

Průsečíky kvadratických útvarů v rovině v prostředí Mathematica

Intersection points of quadratic objects in a plane
in Mathematica

Josef Peterka

Bakalářská práce
2012



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Josef PETERKA**

Osobní číslo: **A09317**

Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Průsečíky kvadratických útvarů v rovině v prostředí Mathematica**

Zásady pro vypracování:

1. Definujte obecně kvadratické objekty v rovině.
2. Klasifikujte všechny tyto reálné a imaginární kvadratické objekty.
3. Popište stručně relevantní příkazy prostředí Mathematica.
4. Vytvořte interaktivní program(y) pro průsečíky dvou reálných kvadratických objektů.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. JUKL, Marek. Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 1999. ISBN 8070679913.
2. VALA, Jiří. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební [online]. ? 2006 [cit. 2011-11-16]. Dostupné z: http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/podpora/Anal_Geo.pdf
3. ŘÍHOVÁ, Helena [online]. ? 2006 [cit. 2011-12-04]. Dostupné z: <http://dagles.klenot.cz/rihova/kuzelosecky.pdf>
4. Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Kuželosečka [online]. Poslední aktualizace 14. 10. 2011 [cit. 2012-01-29]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Ku%C5%BElose%C4%8Dka&oldid=7499811>
5. WOLFRAM RESEARCH [online]. ? 2012 [cit. 2011-01-30]. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/>
6. CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80--510-5.

Vedoucí bakalářské práce:

RNDr. Martin Fajkus, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

24. února 2012

Termín odevzdání bakalářské práce:

8. června 2012

Ve Zlíně dne 24. února 2012

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvoření interaktivního programu v prostředí Wolfram Mathematica 8, jenž by napomáhal studentům při studiu matematiky kvadratických útvarů v rovině. Dále si práce brala za cíl vysvětlit základní pojmy, jenž problematika kuželoseček zahrnuje a popsat příkazy, které byly použity při tvorbě programu.

Klíčová slova: kvadratické útvary, kuželosečky, elipsy, kružnice, hyperboly, paraboly.

ABSTRACT

The main objective of this thesis was to create an interactive program in the Wolfram Mathematica 8, which would assist students in their study of mathematics of quadratic objects in a plane. Furthermore, the work took aim to explain the basic concepts, which includes the issue of conics and to describe commands used in the source code.

Keywords: quadratic objects, conic sections, ellipses, circles, hyperbolas, parabolas.

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu RNDr. Martinu Fajkusovi, Ph.D. za pravidelné konzultace a odbornou pomoc při tvorbě tohoto díla.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČÁST	9
1 KVADRATICKÉ ÚTVARY V ROVINĚ	10
1.1 ELIPSA.....	11
1.2 KRUŽNICE	13
1.3 HYPERBOLA	13
1.4 PARABOLA	15
1.5 VÝPOČET PRŮSEČÍKŮ DVOU KUŽELOSEČEK	17
2 SOFTWARE WOLFRAM MATHEMATICA	20
2.1 POPIS PROSTŘEDÍ.....	20
II PRAKTICKÁ ČÁST	22
3 PROGRAM PRO VÝPOČET PRŮSEČÍKŮ DVOU REÁLNÝCH KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ	23
3.1 POPIS FUNGOVÁNÍ PROGRAMU.....	23
3.2 POPIS OVLÁDÁNÍ A VÝSTUPU PROGRAMU	27
3.3 POUŽITÉ PŘÍKAZY	31
ZÁVĚR	34
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ	35
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	36
SEZNAM OBRÁZKŮ	37
SEZNAM TABULEK	38
SEZNAM PŘÍLOH	39

ÚVOD

Bakalářská práce, jak již z názvu vyplývá, je zaměřena na kvadratické útvary a je rozdělena na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část obsahuje popis těchto útvarů a jejich rozdělení. Dále se zde nachází popis softwaru Wolfram Mathematica 8, který byl využit při tvorbě programu pro výpočet průsečíků kvadratických útvarů v rovině. Software Mathematica 8 je díky své velmi dobře propracované nápovědě s množstvím ukázkových příkladů vhodným programem i pro lidi, kteří neovládají příliš zdatně anglický jazyk.

Praktická část je zaměřena na vytvořený program. Najdeme zde popis zdrojového kódu funkce *vypocti[]*, ve které se nachází příkazy pro vytvoření rovnic, grafu a výpočet průsečíků. Dále v praktické části najdeme popis ovládání programu a jeho výstup a použité příkazy.

Celá práce byla určena jako pomůcka studentům, kteří již mají nějaké znalosti z oblasti kvadratických útvarů a chtějí si pomocí vytvořeného programu při studiu jednoduše ověřit správnost vypočtených průsečíků, nebo jak výsledné křivky budou vypadat na základě zvoleného typu rovnice a zadaných konstant.

I. TEORETICKÁ ČÁST

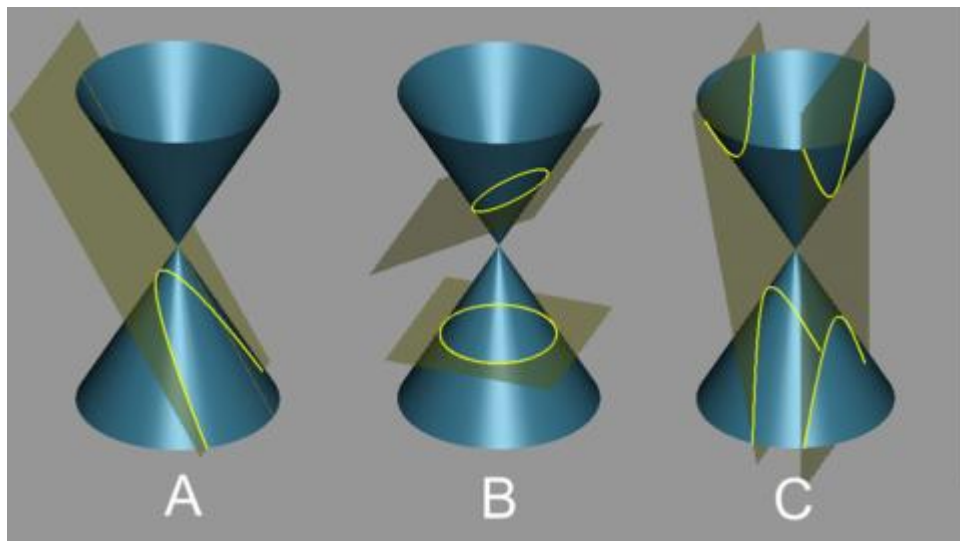
1 KVADRATICKÉ ÚTVARY V ROVINĚ

Kvadratické objekty neboli kuželosečky jsou útvary, které jsou definovány rovnicí:

Obecná rovnice kvadratické křivky:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Název kuželosečky je odvozen od toho, že tyto objekty vznikají jako průnik roviny s pláštěm rotačního kužele, přičemž rovina neprochází vrcholem, což vidíme na obrázku č. 1, kde v popisku už máme vyjmenované hlavní zástupce této kategorie, kterými jsou parabola, elipsa, kružnice a hyperbola.



Obr. č. 1: A: parabola, B: elipsa (nahore) a kružnice (dole), C: hyperboly [5]

Při transformaci souřadnic se nemění některé charakteristické veličiny obecné rovnice kuželosečky. Tyto veličiny se označují jako invarianty a díky nim lze ze zadané rovnice jednoduše určit, o jaký typ kuželosečky se jedná.

Invarianty:

- Determinant kuželosečky:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix}$$

- Determinant kvadratických členů:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix}$$

- $S = a + c$

V následující tabulce je uvedeno rozdělení kuželoseček podle invariantů. Pokud je determinant kuželosečky Δ roven nule, jedná se o nevlastní kuželosečku. [5]

		$\delta \neq 0$ středové kuželosečky		$\delta = 0$ nestředové kuželosečky
		$\delta > 0$	$\delta < 0$	
$\Delta \neq 0$ vlastní kuželosečky	$\Delta S \leq 0$ reálné kuželosečky	elipsa	hyperbola	parabola
	$\Delta S > 0$ imaginární kuželosečky	elipsa	hyperbola	parabola

Tabulka č. 1: Klasifikace kuželoseček podle invariantů [5]

Pokud se v rovnici nachází součin konstanty b a proměnných x a y , znamená to, že výsledná kuželosečka bude natočena o určitý úhel, který závisí na velikosti konstanty b .

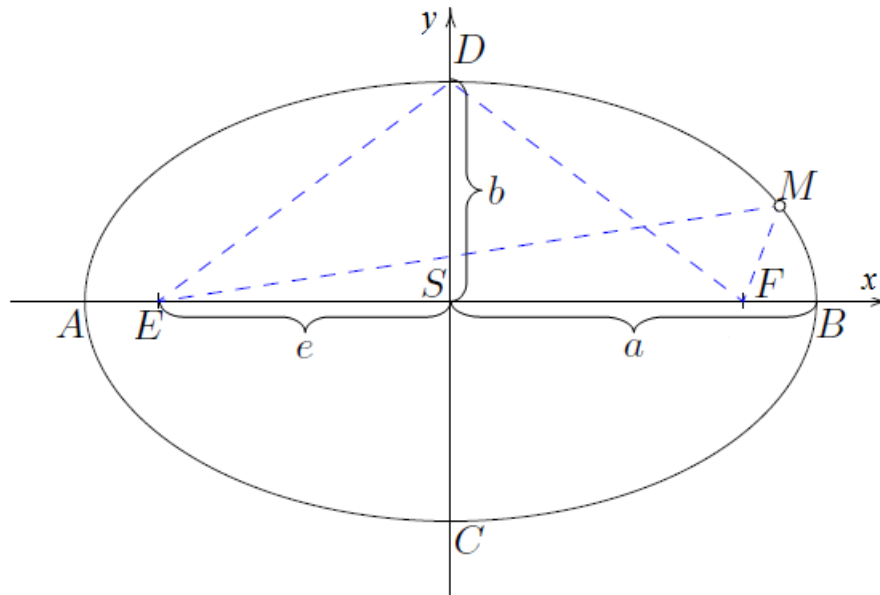
Jedno ze základních dělení těchto objektů je na reálné a imaginární. Získáme je v případě, že při řešení kvadratické rovnice dostaneme odmocninu ze záporného čísla a pro další postup musíme využít imaginárních jednotek. Tato bakalářská práce je však zaměřena pouze na reálné kuželosečky, takže dále se problematikou imaginárních kuželoseček zabývat nebudeme.

1.1 Elipsa

Elipsa je množina bodů X v rovině, které mají od dvou daných bodů E, F (ohnisek) stejný součet vzdáleností k :

$$|XE| + |XF| = k$$

Body A, B na obrázku č.2 se nazývají hlavní vrcholy elipsy, body C, D jsou vedlejší vrcholy elipsy, S je její střed. Vzdálenost hlavního vrcholu od středu elipsy se nazývá hlavní poloosa, značí se písmenem a , vzdálenost vedlejšího vrcholu od středu elipsy je vedlejší poloosa, značí se b a vzdálenost ohniska od středu elipsy je excentricita neboli výstřednost, značí se e . Spojnice libovolného bodu M elipsy s ohniskem se nazývá průvodič. [3]



Obr. č. 2: Elipsa [3]

Rovnice elipsy:

- Kanonický tvar:
 - hlavní poloosa elipsy je rovnoběžná s osou x nebo y a střed má souřadnice $[x_0, y_0]$:

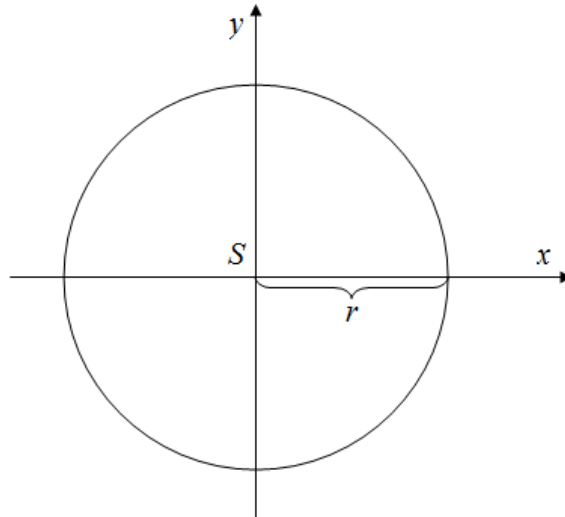
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y &= y_0 + b \cdot \sin(t) \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

1.2 Kružnice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které leží ve stejné vzdálenosti, označované jako poloměr r , od pevně daného bodu, zvaného střed S . [5] Ve své podstatě je kružnice vlastně speciálním případem elipsy, která má hlavní a vedlejší poloosu stejně velkou.



Obr. č. 3: Kružnice

Rovnice kružnice:

- Obecná rovnice:
 - střed má souřadnice $[x_0, y_0]$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y &= y_0 + r \cdot \sin(t) \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

1.3 Hyperbola

Hyperbola je množina bodů v rovině, které mají od dvou bodů E, F (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností (brány v absolutní hodnotě), který je roven dvojnásobku délky hlavní poloosy a . Obecný bod X hyperboly splňuje:

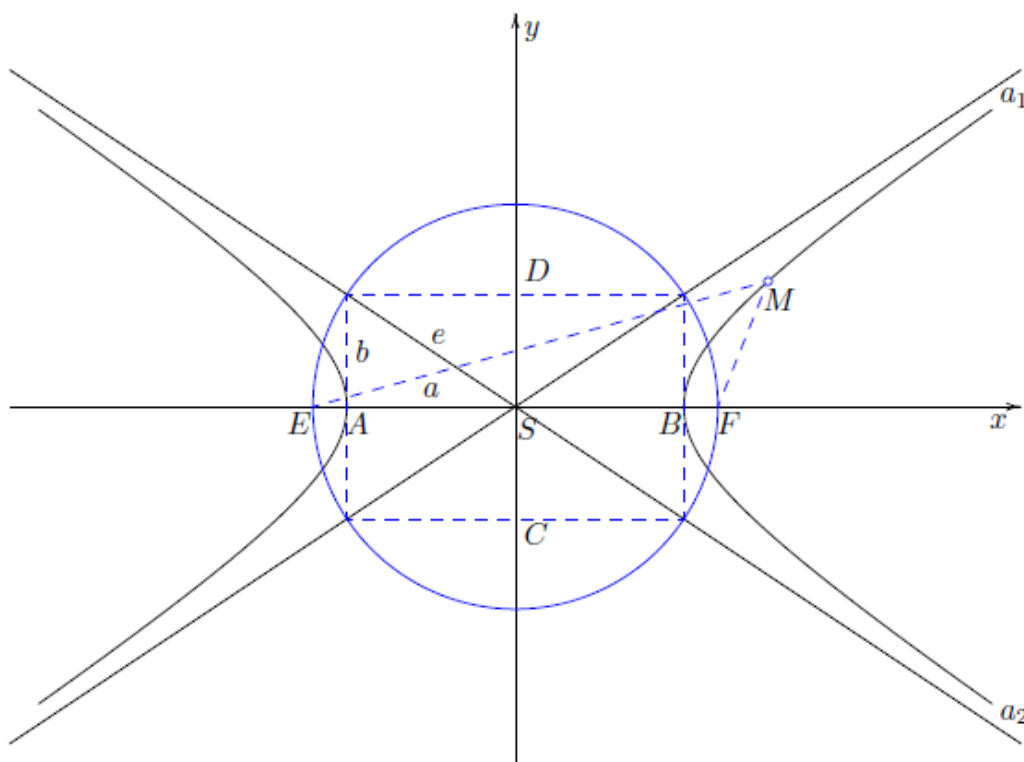
$$\left| |XE| - |XF| \right| = 2a \quad 0 < 2a < |EF|$$

Hyperbola má dvě osy symetrie. Hlavní osa prochází ohnisky, vedlejší osa je osou úsečky EF , průsečík os je střed hyperboly S . Body hyperboly ležící na hlavní ose jsou vrcholy hyperboly, na obr.č.4 jsou to body A, B . Vzdálenost vrcholu hyperboly od jejího středu je hlavní poloosa, vzdálenost ohniska od středu je excentricita e , neboli výstřednost hyperboly. Na vedlejší ose neleží žádný bod hyperboly, protože rozdíl vzdáleností libovolného bodu vedlejší osy od ohnisek je vždy nula. Nicméně se zavádí vedlejší poloosa b , pro kterou platí:

$$b^2 = e^2 - a^2$$

Na obr. č. 4 je to vzdálenost $|CS|$ nebo $|DS|$.

Asymptoty hyperboly a_1, a_2 jsou přímky, které procházejí středem hyperboly a v případě, že osy hyperboly jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, mají směrnici $\pm b/a$. S hyperbolou nemají žádný společný bod. Přímky, které rovněž procházejí středem a mají směrnici z intervalu $(-b/a; b/a)$, protínají hyperbolu ve dvou bodech. [3]



Obr. č. 4: Hyperbola [3]

Rovnice hyperboly:

- Středová rovnice:
 - střed má souřadnice $[x_0, y_0]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x , a je délka hlavní poloosy, b je délka vedlejší poloosy:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- hlavní osa je rovnoběžná s osou y :

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

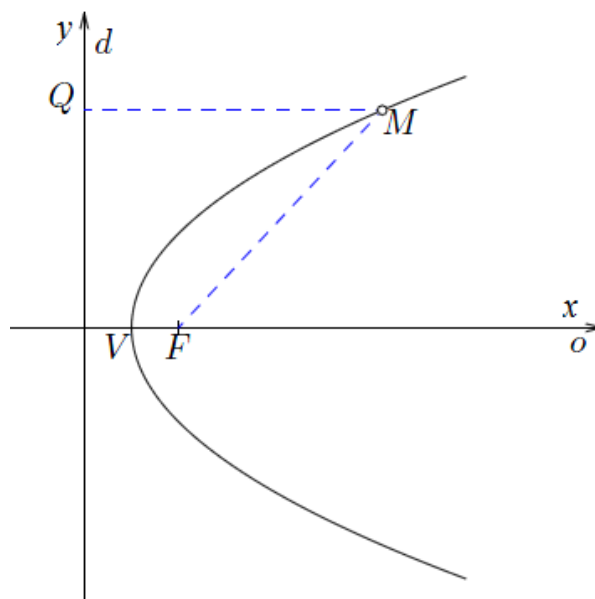
- Parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{a}{\cos(t)} & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= y_0 + b \cdot \operatorname{tg}(t) \end{aligned}$$

1.4 Parabola

Parabola je množina bodů v rovině, jejichž vzdálenost od pevné přímky d (řídící přímka) je stejná jako vzdálenost od pevného bodu F (ohnisko), který na přímce neleží:

$$|Xd| = |XF|$$



Obr. č. 5: Parabola [3]

Parabola má jednu osu symetrie (přímka o na obr. č. 5), která prochází ohniskem a je kolmá k řídicí přímce. V polovině vzdáleností mezi ohniskem a řídicí přímkou leží vrchol paraboly V . Spojnice FM a MQ , kde Q je pata kolmice z bodu F na řídicí přímku d a bod M obecný bod paraboly, jsou průvodiče bodu M . Vzdálenost $|Fd|$ se obvykle značí písmenem p a nazývá se parametr paraboly (v některých učebnicích půlparametr). [3]

Rovnice paraboly:

- Vrcholová rovnice:
 - vrchol má souřadnice $[x_0, y_0]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou x :

- ohnisko se nachází napravo od vrcholu:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

- ohnisko se nachází nalevo od vrcholu:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

- osa paraboly je rovnoběžná s osou y :

- ohnisko se nachází nad vrcholem:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

- ohnisko se nachází pod vrcholem:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

- Parametrické rovnice:

- osa paraboly je rovnoběžná s osou x :

- ohnisko se nachází napravo od vrcholu:

$$x = x_0 + \frac{p}{2}t^2$$

$$y = y_0 + pt$$

- ohnisko se nachází nalevo od vrcholu:

$$x = x_0 - \frac{p}{2}t^2$$

$$y = y_0 - pt$$

- osa paraboly je rovnoběžná s osou y :
 - ohnisko se nachází nad vrcholem:

$$x = x_0 + pt$$

$$y = y_0 + \frac{p}{2}t^2$$

- ohnisko se nachází pod vrcholem:

$$x = x_0 - pt$$

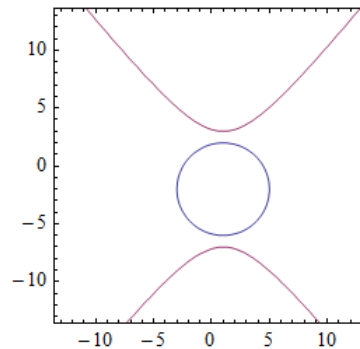
$$y = y_0 - \frac{p}{2}t^2$$

1.5 Výpočet průsečíků dvou kuželoseček

Při výpočtu průsečíků dvou kuželoseček řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých, které jsou v tomto případě x -ová a y -ová souřadnice bodu průniku dvou kuželoseček.

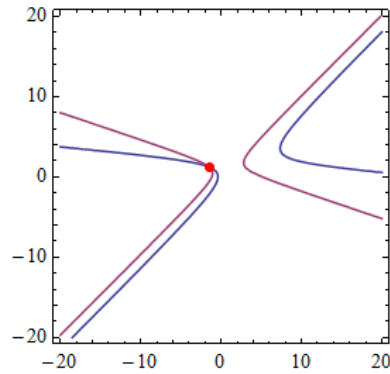
Může nastat 6 případů:

- 0 průsečíků:
 - soustava nemá řešení.
 - př.: kružnice a hyperbola:



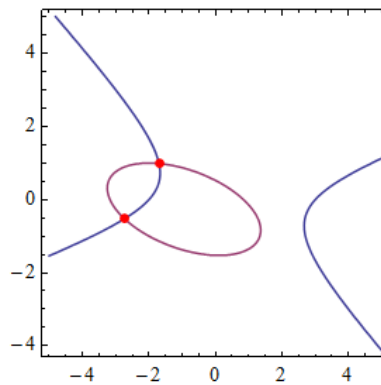
Obr. č. 6: 0 průsečíků

- 1 průsečík:
 - soustava rovnic má právě jedno řešení.
 - př.: dvě hyperboly:



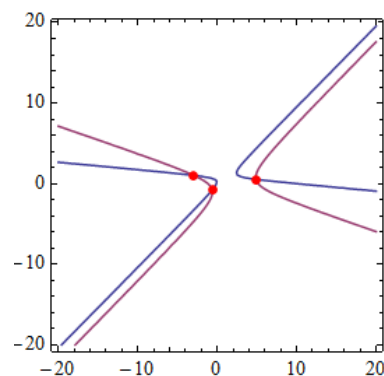
Obr. č. 7: 1 průsečík

- 2 průsečíky:
 - soustava rovnic má právě dvě řešení.
 - př.: hyperbola a elipsa:



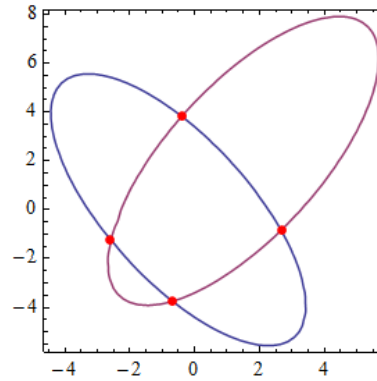
Obr. č. 8: 2 průsečíky

- 3 průsečíky:
 - soustava rovnic má právě tři řešení.
 - př.: dvě hyperboly:



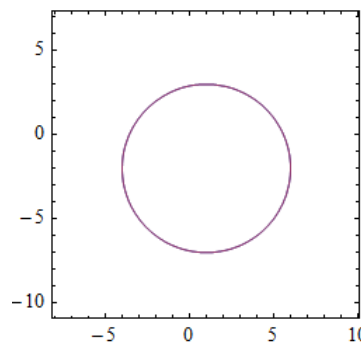
Obr. č. 9: 3 průsečíky

- 4 průsečíky:
 - soustava rovnic má právě čtyři řešení.
 - př.: dvě elipsy:



Obr. č. 10: 4 průsečíky

- Nekonečně mnoho průsečíků:
 - řešené rovnice jsou totožné.
 - př.: dvě kružnice:

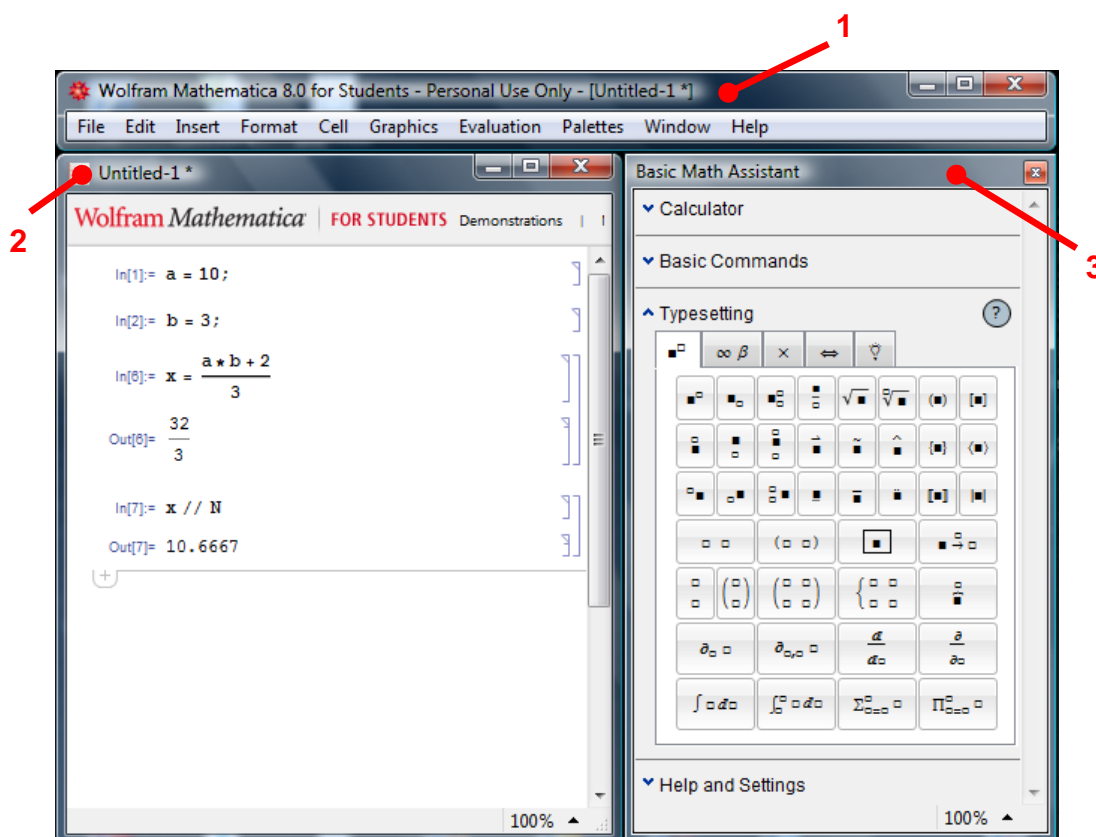


Obr. č. 11: Nekonečně mnoho průsečíků

2 SOFTWARE WOLFRAM MATHEMATICA

Software Mathematica patří mezi jedny z nejsilnějších výpočetních systémů na světě. Tento software je jedním z prostředí, jenž integruje nástroje pro numerickou a symbolickou matematiku, grafický a dokumentační systém a zajišťuje pokročilé propojení s dalšími aplikacemi. [6]

2.1 Popis prostředí



Obr. č. 12: Program Mathematica 8.0

Na obr. č. 12 vidíme spuštěný program Mathematica 8.0, kde 1 je hlavní lišta programu, 2 notebook a 3 paleta Basic Math Assistant.

Hlavní lišta programu obsahuje položky:

- *File* – pro práci s notebookem: nový, otevření, zavření, uložení...
- *Edit* – krok zpět, kopírování, vyhledávání...
- *Format* – nastavení vzhledu textu, pozadí notebooku, ...
- *Cell* – pro práci s buňkami: seskupování, ...

- *Graphics* – pro práci s grafickými prvky
- *Evaluation* – nastavení a kompilace vytvořeného kódu
- *Palettes* – palety pro vkládání matematických vzorců, symbolů...
- *Window* – nastavení vzhledu okna notebooku
- *Help* – nápověda programu

Mathematica notebook zajišťuje kompletní technický dokumentační systém zahrnující sazbu matematických výrazů, formátovaného textu, zvuku, grafiky, animací a hypertextových odkazů. Notebook může být převeden do jiného formátu jakým je např. HTML, TeX, je možno jej odeslat emailem nebo umístit na webovou stránku, FTP server a to bez poškození kvality. [1]

Paleta Basic Math Assistant je přednastavena na otevření při spuštění programu Mathematica. Umožňuje grafické zadání umocnění, sumy, vkládání goniometrických funkcí ...

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 PROGRAM PRO VÝPOČET PRŮSEČÍKŮ DVOU REÁLNÝCH KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ

3.1 Popis fungování programu

Zdrojový kód programu se skládá ze dvou hlavních funkcí: *vypocti[]* – zde se nachází samotné jádro programu a *Manipulate[]* – volání funkce *vypocti[]* se získanými hodnotami z ovládacích grafických prvků a z polí pro zadávání jednotlivých parametrů.

Na začátku funkce *vypocti[]* jsou nadefinovány proměnné, které se v této funkci využívají. Po nich následují vytvořené funkce sloužící pro zjednodušení a zpřehlednění celého programu.

Vytvořené funkce:

- *rovnice[]* – vytvoření rovnice kuželosečky na základě zvoleného typu rovnice a zadaných hodnot.

```
rovnice[typ_, hod_] := Module[{} ,
  Return[Switch[typ,
    1, {hod[[1]] * x2 + hod[[2]] * x * y + hod[[3]] * y2 + hod[[4]] * x +
      hod[[5]] * y + hod[[6]], 0},
    2, { $\frac{(x - \text{hod}[[1]])^2}{\text{hod}[[4]]^2} + \frac{(y - \text{hod}[[2]])^2}{\text{hod}[[5]]^2}$ , 1},
    3, {(x - hod[[1]])2 + (y - hod[[2]])2, hod[[3]]2},
    4, { $\frac{(x - \text{hod}[[1]])^2}{\text{hod}[[4]]^2} - \frac{(y - \text{hod}[[2]])^2}{\text{hod}[[5]]^2}$ , 1},
    5, { $\frac{(y - \text{hod}[[2]])^2}{\text{hod}[[5]]^2} - \frac{(x - \text{hod}[[1]])^2}{\text{hod}[[4]]^2}$ , 1},
    6, {(y - hod[[1]])2, 2 * hod[[2]] * (x - hod[[3]])},
    7, {(y - hod[[1]])2, -2 * hod[[2]] * (x - hod[[3]])},
    8, {(x - hod[[3]])2, 2 * hod[[2]] * (y - hod[[1]])},
    9, {(x - hod[[3]])2, -2 * hod[[2]] * (y - hod[[1]])}]]];
```

Obr. č. 13: *rovnice[]*

- *invarianty[]* – výstupem je vektor obsahující vypočtené invarianty v následujícím pořadí: Δ , δ a S (viz invarianty str. 10-11).

```
invarianty[r_] := Module[{},
  Return[
    {Det[{{r[[1]],  $\frac{r[[2]]}{2}$ ,  $\frac{r[[4]]}{2}$ }, { $\frac{r[[2]]}{2}$ , r[[3]],  $\frac{r[[5]]}{2}$ },
      { $\frac{r[[4]]}{2}$ ,  $\frac{r[[5]]}{2}$ , r[[6]]}}],
    Det[{{r[[1]],  $\frac{r[[2]]}{2}$ }, { $\frac{r[[2]]}{2}$ , r[[3]]}], r[[1]] + r[[3]]];];
```

Obr. č. 14: *invarianty[]*

- *obecna[]* – funkce pro zjištění konkrétního druhu kuželosečky z obecné rovnice na základě vypočítaných invariantů. Kód funguje na základě tab. č. 1, kdy se nejprve testuje zda $\Delta \neq 0$ (vlastní k.), následuje test $\Delta S \leq 0$ (reálná k.) a poslední jsou testy na zjištění zda se jedná o elipsu, hyperbolu nebo parabolu. V případě, že $\Delta = 0$ nebo $\Delta S > 0$ uloží se do proměnné *chyba* 1, což způsobí vypsání chybové zprávy na výstupu programu.

```
obecna[invar_, cislo_] := Module[{},
  If[invar[[1]] != 0,
    If[invar[[1]] * invar[[3]] <= 0,
      chyba[[cislo]] = 0;
      If[invar[[2]] == 0,
        zp[[cislo]] = Row[{cislo, ". rovnice je rovnicí paraboly, Δ=",
          invar[[1]], ", ΔS=", invar[[1]] * invar[[3]], ", δ=", invar[[2]]}],
        If[invar[[2]] > 0,
          zp[[cislo]] = Row[{cislo, ". rovnice je rovnicí elipsy, Δ=",
            invar[[1]], ", ΔS=", invar[[1]] * invar[[3]], ", δ=", invar[[2]]}],
          zp[[cislo]] = Row[{cislo, ". rovnice je rovnicí hyperboly, Δ=",
            invar[[1]], ", ΔS=", invar[[1]] * invar[[3]], ", δ=",
            invar[[2]]}]]];
    ,
    zp[[cislo]] =
      Style[Row[{cislo, ". rovnice je rovnicí imaginární kuželosečky, Δ=",
        invar[[1]] * invar[[3]]}], Red]
  ],
  zp[[cislo]] =
    Style[Row[{cislo, ". rovnice není kvadratická, Δ=", invar[[1]]}], Red]
];
```

Obr. č. 15: *obecna[]*

- *kontrola[]* – ověření správnosti zadaných hodnot. Vstupními parametry jsou *tRov_* (typ rovnice 1-9), *cRov_* (číslo rovnice 1 nebo 2) a *hRov_* (zadané hodnoty rovnice). Podle zvoleného typu rovnice se vykoná některá z možností 1-9 sloužící ke kontrole hodnot rovnic. Na závěr funkce se ještě zkoumá pomocí podmínky správnost nastavených mezí pro vykreslení grafu.

```
kontrola[tRov_, cRov_, hRov_] := Module[{},
  Switch[tRov,
    1, invarRov[[cRov]] = invarianty[hRov];
    obecna[invarRov[[cRov]], cRov],
    2, If[hRov[[4]] ≤ 0 || hRov[[5]] ≤ 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: a,b nesmí být menší nebo rovno 0"}],
        Red], chyba[[cRov]] = 0],
    3, If[hRov[[3]] < 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: r nesmí být menší než 0"}], Red],
      chyba[[cRov]] = 0],
    4, If[hRov[[4]] ≤ 0 || hRov[[5]] ≤ 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: a,b nesmí být menší nebo rovno 0"}],
        Red], chyba[[cRov]] = 0],
    5, If[hRov[[4]] ≤ 0 || hRov[[5]] ≤ 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: a,b nesmí být menší nebo rovno 0"}],
        Red], chyba[[cRov]] = 0],
    6, If[hRov[[2]] == 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: p nesmí být rovno 0"}], Red],
      chyba[[cRov]] = 0],
    7, If[hRov[[2]] == 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: p nesmí být rovno 0"}], Red],
      chyba[[cRov]] = 0],
    8, If[hRov[[2]] == 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: p nesmí být rovno 0"}], Red],
      chyba[[cRov]] = 0],
    9, If[hRov[[2]] == 0, chyba[[cRov]] = 1;
      zp[[cRov]] = Style[Row[{cRov, ". rovnice: p nesmí být rovno 0"}], Red],
      chyba[[cRov]] = 0]];
  If[rozXmax ≤ rozXmin || rozYmax ≤ rozYmin,
    zp[[1]] = Style["Chybně zadány rozsahy pro vykreslení grafu.", Red];
    zp[[2]] = Style["Musí platit:  $x_{min} < x_{max}$  a  $y_{min} < y_{max}$ ", Red]; chyba[[1]] = 1;
    chyba[[2]] = 1];
```

Obr. č. 16: kontrola[]

- *zlomek[]* – vytvoří ze zadaného vektoru desetinných čísel zlomky.

```
zlomek[desCisla_] :=  
Module[{}, Table[Rationalize[desCisla[[n]]], {n, 1, Length[desCisla]}]];
```

Obr. č. 17: *zlomek[]*

Po definovaných předchozích funkcích se do proměnných *r1* a *r2* uloží vektory zadaných hodnot rovnic, převedených na zlomky, zavolá se funkce *kontrola[]* a pokud nenastala žádná chyba, dostáváme se k části, ve které již dochází vytváření dat, jenž se posléze zobrazí na výstupu:

- 1) *rov1* a *rov2* – uložení vytvořených rovnic.
- 2) *xmin*, ..., *ymax* – uložení hodnot ovlivňujících přiblížení výsledného grafu.
- 3) *body* – výpočet a uložení průsečíku dvou kuželoseček.
- 4) *graf* – vytvoření a uložení grafu dvou kuželoseček, který se skombinuje s body vypočtených průsečíků.
- 5) *body* – vytvoření a uložení přehledné tabulky vypočtených průsečíků.

Předposledním krokem celé funkce *vypocti[]* je uložení *rov1*, *rov2*, *body* a *graf* do *vysledek*. Popřípadě pokud je zadána obecná rovnice připojí se ještě určený druh kuželosečky a hodnoty vypočtených invariantů. Pokud by byla hodnota *chyba[[1]]=1* nebo *chyba[[2]]=1* do *vysledek* se uloží pouze text chyby. Pomocí příkazu *Return[]* dostaneme obsah *vysledek* na výstup programu.

3.2 Popis ovládání a výstupu programu

Program je uspořádán do dvou hlavních částí. V levé části se nachází ovládání programu (výběr rovnice, zadání hodnot a nastavení grafu) a v pravé výstup (výpis zadaných rovnic, určení druhu kuželoseček, graf a souřadnice vypočtených průsečíků).

Výpočet průsečíků dvou kuželoseček

Zadejte rovnice kuželoseček:

Typ 1. rovnice Obecná

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

a b c

d e f

Typ 2. rovnice Obecná

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

a b c

d e f

Nastavení grafu:

Zobrazení os x,y

Mřížka

Povolit posun a zoom

+/-

Osa x

Osa y

Zadejte rozsahy pro vykreslení grafu:

x_{min} x_{max}

y_{min} y_{max}

Zadané rovnice:

1. $-6 + 4x + x^2 + 5y + 2xy + 3y^2 = 0$

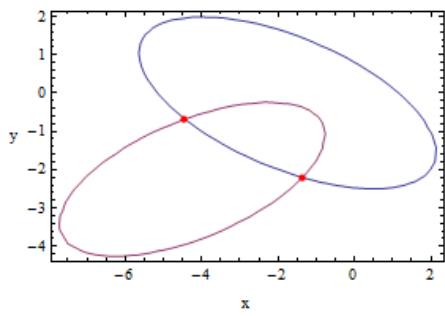
2. $6 + 4x + x^2 + 5y - 2xy + 3y^2 = 0$

Určené druhy kuželoseček na základě vypočítaných invariantů:

1. rovnice je rovnicí elipsy, $\Delta = -\frac{81}{4}$, $\Delta S = -81$, $\delta = 2$

2. rovnice je rovnicí elipsy, $\Delta = -\frac{65}{4}$, $\Delta S = -65$, $\delta = 2$

Graf dvou kuželoseček a jejich případných průsečíků:



Tabulka vypočítaných průsečíků:

Vypočítané průsečíky	
Název	Souřadnice
P1	{-4.45096, -0.674013}
P2	{-1.3585, -2.20832}

Obr. č. 18: Program pro výpočet průsečíků dvou kuželoseček

Zadejte rovnice kuželoseček:

Typ 1. rovnice

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

a b c

d e f

Typ 2. rovnice

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

a b c

d e f

Obr. č. 19: Nastavení rovnice

Nastavení rovnice (obr. č. 19):

- **1** – vysouvací menu pro zvolení typu rovnice. Obsahuje celkem 9 možností výběru rovnice:
 - obecná
 - elipsa
 - kružnice
 - hyperbola:
 - 1 – hl. osa rovnoběžná s osou x .
 - 2 – hl. osa rovnoběžná s osou y .
 - parabola:
 - 1 – hl. osa rovnoběžná s osou x a ohnisko se nachází napravo od vrcholu.
 - 2 – hl. osa rovnoběžná s osou x a ohnisko se nachází nalevo od vrcholu.
 - 3 – hl. osa rovnoběžná s osou y a ohnisko se nachází nad vrcholem.
 - 4 – hl. osa rovnoběžná s osou y a ohnisko se nachází pod vrcholem.
- **2** – podle zvoleného typu rovnice se pod vysouvacím menu zobrazí příslušná obecně definovaná rovnice.
- **3** – pole pro zadání hodnot konstant ze zobrazené rovnice.

Nastavení grafu:

Zobrazení os x,y } 1
Mřížka
Povolit posun a zoom

2 { +/-
Osa x
Osa y

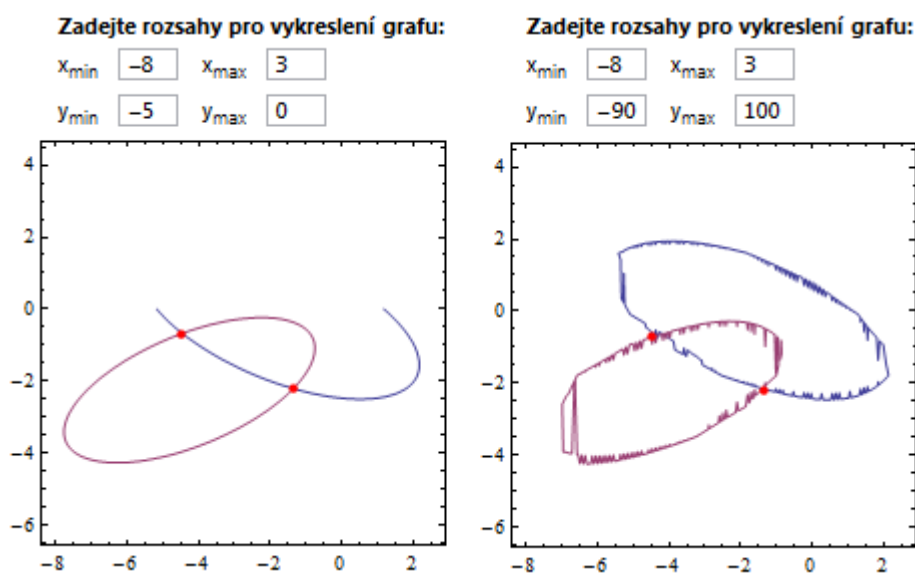
Zadejte rozsahy pro vykreslení grafu:

3 { x_{min} -20 x_{max} 20
 y_{min} -20 y_{max} 20

Obr. č. 20: Nastavení grafu

Nastavení grafu (obr. č. 20):

- **1** – zaškrťovací políčka sloužící pro zobrazení os x , y , mřížky a pro povolení posunu v osách x , y a přiblížení nebo oddálení.
- **2** – posuvníky zajišťující nastavení hodnoty pro přiblížení nebo oddálení a posun v osách x , y v nadefinovaných mezích.
- **3** – pole pro zadání hodnot mezí pro osy x a y , které slouží pro vymezení oblasti, dvou křivek (kuželoseček), jenž se má vykreslit. Hodnoty mají vliv na jemnost vykreslených křivek. Při špatném nastavení může dojít, buď k neúplnému vykreslení křivky viz obr. č. 21 vlevo, kdy je zadána malá hodnota y_{max} , nebo k její deformaci viz obr. č. 21 vpravo, kdy je nastaven příliš velký rozsah pro y -ovou osu.



Obr. č. 21: Rozsahy pro vykreslení grafu

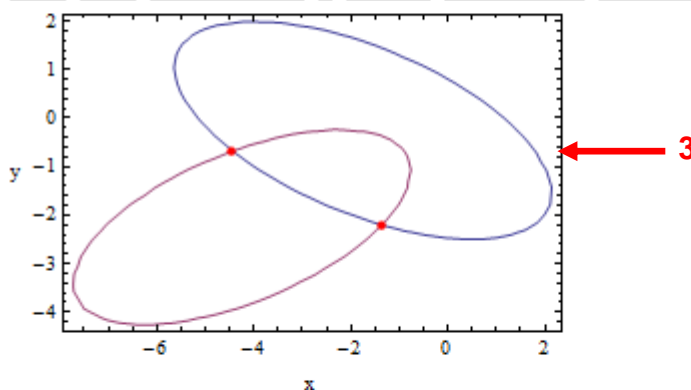
Zadané rovnice:

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 1. -6 + 4x + x^2 + 5y + 2xy + 3y^2 = 0 \\ 2. 6 + 4x + x^2 + 5y - 2xy + 3y^2 = 0 \end{array} \right.$$

Určené druhy kuželoseček na základě vypočítaných invariantů:

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 1. rovnice je rovnicí elipsy, $\Delta = -\frac{81}{4}$, $\Delta S = -81$, $\delta = 2$ \\ 2. rovnice je rovnicí elipsy, $\Delta = -\frac{65}{4}$, $\Delta S = -65$, $\delta = 2$ \end{array} \right.$$

Graf dvou kuželoseček a jejich případných průsečíků:



Tabulka vypočítaných průsečíků:

Vypočítané průsečíky	
Název	Souřadnice
P1	{-4.45096, -0.674013}
P2	{-1.3585, -2.20832}

Obr. č. 22: Výstup z programu

Výstup z programu (obr. č. 22):

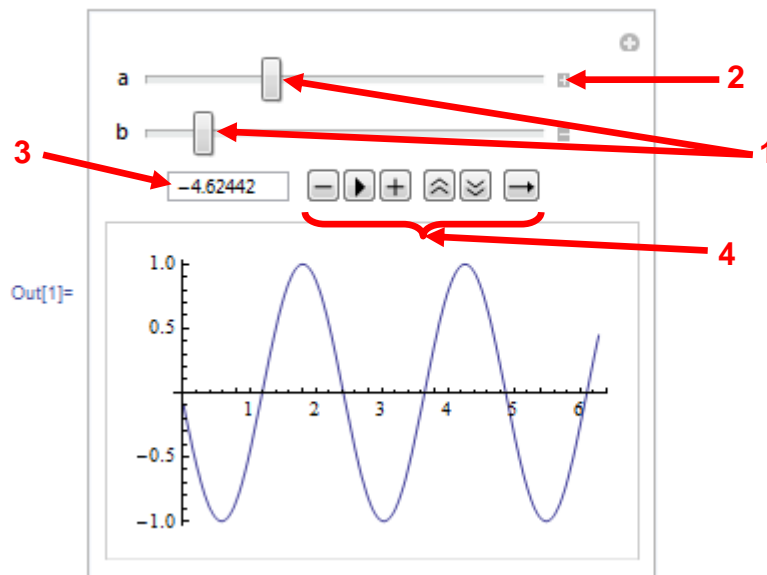
- 1 – výpis rovnic podle zadaných hodnot. Software Mathematica si sám nastavuje pořadí, v jakém vypisuje proměnné, takže v některých případech neodpovídá pořadí vypsání jednotlivých členů rovnice pořadí členů v obecně definované rovnici na obr. č. 19.
- 2 – pokud je alespoň jedna ze zadaných rovnic obecnou rovnicí kuželosečky, vypíše se určený druh kuželosečky na základě vypočítaných invariantů.
- 3 – graf, ve kterém jsou červenými body označeny vypočítané průsečíky. Pokud uživatel najede šipkou myši na bod, zobrazí se popisek s názvem a souřadnicemi bodu. V případě, že najedete šipkou na křivku, zobrazí se v popisku zadaná rovnice.
- 4 – tabulka s vypočítanými průsečíky.

3.3 Použité příkazy

Manipulate[]:

- slouží pro zakomponování různých grafických ovládacích prvku do vytvořené funkce.
- př.: vytvoření dvou posuvníků sloužících pro změnu frekvence zadané funkce cosinus a posunu ve směru osy x v zadaných mezích:

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Cos[a x + b], {x, 0, 2 Pi}], {a, 1, 6}, {b, -2 Pi, 2 Pi}]
```



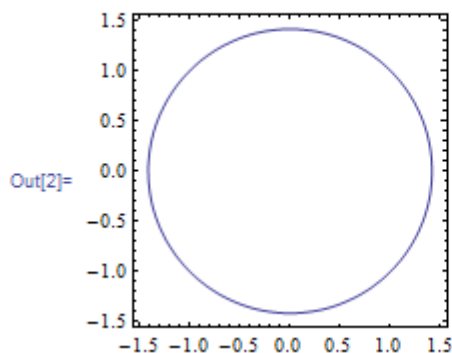
Obr. č. 23: Příkaz Manipulate

- Popis ovládání zadaného příkladu:
 - 1 – posuvníky a a b . Najetím šipky myši na ně, jejich následným uchopením a tažením doleva nebo doprava, nastavujeme hodnoty v zadaných mezích pro a : 1 – 6 a pro b : -2Pi – 2Pi .
 - 2 – plus po jehož rozkliknutí se pod posuvníkem zobrazí další možnosti nastavení:
 - 3 – pole zobrazující aktuální hodnotu posuvníku b .
 - 4 – tlačítka pro změnu hodnoty posuvníku b .

ContourPlot[]:

- vykreslení funkce dvou proměnných.
- př.: vykreslení kružnice ze zadané rovnice s příslušnými mezemi pro x a y :

```
In[2]:= ContourPlot[x^2 + y^2 == 2, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}]
```



Obr. č. 24: Příkaz *ContourPlot*

NSolve[]:

- najde číselné řešení pro proměnné ze zadaného výrazu.
- př.: řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, výsledek je uspořádan do dvou sloupců:

```
In[3]:= NSolve[{2 x^2 - 3 y^2 + 3 == 0, x + 3 y^2 - 2 == 0}, {x, y}] // TableForm
```

Out[3]/TableForm=

$x \rightarrow -0.25 + 0.661438 i$	$y \rightarrow 0.875139 - 0.125968 i$
$x \rightarrow -0.25 - 0.661438 i$	$y \rightarrow 0.875139 + 0.125968 i$
$x \rightarrow -0.25 + 0.661438 i$	$y \rightarrow -0.875139 + 0.125968 i$
$x \rightarrow -0.25 - 0.661438 i$	$y \rightarrow -0.875139 - 0.125968 i$

Obr. č. 25: Příkaz *NSolve*

Ostatní použité příkazy:

- *Control[]* – určen pro zobrazení grafického ovládacího prvku.
- *Det[]* – výpočet determinantu matice.
- *Dynamic[]* – slouží k dynamickému obnovování hodnoty zadané proměnné.
- *Flatten[]* – odstraňuje ze zadaného výrazu složené závorky.
- *Grid[]* – slouží pro formátování zadaného výrazu.
- *If[podm.,1,2]* – pokud je zadaná podmínka pravdivá vykoná se 1, v opačném případě 2.
- *Length[]* – určí délku zadaného výrazu.
- *ListPlot[]* – vytvoření bodového grafu.

- *Module[]* – využívá se pro práci s lokálními proměnnými.
- *Prepend[]* – vrací výraz, ke kterému na začátek připojí zadaný element.
- *Rationalize[]* – vytvoří z desetinného čísla zlomek.
- *Reduce[]* – vyjádření čemu se rovnají zadané proměnné z rovnice.
- *Return[]* – vrací návratovou hodnotu funkce.
- *Row[]* – vypíše bez mezer zadané výrazy.
- *Show[]* – pro zkombinování několika grafů do jediného.
- *Style[]* – nastavení stylu pro text nebo grafický prvek.
- *Switch[a,1,...,2,...,n,...]* – přepínač. Na základě hodnoty *a* se provede některá z možností 1 až *n*.
- *Table[]* – cyklus. Lze vytvářet vektory, matice a ostatní typy polí.
- *Tooltip[]* – slouží pro zobrazení popisku.

ZÁVĚR

Bakalářská práce je rozdělena na části teoretickou (vysvětlení základních pojmů z oblasti kuželoseček) a praktickou (zaměřena na vytvořený program).

Hlavním výsledkem této bakalářské práce je interaktivní program, jehož ovládání není nijak složité. Uživatel si pouze zvolí typ rovnice, zadá hodnoty konstant a popřípadě hodnoty mezí pro vykreslení grafu a již vidí přehledný výsledek. V obecné rovnici si může kupříkladu jednoduše vyzkoušet změnami hodnot konstant, jaký mají tyto hodnoty vliv na výslednou kuželosečku.

Program jsem se snažil ošetřit na případné chyby, které by mohly vzniknout nepozorností uživatele například při zadávání hodnot do polí, kdy by místo číslice uživatel zmáčkl na klávesnici nějaké písmeno. Proto jsou pole nastavena pro zadávání pouze číslic, znamínek a desetinné tečky.

V praktické části jsou pro studenty, kteří nemají příliš moc zkušeností se softwarem Wolfram Mathematica 8, vysvětleny nejdůležitější příkazy, jenž byly při vytváření programu využity.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The thesis is divided into theoretical (explanation of basic terms of conic sections) and practical (aimed at creating a program) parts.

The main result of this work is an user friendly interactive program with easy and intuitive use. The user just selects the type of equation, the values of constants and enters the appropriate range for plotting the graph and sees immediately a clear result. In the general formula, for example, the user can easily test changes of the graph of a conic section depending on values of constants.

I have tried to minimize eventual mistakes, which might arise for example when the user inadvertently enters letters into fields where only numbers are required. Therefore, the fields are set to accept only digits, decimal point or signs.

For students who do not have too much experience with software Wolfram Mathematica 8, the practical part explains the most important commands that were used in the source code.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] CHRAMCOV, Bronislav. Základy práce v prostředí Mathematica. Zlín: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80-510-5.
- [2] JUKL, Marek. Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 1999. ISBN 8070679913.
- [3] ŘÍHOVÁ, Helena [online]. ©2006 [cit. 2011-12-04]. Dostupné z: <http://dagles.klenot.cz/rihova/kuzelosecky.pdf>
- [4] VALA, Jiří. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební [online]. ©2006 [cit. 2011-11-16]. Dostupné z: http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/podpora/Anal_Geo.pdf
- [5] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Kuželosečka [online]. Poslední aktualizace 14. 10. 2011 [cit. 2012-01-29]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/>
- [6] WOLFRAM RESEARCH [online]. ©2012 [cit. 2011-01-30]. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. č. 1: A: parabola, B: elipsa (nahore) a kružnice (dole), C: hyperboly [5].....	10
Obr. č. 2: Elipsa [3].....	12
Obr. č. 3: Kružnice.....	13
Obr. č. 4: Hyperbola [3].....	14
Obr. č. 5: Parabola [3].....	15
Obr. č. 6: 0 průsečíků.....	17
Obr. č. 7: 1 průsečík.....	18
Obr. č. 8: 2 průsečíky.....	18
Obr. č. 9: 3 průsečíky.....	18
Obr. č. 10: 4 průsečíky.....	19
Obr. č. 11: Nekonečně mnoho průsečíků.....	19
Obr. č. 12: Program Mathematica 8.0.....	20
Obr. č. 13: rovnice[].....	23
Obr. č. 14: invarianty[].....	24
Obr. č. 15: obecna[]	24
Obr. č. 16: kontrola[]	25
Obr. č. 17: zlomek[].....	26
Obr. č. 18: Program pro výpočet průsečíků dvou kuželoseček.....	27
Obr. č. 19: Nastavení rovnice	28
Obr. č. 20: Nastavení grafu	29
Obr. č. 21: Rozsahy pro vykreslení grafu	29
Obr. č. 22: Výstup z programu.....	30
Obr. č. 23: Příkaz Manipulate.....	31
Obr. č. 24: Příkaz ContourPlot.....	32
Obr. č. 25: Příkaz NSolve	32

SEZNAM TABULEK

Tabulka č. 1: Klasifikace kuželoseček podle invariantů [5]	11
--	----

SEZNAM PŘÍLOH

Vytvořený program pro výpočet průsečíků dvou kuželoseček je umístěn na přiloženém CD.