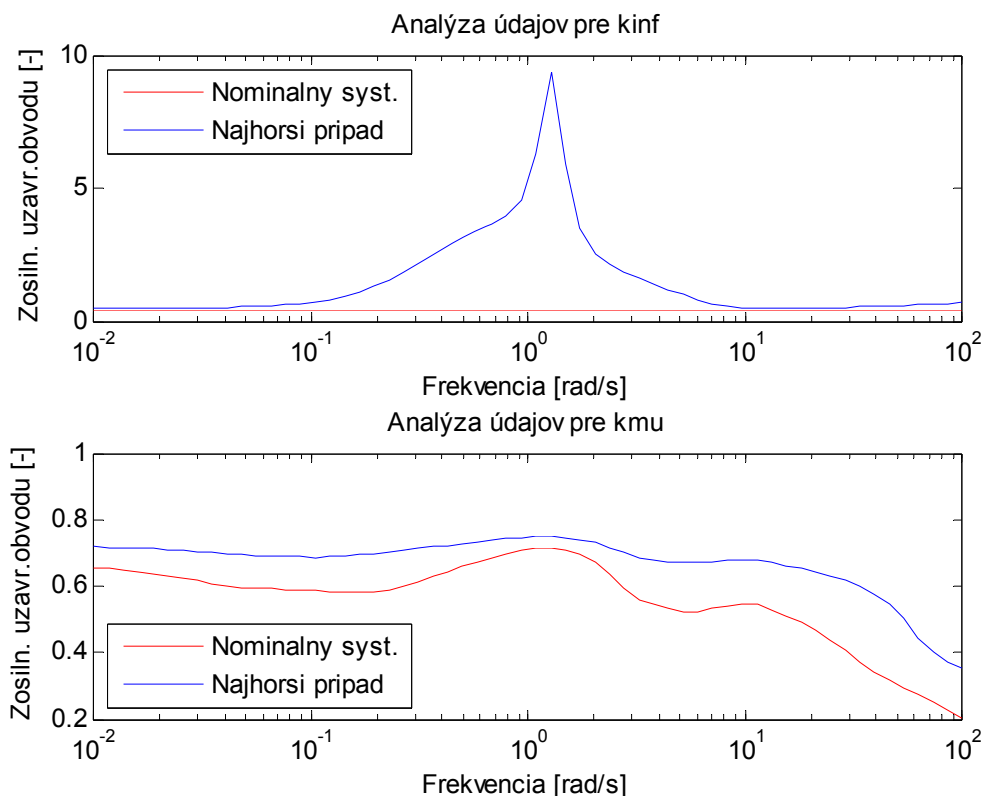
neurčitosti. Analýza bude prevedená príkazom „lft“ s použitím nominálneho modelu neurčitosti a regulátorov a následným aplikovaním „ufrd“, ktorým vygeneruje frekvenčné odozvy regulátorov. Výsledné frekvenčné odozvy majú 6 výstupov, 5 vstupov a 60 charakteristických bodov.

Pre prípad najhoršieho možného prípadu uzavretého obvodu pre každý regulátor pre modelovacie chyby ohraničené  $W_{in}$  je použitý príkaz „wcgain“. Tento príkaz slúži na kontrolu tejto náročnej otázky priamo bez simulácie.

**Výsledná kritická frekvencia** pre najhorší možný prípad **zosilnenia** uzatvoreného obvodu pre  $K_{\infty}$  je 1,2638 rad/s.

**Výsledná kritická frekvencia** pre najhorší možný prípad **zosilnenia** uzatvoreného obvodu pre  $K_{mu}$  je 1,2638 rad/s.

Porovnanie nominálneho prípadu a najhoršieho možného prípadu zosilnenia pre každý regulátor je vidieť na obr. 18.



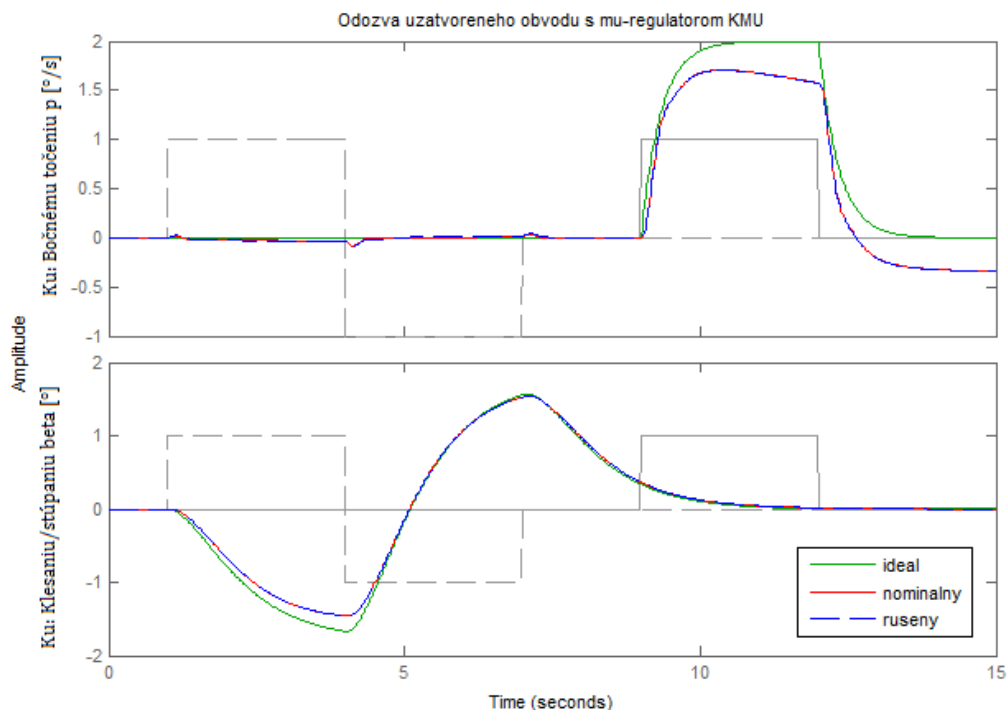
Obr. 18. Frekvenčná analýza regulátorov pre najhorší prípad zosilnenia

Na obrázku vyššie je vidieť, že stabilizujúci regulátor  $K_{\infty}$  dosahuje špecifikácie pre nominálny model, môže však výrazne znehodnocovať výkon (zosilnenie blízko 10) pre

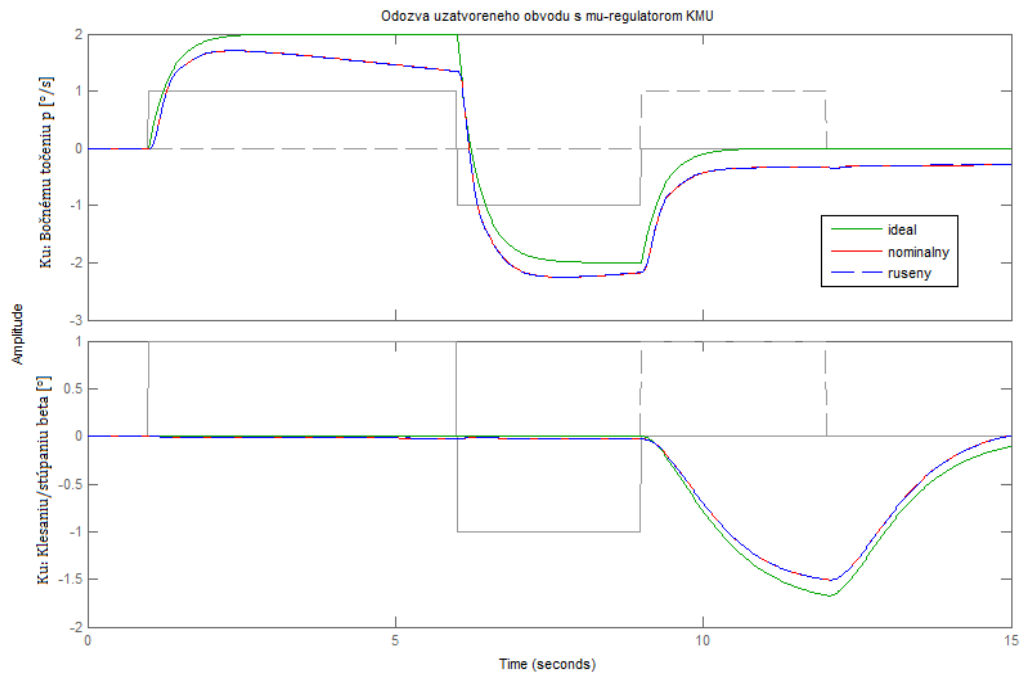
nominálny systém v rozsahu modelovanej chyby. Na rozdiel  $K_{\mu}$  regulátor má jemne horšiu výkonnosť pre nominálny systém pri porovnaní s  $K_{\infty}$ , avšak udržiava si konzistenciu pre všetky rušené modely (najhorší prípad zosilnenia pod 0,8).  $K_{\mu}$  regulátor je podstatne robustnejší pre modelové chyby.

## 6.7 Validácia vhodného stabilizujúceho regulátora

Ďalším testom robustnosti navrhnutého regulátora môže byť overenie regulátora v časovej oblasti. Nominálny model a model najhoršieho možného prípadu uzavretého obvodu bude porovnaný s ideálnou odozvou kvality ovládania. Najprv je potreba vytvoriť „reálny“ model uzavretého obvodu F14SIM, kde budú odstránené všetky váhové funkcie a referenčné modely. Tento model je znova vytvorený pomocou „sysic“ príkazu popísaného v predošlých krokoch. Následne je možné vytvoriť testovacie signály pre bočnú riadiacu páku a kormidlo. Tieto testovacie signály sa použijú na zmienené odozvy. Pre testovanie je použitý „lepší“ regulátor  $K_m$   $\mu$ -syntézy.



Obr. 19. Porovnanie ideálneho modelu s nominálnym a rušeným modelom I



Obr. 20. Porovnanie ideálneho modelu s nominálnym a rušeným modelom II

Odozva uzavretého obvodu je skoro identická pre nominálny systém aj systém najhoršieho možného prípadu („ruseny“). Obidva systémy sa približujú „ideálnemu“ systému s referenčnými prenosmi, avšak ako je vidieť, na začiatku je sledovanie ideálneho systému presnejšie a neskôr sa mierne oddeľuje, čo je spôsobené nulou systému lietadla v pravej polovici komplexnej roviny. Navrhnutý stabilizujúci regulátor  $K_{\mu}$  dosahuje všetky požadované kritériá a poskytuje vhodné robustné aj optimálne parametre pre sústavu.

## 7 SPRIEVODCA POUŽITÍM $\mu$ -FUNKCIE

Sprievodca použitím  $\mu$ -funkcie v Robust Control Toolboxom ponúka ďalšie príklady pre ozrejmienie funkcií a výučbové účely. Obsahuje základné postupy aplikácie  $\mu$ -analýzy, ale hlavne jej aplikáciu na MIMO systémy. Sprievodca je zložený z jednoduchého menu, ktoré nám ponúka základný popis RCT a prehľadne nám ponúka možnosť voľby ukázkového príkladu. Jeho spustenie sa prevedie nastavením sa do koreňového priečinku práce a zadaním príkazu „spust“. Následne zadaním správneho čísla prevedieme buď ukončenie príkladov alebo spustenie požadovaného príkladu. Príkaz sa automaticky presunie k potrebným súborom. Jednotlivé príklady sú otestované v starších verziách Matlabu a sú takisto vhodné aj pre nové verzie. Jednoduchosť navrhnutého menu je na obr. 23.

```

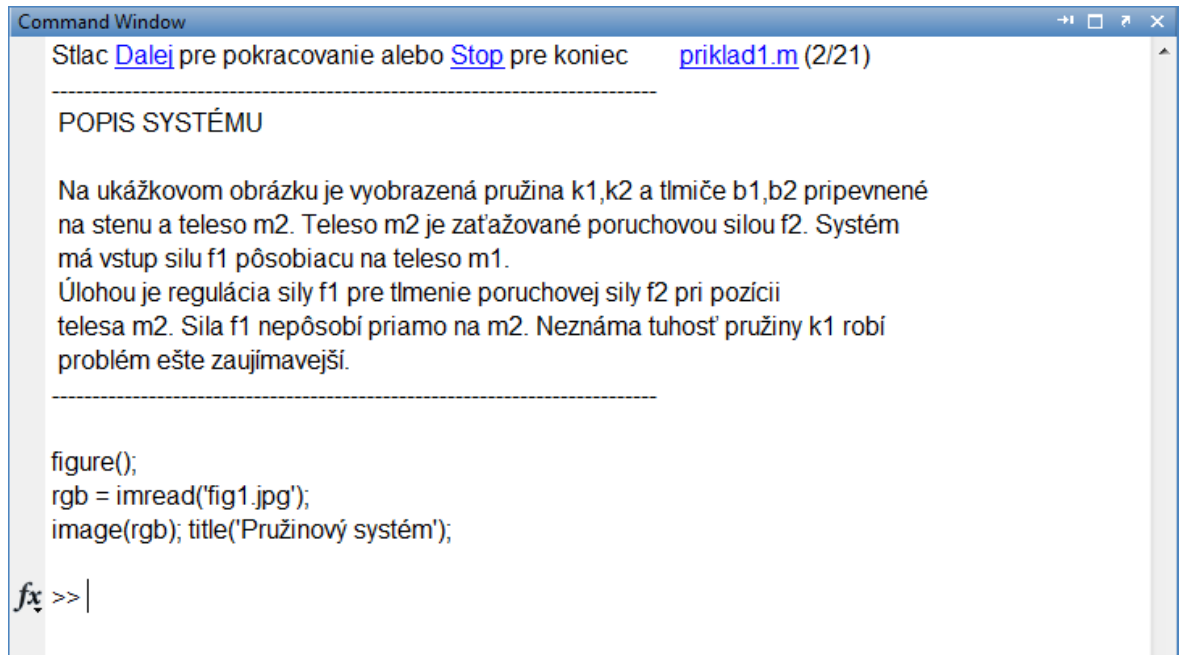
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> spust
% ROBUST CONTROL TOOLBOX je analytický modul, ktorý ponúka nástroje na
% sprostredkovanie systematickej neistoty v modelovaní pre konkrétny
% návrh až k zabezpečeniu vhodného regulátora pre daný systém. Tieto
% prostriedky pomôžu rýchlo identifikovať najhorší možný variant a
% automaticky generujú regulátor s redukovanou citlivosťou na zmenu
% parametrov a modelovacie chyby.
% Prípadné otázky a pripomienky adresujte na "rohaccek@gmail.com".
%
% Robust Control a mu-syntéza ukážky:
%
% 1) Regulácia pružinového tlmiča kmitania použitím mu-syntézy.
% 2) Regulácia bočnej osi stíhacieho lietadla F-14 použitím mu-syntézy.
% 3) Regulácia systému dvoch nádrží
% 4) Reálna mu-analýza (transportné lietadlo)
% 5) Robustná stabilita, robustná výkonnosť a MU analýza
%
% 0) Koniec
echo off
fx Zvolte správne číslo dema: 2

```

Obr. 21. Sprievodca použitím  $\mu$ -funkcie

Príklady slúžia na objasnenie postupu  $\mu$ -syntézy a použitie príkazov RCT a  $\mu$ -analýzy. Vybraté boli často vstupné dáta a postupy z originálnych demo, sú však vylepšené pre potreby výučby.

Priamu ukážku postupovaním niektorého z príkladov je možné vzhladnúť na obr.24.



```
Command Window
Stlac Dalej pre pokracovanie alebo Stop pre koniec   priklad1.m (2/21)
-----
POPIS SYSTÉMU

Na ukážkovom obrázku je vyobrazená pružina k1,k2 a tlmiče b1,b2 pripevnené
na stenu a teleso m2. Teleso m2 je zaťažované poruchovou silou f2. Systém
má vstup silu f1 pôsobiacu na teleso m1.
Úlohou je regulácia sily f1 pre tlmenie poruchovej sily f2 pri pozícii
telesa m2. Sila f1 nepôsobí priamo na m2. Neznáma tuhosť pružiny k1 robí
problém ešte zaujímavejší.
-----

figure();
rgb = imread('fig1.jpg');
image(rgb); title('Pružinový systém');

fx >> |
```

Obr. 22. Ukážka práce s jednotlivými príkladmi sprievodcu

Výhodou je jednoduchý postup s postupnými informáciami a priamym zadávaním príkazov. Všetky príkazy, ako je vidieť na obr. 24 sú automaticky vykonávané, avšak užívateľ si môže vykonávať vlastné operácie, prípadne precvičovať príkazy.

Priložené príklady a ukážky vyobrazujú aplikáciu RCT, postupy použitia rôznych robustných analýz (prípadne  $\mu$ -analýzy), zjednodušenie použitia noriem a kontrolu výsledných návrhov riadenia. Tieto predpoklady a postupy sa dajú využiť pri výučbe a aplikácii zložitých teoretických poznatkov robustného riadenia.

## ZÁVER

Kvalitné riadenie technologických procesov, ako aj vhodný popis rôznych procesov, bilancií a fyzikálnych javov sa stále teší väčšej popularite, hlavne pri dnešnej vysoko technologickej dobe. Technologické novinky sa nachádzajú všade okolo nás. Nové výzvy stále prichádzajú pre potrebu zvyšovania presnosti (napr. miniaturizácia), znižovanie spotreby (osvetlenie, spotreba fosílnych palív) alebo finančných nákladov (často prioritné). Stále sa takisto vyvíjajú nové metódy pre potreby zefektívnenia, zrýchlenia alebo spresnenia riadenia procesov spojených s reálnym prostredím. Cieľ práce je náhľad do oblasti robustného riadenia, ktorý ponúka podstatne širšie oblasti uplatnenia ako klasické návrhy riadenia. Robustná schopnosť regulátoru umožňuje jednému regulačnému členu úspešne riadiť celú množinu objektov, ktoré sú definované s určitou neurčitou ku základnému - nominálnemu modelu. Pre štúdium neurčitosti a robustnosti existuje rada prístupov, jedným z nich je metóda pomocou  $\mu$ -funkcie. Táto metodika je základom príslušného Matlab toolboxu Robust Control Toolbox.

Začiatok práce obsahuje základné pojmy. Sú podrobne opísané základy spätnoväzbového riadenia, stavového popisu a práce s ním, frekvenčnej odozvy MIMO systému. Následne je definovaný výpočet pólov a núl pre stavový model. Dôležitými pojmami pri MIMO systémoch sú taktiež pozorovateľnosť a riaditeľnosť, ktoré sú vyjadrené v teoretickej časti. Signály a prenosy sú popísané pomocou noriem  $H_1$ ,  $H_2$  a  $H_\infty$ . Práca objasňuje pojem stability v priebehu celej práce a takisto vysvetľuje pojem absolútnej a relatívnej stability. Kapitola 3 pojednáva o robustnosti a neurčitosti modelov. Záver teoretickej časti ponúka vysvetlenie  $\mu$ -funkcie a  $\mu$ -analýzy. Uvedené sú aj postupy algoritmov použitých pri praktickej realizácii.

Praktická časť obsahuje podrobný popis prostredia Robust Control Toolbox (RCT), ako pre Matlab/Simulink, tak hlavne pre príkazový riadok Matlab, ktorý RCT používa v hlavnej miere. Nasleduje podrobná ukážka použitia RCT pri popise modelu stíhacieho lietadla F-14 so všetkými simuláciami pre návrh robustných regulátorov. Zložitý systém s viacerými neurčitostami sa riadi pomocou bočnej riadiacej páky a kormidla. Cieľom je dosiahnuť zhodnú odozvu ku referenčným modelom. Ukážka simulácie sa snaží o čo najjednoduchší postup analýzy a použitie RCT.

Práca takisto ponúka Sprievodcu použitím  $\mu$ -funkcie pre študijné a výučbové účely.

## CONCLUSION

Quality control of technological processes as well as an appropriate description of various processes, balance and physical phenomena are still enjoying increased popularity, especially in today's highly technological age. Technology news can be found all around us. New challenges keep coming for the need to increase the accuracy (e.g. miniaturization), reducing consumption (lighting, consumption of fossil fuels) or the financial costs (often preferred). We are also developing new methods for the purpose of streamlining, accelerating or refinement of process associated with the real environment. Aim of the study is insight into the robust control, which offers a wider scope than classic control design. Robust controller capability allows a single regulatory element to successfully manage the entire set of objects that are defined with some uncertainty to the basic - nominal model. There are numerous approaches for the study of uncertainty and robustness. One of them is a method of  $\mu$ -function. This methodology is based in the Matlab with Robust Control Toolbox.

Start of work includes basic concepts. They are described basics of feedback control, state-space description, MIMO system frequency response. Then there are defined calculations for the poles and zeros for the state-space model. Important concepts for MIMO systems are the observability and controllability, which are expressed in the theoretical part. Signals and transmission are described using standard  $H_1$ ,  $H_2$  and  $H_\infty$ . The work explains the concept of stability throughout the whole work and also explains the absolute and relative stability. Chapter 3 discusses the robustness and model uncertainty. Conclusion of the theory offers an explanation of the  $\mu$ -function and  $\mu$ -analysis. Procedures of algorithms are used for practical implementation.

The practical part contains a detailed description of the Robust Control Toolbox (RCT) environment as for the Matlab/Simulink than especially for the Matlab command line, which the RCT used mostly. Detailed demonstration of the use of RCT in the description of the model fighter aircraft F-14 with all the simulations for the design of robust controllers follows next. Complicated system with multiple uncertainties is controlled by lateral stick and rudder pedal. The aim is to find equal response to the reference models. Simulation seeks the simplest analysis procedure and the use of the RCT.

The paper also offers the Guide for  $\mu$ -function for the purpose of studying and teaching.

**ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY**

- [1] ASTRÖM, K.J., MURRAY, R.M. *Feedback Systems*. Princeton University Press, 2008.
- [2] ROSSENWASSER, E.N., LAMPE, B.P. *Multivariable computer-controlled systems*. Springer, Germany, 2006.
- [3] DORF, R.C., BISHOP, R.H. *Modern control systems*. Pearson Ed.Int. USA, 2008.
- [4] OGATA, K. *Modern control engineering*. Prentice Hall Inc, New Jersey, 2002.
- [5] SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback systems*. John Wiley & Sons, 2006.
- [6] VIDYASAGAR, M. *Control systems Synthesis: A Factorization Approach*. MIT Press. Cambridge. MA, 1985.
- [7] DLAPA, M. *Vybrané kapitoly a teorie robustního řízení*. Učební texty FAI UTB, Zlín, 2008.
- [8] BALAS, M. et al. *Mu Analysis Toolbox*. The MathWorks Inc., Natic Mass, 1999.
- [9] PolyX, Ltd. *The Polynomial Toolbox for MATLAB*, Prague, 1999.
- [10] VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Základy automatické regulace*. VŠB-Technická univerzita, Ostrava, 2008.
- [11] BURL, J.B. *Linear Optimal Control.  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods*. 1st edition, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1999.
- [12] DOSTÁL, P., MATUŠŮ, R. *Stavová a algebraická teorie řízení*. Učební texty FAI UTB, Zlín, 2010.

- [13] On the design of LPV controllers for the F-14 aircraft lateral-directional axis during powered approach. Dostupný z URL:  
〈<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=611768>〉.
- [14] Documentation: Robust Control Toolbox: The MathWorks, Inc.  
Dostupný z URL:  
〈[http://www.mathworks.com/help/toolbox/robust/gs/bsb\\_\\_3n.html](http://www.mathworks.com/help/toolbox/robust/gs/bsb__3n.html)〉.
- [15] Documentation: Control System Toolbox: The MathWorks, Inc.  
Dostupný z URL:  
〈<http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/getstart/bq03wnb.html>〉
- [16] BARTOSZEWICZ, A. *Robust Control, Theory and Applications*. InTech, 2011.
- [17] BHATTACHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H., KEEL, L. H. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall Inc, New Jersey, 1995.
- [18] STORN, R. *System design by constraints adaptation and Differential Evolution*, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol. 3, No. 1, 1999.
- [19] PROKOP, R., CORRIOU, J.P. *Design and analysis of simple robust controllers*, *Int. J. Control*, Vol. 66, 1997.

**ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK**

MIMO	System s viacnásobnými vstupmi a výstupmi
LQG	Linear Quadratic Gaussian optimal control
SISO	System s jedným vstupom a jedným výstupom
GUI	Grafické užívateľské prostredie
RCT	Robust Control Toolbox

**ZOZNAM OBRÁZKOV**

Obr. 1.	Všeobecné blokové schéma uzavretého obvodu .....	12
Obr. 2.	Príklad mnohorozmerného uzavretého regulačného obvodu .....	13
Obr. 3.	Príklad zobrazenie pólov a núl systému .....	23
Obr. 4.	Oblasti neistoty, Nyquistova charakteristika [5] .....	27
Obr. 5.	Kvalita robustnej regulácie .....	37
Obr. 6.	Uzavretý regulačný obvod s neurčitost'ou .....	38
Obr. 7.	Simulink, bloky RCT .....	43
Obr. 8.	Nastavenia multivýstupného grafu .....	44
Obr. 9.	Nastavenia stavového modelu neurčitosti .....	44
Obr. 10.	Použitie funkcie drawmag načrtnutím bodov .....	46
Obr. 11.	Robustný návrh regulácie pre F-14 .....	47
Obr. 12.	Požadovaná kvalita ovládania bočnej páky .....	48
Obr. 13.	Požadovaná kvalita ovládania kormidla .....	49
Obr. 14.	Frekvenčná charakteristika šumu senzoru pre „p“ .....	50
Obr. 15.	Vplyv špecifikácie na kvalitu riadenia (pásmový filter) .....	51
Obr. 16.	Prechodová a Bode odozva diferenciálneho stabilizátora k „ $\beta$ “ .....	54
Obr. 17.	Prechod. a Bode odozva diferenciálneho stabilizátora ku „p“ .....	54
Obr. 18.	Frekvenčná analýza regulátorov pre najhorší prípad zosilnenia .....	56
Obr. 19.	Porovnanie ideálneho modelu s nominálnym a rušeným modelom I .....	57
Obr. 20.	Porovnanie ideálneho modelu s nominálnym a rušeným modelom II .....	58
Obr. 21.	Sprievodca použitím $\mu$ -funkcie .....	59
Obr. 22.	Ukážka práce s jednotlivými príkladmi sprievodcu .....	60

## ZOZNAM PRÍLOH

P I Sprievodca použitím  $\mu$ -funkcie: Matlab.

CD-ROM:\spust.m

P II Sprievodca použitím  $\mu$ -funkcie, priečinok so súbormi.

CD-ROM:\ priklady\