

Analytická geometrie v programu Mathematica

Analytic geometry in Mathematica

David Blažek

Bakalářská práce
2011



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **David BLAŽEK**
Osobní číslo: **A08027**
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Téma práce: **Analytická geometrie v programu Mathematica**

Zásady pro vypracování:

1. Krátce uveďte základní pojmy analytické geometrie a vztahy mezi nimi.
2. Uveďte a popište potřebné příkazy programu Mathematica.
3. Vytvořte interaktivní příklady k jednotlivým tématům.
4. Porovnejte Vámi vytvořené programy z oblasti analytické geometrie s interaktivním prostředím šířeným zdarma (např. Cabri Geometrie nebo Cinderella).

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. VOSSLER, Donald E., Exploring Analytic Geometry with Mathematica. Academic Press: 1999. 865 s. ISBN: 0-12-728255-6
2. ZEDNÍK, Josef. Lineární algebra zaměřená na geometrii a ekonomii. Zlín: UTB FT, 2003. 130 s. ISBN 80-7318-085-5
3. ŠINDELÁŘ, Karel. Analytická geometrie pro začátečníky. Praha SNTL, 1969. 240 s.
4. NOVÁK, Ludvík. Algebra a geometrie. Zlín: UTB FT, 2005. 126 s. ISBN 80-7318-366-8
5. MATEMATIKA online - Analytická geometrie [online]. VUT Brno, [cit. 2011-1-27]. [<http://math.fme.vutbr.cz/Analyticka-geometrie/sc-17-sr-1-a-35/default.aspx>]

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martin Fajkus, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **25. února 2011**

Termín odevzdání bakalářské práce: **7. června 2011**

Ve Zlíně dne 25. února 2011


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo připravit ukázkové interaktivní příklady z oblasti analytické geometrie. Dále bylo požadováno uvést z tohoto okruhu základní pojmy, nastínit použité funkce v Mathematice a nakonec provést krátké porovnání vytvořených modulů s podobnými programy, které jsou volně dostupné.

Klíčová slova: analytická geometrie, Mathematica

ABSTRACT

The primary aim of this thesis was to create a set of interactive examples from analytic geometry. Further it was supposed to write a brief explanation of some basic terms from this area along with a short introduction of Mathematica functions and a slight comparison between created examples and other available software in the end.

Keywords: analytic geometry, Mathematica

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce za čas, rady a připomínky během konzultací.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 ZÁKLADNÍ POJMY ANALYTICKÉ GEOMETRIE	11
1.1 BODY A VEKTORY	11
1.1.1 Body	11
1.1.2 Vektory.....	12
1.1.2.1 Operace s vektory	13
1.2 LINEÁRNÍ ÚTVARY	15
1.2.1 Přímka	15
1.2.2 Rovina	16
1.3 KVADRATICKÉ ÚTVARY	17
1.3.1 Kružnice	17
1.3.2 Elipsa.....	17
1.3.3 Hyperbola.....	18
1.3.4 Parabola.....	19
1.4 KVADRIKY	21
1.4.1 Sféra	21
1.4.2 Elipsoid	21
1.4.3 Hyperboloid.....	22
1.4.4 Paraboloid	22
1.4.5 Kužel	22
1.4.6 Válec	22
2 ZÁKLADNÍ FUNKCE PROGRAMU MATHEMATICA	24
2.1 FUNKCE PRO ŘÍZENÍ BĚHU A TVORBU KOSTRY PROGRAMU	24
2.2 FUNKCE PRO ZOBRAZOVÁNÍ	24
2.3 FUNKCE PRO FORMÁTOVÁNÍ TEXTU	25
II PRAKTICKÁ ČÁST	26
3 INTERAKTIVNÍ PŘÍKLADY	27
3.1 BODY A VEKTORY	27
3.1.1 Body	27
3.1.2 Vektory.....	28
3.2 LINEÁRNÍ ÚTVARY	29
3.2.1 Přímka	29
3.2.2 Rovina	30
3.3 KVADRATICKÉ ÚTVARY	31
3.4 KVADRIKY	32
4 POROVNÁNÍ	34
4.1 CABRI.....	34
4.2 CINDERELLA	35
4.3 VLASTNÍ SROVNÁNÍ.....	36
ZÁVĚR	37
ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ	38

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	39
SEZNAM OBRÁZKŮ	40
SEZNAM PŘÍLOH.....	41

ÚVOD

Celá práce se skládá ze čtyř základních částí. Nejprve jsou uvedeny některé základní pojmy z oblasti analytické geometrie (a vztahy mezi nimi), které jsou potom názorně ukázány ve vytvořených modulech. Dále jsou stručně popsány potřebné příkazy a funkce programu Mathematica, které byly použity při tvorbě požadovaných interaktivních příkladů. Tyto výukové moduly pak tvoří nejdůležitější část práce a je na ně kladen největší důraz, zejména pak na jejich názornost, přehlednost a jednoduché intuitivní ovládání. Každý modul je popsán na obrázku a je vysvětleno jeho ovládání. Nakonec jsou tyto vytvořené příklady zhodnoceny a stručně porovnány s jinými programy (Cabri, Cinderella), které jsou k této problematice volně dostupné.

Práce pokrývá následující témata analytické geometrie:

- Body a vektory (geometrický význam souřadnic bodu a vektoru, délka vektoru, operace s vektory)
- Lineární útvary (přímka a rovina, způsoby vyjádření)
- Kvadratické útvary (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola)
- Kvadriky (sféra, elipsoid, hyperboloid, paraboloid, kužel, válec)

V rámci práce bylo vytvořeno celkem 6 interaktivních příkladů, ve kterých jsou zahrnuty výše uvedené oblasti z analytické geometrie.

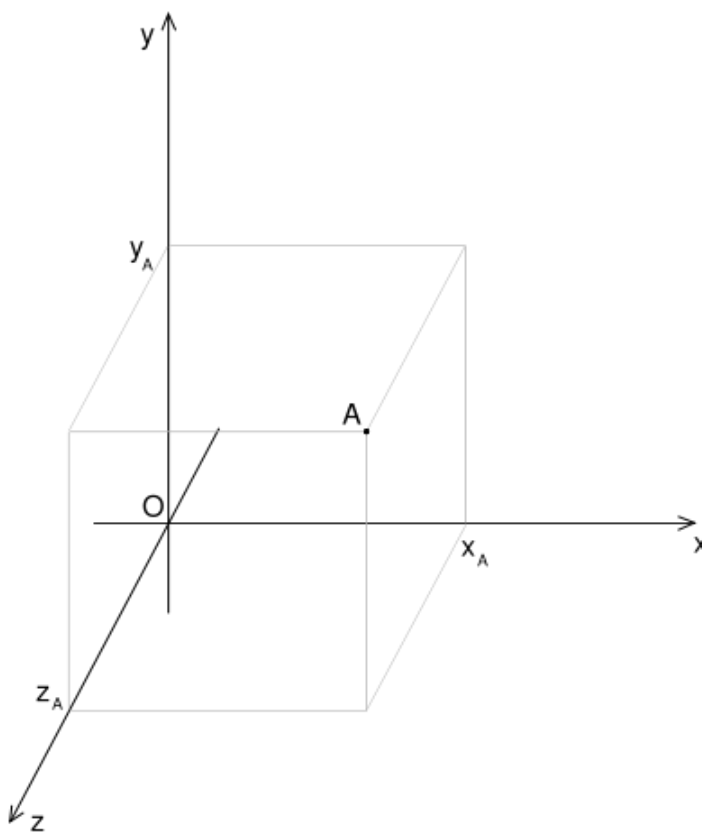
I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ZÁKLADNÍ POJMY ANALYTICKÉ GEOMETRIE

1.1 Body a vektory

1.1.1 Body

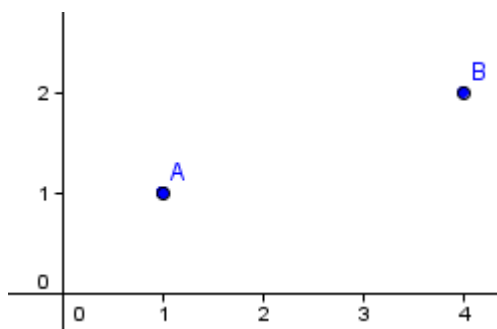
Chceme-li popsat množinu bodů, potřebujeme nějakou soustavu souřadnic. V této práci budeme používat pouze kartézskou soustavu souřadnic (viz např. [7]). Ta je tvořena třemi osami (x , y , z) a pro tyto osy platí, že každé dvě jsou na sebe vzájemně kolmé a všechny pocházejí počátkem (Obr. 1). Pokud se řeší úlohy pouze v rovině (což je většina úloh v této práci), neuvažuje se třetí osa z .



Obrázek 1 – kartézská soustava souřadnic

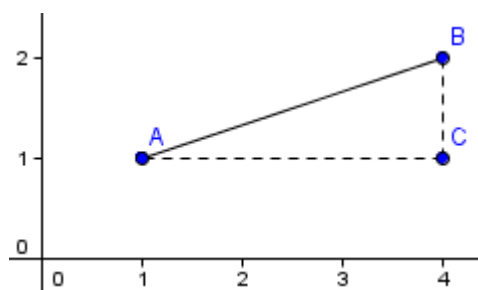
Bod je potom nejjednodušším objektem tohoto prostoru. Jeho poloha je jednoznačně dána párem (uvažujeme-li rovinu) čísel, které se nazývají x -ová a y -ová souřadnice a zapisují se ve tvaru $[x, y]$.

Pokud jsou v rovině zadány dva různé body $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$ (Obr. 2),



Obrázek 2 – dva body v rovině

a chceme vypočítat jejich vzdálenost, tak řešení této úlohy spočívá v doplnění na pravoúhlý trojúhelník (Obr. 3).



Obrázek 3 – doplnění na pravoúhlý trojúhelník

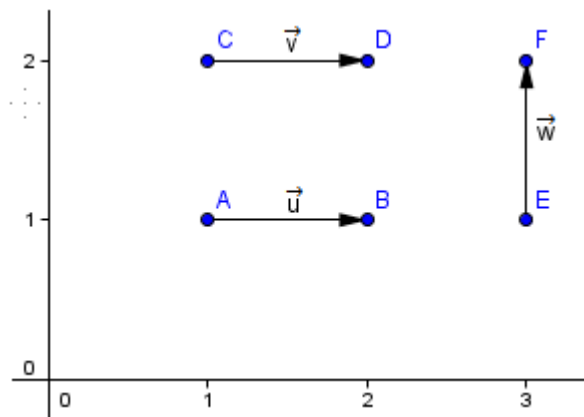
Z obrázku plyne, že velikost úsečky $|AC| = (b_1 - a_1)$ a $|BC| = (b_2 - a_2)$. To jsou vlastně velikosti odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku a přepona je hledaná vzdálenost bodů. S využitím Pythagorovy věty dostáváme $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

V případě řešení stejné úlohy v prostoru je řešení velice podobné – pouze přibude pod odmocninou třetí člen ve tvaru $(b_3 - a_3)^2$.

1.1.2 Vektory

Ze dvou bodů v rovině lze vytvořit vektor. Ten se znázorňuje orientovanou úsečkou, která má určený počáteční a koncový bod. Tato úsečka potom určuje orientaci a velikost vektoru, přičemž dvě orientované úsečky znázorňují stejný vektor, když jsou splněny podmínky, že budou obě úsečky stejně velké a budou mít stejnou orientaci. Na Obr. 4 je ukázáno, že orientované úsečky AB i CD znázorňují stejný vektor (splňují výše uvedené podmínky). Naproti tomu úsečka EF má sice stejnou velikost, ale jiný směr, a proto určuje

jiný vektor, než zbylé dvě orientované úsečky. Vektor se tedy dá chápat jako prvek množiny všech souhlasně orientovaných úseček stejné délky.



Obrázek 4 – orientované úsečky

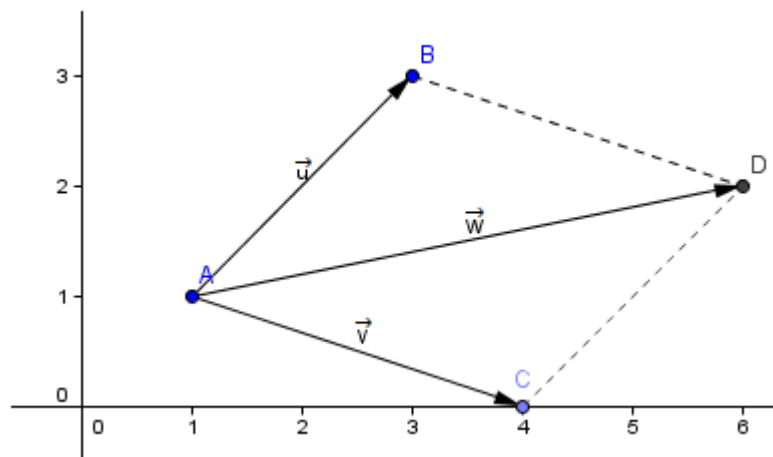
V analytické geometrii se vektor zapisuje pomocí souřadnic, které jsou definovány jako $\vec{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$. S takto definovanými vektory je pak možné provádět různé operace (viz dále).

V předchozí podkapitole je odvozen vztah pro výpočet vzdálenosti dvou bodů. Úplně stejně lze vypočítat velikost (tj. délku) vektoru, protože hledáme vlastně délku úsečky spojující dva body, tedy $|\vec{u}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$. V případě, že bychom dostali velikost rovnu 0, hovoříme o tzv. nulovém vektoru (což je v podstatě bod).

1.1.2.1 Operace s vektory

Pro rozsah této práce je dostatečné přiblížit sčítání, odčítání a násobení vektoru konstantou. Při grafickém sčítání nebo odečítání vektorů se omezíme na situace, kdy budou mít oba vektory stejný počáteční bod (jinak by se musely oba vektory posunout tak, aby měly společný počátek).

Při sčítání vektorů graficky se postupuje tak, že se dvojice zobrazených vektorů doplní na rovnoběžník a výsledný vektor je pak dán úhlopříčkou tohoto rovnoběžníku (Obr. 5).



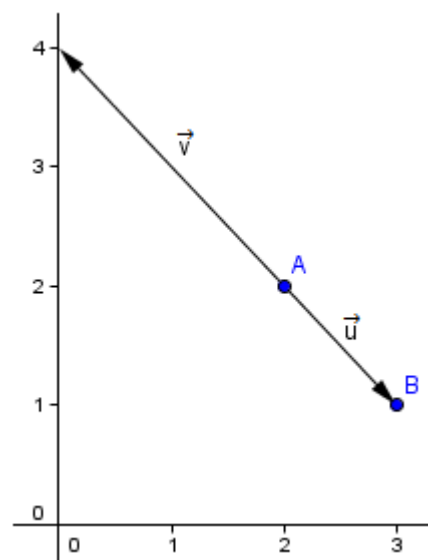
Obrázek 5 – sčítání vektorů

Z hlediska vlastního výpočtu je celá operace velice jednoduchá – máme-li vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$, tak výsledný vektor je dán součtem patřičných souřadnic, tedy $\vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$. Pro výpočet není nutné, aby měly oba vektory společný počátek.

Pro definici odečítání vektorů je potřeba uvést pojem opačný vektor. Máme-li vektor $\vec{u} = (u_1; u_2)$, tak pro opačný vektor platí $-\vec{u} = (-u_1; -u_2)$. Jinými slovy, je to vektor o stejné velikosti, ale opačné orientaci.

Odečíst vektor potom znamená přičíst vektor opačný, tj. postupuje se stejně, jako při řešení úlohy na součet dvou vektorů. Pro vlastní výpočet z toho vyplývá, že $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$.

Poslední zmíněnou operací je násobení vektoru skalárem (tedy reálným číslem). Opět jde o jednoduchou záležitost – daným číslem se vynásobí každá souřadnice vektoru: $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2)$. Touto operací se tak mění velikost (v případě, že $k \neq \pm 1$) a orientace (v případě, že $k < 0$) vektoru. Tedy např. vynásobením vektoru \vec{u} číslem -2 (Obr. 6) dostaneme vektor o dvojnásobné velikosti a opačné orientaci.

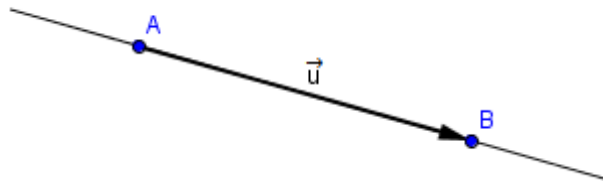


Obrázek 6 – násobení vektoru číslem

1.2 Lineární útvary

1.2.1 Přímka

Dva body A a B v rovině jednoznačně určují přímku. Tyto dva body pak také určují vektor $\vec{u} = B - A$, který se nazývá směrový vektor přímky (Obr. 7).



Obrázek 7 – směrový vektor přímky

Vzniklá přímka se dá vyjádřit *parametricky* pomocí jejího směrového vektoru a jednoho bodu (ležícího na přímce) – $p: X = A + \vec{u} \cdot t$. Tuto rovnici lze rozepsat pro jednotlivé souřadnice:

$$x = a_1 + u_1 t$$

$$y = a_2 + u_2 t$$

Proměnná t se nazývá parametr a je z množiny reálných čísel.

Z tohoto zápisu přímky lze vyloučením parametru t dostat několik dalších způsobů vyjádření přímky.

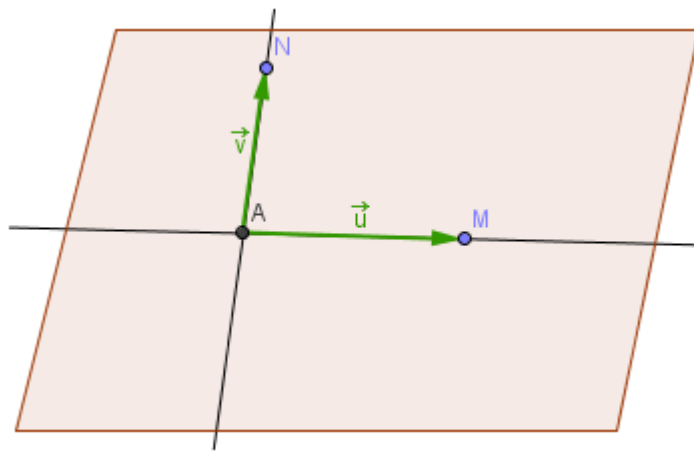
Vyjádří-li se z první rovnice parametr t , dosadí se do druhé a výsledek se ponechá ve formě $y = kx + q$, tak se tento tvar nazývá *směrnice rovnice přímky*, kde k je směrnice přímky, která určuje její sklon ($k = \text{tg}(\varphi)$) – pro $k < 0$ je jde o klesající funkci a pro $k > 0$ o rostoucí funkci. V případě, kdy je $k = 0$, je přímka rovnoběžná s osou x . Parametr q je potom tzv. úsek (vyřatý přímkou na ose y) a pokud $q = 0$, tak přímka prochází počátkem.

Jednoduchou úpravou směrnice rovnice přímky lze dostat *obecnou rovnici přímky*, která má tvar $ax + by + c = 0$. Zde je podmínka, aby alespoň jedna z konstant a, b byla nenulová (protože rovnice ve tvaru $c = 0$ by neměla smysl). Potom pro $a = 0$ je přímka rovnoběžná s osou x , pro $b = 0$ je rovnoběžná s osou y a pro $c = 0$ prochází počátkem.

Ještě existuje *úseková rovnice přímky*, kterou lze opět získat jednoduchou úpravou obecné nebo směřnicové rovnice na tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde p a q jsou úseky vyřáté přímkou na ose x , resp. na ose y . Z rovnice plyne, že $p \neq 0$, $q \neq 0$, takže není možné v tomto tvaru zapsat přímky rovnoběžné se souřadnicovými osami.

1.2.2 Rovina

Podobně jako je v předchozím případě definována přímka pomocí dvou bodů, tak tři body (které neleží na jedné přímce) určují rovinu.



Obrázek 8 – rovina

Obě přímky z Obr. 8 se dají parametricky vyjádřit jako $M = A + \vec{u} \cdot t$ a $N = A + \vec{v} \cdot s$. Po spojení obou rovnic do jedné ($M = N + \vec{v} \cdot s + \vec{u} \cdot t$) a upravení značení na $X = A + \vec{u} \cdot t + \vec{v} \cdot s$ dostaneme *parametrické vyjádření roviny*, které ještě můžeme opět rozepsat do složek

$$x = a_1 + u_1 t + v_1 s$$

$$y = a_2 + u_2 t + v_2 s$$

$$z = a_3 + u_3 t + v_3 s$$

kde podobně jako u přímky jsou s , t reálné parametry, X je bod ležící v dané rovině a u , v jsou směrové vektory roviny.

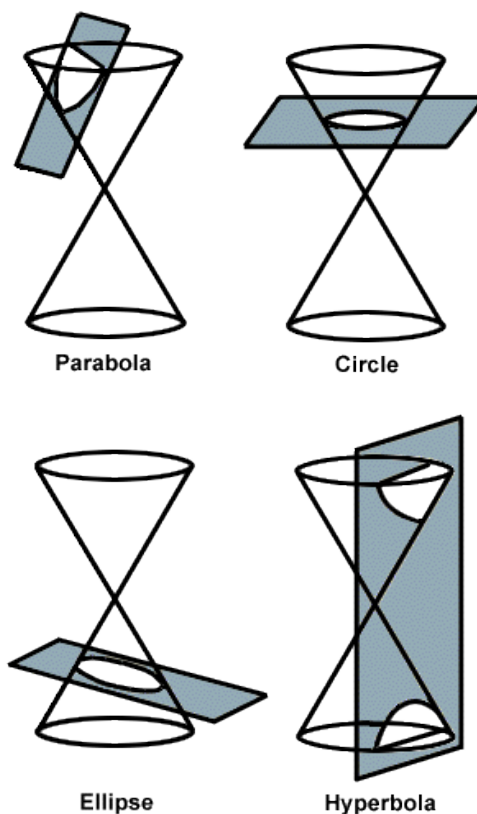
Obecná rovnice roviny se získá opět stejným způsobem jako u přímky – vyloučí se ze všech rovnic parametry a výsledek se upraví na tvar $ax + by + cz + d = 0$ (kde koeficienty a , b , c nejsou současně nulové).

Drobnou úpravou obecné rovnice lze získat *úsekovou rovnici roviny* ve tvaru $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, kde p, q, r jsou postupně úseky vyřáté rovinou na osách x, y a z .

1.3 Kvadratické útvary

Vezme-li se plášť rotačního kuželu a sekne se nějakou rovinou, tak v závislosti na parametrech tohoto řezu může vzniknout několik geometrických útvarů, které se nazývají kuželosečky (Obr. 9) - viz např. [6].

To, jaká kuželosečka vznikne, závisí na vzájemné poloze sečné roviny a osy kuželové plochy. Je-li sečná rovina kolmá k ose, vznikne kružnice. Zmenšováním úhlu mezi sečnou rovinou a osou přechází kružnice v elipsu. V okamžiku, kdy bude sečná rovina rovnoběžná s jednou z povrchových přímek pláště, je výslednou kuželosečkou parabola a pokud zmenšíme úhel natolik, že sečná rovina protne obě části kuželové plochy, vznikne hyperbola.



Obrázek 9 – kuželosečky

1.3.1 Kružnice

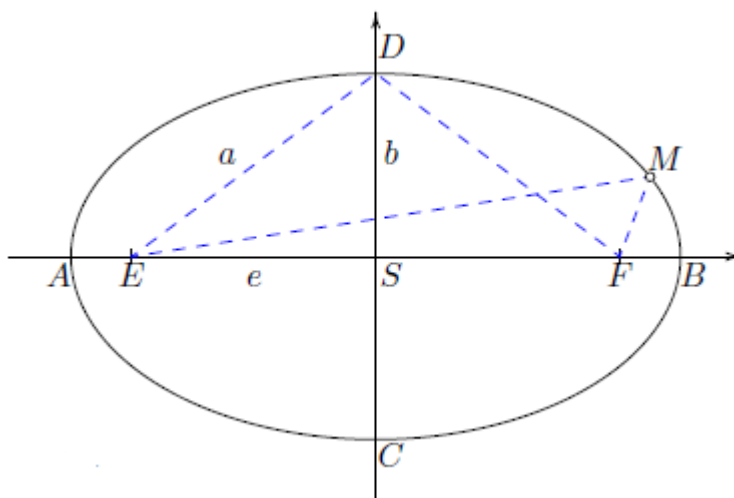
Umístí-li se kružnice o poloměru r do souřadnicového systému tak, že její střed bude v bodě $S[m, n]$, lze psát tzv. středovou rovnici kružnice ve tvaru

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

1.3.2 Elipsa

Podle definice je elipsa (Obr. 10) množina bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností. Elipsa je symetrická podle dvou os symetrie – jedna osa prochází ohnisky E, F (hlavní osa), druhá je k ní kolmá a prochází středem úsečky EF (vedlejší osa). Body A, B se nazývají hlavní vrcholy elipsy, body C, D jsou vedlejší vrcholy a S je její střed. Vzdálenost hlavního vrcholu od středu elipsy se

nazývá hlavní poloosa (a), vzdálenost vedlejšího vrcholu od středu elipsy je vedlejší poloosa (b) a vzdálenost ohniska od středu elipsy je excentricita neboli výstřednost (e).



Obrázek 10 – elipsa

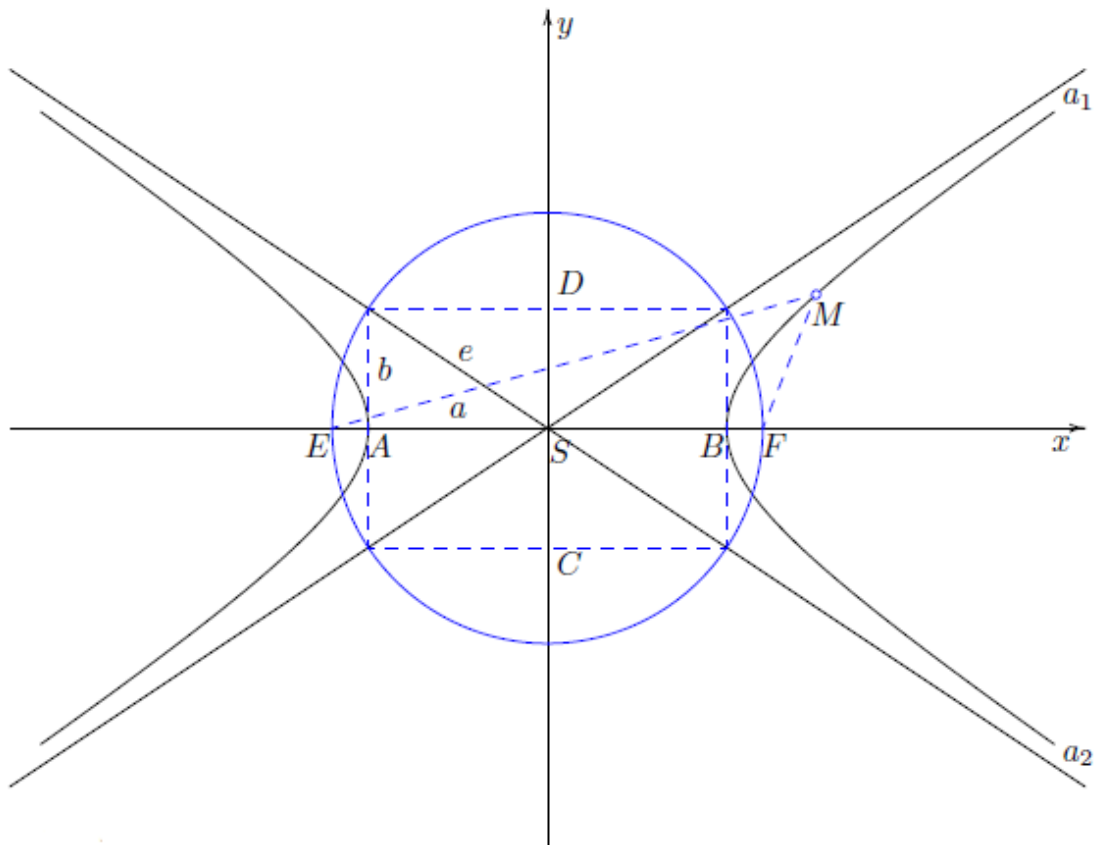
Středová rovnice elipsy má tvar

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

Pozn. Kružnice je vlastně speciálním případem elipsy, kdy jsou obě ohniska shodná a nachází se ve středu elipsy.

1.3.3 Hyperbola

Definice hyperboly (Obr. 11) je podobná definici elipsy. Liší se pouze v tom, že se uvažuje konstantní rozdíl vzdáleností (braný v absolutní hodnotě) od dvou pevných bodů E, F (ohnisek). Stejně jako elipsa má hyperbola dvě osy symetrie - hlavní osa prochází ohnisky, vedlejší osa je osou úsečky EF , průsečík os je střed hyperboly S . Body hyperboly ležící na hlavní ose jsou vrcholy hyperboly (A, B). Vzdálenost vrcholu hyperboly od jejího středu je hlavní poloosa (a), vedlejší poloosu představuje vzdálenost $|CS|$ (popř. $|DS|$) a vzdálenost ohniska od středu je opět excentricita (výstřednost, e).



Obrázek 11 – hyperbola

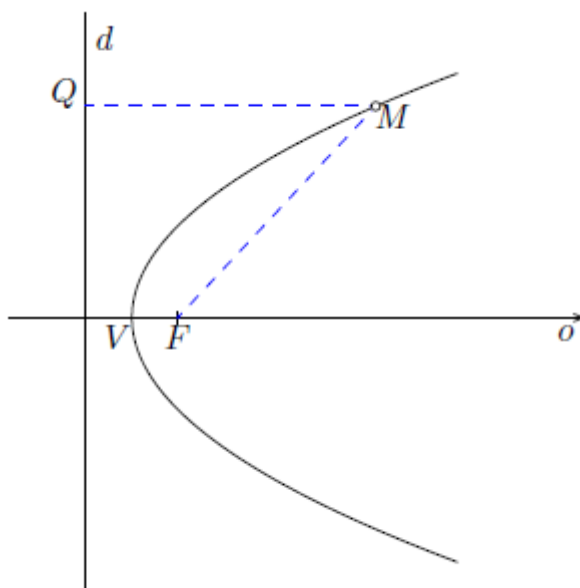
Středová rovnice hyperboly je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

a pokud bychom uvažovali hyperbolu, která by byla otočená o 90° (tj. rozevírala by se ve směru osy y), byla by na pravé straně rovnice hodnota -1 .

1.3.4 Parabola

Dle definice je parabola (Obr. 11) množina bodů v rovině, jejichž vzdálenost od pevné přímky d (tzv. řídicí přímka) je stejná jako vzdálenost od pevného bodu F (ohniska), který na přímce neleží. Parabola má jednu osu symetrie (přímka o), která prochází ohniskem (F) a je kolmá k řídicí přímce (d). V polovině vzdálenosti mezi ohniskem a řídicí přímkou leží vrchol paraboly V . Vzdálenost $|Fd|$ se obvykle značí písmenem p a nazývá se parametr paraboly.



Obrázek 12 – parabola

Vrcholová rovnice paraboly s vrcholem v bodě $V[m, n]$ a s osou rovnoběžnou (popř. totožnou) s osou x má tvar

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m)$$

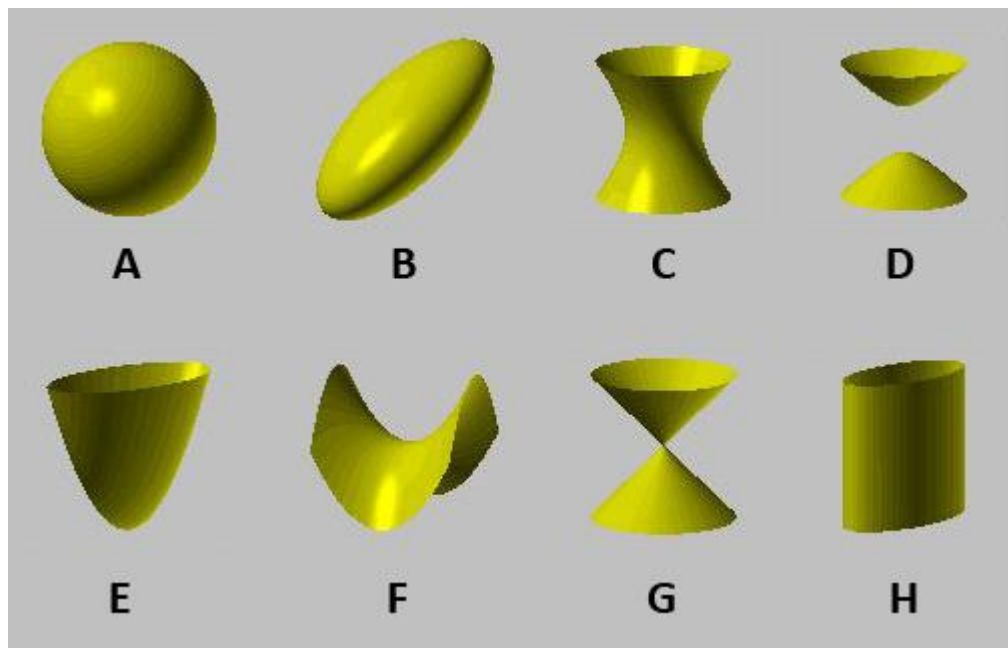
Tato parabola je otočená buď doleva, nebo doprava (v závislosti na znaménku v uvedené rovnici).

Analogicky parabola otevřená směrem dolů nebo nahoru (tj. osa je rovnoběžná nebo totožná s osou y) má rovnici

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$$

1.4 Kvadriky

Výše popsané kuželosečky je možné nechat rotovat v prostoru podle osy symetrie a dostat tak kvadratické plochy (kvadriky), popř. danou kuželosečku pouze „vytáhnout do prostoru“ a získat tak různé typy válcových ploch. Veškeré parametry jsou potom analogické s rovinným případem.



Obrázek 13 – přehled kvadrik

1.4.1 Sféra

Sféru (nebo kulovou plochu – Obr. 13A) vzniklou rotací kružnice se středem v bodě $[m, n, o]$ a poloměrem r jde vyjádřit rovnicí

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - o)^2 = r^2$$

1.4.2 Elipsoid

Analogicky k elipse lze definovat elipsoid (Obr. 13B) jako

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - o)^2}{c^2} = 1$$

1.4.3 Hyperboloid

Stejně jako může být hyperbola v rovině otočená dvěma způsoby, tak může také dvěma způsoby rotovat v prostoru a vytvořit tak jednodílný nebo dvojdílný hyperboloid.

Rovnice jednodílného hyperboloidu (Obr. 13C) je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} - \frac{(z - o)^2}{c^2} = 1$$

Pro dvojdílný hyperboloid (Obr. 13D) platí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} - \frac{(z - o)^2}{c^2} = -1$$

1.4.4 Paraboloid

U paraboloidu rozlišujeme eliptický paraboloid (Obr. 13E), jehož rovnice je

$$\frac{(x - m)^2}{2p} + \frac{(y - n)^2}{2q} = (z - o)$$

nebo hyperbolický paraboloid (Obr. 13F), který má rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{2p} - \frac{(y - n)^2}{2q} = (z - o)$$

1.4.5 Kužel

V případě rotačního kuželu (Obr. 13G) se nechají rotovat asymptoty hyperboly. Obecně však lze kužel popsat rovnicí

$$-\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - o)^2}{c^2} = 1$$

1.4.6 Válec

Tento typ kvadratické plochy se od ostatních trochu liší. Zatímco v předchozích případech se kvadratická plocha získala rotací kuželosečky, tak u válce se daná kuželosečka pouze „vytáhne do prostoru“ a zobrazí se v něm. Tedy např. vytažením kružnice se získá tvar připomínající trubku. Zrovna takto získaný útvar se obecně nazývá rotační válec, obecně však lze „vytáhnout“ elipsu, čímž vznikne eliptický válec (Obr. 13H) s rovnicí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

která je úplně stejná, jako rovnice elipsy. Jde tedy jen o to, jestli chceme daný objekt zobrazit v rovině nebo v prostoru.

Podobně je možné do prostoru vytáhnout hyperbolu a získat tak hyperbolický válec, resp. parabolický válec v případě paraboly. Rovnice jsou stejné jako u daných kuželoseček.

2 ZÁKLADNÍ FUNKCE PROGRAMU MATHEMATICA

V této kapitole jsou zmíněny funkce, které byly použity při tvorbě interaktivních příkladů. Předmětem této práce není detailně seznámit s každou použitou funkcí (a jejími parametry), proto jde spíše o orientační popis. V případě zájmu je možné najít podrobnosti v dokumentaci [8].

Použité funkce se dají rozdělit do třech základních skupin – funkce pro řízení běhu a vytvoření kostry programu, funkce pro zobrazení patřičných útvarů z analytické geometrie a funkce pro formátování textu. Každá funkce v Mathematice začíná velkým písmenem a její argumenty se uvádí v hranatých závorkách.

2.1 Funkce pro řízení běhu a tvorbu kostry programu

Zde patří funkce, která tvoří základ jednotlivých modulů – funkce `Manipulate[]`, díky které lze interaktivně měnit hodnoty proměnných a zobrazovat pak odpovídající výsledek (např. nějakou křivku). Tato funkce má důležitý parametr `TrackedSymbols`, který určuje, zda se po změně dané proměnné okamžitě aktualizuje její hodnota a dynamicky se tak změní určitý grafický prvek (např. poloměr kružnice). S tím souvisí funkce `Dynamic[]`, která dynamicky obnovuje to, co je v ní zadáno (např. změnou poloměru kružnice se ihned změní i rovnice kružnice).

Dále funkce `Module[]`, pomocí které se definují lokální proměnné uvnitř modulu, klasická podmínková funkce `If[]` (na základě podmínky se provede jedna ze dvou akcí) a k ní příbuzná funkce `Switch[]` (provedená akce se může vybrat z více než dvou možností).

Nakonec následuje skupinka funkcí, které vykreslují různé ovládací prvky, pomocí kterých uživatel modul nastavuje (resp. mění jeho parametry - např. vybere možnost z rozbalovacího menu). Patří sem `Control[]`, `RadioButton[]`, `PopupMenu[]` a `Locator[]`. Poslední jmenovaná funkce určuje bod v rovině, se kterým může uživatel pohybovat (např. pokud je tento bod středem kuželosečky, může pohybovat s celou kuželosečkou).

2.2 Funkce pro zobrazování

Pomocí těchto funkcí se do okna modulu vykreslují veškeré grafické prvky (od vektorů až po kvadratické plochy). Protože je třeba vykreslit více těchto prvků (přidat různé popisky,

pomocné body, vodící čáry apod.), používá se funkce `Graphics[]` (popř. její prostorová alternativa `Graphics3D[]`), která všechny tyto prvky zobrazí v jednom obrázku a můžeme jim ještě pomocí funkce `Show[]` změnit nebo přidat některé parametry.

Základní část většiny modulů jsou souřadnicové osy a v nich vykreslené vektory, přímky, křivky apod. K tomuto slouží funkce `ContourPlot[]` (případně `ContourPlot3D[]`) nebo `ParametricPlot[]`. Někdy tvoří hlavní část modulu (jindy jsou použity jenom na doplnění) prvky jako bod (funkce `Point[]`), šipka (`Arrow[]`) a úsečka (`Line[]`). Tyto prvky pak mohou mít mnoho dalších parametrů - např. tloušťku (`Thickness[]`), barvu nebo styl (čárkovaně, tečkovaně apod.).

2.3 Funkce pro formátování textu

Tato sada funkcí umožňuje naformátovat text a zobrazit ho požadovaným způsobem. Matematický výraz lze převést na text pomocí funkce `Text[]` a ten naformátovat ve funkci `Style[]` (zvolit barvu, velikost, typ písma atd.). Většinou je ale potřeba poskládat řetězec z mnoha dílčích částí. Toto spojení se provádí funkcí `StringJoin[]` a ony dílčí části se získají (typicky z čísla) pomocí funkce `ToString[]`. Zobrazované hodnoty lze ještě třeba zaokrouhlit (`Round[]`), zobrazit jen určitý počet desetinných míst (`NumberForm[]`) nebo použít absolutní hodnotu (`Abs[]`) s tím, že se patřičné znaménko bude zobrazovat zvlášť. Pokud je nutné zobrazit zlomek, využije se funkce `FractionBox[]`.

Takto naformátovaných textů je v každém modulu několik, proto je potřeba je nějak rozumně uspořádat a rozmístit vůči sobě. Nejvýhodnější je použít tabulku (`Grid[]`). V rámci ní umístit texty do jednotlivých položek (`Item[]`) nebo jich zobrazit několik za sebou v jedné buňce (`Row[]`) a pomocí patřičných parametrů je vhodně zarovnat.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

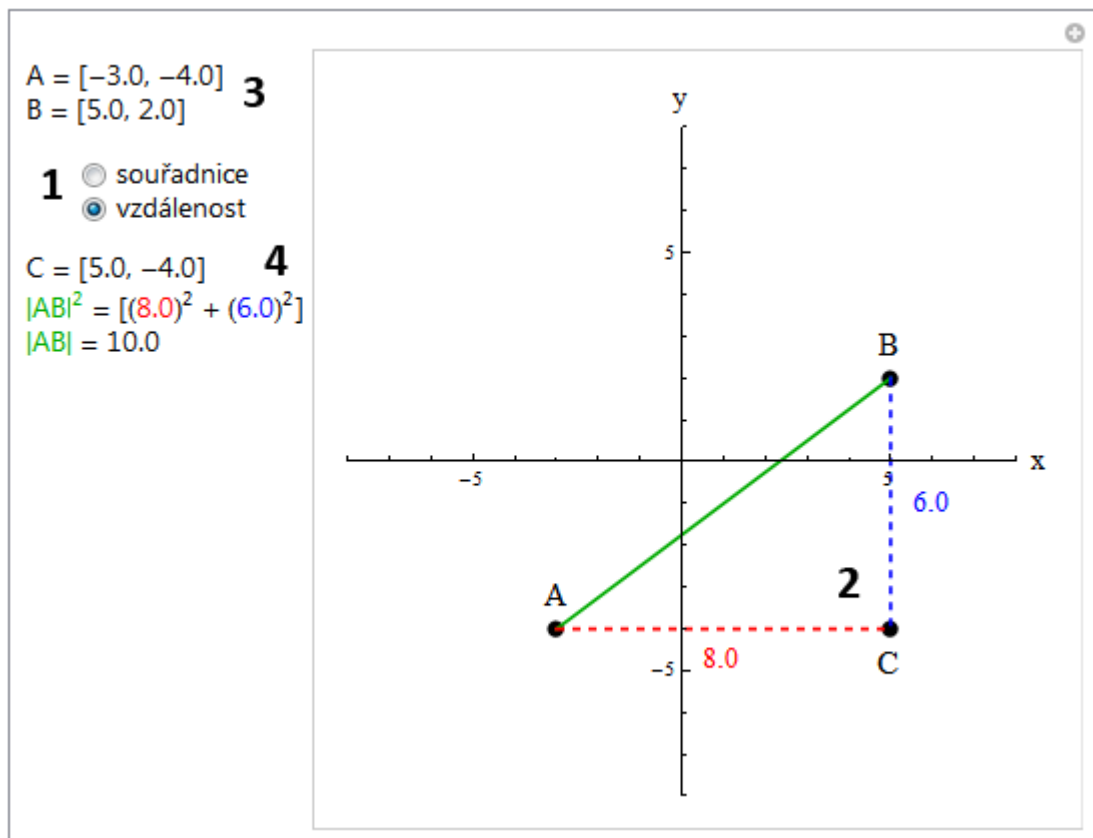
3 INTERAKTIVNÍ PŘÍKLADY

V této části jsou popsány a vysvětleny funkce, možnosti a ovládání jednotlivých modulů. Jejich obsah koresponduje s pojmy z analytické geometrie, které jsou uvedeny v teoretické části. Následující popis je také uveden přímo v souborech jednotlivých modulů, aby nebylo třeba mít v případě potřeby k dispozici tuto část práce.

3.1 Body a vektory

3.1.1 Body

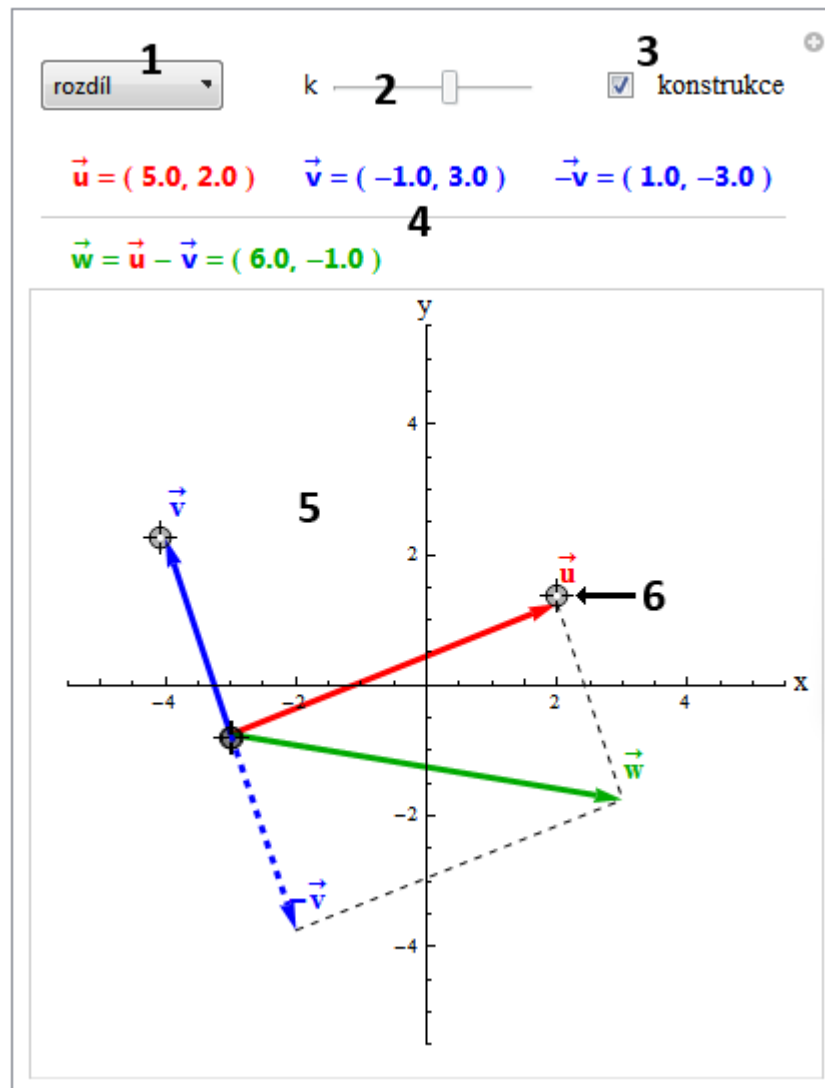
Tento jednoduchý modul zobrazuje v rovině dva body (A, B) a na základě zvoleného nastavení (Obr. 14 - 1) zobrazuje buď geometrický význam souřadnic (vytáhne jednotlivé souřadnice na osách) nebo ukazuje postup při výpočtu vzdálenosti těchto bodů (doplnění na trojúhelník – Obr. 14 - 2). V obou případech se zobrazují souřadnice obou bodů (Obr. 14 - 3) a jejich vzdálenost. V případě režimu „vzdálenost“ se vypíše i souřadnice pomocného bodu a postup výpočtu (Obr. 14 - 4). S oběma body lze pohybovat uchopením a tažením myši.



Obrázek 14 – modul Body

3.1.2 Vektory

V tomto modulu jsou demonstrovány souřadnice vektorů a tři základní operace s nimi (násobení skalárem, sčítání a odčítání). Která operace je aktuálně zobrazena se vybírá z rozbalovacího menu (Obr. 15 – 1). V případě volby „k-násobku“ se aktivuje posuvník (Obr. 15 – 2), kterým lze měnit velikost násobící konstanty. Ve zbylých dvou případech je možné zobrazit konstrukci (pouze pokud mají oba vektory společný počátek), tj. doplnění na rovnoběžník (Obr. 15 - 3). Modul vypisuje všechny potřebné údaje, jako jsou souřadnice všech zobrazovaných vektorů i výsledného vektoru (Obr. 15 – 4). Zvolená situace je pak vykreslena v rovině, včetně popisků a odpovídajícího barevného odlišení (Obr. 15 – 5). Počáteční i koncové body obou vektorů (Obr. 15 – 6) lze uchopením a tažením myši přesunout a vytvořit tak libovolnou situaci.

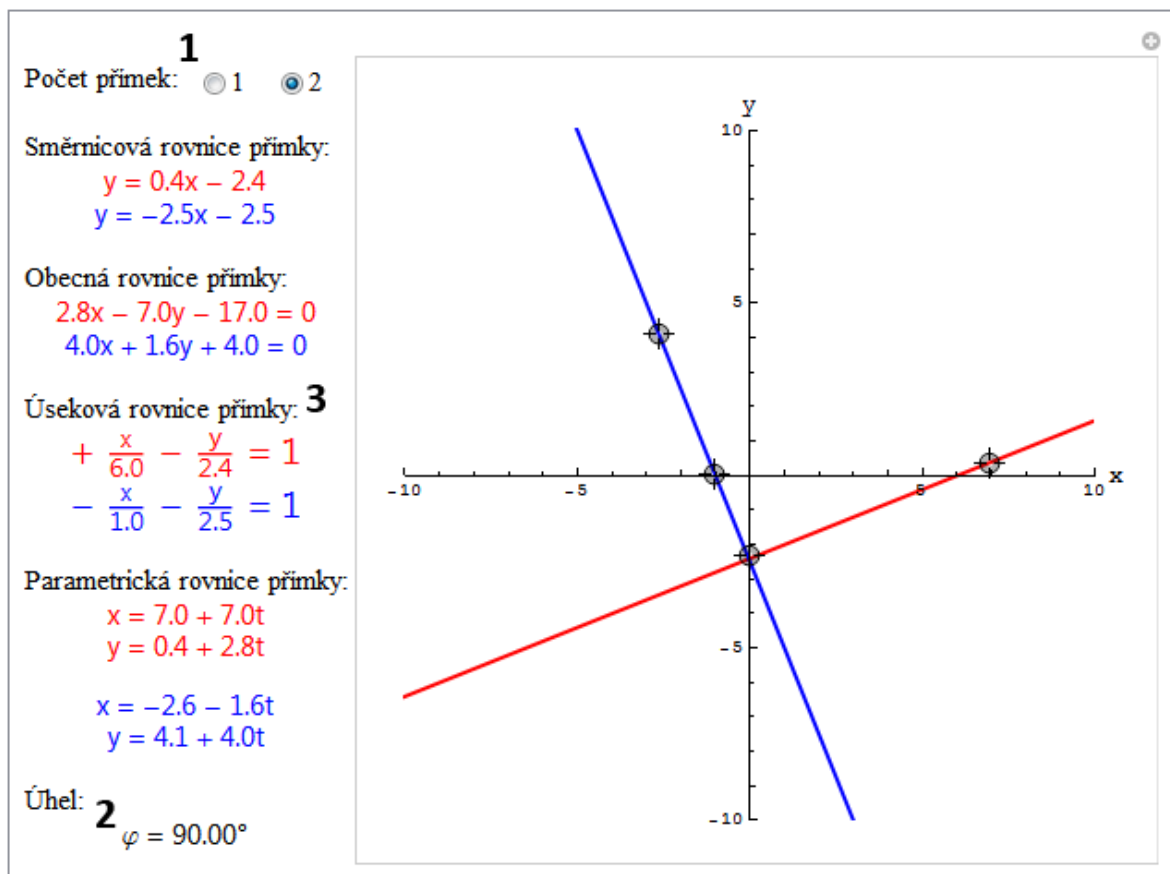


Obrázek 15 – modul Vektory

3.2 Lineární útvary

3.2.1 Přímka

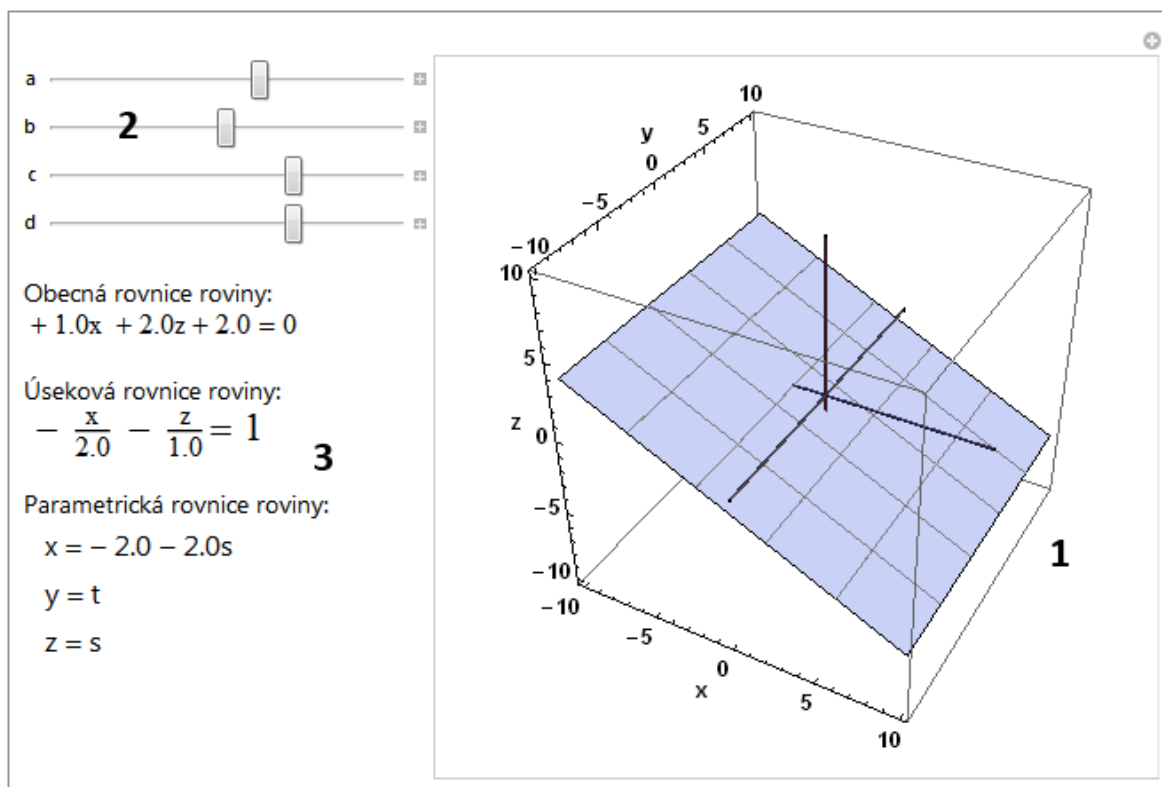
Tento modul je zaměřen na vykreslení přímek a zobrazení několika typů rovnic, kterými lze dané přímky popsat. Je možné zvolit, zda se mají zobrazovat dvě přímky nebo jen jedna (Obr. 16 – 1). V případě dvou přímek se ještě počítá jejich úhel (Obr. 16 – 2). Dále se vypisují až čtyři různé rovnice (Obr. 16 – 3), kterými lze zvolené přímky vyjádřit (v případě, že pro danou přímku rovnice neexistuje, je příslušné políčko prázdné). S oběma přímkami lze opět pohybovat a nastavit je do požadované polohy (nejde to však úplně libovolně – každá přímka má jeden bod pevně fixován na jednu souřadnicovou osu).



Obrázek 16 – modul Přímka

3.2.2 Rovina

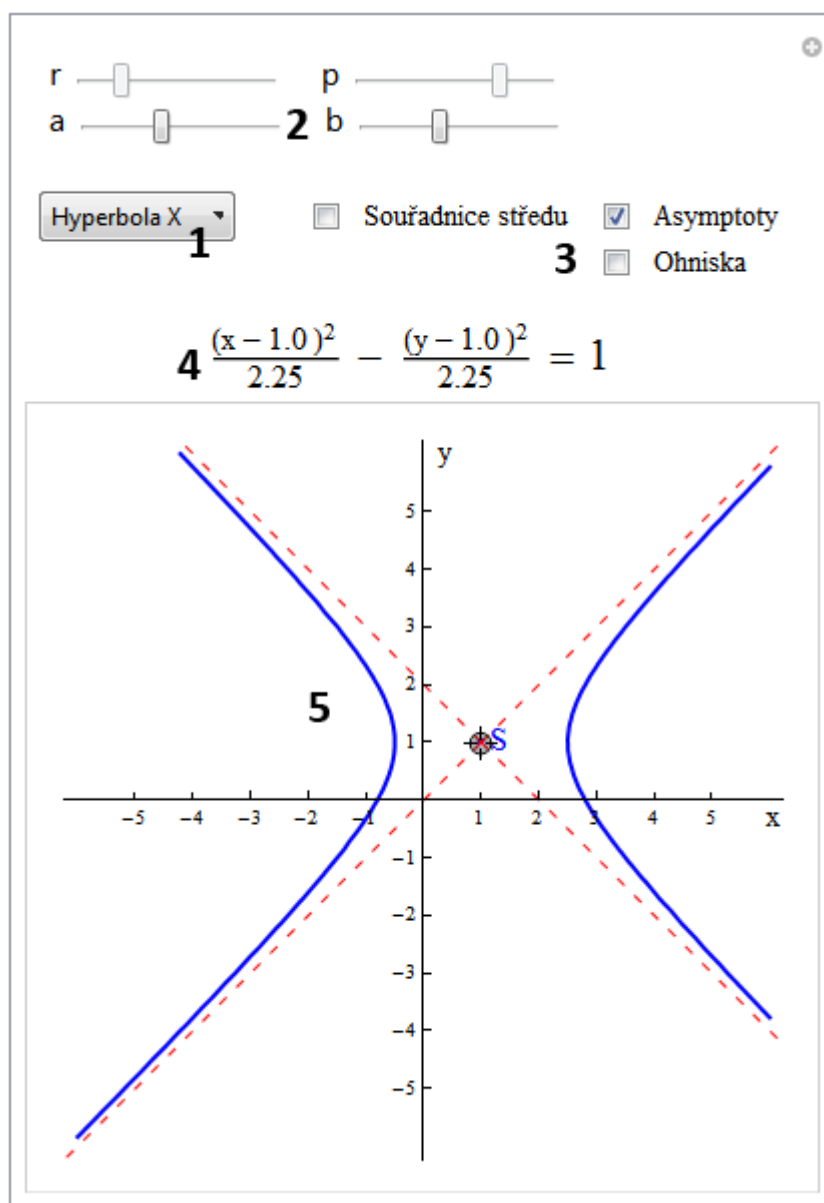
Následuje modul, který zobrazuje rovinu (Obr. 17 – 1). Tu je možné nastavit změnou koeficientů v obecné rovnici roviny pomocí skupiny posuvníků (Obr. 17 – 2). Dále se vypisují rovnice roviny (Obr. 17 – 3) - obecná, úseková a parametrická. V obrázku se pak zobrazují na doplnění souřadnicové osy a vykreslenou rovinu je možné libovolně natočit.



Obrázek 17 – modul Rovina

3.3 Kvadratické útvary

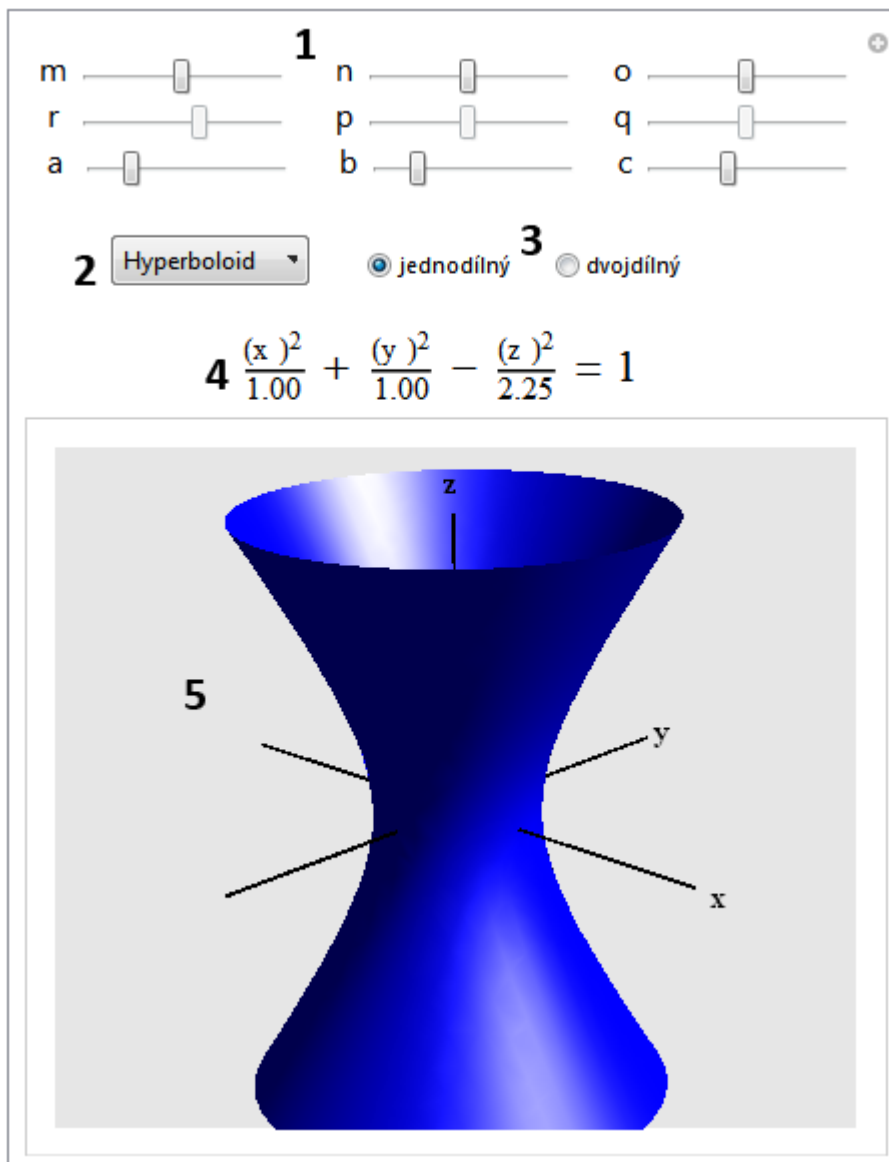
V tomto modulu si lze nechat vykreslit všechny (v teoretické části) zmíněné kuželosečky. Ty je možné vybrat z rozbalovacího menu (Obr. 18 – 1) a pomocí posuvníků jim upravovat příslušné parametry (Obr. 18 – 2) a přirozeně nelze např. u paraboly nastavovat poloměr. Dále je možno zobrazit doplňkové věci jako asymptoty, ohniska nebo souřadnice středu (Obr. 18 – 3). Ve zbytku modulu se pak vypisuje rovnice zvolené kuželosečky (Obr. 18 - 4) a vykresluje kuželosečka samotná (Obr. 18 – 5). Středem kuželosečky lze pohybovat.



Obrázek 18 – modul Kuželosečky

3.4 Kvadriky

Poslední modul je velmi podobný příkladu na kuželosečky. V horní části jsou také posuvníky pro měnění parametrů (Obr. 19 – 1), rozbalovací menu pro volbu požadované kvadriky (Obr. 19 – 2) plus případné další upřesnění typu (Obr. 19 – 3). Stejně se vypisuje také rovnice (Obr. 19 – 4) a vykresluje kvadrika samotná (Obr. 19 – 5) doplněná o souřadnicové osy. Celou scénu lze libovolně natočit.



Obrázek 19 – modul Kvadratické plochy

V některých modulech (přímka a vektory) se vyskytuje drobný nedostatek. Pokud modul obsahuje objekt Locator, tj. prvek, který lze uchopit myší a tažením jej přesunout (a typicky s ním také určitou část zobrazovaného objektu, např. počáteční bod vektoru) a ještě je možné část zobrazovaných geometrických objektů skrýt (např. zobrazovat pouze jeden vektor a druhý nechat skrytý), tak se tyto lokátory spolu s objektem neskryjí, ale zůstanou stále aktivní (např. zůstanou vykresleny dva body, ale přímka jimi určená se zobrazovat nebude). Na funkčnosti modulů to nic nemění, ale z estetického hlediska by bylo lepší, kdyby se tyto (v dané situaci) nepotřebné objekty nezobrazovaly. Po konzultaci tohoto problému s oficiální technickou podporou od Wolframu se dospělo k závěru, že jsou možné dva přístupy. Již popsany první způsob (lokátory zůstanou viditelné) nebo kód určitým způsobem přepsat a získat stav, kdy se sice lokátory při požadavku skryjí, ale zároveň vnesou do celého modulu nepříjemnou vlastnost – stanou se příliš citlivé na uchopení, tj. uživatel musí kliknout docela přesně, aby mohl s lokátorem pohybovat. V případě, že se netrefí a klikne vedle, tak se celý modul přepne do určitého editačního módu, ze kterého je třeba vyskočit dalším kliknutím mimo modul.

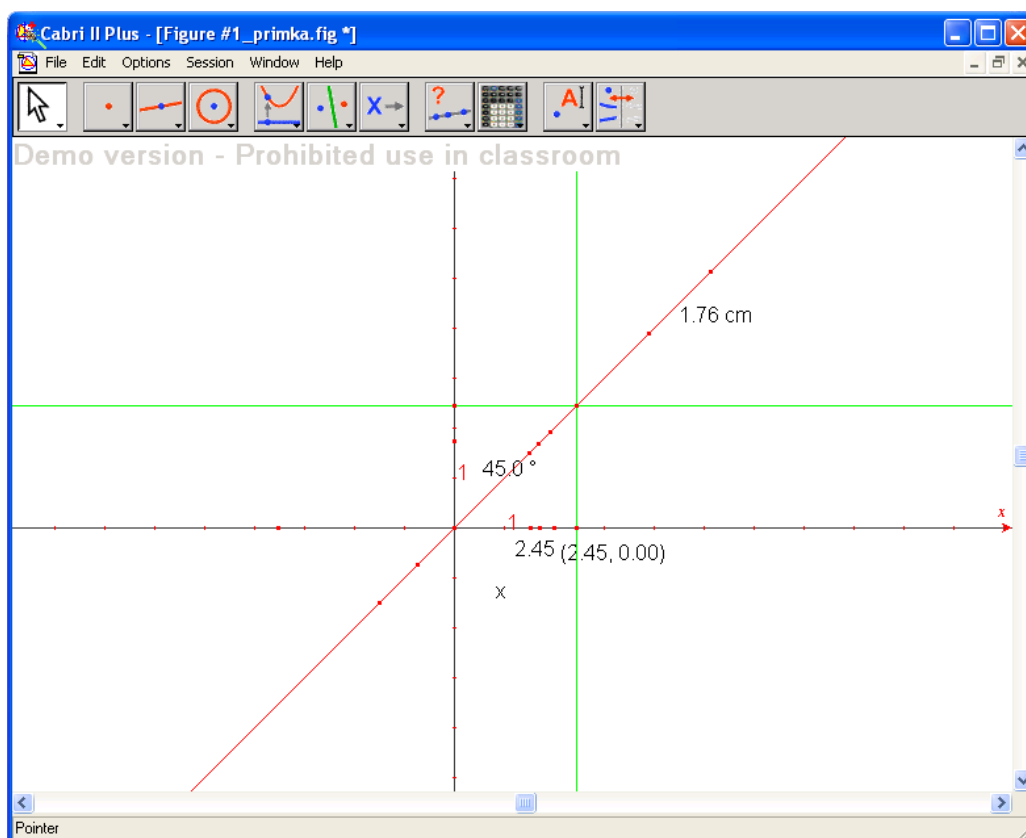
Jiná varianta není možná, proto bylo potřeba vybrat z těchto dvou alternativ tu schůdnější. Po testování obou byla nakonec zvolena ta původní (tj. ta, při které se lokátory neskryjí spolu s objektem, ale lze je zase bez problému ovládat) a to z toho důvodu, že je kladen velký důraz na pohodlné a jednoduché ovládání a není žádoucí, aby měl uživatel s ovládáním modulů (byť by to nebylo při každém pokusu) nějaké problémy.

4 POROVNÁNÍ

Tato kapitola stručně popisuje dva volně dostupné programy a hlavně je porovnává s vytvořenými příklady v této práci.

4.1 Cabri

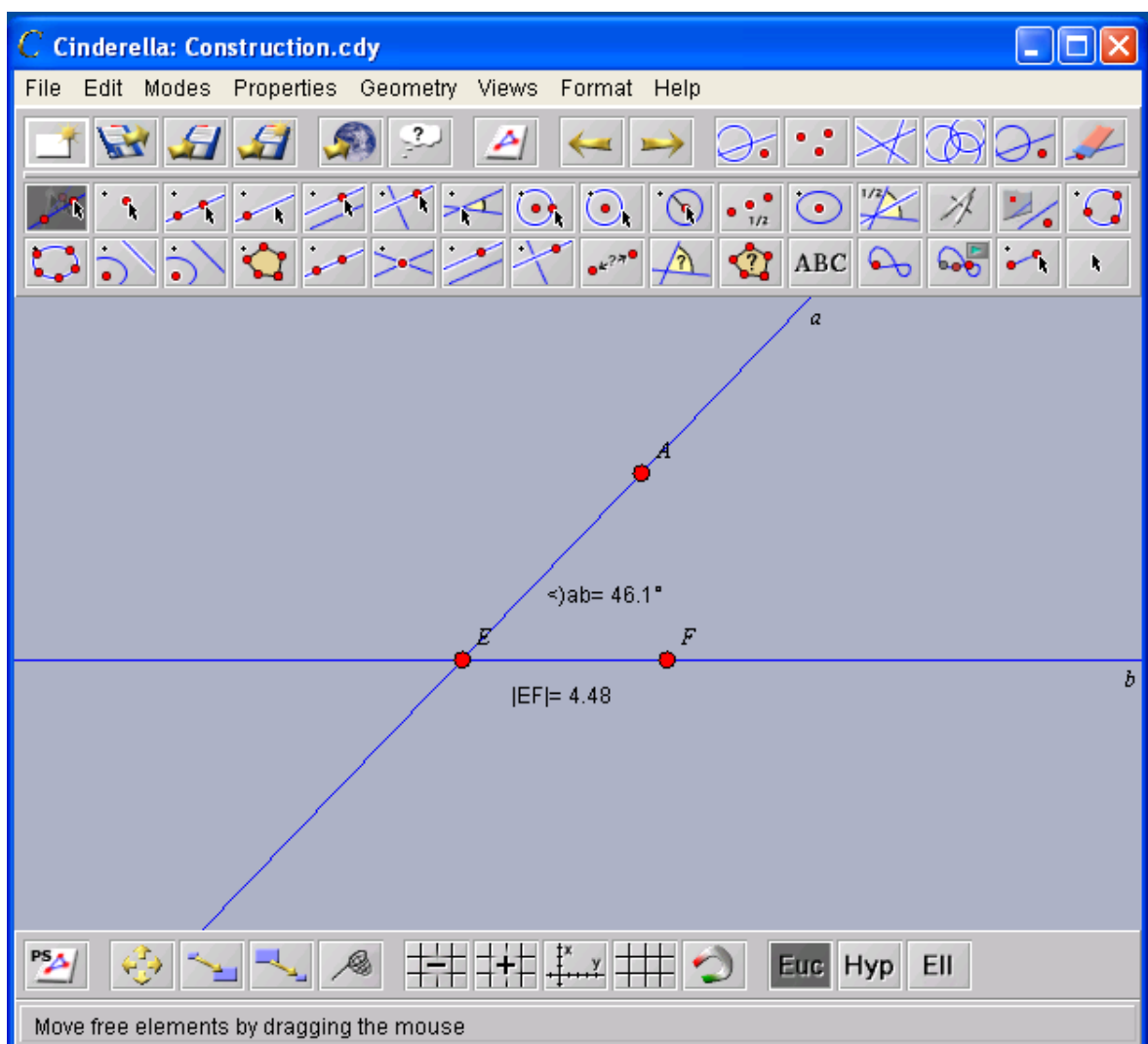
Prvním vyzkoušeným programem je Cabri, konkrétně Cabri II Plus v1.4.3 (pro stažení, popř. další informace, viz [9]). Prostředí (Obr. 20) je vcelku klasické – pracovní plocha, na kterou lze pomocí lišty nástrojů přidávat nejrůznější prvky a používat dostupné nástroje. Vkládání a kreslení objektů jako je např. kružnice nebo čára je poměrně intuitivní. Problém nastává, když chceme vykreslit nějakou funkci (nebo provést jiný složitější úkon). To je totiž i v případě jednoduché funkce (např. přímka) bez vyhledání přesného postupu velmi obtížné zvládnout. V tomto je největší minus tohoto programu – neintuitivita. Uživatel musí přesně znát postup pro požadovaný úkon, který se navíc dost liší od způsobů, které se používají v jiných rozšířených softwarech jako je např. Mathematica nebo MATLAB. Dále také není tak jednoduché kýžený postup najít, protože program není moc rozšířen. Cabri funguje v plné verzi prvních 30 dní zdarma, potom se přepne do omezeného režimu, kde nejsou dostupné (resp. jsou omezeny) některé funkce.



Obrázek 20 – Cabri

4.2 Cinderella

Tento program je v mnohém podobný výše zmíněné Cabri. Opět nabízí plochu, na kterou lze pomocí nejrůznějších nástrojů kreslit geometrické objekty (Obr. 21). Oproti Cabri je zde trochu větší intuitivita a uživatel zvládne bez nápovědy nakreslit nějaké základní prvky (přímku, kružnici) a použít několik jednoduchých nástrojů (měření délky, úhlu). Opět to však není dostatečné a pro složitější věci je nutné práci s programem nastudovat podrobněji. Cinderella je v základní verzi zdarma a lze zakoupit i verzi profesionální, která obsahuje pokročilejší nástroje. Pro další informace nebo stažení programu viz [10].



Obrázek 21 – Cinderella

4.3 Vlastní srovnání

Všechny interaktivní příklady vytvořené v rámci této práce mají jednu nevýhodu – pro jejich spuštění je třeba mít nainstalovaný software Wolfram Mathematica. Existuje sice pomůcka v podobě programu Wolfram Player, který umožňuje zobrazovat notebooky (.nb soubory) bez nutnosti mít nainstalovanu Mathematicu, ale bohužel tento software nedokáže zobrazit programy, které obsahují dynamický obsah (což je pro vytvořené moduly nedostatečné).

Naproti tomu základní a velice podstatná výhoda spočívá v jednoduchosti. Protože jsou moduly poměrně úzce zaměřeny na konkrétní tematiku, tak je lze intuitivně ovládat a vůbec práce s nimi je velmi jednoduchá. Na tento aspekt byl při jejich tvorbě kladen velký důraz – aby byl práci s příklady schopen každý, bez jakékoliv znalosti Mathematicy a aby bylo uživateli nabídnuto jednotné ovládání pro všechny moduly. Což je splněno - všechny moduly obsahují nějakou oblast, kde se vykreslují patřičné objekty, ovládací část, kde se pomocí posuvníků a podobných nástrojů mění parametry a nakonec část, která slouží pro vypisování rovnic a jiných doplňujících informací. Moduly jsou navíc nastaveny tak, že se po otevření samy spustí, obsahují stručný popis a zdrojový kód je skrytý, takže uživatel skutečně nepotřebuje znát (co se Mathematicy týče) vůbec nic. Ani docela neintuitivní zkratku pro spuštění kódu (SHIFT + ENTER).

To je veliký rozdíl oproti ostatním programům (Cabri, Cinderella), kde není prakticky možné bez určitého stupně znalostí rozumně pracovat. Ale to je dáno tím, že tyto softwary nejsou úzce zaměřeny na jednu problematiku, nýbrž nabízí celou škálu nástrojů a možností. Navíc mají odlišnou filozofii a způsob práce, než jiné rozšířené programy jako Mathematica, MATLAB nebo Maple. Jejich výhodou také je, že jsou dostupné víceméně zdarma.

ZÁVĚR

První část práce přehledně a názorně nastiňuje požadovanou problematiku z oblasti analytické geometrie. Definice pojmů a vztahů mezi nimi jsou doplněny o obrázky a text skutečně obsahuje pouze to, co je demonstrováno ve vytvořených modulech, protože hlavním cílem této práce není podrobný výklad teorie analytické geometrie.

Stejně tak není potřeba se zaměřovat na detailní popis funkcí, které byly při tvorbě modulů použity. U cílové skupiny této práce se totiž nepředpokládá znalost ani zájem o programování, proto je kapitola o použitých funkcích programu Wolfram Mathematica velmi stručná a slouží jenom pro základní orientaci.

Hlavním cílem práce totiž bylo vytvořit sadu interaktivních příkladů, které budou sloužit k demonstraci patřičné problematiky a jako doplnění výuky. Proto byl kladen velký důraz na přehlednost, jednoduché a intuitivní ovládání a vůbec pohodlnou a bezproblémovou práci s příklady. Jednotlivé moduly jsou navíc podrobně (včetně obrázku) popsány v jedné z kapitol této práce. Uživatel nemusí mít vůbec žádnou znalost programování ani softwaru Mathematica (pouze ho musí mít nainstalován), protože se moduly po otevření samy spustí, zdrojový kód je ve výchozím stavu skrytý a je přiložen stručný popis, co daný modul zobrazuje a jak jej ovládat. Toto ovládání je řešeno pomocí klasických ovládacích prvků, jako jsou posuvníky, rozbalovací menu, popř. body, které lze myší uchopit a přesunout na požadované místo, takže by uživatel skutečně neměl mít sebemenší problém s příklady pracovat.

Na konci jsou ve stručnosti zmíněny dva volně dostupné programy, které jsou zaměřeny na geometrii (Cabri, Cinderella). Ty jsou porovnány s interaktivními příklady vytvořenými v této práci a hlavní závěr z tohoto srovnání je ten, že vytvořené moduly jsou konkrétně zaměřené, mají jednotné a intuitivní ovládání, a proto jsou pro demonstraci dané látky mnohem lepší. Naproti tomu tyto speciální geometrické programy nabízejí podstatně více funkcí a možností, ale díky relativně složitému ovládání nejsou pro tyto účely vhodné. Je zde navíc docela odlišná filozofie a práce s programem, než na jakou může být uživatel zvyklý z programů jako MATLAB, Mathematica nebo Maple. Opravdu je potřeba celkem přesně znát postup, který je k provedení patřičného úkonu nutný. Navíc není ani jednoduché tento postup najít, protože výše zmíněné programy nejsou příliš rozšířeny.

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The first part of this thesis neatly and clearly outlines the desired part from the field of analytic geometry. Definitions of terms and relations between them are accompanied by pictures and the text actually contains only what is demonstrated in the created examples because detailed description of the theory of analytic geometry isn't the main goal of this work.

Nor is necessary to focus on punctual description of the functions that were used to create these examples. The target group of this thesis isn't supposed to have some programming skills or interest, so the chapter on Wolfram Mathematica program features is very brief and serves only for basic orientation.

The main goal was to create a set of interactive examples that will serve to demonstrate the appropriate issues and as a teaching supplement. There was placed a great emphasis on clarity, simple and intuitive control and comfortable and trouble-free work with the examples. Individual modules are also described in detail (including images) in one of the chapters. The user doesn't need to have knowledge of programming or software Mathematica (it must only be installed) because the modules start automatically (after opening), the source code is hidden by default and a brief description of what each module shows and how to control it is attached. This control uses conventional ways of control such as popup menus or drag-and-drop points (which can be grabbed with the mouse and moved to the desired location), so the user shouldn't really have a slightest problem with using these examples.

At the end there're briefly mentioned two programs which are focused on the geometry (Cabri, Cinderella). These are compared with interactive examples created in this work and the main conclusion from this comparison is that created modules are specifically targeted, intuitive to use and therefore much better for demonstrating given issues. On the other hand, the special geometric programs offer much more features and options but due to the relatively complex control are not suitable for this purpose. Moreover, there's quite a different philosophy and way of work with the programs than what the user could be used to from programs like MATLAB, Mathematica or Maple. One really needs to know the exact procedure which is required to perform a desired operation. In addition, this procedure isn't that easy to find because the programs mentioned above aren't widespread.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] VOSSLER, Donald E., *Exploring Analytic Geometry with Mathematica*. Academic Press: 1999. 865 s. ISBN: 0-12-728255-6
- [2] ZEDNÍK, Josef. *Lineární algebra zaměřená na geometrii a ekonomii*. Zlín: UTB FT, 2003. 130 s. ISBN 80-7318-085-5
- [3] ŠINDELÁŘ, Karel. *Analytická geometrie pro začátečníky*. Praha SNTL, 1969. 240 s.
- [4] NOVÁK, Ludvík. *Algebra a geometrie*. Zlín: UTB FT, 2005. 126 s. ISBN 80-7318-366-8
- [5] *MATEMATIKA online - Analytická geometrie* [online]. VUT Brno. Dostupné z WWW: <<http://math.fme.vutbr.cz/Analyticka-geometrie/sc-17-sr-1-a-35/default.aspx>>
- [6] ŘÍHOVÁ, Helena. *Kuželosečky* [online]. 2006 [cit. 2011-03-27]. Dostupné z WWW: <<http://dagles.klenot.cz/rihova/kuzelosecky.pdf>>.
- [7] VOJÁČEK, Jakub. *Matematika pro každého : Matematika on-line* [online]. 24.05.2008 [cit. 2011-03-27]. Analytická geometrie. Dostupné z WWW: <<http://maths.cz/clanky/analyticka-geometrie-uvod.html>>.
- [8] *Wolfram Mathematica* [online]. 2011 [cit. 2011-04-01]. Wolfram Mathematica Documentation Center. Dostupné z WWW: <<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>>.
- [9] *Cabri II Plus : Plane geometry software Cabri II Plus* [online]. 2009 [cit. 2011-04-08]. Cabri II Plus - Dive into the Plane. Dostupné z WWW: <<http://www.cabri.com/cabri-2-plus.html>>.
- [10] *Cinderella* [online]. 2009 [cit. 2011-04-08]. The Interactive Geometry Software Cinderella. Dostupné z WWW: <<http://www.cinderella.de/tiki-index.php>>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 – kartézská soustava souřadnic	11
Obrázek 2 – dva body v rovině	12
Obrázek 3 – doplnění na pravoúhlý trojúhelník	12
Obrázek 4 – orientované úsečky	13
Obrázek 5 – sčítání vektorů	14
Obrázek 6 – násobení vektoru číslem	14
Obrázek 7 – směrový vektor přímky	15
Obrázek 8 – rovina.....	16
Obrázek 9 – kuželosečky	17
Obrázek 10 – elipsa.....	18
Obrázek 11 – hyperbola.....	19
Obrázek 12 – parabola	20
Obrázek 13 – přehled kvadrik.....	21
Obrázek 14 – modul Body	27
Obrázek 15 – modul Vektory.....	28
Obrázek 16 – modul Přímka	29
Obrázek 17 – modul Rovina	30
Obrázek 18 – modul Kuželosečky	31
Obrázek 19 – modul Kvadratické plochy	32
Obrázek 20 – Cabri	34
Obrázek 21 – Cinderella	35

SEZNAM PŘÍLOH

Zdrojové kódy všech vytvořených modulů (na CD).